CUADERNOS SALMANTINOS DE FILOSOFÍA
Vol. 43, 2016, 89-105, ISSN: 0210-4857

EL PLATONISMO NUMÉRICO EN GÖTLOB FREGE: UNA APROXIMACIÓN A SU FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

THE NUMERICAL PLATONISM IN GOTLOB FREGE: AN APPROACH HIS PHILOSOPHY OF MATHEMATIC

Raúl Francisco Sebastián Solanes
Doctor Internacional en Filosofía
Doctor Europeo en Sociología
Investigador
Departamento de Filosofía del Derecho, Moral y Política
Universidad de Valencia
Valencia/España
Real Colegio de España en Bolonia
Bolonia/Italia
Raul.Sebastian@uv.es

Recibido: 3/02/2016
Revisado: 1/08/2016
Aceptado: 7/10/2016

Resumen: En el presente artículo intentaré abordar los principales presupuestos de la filosofía de la matemática defendida por Götlob Frege que enlazan con su proyecto "logicista". Veré cómo desde su propuesta la aritmética se fundamenta en una base lógica y cómo esto tiene consecuencias en la naturaleza del concepto de número.

En la segunda parte me centraré en la influencia que ejerce el pensamiento de Platón en la obra de Frege que se evidencia en tres dimensiones de su pensamiento.

Palabras clave: Götlob Frege, filosofía de la matemática, número, Platonismo.

Abstract: In this article I will try to address the main assumptions of the philosophy of mathematics defended by Gotlob Frege linking to its "logicist" project. I will demonstrate that the proposal from the arithmetic is based on a logical basis and its importance for the nature of the concept of number.

In the second part I will focus on the influence of Plato's thought in the work of Frege which is evident in three dimensions of his philosophical thought.

Keywords: Gotlob Frege, philosophy of mathematics, number, Platonism.

Universidad Pontificia de Salamanca

INTRODUCCIÓN

En el presente artículo he procurado destacar algunos de los rasgos fundamentales de la filosofía de la matemática de Götlob Frege expuestos en su obra *Fundamentos de la aritmética*. Recordemos que según expone nuestro filósofo y matemático, la aritmética (a diferencia de lo que había sostenido Kant) tiene la misma naturaleza que la lógica. En efecto, la aritmética es analítica y *a priori*, esto llevará a Frege a fundamentar la aritmética desde la lógica tal y como propone su revolucionario proyecto logicista. Mi intención en el presente texto es centrarme más bien en la naturaleza de los números desde este proyecto logicista para luego intentar ver como en el pensamiento fregeriano se aprecia la influencia del pensamiento platónico.

Aunque La doctrina logicista tuvo su primer antecedente en Gottfried Leibniz. Debemos aceptar que el primer intento serio y detallado de reducir la matemática a la lógica tuvo que esperar hasta el siglo XIX, cuando algunos autores tales como Richard Dedekind, Georg Cantor y Giuseppe Peano articularon los principios básicos de la lógica matemática[1]. Aunque será Götlob Frege quien ha despuntado como el padre del logicismo moderno y el responsable de esta importante revolución logicista que afecta a la matemática y a la aritmética, especialmente a nuestra concepción de la naturaleza de los números.

Para llevar a cabo mi propósito se hace indispensable exponer las críticas de las otras propuestas vigentes en su época tales como el psicologismo,el formalismo o el empirismo, destacando cual es la apuesta de una filosofía de la matemática según Frege y analizando lo que este filósofo entiende por el concepto de número. Como ya he dicho intentaré mostrar cómo su particular filosofía de la matemática está muy influida por el pensamiento platónico, sobre todo en lo que respecta a la naturaleza objetiva de los números. Se hace necesario exponer la relación con su obra posterior titulada *Sobre sentido y referencia*, pues nos parece que cuando Frege escribió *Fundamentos de la aritmética* ya tenía en mente algunas de las ideas semánticas que después aparecerán en su filosofía del lenguaje.

1 HORSTEN, Leon. "Philosophy of Mathematics". En ZALTA Edward N. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008.

Universidad Pontificia de Salamanca

1. GÖTLOB FREGE: EL CREPÚSCULO LOGICISTA DE UNA FILOSOFÍA DE LA MATEMÁTICA

Antes de iniciar mi propósito cabe destacar algunos de los principales rasgos biográficos de la singular personalidad de Götlob Frege, quien destaca por ser uno de los filósofos más innovadores de finales del siglo XIX y principios del XX pese a que su obra no fuera bien comprendida por buena parte de la comunidad científica de su tiempo. Götlob Frege nace en Wismar en 1848 y muere en Bad Kleinen en 1925, pasó toda su vida académica en la relativa oscuridad del departamento de matemáticas de la Universidad de Jena (Alemania), incomprendido por la academia y sin el reconocimiento oficial que le llegaría tras su muerte. Frege inaugura el campo de la lógica y la semántica moderna y por ello se le considera padre de estas nuevas disciplinas, ampliando lo ya iniciado por importantes pensadores como Richard Dedekind, Georg Cantor y Giuseppe Peano.

Ya en su primer libro titulado *Ideografía* introduce Frege la notación de variables cuantificadas y de los cuantificadores característica de la lógica actual. Pero es en su segundo libro titulado *Fundamentos de la aritmética* publicado en 1884, donde Frege funda la filosofía de la matemática en sentido moderno. Proponiendo entre sus páginas todos los principios del programa logicista. En otros escritos posteriores como *Sobre sentido y referencia* de 1892, desarrolla las distinciones semánticas que le convierten en el padre de la filosofía del lenguaje moderna.

Como señala Anthony Kenny casi la mitad de los *Fundamentos de la aritmética* está dedicada principalmente a discutir y refutar las opiniones de otros filósofos y matemáticos como son Inmanuel Kant, J. Stuart Mill, Shöeder o Boole. El motivo es que Frege ve que estos filósofos y matemáticos se han preocupado de ampliar el edificio de los números sin dotarlo de un fundamento lógico fuerte. Frege apuesta por un proyecto logicista en donde la lógica sea el fundamento tanto de la geometría como de la aritmética[2].

Su propuesta innovadora le hace separarse de muchas de las corrientes intelectuales vigentes en su momento. Frege se encuentra en un contexto dominado por el psicologismo que sostiene que los números son creaciones de la mente humana y que las demostraciones de los enunciados aritméticos son meras descripciones de enunciados psíquicos. Frente a esta tendencia del psicologismo nuestro filósofo sostiene firmemente su creencia en la objetividad de la matemática, que viene a ser la misma objetividad que posee el sentido que acompaña a los signos lingüísticos en semántica y que hace que algunos autores hablen de cierto platonismo en su filosofía como intentaré abordar más adelante.

2 KENNY, Anthony, *Introducción a Frege*. Madrid: Cátedra Colección teorema, 1997, 77.

Universidad Pontificia de Salamanca

En primer lugar, Frege quiere distanciarse del psicologismo, reconociendo que puede resultar útil examinar las imágenes que aparecen en el pensamiento matemático, pero la psicología no puede en ningún caso facilitar la fundamentación de la aritmética. En segundo lugar, toma distancia con el formalismo que sostiene que los números son meros signos, es decir, que los números no son más que los signos visibles que plasmamos sobre un papel o la pizarra. Frege distinguirá claramente entre el signo y lo designado, es decir, entre el sentido de un signo y su referencia semántica. Al principio de su obra *Sobre sentido y referencia*, deja claro como el sentido del signo viene a ser el significado inmanente que acompaña a todo signo y por tanto corresponde a lo que le constituye y puede tener o no un referente, a saber, una designación[3]. Del mismo modo entiende Frege que un signo, como por ejemplo el nombre propio "Aristóteles", puede tener varios sentidos como son: "el maestro de Alejandro Magno", "el Estagirita", "el discípulo de Platón", aunque tenga solo una designación o referencia. El matemático no puede crear cualquier cosa como pretende los partidarios de las corrientes psicologistas, pues al igual que el geógrafo el matemático solo puede descubrir lo que hay y darle un nombre[4]. De este modo Frege afirmará que el conocimiento no produce lo conocido, sino que agarra algo que ya existe[5]. Frente a los partidarios de la corriente empirista que mantienen que los números son dados en la experiencia y que las leyes de la aritmética son generalizaciones empíricas basadas en la inducción, Frege sostiene que los números son dados a la razón y que por ello son objetos lógicos, de lo que se sigue la consecuencia de que tanto las leyes de la aritmética como las leyes de la lógica son "Leyes de naturaleza" y objetivas.

Frege está dejando abierta la puerta al logicismo al considerar que la base de la aritmética es la lógica y por tanto los fundamentos de la aritmética no pueden tener una base psicológica o empírica, sino que debe ser lógica. Por este motivo, dirá en *Leyes fundamentales de la aritmética*, que la aritmética no es más que lógica desarrollada. Esto resulta evidente cuando al descomponer los diversos pasos que hemos dado en pasos lógicos simples, nos percatamos de que en la base de la aritmética no hay sino lógica[6].

3 FREGE, Götlob, *Sobre sentido y referencia*. En VALDES, J.L. *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos, 1991, 25

4 FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*. En *Escritos filosóficos*. Madrid: Critica, 1996,135

5 FREGE, Götlob, "Prólogo". En *Leyes fundamentales de la aritmética*. En *Estudios sobre semántica*. Barcelona: Laia, 1973, 153.

6 *Ibíd*., pp. 124-125.

Universidad Pontificia de Salamanca

2. NATURALEZA DEL NÚMERO EN LA FILOSOFÍA DE FREGE

Que el número no puede tener una naturaleza subjetiva, ya queda ejemplificado en los *Fundamentos de la Aritmética* poniendo como ejemplo de la objetividad del nombre: "mar del Norte". En efecto, ésta no depende del arbitrio de ningún sujeto y por ello la extensión de agua que cubre una parte de la superficie terrestre y que se conoce con el nombre de "mar del Norte" no es razón suficiente para estudiar este mar por vía de la psicología, dado que su objetividad rebasa cualquier estudio psicológico o subjetivo que se haga del "mar del Norte" y lo mismo ocurre con el número[7]. Entiende Frege que cuando decimos que el "mar del Norte tiene 10000 millas" no nos estamos refiriendo, tanto en el caso que estamos utilizando la expresión "mar del Norte" o la expresión "10000 millas", a un proceso que se produce en el interior de un sujeto, sino que nos referíamos a algo totalmente objetivo. Añade Frege que si el número fuera una imagen subjetiva entonces la aritmética seria psicología, pero dada la objetividad de la naturaleza del número, éste no puede ser una imagen y por ello la aritmética no puede ser psicología del mismo modo que tampoco lo es la geografía o la astronomía[8].

Frege establece una clara distinción entre "lo objetivo", "lo real" y "lo espacial o palpable" entendiendo que lo real afecta a los sentidos mientras que lo objetivo no tiene por qué afectar a los sentidos y su existencia es independiente de éstos. Es importante tener presente esta distinción pues es la clave no sólo de la filosofía de la matemática de Frege, sino de todo su pensamiento y de su apuesta por el proyecto logicista.

Frege está marcando en este punto una clara ruptura epocal, pues ya no se trata de una aritmética "a secas", sino que se trata de una aritmética cuyos fundamentos tienen una base lógica y no meramente psicológica, formal o empírica. Por ello Frege se está situando fuera de una tradición y está abriendo una brecha en la forma de entender la filosofía en donde el nuevo saber filosófico debe ir de la mano de la lógica y es por ello que Frege se ha ganado con creces el nombre de "padre de la lógica y la semántica moderna" pues ha impulsado un programa logicista del todo innovador.

7 FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*, 69.
8 *Ibíd*., p. 72.

Universidad Pontificia de Salamanca

3. EL CONCEPTO DE NÚMERO EN FREGE

A lo largo y ancho de su obra *Conceptografía* Frege expresa la importancia que tiene para el proyecto logicista el dejar bien asentada la definición de lo que entendemos por concepto. Como nos aclara al respecto Jesús Alcolea, Frege expone su definición de número en términos de extensión y por ello lo que contiene un enunciado numérico, a saber, la oración que asigna un número definido a un conjunto de objetos es una aserción acerca de un concepto[9]. Parece inevitable una vez alcanzado este punto el detenernos a ver qué es lo que sucede con el "número cero", pues parece que dentro de él no cae ningún objeto y por ello surge la cuestión de ver si el "número cero" es o no un número. En *Fundamentos de la aritmética* cree que es natural definir que a un concepto le corresponde el "número cero" cuando ningún objeto cae sobre él, pero el problema viene dado en el "ningún", pues puede parecer que está reemplazando al "número cero", por ello entiende que es correcto decir que el "número cero" es aquel que dado un objeto cualesquiera "a" hace que sea válido el enunciado de que el objeto "a" no corresponde al concepto cero[10]. Según Frege el cero es un número natural, pues de lo contrario no podríamos dar cuenta de las proposiciones del tipo "Venus tiene cero lunas", pues resulta evidente en este caso que ser "luna de Venus" es una expresión sobre el que no cae nada, pero sin embargo el cero sigue siendo un número, pues todo número natural para Frege es algo puramente lógico. En el caso el "número 1" se trataría de un concepto al que podríamos llamar "F" y correspondería decir que no vale en general que el objeto "a" o no le corresponde el concepto "F" ("número 1"). En opinión de Frege, el concepto "F" también le corresponde el objeto "b", luego para Frege tanto "a" y " b" tienen la misma extensión pues están apuntando a la misma cosa. En definitiva el concepto "F" o lo que es lo mismo el "número 1" será el concepto al que corresponde los objetos "a" y "b".[11] Sin que el número sea considerado como una propiedad de concepto.

En su obra posterior de *Estudios sobre semántica* Frege dirá que si un objeto cualesquiera le corresponde un concepto dado, entonces cae bajo todos los conceptos de la misma extensión[12]. De las dos posibilidades de aplicar un concepto Frege se inclina por la lógica entendiendo concepto como algo predicativo, es decir, que se predica de los objetos que le corresponden y que poseen la misma extensión[13].

9 ALCOLEA, Jesús, "100 años de *Los fundamentos de la aritmética* de Götlob Frege". *Quaderns de filosofía y ciencia*, 5-6, 1984, 82.

10 FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*, 98.

11 *Ibíd*., p. 99.

12 FREGE, Götlob, *Estudios sobre semántica*. En *Escritos filosóficos*. Madrid: Critica, 1996, 199.

13 *Ibíd*., pp. 207-208.

Universidad Pontificia de Salamanca

En la introducción a *Fundamentos de la aritmética* Frege destaca que la pregunta por lo que es el "número 1", suele ir acompañada de la respuesta de que el "número 1" es una cosa sin que se especifique qué tipo de cosa es[14].Ya hemos dicho que el número no puede ser una imagen subjetiva dada su naturaleza objetiva, del mismo modo que tampoco puede ser la imagen del lugar de un objeto como apunta Schloemilch, pues como decíamos si la aritmética se centrara en los números como imágenes subjetivas, no podría ser lógica sino más bien seria psicología algo que para Frege es inconcebible. Por esta razón cree que la objetividad característica del número no puede radicar en las impresiones sensoriales o en las imágenes que se forman de un determinado número en los sujetos, pues resulta evidente que las imágenes mentales no pueden ser iguales en uno y otro sujeto y por ello su fundamento debe radicar en la razón. La naturaleza del número no puede ver con las emociones, los sentimientos, intuiciones, ni con el estado de ánimo psicológico, pues como bien sostiene Ignacio Morgado, los sentimientos doblegan la mente[15]. Las emociones son como el fuego que energiza los moldes y mecanismos cerebrales haciendo que las memorias resultantes sean igualmente indelebles[16]. La misma matemática o el número en la concepción filosófica de Frege guardan una objetividad propia de su naturaleza que trasciende la misma subjetividad de los seres humanos y de las emociones humanas que en nada pueden variar la naturaleza objetiva de los números y la matemática.

En efecto, tampoco un número puede ser propiedad de un concepto y por eso en los *Fundamentos de la aritmética* Frege afirma textualmente[17]:*Por eso he evitado llamar a un número como 1 y 2, propiedad de un concepto*. En consecuencia el número aparece como un objeto autónomo, entendiendo que esta autonomía ya aparece reflejada en la aritmética que como ya he dicho tiene la misma naturaleza que la lógica.

Para aclarar más su posición respecto a lo que él entiende por número recurre a un elocuente ejemplo que plasma en su *Fundamentos de la aritmética*. El ejemplo que utiliza Frege es el del enunciado "Júpiter tiene cuatro lunas" que podría transformarse en el enunciado "el número de lunas de Júpiter es cuatro". En ambos enunciados se corresponden al término "cuatro", es decir, tienen la misma extensión solo que los dos primeros serian dos enunciados complejos cuyo sentido o significado viene determinado por el sentido de los términos más simples que los forman, mientras que el segundo caso se trata de un término simple[18]. Frege

14 FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*, 32.

15 MORGADO, Ignacio. *Emociones e inteligencia social: Las claves para una alianza entre los sentimientos y la razón*, Barcelona: Ariel, 2010, 72.

16 *Ibíd*., pp. 93-94.

17 FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*, 100.

18 FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*, 58-61.

Universidad Pontificia de Salamanca

entiende que podría objetarse el que no tengamos imágenes visibles del término al que llamamos "cuatro" o "4", o bien que no tenemos imágenes de las lunas de Júpiter. Pero dada la objetividad y autonomía de la naturaleza propia de los números naturales, a Frege le da lo mismo que tengamos o no una imagen subjetiva del mismo, pues cualquier número natural existe con independencia de las imágenes subjetivas que los sujetos se formen de él.

El caso anterior del "número 4" o de cualquier otro número, evidencia que éstos no están ni fuera ni dentro de nosotros mismos, pues no tiene sentido una determinación local del número, dado que no se trata de un objeto espacial. De modo que resulta irrelevante que un número tenga o no extensión física para que éste siga existiendo. Pero el hecho de que sea irrelevante la ubicación del "número 4" o de otros números, ello no impide que éstos sean exactamente los mismos para cualquier sujetos que se decida a estudiarlos[19].

4. LOS FUNDAMENTOS DE LA ARITMÉTICA Y SOBRE SENTIDO Y REFERENCIA

Llegados a este punto del presente trabajo acerca de la naturaleza del número en la obra de Frege *Fundamentos de la aritmética* de 1884, me parece ver reflejadas algunas de las ideas que nuestro filósofo expondrá en su obra *Sobre sentido y referencia* de 1892. En efecto, parece que en *Fundamentos de la aritmética* pululan de forma implícita algunas de las ideas centrales que asoman fulguradas en *Sobre sentido y referencia* y que consagraron a Frege como padre de la semántica moderna. Para justificar esta sospecha recurriré a exponer algunos de los argumentos que aparecen en *Sobre sentido y referencia* y que nos recuerdan a otros que Frege expone con respecto a la naturaleza del número en *Fundamentos de la aritmética*.

En *Sobre sentido y referencia* Frege aborda, entre otras cuestiones, el tema de ver cuál es el sentido o significado, así como la referencia o extensión de un signo o de los nombres propios, entendiendo por nombre propio cualquier designación que representa a dicho nombre. El sentido de un nombre propio lo comprende cualquier usuario del lenguaje que esté familiarizado con el mismo junto con el conjunto de designaciones al que pertenece. Un nombre propio puede tener más de un sentido o significado aunque éste tenga la misma referencia. Si tomamos como ejemplo el nombre "Aristóteles" puede tener varios sentidos como es "el maestro de Alejandro Magno", "el Estagirita" aunque todos ellos se refieran

19 *Ibíd*., p. 61.

Universidad Pontificia de Salamanca

al mismo personaje[20]. Existe por tanto una conexión regular entre el signo, su sentido y su referencia.

Pero mientras que todo signo va siempre acompañado de uno o más sentidos, pues el sentido es según Frege algo inmanente al signo, o en palabras de Frege[21]: *en el cual se halla contenido el modo de darse*. Sin embargo, el signo puede o no tener referencia ya que ésta no es un requisito indispensable a la hora de determinar el significado de un signo. El sentido en tanto que constitutivo del signo e inmanente a éste, es el significado mismo del signo lingüístico y por ello todo signo está acompañado de uno o más sentidos con independencia de que tenga o no una referencia.

Para Frege la referencia de un signo (en el caso de que la tenga), es un objeto sensiblemente perceptible y las representación que un sujeto puede hacerse de ésta equivale a una imagen mental interna que normalmente se ha formado a partir de recuerdos e impresiones sensibles que suelen ir impregnadas de sentimientos[22]. Estas representaciones son subjetivas y por tanto un sujeto no puede tener la misma representación o imagen mental, del mismo modo que tampoco pueden tener la misma imagen mental del "número 4", como ya hemos expuesto, de modo que son múltiples las diferencias halladas del mismo sentido. Frege pone por ejemplo el caso del jinete, el pintor y el zoólogo, que posiblemente asocien representaciones distintas al nombre Bucéfalo.

Por este motivo Frege cree necesario una separación tajante entre sentido y referencia. En efecto, mientras que el sentido puede ser una propiedad común para muchos, dado su carácter objetivo, en el caso de la referencia vemos que no ocurre así. Del mismo modo que el "número 4" o cualquier otro número natural no está sometido a ninguna extensión local y física ya sea interna (imagen mental subjetiva) o externa, dada su objetividad y autonomía. Tampoco el signo lingüístico está sometido a la extensión o referencia ya sea interna o externa, pues lo que da significado al signo no es la extensión, sino el sentido. Es en este punto donde Bertrand Russell deferirá de la postura de Frege, pues considerará en su obra *The principles of mathemathics* que el significado del signo está en la referencia, es decir, en lo designado. Posteriormente, Russell se percatará de que hay expresiones como "el rey de Francia es calvo", que carecen de referencia y por tanto no tendrían significado si aceptamos que la referencia es el significado de las signos y es por ello que rectificará en su obra *On the nothing*.

20 FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*, 25.
21 *Ibíd*., p. 25.
22 *Ibíd*., p. 27.

Universidad Pontificia de Salamanca

Como hemos indicado, en los *Fundamentos de la aritmética* Frege alude al ejemplo del enunciado "número cuatro" que equivale al término "cuatro" o "4". En *Sobre sentido y referencia* expone otros ejemplos en donde intenta abordar cuestiones similares a las expuestas en los *Fundamentos de la aritmética* sólo que ahora aparecen centradas no en la naturaleza del número, sino en la naturaleza del signo. Por este motivo me inclino a pensar que en los *Fundamento de la aritmética* ya pululan en la mente de Frege algunos de los principios expuestos en *Sobre sentido y referencia*.

Para asentar bien las diferencias existentes entre sentido y referencia Frege recurre al ejemplo de la luna que es observada a través de un telescopio[23]. La luna que es el objeto de la observación se compara con la referencia, de forma que la observación de este fenómeno produce dos tipos de imágenes. La primera imagen es la que queda reflejada en el cristal del objetivo del interior del telescopio, la segunda imagen es la imagen mental subjetiva que se refleja en la retina de cualquier observador. La primera imagen pese a ser parcial y estar determinada por el lugar de observación, es objetiva y por tanto puede ser observada por cualquier sujeto de observación en condiciones normales, y dada su objetividad no depende de estos sujetos y seguirá existiendo aunque los sujetos que la observan dejen de existir, mientras que la segunda imagen será subjetiva pues la imagen que se forma en la retina de un observador o en su mente no puede ser igual a la que se forma en la de otro observador. La primera imagen ejemplifica el carácter objetivo e independiente del sentido, mientras que la segunda imagen, debido a su naturaleza subjetiva, ejemplifica la representación y dado su carácter subjetivo su existencia dependerá del sujeto de observación que la posee. De este modo esta imagen dejará de existir en el momento preciso en el que sujeto deje de existir, esto no ocurre con la primera imagen que dada su objetividad seguirá existiendo aunque el sujeto en cuestión deje de estar.

Del mismo modo el "número 4" o cualquier otro número natural seguirá existiendo aunque dejen de existir lo sujetos que lo perciban o lo utilicen, puesto que al igual que el sentido posee una naturaleza objetiva e independiente, pues no está sometido a ningún lugar y puede ser captado por cualquier sujeto sin que ello altere su naturaleza, también el número posee una naturaleza objetiva.

23 FREGE, Götlob, *Sobre sentido y referencia*, 28.

Universidad Pontificia de Salamanca

5. PLATÓN Y FREGE: ¿EL PLATONISMO DE FREGE?

5.1. La filosofía de la matemática de Platón: Rasgos generales

Es notoria la importancia que los griegos dieron a la matemática, no sólo Pitágoras y su misteriosa escuela pitagórica, sino también Platón y Aristóteles evidencian la preocupación filosófica por las matemáticas y la naturaleza de los números. Carlos Mínguez señala muy oportunamente que al margen de la interpretación histórica sobre la vinculación de la matemática y la filosofía, los juicios que en el Renacimiento emite el filósofo y humanista Juan Luís Vives encierran gran interés para aproximarnos a esta relación. En efecto, Mínguez señala que para Vives tanto Platón como Aristóteles toman "argumentos evidentísimos" a partir de las matemáticas, tanto para tratar cuestiones de la física como morales[24].

Cuando Platón desarrolla la denominada "alegoría de la línea" en el Libro VI de la *República* establece una distinción entre el ámbito sensible o visible en donde reside la opinión y el ámbito inteligible o mundo de las ideas o formas[25]. En el ámbito inteligible Platón sitúa a la "noesis" cuyos objetos son las ideas como realidades trascendentes, y también se encuentra la "dianoia" que se encarga de los objetos matemáticos.

Los objetos matemáticos, sean números o figuras geométricas, se nos ofrecen según Platón como entidades intermedias entre las formas y los objetos sensibles y por ello, aclara Ross en su obra *Teoría de las ideas de Platón*, que los objetos matemáticos al igual que las ideas, son inmutables pero plurales como las partículas correspondientes a las ideas[26]. Para los griegos del período clásico los números connotan pluralidad de tal manera que no admiten que el número sea concebido con simplicidad, pues se trata del primer principio del número y por ello no es de extrañar que Platón de por supuesto su existencia sin proponerse por ello su derivación[27]. Sin embargo, en Platón encontramos una evidencia que se remonta a los pitagóricos y que es la de conceder un rango privilegiado a los números que van del 2 al 10. Pese al matiz que encontramos en la *Metafísica* de Aristóteles donde el Estagirita señala que esta posición solo fue defendida por

24 MINGUEZ PÉREZ, Carlos. "Sobre el valor de las matemáticas: Juan Luís Vives y el Prefacio de Osiander". *Theoria: revista de teoría, historia y fundamentos de ciencia*, 23, 1995, 159.

25 *Rep*, 509 d.

26 ROSS, David. *Teoría de las ideas de Platón*. Madrid: Cátedra colección teorema, 2001, 78.

27 *Ibíd*, p. 212.

Universidad Pontificia de Salamanca

algunos miembros de la academia de Platón[28], aunque luego en la *Física* defienda todo lo contrario[29].

Platón entiende que el geómetra (o matemático) no construye los objetos matemáticos, sino que coincide con ellos en la naturaleza. De este modo equipara la labor del geómetra con la de los cazadores, ya que del mismo modo que los cazadores y pescadores no crean o construyen las presas a las que dan caza o pescan, sino que las descubren en la naturaleza, del mismo modo el geómetra descubre en la naturaleza lo objetos matemáticos. En Platón no nos encontramos en el caso de un constructivismo matemático, como lo podemos encontrar en el pensamiento de Kant que considera que la matemática es el ejemplo más brillante de una razón que se construye así misma sin la ayuda de la experiencia.

Platón deja claro en la alegoría de la línea como las matemáticas recurren a lo sensible para elevarse a lo inteligible, pues es evidente que los geómetras recurren a figuras visibles para exponer sus teorías. A diferencia de la dialéctica que avanza cancelando sus supuestos sin la necesidad de recurrir a lo sensible para elevarse a lo inteligible y alcanzar la idea de bien que es la causa de todas las cosas rectas y buenas. Pero aunque el geómetra recurra a figuras visibles para desarrollar sus teorías lo cierto es que su aspiración es hacia un objeto eterno e independiente del razonar matemático, situado no en el ámbito sensible sino en el inteligible.

Ross nos señala como en buena parte de las obras de Aristóteles aparece reflejada la idea de que para Platón los números no son más que ideas[30]. Así pues en el *De anima* podemos leer[31]: "Estos números por lo demás son las ideas de las cosas" y también en la *Metafísica* nos dirá sobre Platón[32]:

> y puesto que las especies son causas para las demás cosas creyó que los elementos de aquellas eran elementos de todos los entes. Así pues como materia consideró que eran principio lo grande y lo pequeño, y como sustancia, el uno pues a partir de aquellos por participación del uno las especies eran los números.

Teofrasto, discípulo del Estagirita, nos dice que para Platón los números vienen a ser más fundamentales que las ideas.

Resulta evidente, como señala Ross al respecto, que existe una clara contradicción entre lo que nos dice Aristóteles y Teofrasto sobre la concepción de la naturaleza del número defendida por Platón[33]. Pues mientras que el Estagiri-

28 *Met*, 1084 a 12 b 2
29 *Fis*, 206 b 32
30 ROSS, David. *Teoría de las ideas de Platón*, 255.
31 *De anim*, 404b 25-30.
32 *Met*, 987b 18-25.
33 ROSS, David. *Teoría de las ideas de Platón*, 255.

Universidad Pontificia de Salamanca

ta entiende que en Platón la naturaleza de los números equivale a las ideas, en Teofrasto se afirma que en Platón los números eran más fundamentales que las ideas. Ross se inclina en este punto a la posición de Aristóteles, pues éste fue discípulo directo de Platón en la Academia a diferencia de Teofrasto. Según Ross lo más probable es que Platón no identificara las ideas con los números como señala Aristóteles, sino que más bien asignara números a las ideas[34].

Los pitagóricos habían considerado que todas las cosas son números lo cual daba a entiende que en la base de todas las cosas subyacía una determinada estructura aritmética. Por este motivo decir que Platón asigna números a las cosas quiere decir que ponía en conexión una idea concreta a un número concreto cuando pensaba que una idea contenía en su ser un número determinado de elementos. Ross también es consciente de que no disponemos de una información precisa para saber que números asignaba Platón a una idea determinada[35].

Llegado a este punto de nuestro trabajo conviene que nos preguntemos por lo que entiende Platón por número. En la "alegoría de la línea" sitúa a los objetos matemáticos dentro del ámbito inteligible en donde también están situadas las ideas o formas. Por ello puede parecernos que Platón está equiparando las ideas con los objetos matemáticos. Los objetos matemáticos en Platón aparecen como imagen de las ideas o formas. Estos objetos matemáticos, que aparecen como imagen de las ideas, no son el producto de una construcción racional, sino que nos vienen dados en la naturaleza y por ello, el geómetra no tiene más que encontrar o descubrirlos. Este es el motivo por el que equipara el trabajo de los geómetras con el de los cazadores o pescadores que no producen las presas a las que dan caza o pescan, sino que se encuentran con ella en la naturaleza. El geómetra necesita utilizar figuras visibles que le ayudaran a construir el discurso matemático, pero no por ello se quedará relegado a estas figuras visibles dado que es necesario que las matemáticas le eleven a lo inteligible. Al situar los objetos matemáticos en el ámbito inteligible se ha dado lugar a que muchos estudiosos del tema consideren que la postura de Platón es claramente un "realismo trascendente", pues los objetos matemáticos van más allá de lo sensible o visible (aunque el geómetra utilice figuras visibles para desarrollar sus teorías y demostraciones). Frente al "realismo inmanente" de Aristóteles para quien los objetos matemáticos son una abstracción aunque considere que éstos están en cierto modo en las cosas. Por lo que de nuevo vemos como el discípulo supera las enseñanzas del maestro y produce su propio pensamiento filosófico.

34 *Ibíd*, p. 258.
35 *Ibíd*, p. 259.

Universidad Pontificia de Salamanca

En efecto, mientras que las matemáticas recurren a las cosas sensibles para elevarse a lo inteligible, la Dialéctica no tiene necesidad de recurrir a lo sensible para elevarse a lo inteligible y alcanzar el fin propuesto que es la "idea del bien" desde la cual podemos acercarnos al resto de ideas. Los objetos matemáticos son realidades objetivas que están más allá del ámbito sensible, pues se encuentran en el ámbito inteligible, aunque aparecen como una imagen de las ideas. La geometría es considerada como una ciencia propedéutica o preparatoria para la dialéctica, aquella que nos ayuda a alcanzar la "idea de bien" que es según Platón la causa de todas las cosas rectas y bellas.

5.2. El platonismo de Frege

Expuestos los principales presupuestos del pensamiento platónico en relación a la naturaleza de los números y de las matemáticas en general, conviene dar un paso más allá centrándonos en lo expuesto por Frege. Una concepción similar a la platónica, aunque con grandes matices y diferencias, podemos encontrarla en la obra del filósofo alemán.

El programa logicista que Frege expone a lo largo de su obra *Fundamentos de la aritmética*, tal y como ya hemos expuesto anteriormente, se afirma que la aritmética se fundamenta en una base lógica. Frege pretende superar el psicologismo y subjetivismo extremo vigente en la época, dichas perspectivas implicaban *grosso modo* que los números son creaciones de la razón humana, posición influida por la filosofía de Inmanuel Kant.

Frege mantiene su firme convicción en la objetividad de la matemática y de la naturaleza de los números, como queda demostrado en muchos de los ejemplos que aparece en *Fundamentos de la aritmética*, pienso cuando nos habla de la expresión de "número 4", la cual es objetiva y vale para muchos objetos, y seguirá existiendo aunque los sujetos que la tengan dejen de existir. Los números existen no como construcciones o creaciones de la razón humana, sino desde una dimensión objetiva independiente de estos constructos racionales. La naturaleza de los números es objetiva antes que subjetiva y por esta razón muchos investigadores de la obra de Frege consideran que podemos hablar de una posición platónica en su pensamiento.

Jesús Alcolea en su artículo "El platonismo de Frege" entiende que debemos tener en cuenta las tres facetas de la posible influencia platónica en la filosofía de Frege en relación a la naturaleza de los números que puede caracterizarse en[36]:

36 ALCOLEA BANEGAS, Jesús. "El platonismo de Frege", *Quaderns de filosofía i ciencia*, 15-16, 1989, 13-18.

Universidad Pontificia de Salamanca

1) Se trataría de un "platonismo ontológico" que entiende que los objetos matemáticos no son mentales ni están sometidos al espacio o al tiempo, sino que existen en un ámbito que va más allá de la mente humana pues la trasciende, se sitúa fuera de ella. 2) Sería también un "platonismo epistemológico" según el cual el conocimiento que tenemos de los objetos matemáticos se basa en una percepción análoga de los objetos físicos pero que a la vez es distinta. 3) Finalmente tendríamos un "platonismo metodológico" que trasmite la idea de que la matemática se ocupa de un dominio infinito de objetos abstractos independientes.

Según Alcolea queda claro que en *Fundamentos de la aritmética* que Frege profesó el "platonismo ontológico" en donde su pensamiento está matizado por el idealismo objetivo[37]. La prueba está en que para Frege la naturaleza del número tiene una aplicación tan objetiva como la que puede tener cualquier objeto físico. Pero matizando que aunque lo objetivo, es independiente de cualquier experiencia que tenga un sujeto al respecto, no es independiente de la razón que lo capta. Por tanto Frege sitúa el fundamento de la objetividad en la misma razón. Aunque a primera vista parece como si la preocupación de Frege no es la existencia de los entes abstractos, sino más bien la objetividad de éstos.

En segundo lugar, queda demostrado el "platonismo epistemológico" en el pensamiento de Frege. De nuevo en *Fundamentos de la aritmética* se refleja la idea de que no puede haber conocimiento matemático sin demostración y por ello este conocimiento es objetivo, la razón está en que justificamos los enunciados aritméticos mediante métodos objetivos de conocimiento. En efecto, la demostración es objetiva, pero además es un instrumento de transmisión de la objetividad aunque matizando que sus procedimientos no son constructivos como sí lo eran para Kant. Para Frege nosotros no construimos los objetos matemáticos debido a la objetividad de estos, sino que los descubrimos en la naturaleza.

Finalmente podríamos hablar de un "platonismo constructivo" en donde se acepte que las matemáticas son objetivas aunque no materiales. Las matemáticas y los números se sitúan en lo que el propio Frege denomina un "tercer reino". Lo importante es que las entidades matemáticas no son atemporales y tampoco existen con total independencia de los seres humanos, pues los sujetos pueden "crear" pero no de una forma privada y totalmente objetiva. Lo cierto es que cuando desarrollamos un teorema matemático a medida que vamos avanzando en ocasiones nos damos cuenta de que se nos escapa de las manos. Por ello piensa Alcolea, y nos parece oportuno señalarlo, que Frege podría estar de acuerdo con este proceso constructivo sin que por ello contradiga su idea de la naturaleza objetiva de los números[38].

37 *Ibíd*., p. 14.
38 *Ibíd*., p. 17.

Universidad Pontificia de Salamanca

CONCLUSIÓN

Podemos concluir que Frege propicia una ruptura epocal con las corrientes dominantes en su momento, especialmente con el psicologismo o el empirismo, abogando a favor de la objetividad de la naturaleza del número y de la aritmética, que no es más que lógica desarrollada para nuestro filósofo. De modo que Frege se consagra desde su pensamiento innovador como padre de la lógica y también de la semántica moderna que marcará la trayectoria de estas disciplina durante el siglo XX. Desde esta nueva perspectiva fregeriana los números se nos ofrecen como entidades con naturaleza objetiva y no como propiedades, de modo que debemos verlos como abstractos y autónomos sin verse afectados por su extensión.

Otra conclusión es que el pensamiento de Frege está sacudido por una clara influencia de la filosofía platónica, influjo que aparece reflejado en su concepción del número entendido como un concepto objetivo. Dicha influencia, no solo la encontramos en su obra *Fundamentos de la aritmética*, sino también la podemos constatar en *Sobre sentido y referencia* en donde se defiende que el sentido de un signo lingüístico, en tanto que algo inmanente al signo, es aquello constitutivo y esencial del mismo. El sentido de un signo tiene también una naturaleza objetiva que hace que el sentido de un signo siga existiendo aunque los sujetos que lo posean dejen de existir, tenga o no una referencia.

Siguiendo a Jesús Alcolea debemos decir que la influencia platónica en Frege debe verse en tres facetas íntimamente relacionadas. En primer lugar, encontramos un "platonismo ontológico", según el cual los objetos matemáticos no son mentales ni se someten al espacio-tiempo, sino que se sitúan en una dimensión que podríamos denominar trascendente. En segundo lugar, apreciamos un "platonismo epistemológico" según el cual nuestra percepción de los objetos matemáticos se produce por analogía a los objetos físicos, aunque de modo distinto. En tercer lugar, un "platonismo metodológico" que nos remite al dominio infinito de objetos abstractos e independientes en nuestra realidad.

Frente a la visión constructivista de la matemática que arranca de la aportación del pensamiento filosófico ilustrado de Inmanuel Kant, Frege considera que el matemático no construye el edificio matemático, sino que solo puede descubrirlo y poner nombre a una realidad que aunque accesible a la razón la trasciende de manera objetiva. El matemático como el geógrafo, descubre aquello que ya existe y le pone un nombre. La matemática como la filosofía se nos ofrece como un saber cuyas posibilidades no se agotan en el espacio y en el tiempo y siempre se prestan ante aquellos que quieran adentrarse ávidamente en su terreno. Así la filosofía no

Universidad Pontificia de Salamanca

se somete al imperativo de la moda tal y como sostenía Martin Heidegger[39]. Tampoco la matemática cae en la sujeción de la moda, pues siempre la trasciende en un amplio horizonte de posibilidades en manos del raudo y avezado matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCOLEA BANEGAS, Jesús. "El platonismo de Frege", *Quaderns de filosofía i ciencia*, 15-16, 1989, pp. 13-18.

ALCOLEA BANEGAS, Jesús. "100 años de *Los fundamentos de la aritmética* de Götlob Frege". *Quaderns de filosofía y ciencia*, 5-6, 1984, pp. 77-86.

ARISTÓTELES. *Metafísica*. Madrid: Biblioteca Clásica Gredos.

ARISTÓTELES. *Física*. Madrid: Biblioteca Clásica Gredos.

ARISTÓTELES. *Partes de los animales*. Madrid: Biblioteca Clásica Gredos.

ARISTÓTELES. *Acerca del alma*. Madrid: Biblioteca Clásica Gredos.

KENNY, Anthony, *Introducción a Frege*. Madrid: Cátedra Colección teorema, 1997.

FREGE, Götlob, *Fundamentos de la aritmética*. En *Escritos filosóficos*. Madrid: Critica, 1996.

FREGE, Götlob, *Estudios sobre semántica*. En *Escritos filosóficos*. Madrid: Critica, 1996.

FREGE, Götlob, *Sobre sentido y referencia*. En VALDES, J.L. *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos, 1991.

FREGE, Götlob, "Prólogo". En FREGE, Götlob, *Estudios sobre semántica*. Barcelona: Laia, 1973.

FREGE, Götlob, *Conceptografía*. México: UNAM, 1972.

HORSTEN, Leon. "Philosophy of Mathematics". En ZALTA Edward N. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2008.

MÍNGUEZ PÉREZ, Carlos. "Sobre el valor de las matemáticas: Juan Luís Vives y el *Prefacio* de Osiander". *Theoria: revista de teoría, historia y fundamentos de ciencia*, 23, 1995, pp. 155-173.

MORGADO, Ignacio. *Emociones e inteligencia social: Las claves para una alianza entre los sentimientos y la razón*, Barcelona: Ariel, 2010.

PLATÓN. *República*. En *Diálogos IV*. Madrid: Biblioteca Clásica Gredos, 1998.

ROSS, David. *Teoría de las ideas de Platón*. Madrid: Cátedra colección Teorema, 2001.

VÁZQUEZ, Manuel. E. "En compañía del pensador", *Δαιμων. Revista Internacional de Filosofía*, 53, 2011, 171-176.

39 VÁZQUEZ, Manuel. E. "En compañía del pensador", *Δαιμων*. Revista Internacional de Filosofía, 53, 2011, 171-176.

Universidad Pontificia de Salamanca