# CARAMUEL Y EL CALCULO MATEMATICO *

Entre los 652 nombres que cita en su hermosa historia de las matemáticas Morris Kline [1] no está Juan Caramuel y Lobkowitz. No hay que hacerse ilusiones vanas, por tanto. Y, sin embargo, merece la pena hablar de él y de la matemática tal como él la comprendía. En primer término, porque es una faceta más dentro de un saber casi universal como lo fue el suyo. Nuestro autor se erige así en uno de los personajes más representativos de su siglo, sobre todo si miramos desde España, dado nuestro desconocimiento casi enciclopédico de quienes fueron nuestras lumbreras, lo que en tantas ocasiones nos ha llevado —la ignorancia supina es osada— a decretar que el siglo XVII fue para nosotros como un desierto [2]. Aunque sólo fuera por esta razón, pues, tendría interés estudiar a nuestro monje cisterciense en sus múltiples aspectos y en sus muchos saberes, entre los que se cuentan las matemáticas. Pero hay todavía otras razones que a ello nos empujan, porque, en segundo lugar, sí que aparece Caramuel con fuerza propia en la historia particular de sectores de las matemáticas entonces nacientes, los logaritmos y la combinatoria. Hay todavía una tercera razón para ajustar nuestras cuentas con él. Sus libros titulados *Mathesis biceps* [3]

* Este trabajo se preparó para ser publicado en las Actas que hubiera debido seguir al *Convegno Internazionale di Studi «Le maraviglia del probabili»*, dedicado en Vigevano a Juan Caramuel los días 29 a 31 de octubre de 1982, para celebrar el tercer centenario de su muerte. Esas Actas no han llegado a publicarse hasta hoy, que yo sepa.

1 Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern*, Nueva York, Oxford University Press, 1972, 1238 p. La bibliografía clásica sobre la matemática de Caramuel consta de dos títulos: David Fernández Diéguez, «Juan Caramuel, Matemático español del siglo XVIII», *Revista Matemática Hispano-Americana*, I (1919), que no he podido consultar, y el artículo de José A. Sánchez Pérez, «La Matemática», en el libro en colaboración *Estudios sobre la ciencia española del siglo XVII*, publicado por la Asociación Nacional de Historiadores de la Ciencia Española, Madrid, Gráfica Universal, 1935, pp. 597-633, de las que se dedican a nuestro autor las páginas 620-626. En 1978 se presentó en la Universidad de Valencia una tesis doctoral de historia de las matemáticas que había sido dirigida por el profesor Alberto Dou, s. j., y cuyo autor era Santiago Garma Pons, bajo el título: *Las aportaciones de Juan Caramuel al nacimiento de la matemática moderna*, 170 páginas mecanografiadas. Dispongo de un ejemplar fotocopiado gracias a la amabilidad de su autor.

2 Ya comienza a no ser así. Con respecto a la ciencia, véase, por ejemplo, J. M. López Piñero, *Ciencia y técnica en la sociedad española de los siglos XVI y XVII*, Barcelona, Editoral Labor, 1979; una breve panorámica en Juan Vernet, *Historia de la ciencia española*, Madrid, Instituto de España, 1975, pp. 108-132.

3 Ioannis Caramuelis Mathesis biceps vetus, et nova. I. Arithmetica. II. Algebra. III. Geometria generalis. IV. Cosmographia. V. Geodaesia. VI. Geographia. VII.Centroscopia. VIII. Orometria. IX. Hidrographia. X. Histiodromica. XI. Hypotha-

y *Architectura civil*[4], el primero escrito en latín, en castellano el segundo, son perfectos libros de texto[5], que tienen la intención de transmitir con claridad unos saberes, mejorados en parte por su autor. Al estudiarlos, nos acercamos a unos libros que nos ponen ante la vista los conocimientos globales del momento, aunque, por supuesto, dentro de la perspectiva que le es propia del autor. Veremos cómo ésta es en Caramuel esencialmente práctica, muy poco dada a ociosidades puntillistas y teóricas, que caen fuera de su campo de interés.

Los dos libros a los que acabo de hacer referencia son dos enormes infolios, editados en la imprenta episcopal de Campania el año 1670, el primero, y en la imprenta episcopal de Vigevano el año 1678, el segundo. Ni que decir tiene que Caramuel era el obispo de la primera ciudad cuando se editó el primero, y de la otra cuando se editó el segundo, pues fue él quien erigió las imprentas en las que se editaron esos sus libros[6]. Sobre todo el primero, en su edición, es de una belleza formal fascinante. El otro, en cambio, da una impresión menos segura; así, por ejemplo, está numerado por capítulos, no de manera seguida

lica. XII. Nectica. XIII. Navtica svblunaris. XIV. Navtica aetherea. XV. Petamographia. XVI. Hydravlica. XVII. Aerographia. XVIII. Anemometria. XIX. Ptetica. XX. Sciographia. XXI Logarithmica flven. XXII. Logarithmica reflvens. XXIII. Combinatoria. XXIV. Kybela: de ludis. XXV. Arithmomantica. XXVI. Trigonometr. generalis. XXVII. Trigonometr. recvrrens. XXVIII. Trigonom. astronomica. XXIX. Aetherenus rectangulus. XXX. circinus. XXXI. Architectura militaris. XXXII. Mvsica. XXXIII. Metallaria. XXXIV. Pedorsica. XXXV. Statica. XXXVI. Hydrostatica. XXXVII. Meteorologia. XXXVIII. Sphoericae. (Planetarum Hypotheses). XXXIX. Oscillatoriae (Planetarum Hypotheses). XL. Rectilineae (Planetarum Hypotheses). In omnibus, et singvlis veterum, et Recentiorum Placita examinantur; interdum corriguntur, semper dilucidantur: et pleraque omnia Mathemata reducuntur speculative et practicè ad facillimos, et expeditissimos Canones. Accedent alii tomi, videlicet: Architectura Recta, symmetrias à Veteribus traditas corrigens et exornans. Architectura Obliqva, de quâ nemo scripsit hucusque. Est Ars sume necessaria, ut errores à Iunioribus passìm admisso cognoscãtur. Architectura Militaris, Canones Artificum ingenio et captui attemperans, reducensque ad exquisitissimam facilitatem. Mvsica, Vocalis, et Organica, rejectis Guidonis Aretini Mutationibus per viam liberan et expeditam Philomusos conducens. Astronomia Physica, multos Tractatus et Dissertationes de motibus Astrorum continens. Campaniae, In Officina à Episcopali Anno M.DC.LXX. superiorum permissv. Prostant Ludguni apud Laurentium Anisson.

4 Architectura civil recta y obliqva. Considerada y dibvxada en el Templo de Iervsalem. Erigido en el Monte Moria por el Rey Salomon. Destruido por Nabucodonosor Emperador de Babylonia. Reedificado por Zorobabel Nieto de los Reyes Indios. Y restaurado despues por el Rey Herodes. Y ultimamente convertido en cenizas por los Soldados de Tito Hijo de Vespasiano Emperador. Promovido a svma perfeccion en el templo y palacio de S. Lorenço cerca del Escvrial Que invento con su Divino Ingenio, delineo,, y dibuxo con Su Real mano, y con excessivos gastos empleando los mejores Architectos de Europa erigio el Rey D. Philippe II: Por Don Ivan Caramuel. Monje Cisterciense, Dotor y Professor de Santa Theologia en la Vniversidad de Lovayna; y ahora Arçobispo-Obispo de Vegeven, Conde de Zem, etc. del Consejo de Su Magestad etc. Con licencia de los svperiores. En Vegeven. En la Emprenta Obispal por Camillo Corrado. Año de MDCLXXVIII.

5 Recuerdo la importancia que dan a los libros de texto autores de una corriente tan notable de la filosofía de la ciencia de hoy como la que viene representada por por C. Ulises Moulines, *Exploraciones metacientíficas*, Madrid, Alianza Universidad, 1982; de esa corriente es J. D. Sneed. En parte son los que retoman la 'ciencia normal' de Thomas S. Kuhn.

6 Cf. Ceñal, p. 107, la referencia completa en la nota 7; también Pastine, pp. 123 y 145, la referencia completa en la nota 9.

del principio al fin, como si se hubiera elaborado más de prisa, como si hubiera ido engrosando a medida de su impresión. Hago hincapié en esa perfección formal, sobre todo del primero, como digo, porque esa debe de ser una de las características de todo libro de texto cuidado y que quiere cumplir bien su misión, como me parece que es en este caso.

No es mi intención ahora tratar de ver con detalle dónde y cómo aprendió Caramuel sus primeros conocimientos matemáticos, cuándo se dedicó a estos estudios y con quién los compartió. Ramón Ceñal [7] y Julián Velarde Lombraña [8] nos dicen algo sobre el particular, también lo hace Dino Pastine [9]. En primer lugar aprendió de su padre [10]; en sus estudios españoles cita con verdadera veneración a su correligionario Pedro de Ureña [11], ciego de nacimiento. Luego, en sus años de Lovaina, se interesó por las cienicas con pasión, conoció a numerosos sabios, discutió y se carteó con ellos [12]. Citaré sólo a dos que son de todos co-

7 Ramón Ceñal, «Juan Caramuel. Su epistolario con Atanasio Kircher, s. j.», *Revista de filosofía*, 12 (1953) 101-147.

8 Julián Velarde Lombraña, «Juan Caramuel y la Ciencia Moderna. (Estudio de su obra hasta 1644)», ponencia presentada en el I Congreso de Teoría y Metodología de las Ciencias, que tuvo lugar en Oviedo los días 12 a 16 de abril de 1982. Se publicó en las actas del Congreso. He obtenido una fotocopia del texto manuscrito gracias a las buenas gestiones de Santiago Sagredo, a quien se lo agradezco desde aquí. Este texto tiene 61 páginas mecanografiadas. [*Actas del Ier Congreso de teoría y metodología de las ciencias*, Oviedo, Ediciones Pentalfa, 1982, pp. 503-549].

9 Dino Pastine, *Juan Caramuel: Probabilismo ed Enciclopedia*, Florencia, La Nuova Italia Editrice, 1975, 330 p.

10 Cf. Pastine, p. 31 y Velarde, p. 2.

11 Cf. Pastine, pp. 36-37 y 222; Velarde, pp. 4-5. «Ultima ratio mihi fuit obiecta ab ingenio, quod dum superviveret, a multis totius Orbis terrarum credebatur excellentissimum, et sane nullus injuria dixerim, nullum ego cognovi, quod cum ipso potuisset conparari; a nativitate etenim vir coecus (hac indigatione cognoscitur esse Reverendus Dominus Petrus de Urueña Monasterii de la Espina, apud Vallisoletanos; nusquam satis laudatum ornamentum) non solum fuit Musarum Pater, et eloquentiae Coriphaeus, sed etiam (vix auderem dicere, ni extarent ipsius opera Mathematica) qui voluit, et potuit supernas Planetarum aulas visui negatas, mentis acumine discurrere, et novis circulis, certissimisque periodis inventione plus quem naturali errores adligare», en el Prólogo, sin paginación, de su *Steganographia*, del año 1635; citado en Velarde, p. 4.

12 Cf. Pastine, pp. 63-70; Velarde, pp. 8-12 (sobre el premio establecido por la monarquía española para quien resolviese la manera de establecer la longitud en el mar) y 29-55. Para hallar la longitud en el mar, proponían algunos el uso de la brújula, pero no es éste un camino de precisión. En las páginas 562 a 635 de la *Mathesis biceps* se habla de cómo navegar y de los diferentes problemas que plantea encontrar la posición de los barcos en la mar; en las páginas 382 a 414 reproduce una carta escrita a Luis de Bolea, Marqués de Torres, en donde describe su método de observación de la Luna o de algunos astros (como las 'estrellas mediceas' descubiertas por Galileo). Este era el camino elegido por Pedro de Ureña, entre otros, que exige la elaboración de tablas astronómicas de gran precisión: «Promissis dives quilibet esse potest. Haec scribebat anno 1644. iam agimus annum 1667. et nondum illas Tabulas vidimus», *Mathesis*, 577 (citado por Velarde, p. 11). Se refiere Caramuel a las tablas prometidas por Michael Florentius van Langren en su obra: *La verdadera longitud por mar y tierra: demostrada, y dedicada a su Magestad Catholica Philippo IV*, Bruselas 1644. Estableció Caramuel estrecha amistad con un monje cisterciense como él, Gaspar Jongelinx; asistió en Lovaina a las clases de matemáticas del jesuita Ignacio Derkennis; entabló amistad con un grupo de asiduos de la física y de la astronomía como van Langren, Hendrik van der Put (Erycius Puteanus), Godefroid Wendelin, Leander van der Band, Johannes Baptista von Helmont. Estableció

nocidos: Gassendi [13] y Kircher [14].

De esta época lovaniense nos queda su primer libro sobre las matemáticas: *Mathesis audax* [15], un pequeño libro que sorprende porque en él se habla de todo lo habido y por haber: «Audaz, en efecto, como nota Monchamp, era esta matemática, puesto que de ella pretendía sacar Caramuel el argumento universal para probar todas las cuestiones filosóficas y teológicas» [16]. Se editó en 1644, aunque el catálogo de las obras de Caramuel que abre su *Mathesis biceps* le da equivocadamente el año 1642.

Es un libro breve en el que se tocan brevemente multitud de cuestiones. Se divide en tres partes, en la primera es tratada matemáticamente la lógica [17], mientras que en la segunda lo es la metafísica [18]. Aquí se habla casi de todo: de los predicamentos [19], de la substancia [20], de la cantidad continua [21], de la cantidad discreta [22], de la cualidad [23], de la relación [24], de la acción [25], de la pasión [26], de la duración [27], de la

observatorios astronómicos. Se relacionó sobremanera con otro bohemio, como él lo era por ascendencia paterna, Ján Marek (Johannes Marcus) Marci, con el que tuvo gran correspondencia que luego publicará en su *Mathesis biceps*. Con respecto a la caída de los graves, Marci sigue a Galileo, pero Caramuel, por seguir *el magisterio de la experiencia*, sigue otro camino, y cree que la ley de Galileo dejará de ser válida para una altura de caída de 300 pies o más. Para él la gravedad no es tanto una acción como una pasión (cf. *Mathesis biceps*, 1266). ¡Léase a Velarde!

13 Ceñal señala los lugares en donde se encuentra la correspondencia de Caramuel con Gassendi en *Opera omnia* (Lyon 1658), vol. VI, pp. 190, 191, 206, 223, 465, 476, 480, 487, 489; cf. Ceñal, p. 114, nota 41. Cornelis de Waar, editor de la *Correspondance de Marin Mersenne* (París, PUF, 1945), en el tomo II, p. 241, dice que Gassendi encontró en Lovaina a varias personas, entre las cuales estaba Caramuel, a su paso por esa ciudad los días 18 al 21 de mayo de 1629.

14 En el índice de cosas que se encuentra al final del vol. I de su *Mathesis biceps*, que no tiene numeración, en la voz Kircker dice así: «Kircher. Inter Viros Doctissimos, qui hoc saeculum beant, exactissoma linguarum plurimorum notitia, Mathematum profunda comprehensio, Philosophiae experimentis confirmata cognitio, et aliarum Facultatum professio P. Athanasium Kircher celeberrimum reddunt. Editit Libros multos, qui magno cum fructu leguntur, et passim à nobis citãtur. (...) In multis aliis locis P. Kircherum citatum, et laudatum reperis: sed volui illos tantùm producere, quos lectu dignioris indicavi». Léase el artículo de Ceñal citado en la nota 7.

15 Mathesis audax rationalem, naturalem, svpernaturalem, divinamqve sapientiam. Arithmeticis, geometricis, catoptricis, staticis, dioptricis, astronomicis, mvsicis, chronicis, et architectonicis, fvndamentis svbstrvens exponensqve avthore Ioanne Caramuel Lobkowitz. Opus verè nouum et varium, ingratiam magnarum mentium scriptum. Lavanii apud andream Bouvet. M.DC.XLIV.

16 Ceñal, p. 115. Se refiere a Georges Monchamp, *Histoire du cartésianisme en Belgique*, Bruselas 1886, p. 162.

17 'Prima pars, seu Logica mathematice tradita', *Mathesis audax*, pp. 3-12.

18 'Secunda pars, seu Metaphysica mathematice tradita', *Mathesis audax*, pp. 13-96.

19 Cf. *Mathesis audax*, pp. 19-20.

20 Cf. *Mathesis audax*, pp. 20-22.

21 Cf. *Mathesis audax*, pp. 22-26. «Thesis I. Linea recta est universorum brevissima», p. 23. El apartado ha comenzado con estas palabras: «Tres sunt Quantitatis species: Linea, Superficies, Corpus».

22 Cf. *Mathesis audax*, pp. 26-40.

23 Cf. *Mathesis audax*, pp. 41-48.

24 Cf. *Mathesis audax*, pp. 48-50.

25 Cf. *Mathesis audax*, pp. 50-57 y 68-82.

26 Cf. *Mathesis audax*, pp. 83-85.

27 Cf. *Mathesis audax*, pp. 85-90.

ubicación [28], del lugar [29] y del tener [30]. Se intercalan en ella, además, varios elementos extraños: una nota sobre las oscilaciones isócronas del péndulo [31] y varias cartas, una dirigida a Godefroid Wendelin [32] y otra que es la respuesta de éste [33]. En su carta cita Caramuel a Kircher, a Gassendi, a Tycho Brahe y a Galileo. La tercera parte del librito, por fin, se dedica a tratar matemáticamente la teología [34], aunque en ella sólo se habla de Dios: del Dios infinito [35], de la visión de Dios [36], de la ciencia de Dios [37], de su voluntad [38], de su omnipotencia [39], de la predestinación [40], de la Trinidad [41] y de la gracia [42]. Aquí es donde, hablando de la visión de Dios, hace sus disquisiciones sobre la visión del ojo, y en ellas cita a Descartes y a su teoría de la visión [43].

28 Cf. *Mathesis audax*, pp. 90-93.

29 Cf. *Mathesis audax*, pp. 93-95.

30 Cf. *Mathesis audax*, pp. 95-96.

31 Cf. *Mathesis audax*, pp. 57-59. Defiende Caramuel esta tesis: «Perpendiculum a chorda subtili dimissum, si a linea perpendiculari in latera impellatur, oscilationes multas faciet, omnes tamen isochronas». La isocronía del péndulo, que él defendía contra Wendelin, su amigo, es decisiva para la medida del tiempo, sobre las discusiones que tuvieron lugar y las experiencias que hiciera Caramuel para probar que tenía razón, véase Velarde, pp. 40-47. En el capacho para todo que es su *Mathesis biceps*, se reproducen trabajos y cartas al respecto, véase pp. 436-437, 577, 1451, 1494, 1709-1711; reproduce también ahí, en pp. 422-436, su opúsculo, *De Perpendiculorum inconstantia ab Alexandro Calignono Nobili Delphinate excogitata et a Petro Gassendo bona fide tradita et pulchro comentario exornata a Ioanne Caramuel Lobkowitz examinata et falsa reperta*, publicado en Lovaina, el año 1643, junto a otra de sus obras, *Novem stellae circa Iovem, circa Saturnum sex, circa Martem nonullae, a P. Antonio Reita detectae et Satellitibus adiudicatae, de primis (et si mavelis de universis) D. Petri Gassendi iudicium D. Ioannis Caramuel Lobkowitz eiusdem Iudicis censura*. La cita que de Mersenne hace Caramuel en este contexto, en *Mathesis audax*, 88-89, no fue apreciada por éste, quien en su libro *Cogitata Physico-Mathematica, in quibus tam naturae quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur*, París 1644, tacha al «matemático audaz» de no importarle decir falsedades; la respuesta de Caramuel en *Mathesis biceps*, p. 437.

32 Cf. *Mathesis audax*, pp. 60-64. Lleva la fecha del 17 de septiembre de 1643. ¿Por qué se empeñarán algunos en decir que el libro es de 1642? ¿Hay razón para convertir en realidad lo que es un error de la bibliografía que encabeza el *Mathesis biceps*?

33 Cf. *Mathesis audax*, pp. 64-68. La respuesta lleva la fecha de 10 de octubre de 1643. Sobre Wendelin, cf. Ceñal, p. 127, nota 8.

34 'Pars tertia, seu theologia mathematice tradita', *Mathesis audax*, pp. 97-200.

35 Cf. *Mathesis audax*, pp. 122-140

36 Cf. *Mathesis audax*, pp. 140-169.

37 Cf. *Mathesis audax*, pp. 169-176.

38 Cf. *Mathesis audax*, pp. 177-179.

39 Cf. *Mathesis audax*, pp. 179-185.

40 Cf. *Mathesis audax*, pp. 185-187.

41 Cf. *Mathesis audax*, pp. 188-193.

42 Cf. *Mathesis audax*, pp. 194-200. Al menos en el ejemplar que he consultado (el de la Biblioteca Nacional de París, signatura V. 7088 [1]) está encuadernado a la vez un pequeño texto de 27 páginas que lleva por título: *Svblimivm ingeniorum Crux. Iam tandem aliqvando deposita a Ioanne Caramuel Lobkowitz, Gravium lapsum cum tempore elapso componente, concordiamque experimentis et demonstrationibus Geometricis firmante. Lovanii, apud Petrum Vander Heydem, M.DC.XLIV*.

43 «Thesis XXXIV: An Corporis oculis Deus videri possit nequit examinere, qui visionis corporeae rationum ingenium et causas non cognoscit», p. 141. Estas son sus palabras: «Huic adsertioni (que la imagen del objeto se forma en el fondo del ojo) consonat Anonymus (ut audio, Cartezius) qui discursum de Methodo edidit Lugduni Batavorum apud Ioannem Maire, an. 1637. in Dioptrica enim conatur defendere to-

Pero no es este pequeño libro de nuestro audaz matemático el que va a retener nuestra atención, sino su gran libro *Mathesis biceps*, enorme mamotreto en dos volúmenes pero con numeración seguida. Se abre con una Epístola a Luis Guillermo de Moncada[44], y a su término encontramos un curioso soneto en loor de nuestro obispo, que dice así:

Los troços graues de la antigua Esfera,
En esta nueva fragua recogidos
Tanbien fundados, como bien fundidos
Con luz segunda apagan la primera:

Aunque mas se resistan, reberbera
Su esplendor en los menos aduertidos,
Y acusando el error de los sentidos,
Hecha aplauso la Inuidia lo venera.

O Caramuel! que bien a tus quadrantes
Reduces de las causas los momentos
Sin que sus exercicios les estorbes;

Hallan aqui Astronomicos semblantes,
Zodiaco, influencias, mouimientos,
La Luna, el Sol, los Astros, y los Orbes.

Tras tan singular soneto, vemos cinco páginas con la lista de todas sus publicaciones, en las que encontramos ocho títulos castellanos y casi cincuenta latinos; luego otras tres páginas sueltas[45] y un detalladísimo índice[46]. Por fin, antes de comenzar el texto propiamente dicho del libro, tenemos 51 páginas preciosísimas de láminas, impresas única-

tum oculum esse diaphanum...», p. 146. Recuérdese que en 1637 Descartes publicó sus *Ensayos*, cuya introducción se llamaba «Discurso del método»; uno de esos ensayos, junto a «Los meteoros» y «La geometría», era «La dióptrica». Véase *Oeuvres de Descartes*, edición Adam-Tannery, vol. VI, pp. 105-165. Una opinión de Caramuel sobre Descartes se lee en su carta a Gassendi, *Opera*, VI, p. 466, recogida en Ceñal, p. 115; más textos en pp. 116-9. Opiniones sobre la teoría cartesiana de los torbellinos en la carta reproducida en *Mathesis biceps*, pp. 520-562, sobre todo 547 y 549; véase Velarde, pp. 48-50. Véase también Pastine, pp. 75 y ss., y pp. 252-256.

44 Cuatro páginas sin numerar. El autor del soneto es Pedro de Robles.

45 Tituladas *'En E'iahma*.

46 El índice ocupa las páginas I-XLI, en la última hay otro soneto, esta vez de «D. Marcos Bauo», que dice así:

Vna inculta Montaña y eminente
A otra poco inferior le dá la mano;
Que por cerrar el passo al Africano,
Liga hizieron las dos estrechamente.
Sella el humido pie, puerta valiente
De su fosso, vn Castillo soberano,
Donde mil vezes el valor Christiano
De infiel sangre anegó barbara gente.
Tu, Caramuel, en Ciencias prodigioso
A esta Machina das sacro decoro,
Vniendo cos sus armas lo ingenioso.
Y a su Cadena, que es terror del Moro,
Que ha fabricado Marte belicoso,
Añade Palos otro eslabon de Oro.

mente por un lado y de idéntico tamaño a las del resto. Así entramos ya en la primera parte del libro, divido en las diez siguientes: aritmética, álgebra, geometría, geometría especial, logaritmos, combinatoria, trigonometría, mecánica y astronomía; por supuesto que luego se entrecruzan en él infinidad de incisos y paréntesis, como hemos de ver.

El «Syntagma primvn. Arithmetica» comienza con una larga «Meditatio prooemialis» [47], en la que se pregunta Caramuel si la aritmética es una sola o son muchas, a lo que responde con la realidad de una aritmética binaria, ternaria, etc., hasta la aritmética denaria, para pasar luego a las aritméticas duodenarias y sexagenaria.

En el artículo en el que trata de la aritmética binaria nos encontramos con el procedimiento para construir, mediante dos únicas cifras, el 'o' y la 'a', la tabla entera de los números con los que luego se logrará esa aritmética binaria. Como hemos de ver continuamente, su pasión son las tablas; encontramos, pues, una tabla para expresar los números de ella del 0 al 32, y otra en que se expresa $2^n$, llegando hasta $n = 50$ [48].

| | | | |
|---|---|---|---|
| o | 0 | aoooa | 17 |
| a | 1 | aooao | 18 |
| ao | 2 | aooaa | 19 |
| aa | 3 | aoaoo | 20 |
| aoo | 4 | aoaoa | 21 |
| aoa | 5 | aoaao | 22 |
| aao | 6 | aoaaa | 23 |
| aaa | 7 | aaooo | 24 |
| aooo | 8 | aaooa | 25 |
| aooa | 9 | aaoao | 26 |
| aoao | 10 | aaoaa | 27 |
| aoaa | 11 | aaaoo | 28 |
| aaoo | 12 | aaaoa | 29 |
| aaoa | 13 | aaaao | 30 |
| aaao | 14 | aaaaa | 31 |
| aaaa | 15 | aooooo | 32 etc. |
| aoooo | 16 | | |

47 *Mathesis biceps*, pp. XLI-LXXVIII. Se subdivide en quince artículos. «Queste pagine (en nota se refiere a las páginas XLV-LXII, en donde se habla de las diversas aritméticas, binaria, terciaria, etc.), contenute nella *Meditatio prooemialis* al primo *Syntagma*, dedicato all'aritmetica, sono certo tra le più brillanti e le più degne di attenzione dell'intera *Mathesis* di Caramuel», Pastine, p. 226. Un poco después, en la página 228, dice el mismo Pastine: «La *Tetractys* dei pitagorici e il sistema di Eoni compresi nel Pleroma degli gnostici mostrano che altri tipi di aritmetica possono essere combinati con quella decimale. Tra tutti i sistemi possibili Caramuel dichiara di preferire quello dell'aritmetica duodecimale, a proposito della quale costruisce tre tavole. Nella prima converte le dodicesime parti del cerchio in gradi e minuti primi; nella seconda mostra le possibilità di conversione tra l'aritmetica duodecimale e l'ordinaria decimale; nella terza espone una tavola duodecimale, analoga a quella pitagorica. Sulla base di quest'ultima tavola espone poi le regole dell'addizione, della sottrazione, della moltiplicazione e della divisione proprie dell'aritmetica duodecimale». Cf. también Garma, pp. 33-34.

48 *Mathesis biceps*, y $2^{50} = 1.125.899.906.842.224$.

Para la aritmética terciaria necesita tres cifras: 'o', 'a' y 'b', con las que se construye la lista de los números hasta el 54 y luego todavía añade la de algunos números sueltos, como el 81 y el 92, el 243 y el 254 [49].

En los dos últimos artículos de este largo proemio a su primer «syntagma», nos cuenta cómo inventaron los árabes los guarismos que nosotros utilizamos, y cómo su uso se extendió a partir de España. Precisamente aquí, encontramos tres notas bastante breves que nos interesan. En la primera de ellas [50] nos habla Caramuel de la abstracción aritmética, en la que se da abstración de cualquier materia sensible o inteligible, por lo que los números son razones absolutamente abstractas y universales de cualquier Ente material, sensible, inteligible o espiritual, existente o posible, incluso de toda finitud o infinitud. Ahí es en donde está la fuerza del número. Ahí también la diferencia con la cantidad continua con la que tiene que haberse la geometría. Una segunda nota [51] abunda sobre el tema, pues esa abstracción es la que

49 Cf.*Mathesis biceps*, .........

50 Nota I: *De Abstractione Arithmeticâ*. «Arithmetica universim sumpta abstrahit à materiâ sensibilis, et intelligibili: cùm enim *quatuor* v.g. dicit, nec dicit quatuor alba, vel nigra; nec quatuor calida, vel frigida; nec quatuor homines, vel quatuor equos, vel quatuor arbores. Ergo conceptus numeri Quaternarii est ratio quaedam abstractissima, et universalissima, quae non solèm ab omni Ente materiali, sensibili, et intelligibili, sed et ab omni Ente spirituali praescinditur. (...) Hac doctrinâ praemisâ, redeo ad Arithmeticam, et esse ab Ente Materiali, et Inmateriali abstractam, et praecisam ostendo. (...) Ab Ente etiam Reali, et Morali abstrahitur Numerus; (...) Abstrahitur etiam ab Ente Existenti, et Possibili, (...) Qui infinitam multitudinem rerum, possibilem esse asseverant, Infinitas posse numerari pronuntiatur, nam una Angelorum Infinitas, et una Hominum Infinitas, essent duae infinitates. Nos repugnare duo Entia infinita sentimus, non sunt ergo numerabiles Infinitates. Sed cur? quia, nec dantur, nec dari possunt Infinitates plures: Caeterùm, si darentur, etiam ab Arithmetico numerantur. Ergo Numerus à Finito, et Infinito abstrahitur. Vix erit igitur in Conceptum thesauris aliquis, qui sit Numero universalior, et abstractior: quò videntur respexisse illi, Veteres, qui abstractissimum Ens in Unum, et Multa diviserunt, ut Numerum componerent cum Unitate.

Contractus ad Quantitatem continuam, edisseritur à Geometriâ: quae non considerat Quantitates indefinitas, nec indeterminatas: sed finitas, terminatasque: quam ab rem, si non distinguatur magnitudo à Materiâ, et sine corpore intelligi non possint spatium, quod multi, et doctissomi statuunt, dicenda erit Geometria à Materiâ sensibili, non autem ab intelligibili abstrahere», *Mathesis biceps*, p. LXXVI.

51 Nota II, *De Arithmeticâ ab omni Numero sensibili, et intelligibili abstractâ*: «Non dari Entia rationis dixi, et modò Entia rationis videor loqui, cùm ex abstractissimâ Arithmeticâ ad abstractiorem adhunc meum Lectorem conduco, et, ut ultra cogitabiles metas progredior, illam ac ipsisimet Numeris abstracto. Arithmetica ab ΑΡΙΘΜΩ fuit dicta; quia Arithmos, seu Numerus speculator Ergo, si à Numeris abstrahitur; in Objecto suo ipsa Numerus ab omni Numeri ratione praecisos contemplatur. Ergo Chymoericam Facultas est, et Chymoericum Objectum habet.

Sed non. Quia preter Arithmeticam Communem, et alias possibilis, quos haec Meditatio insinuavit, datur adhunc quaedam ulterior Arithmetica, illis omnibus praecisior, et abstractior. Omnis enim Arithmetica tot, et Unitates considerat, non autem omnis Numerus; sed altera Numerus, et altera Proportiones, aut etiam Proportionalitates.

Ut id intelligere, adnotato, duplicem esse Unitatem: nimirùm Determinatam, et Indeterminatam. (...)

Hinc necessarium suit, ut praeter Communem Arithmeticam, quae *Numeros determinatos* contemplatur, inveniretur altera, quae *indeterminatos Numeros*, et eorundem habitudines proportiones, proportionalitatesque consideraret. Illa citeror est; antiquum praeferiptumque nomem conservans, *Arithmetica* vulgò vocatur: haec, est permite en la aritmética los números «arítmicos», números especulativos, números abstractos, sin objeto, mejor dicho, cuyo objeto no se expresa como relación de ningún número; es una facultad quimérica de un objeto quimérico. Tras la aritmética se da, pues, otra aritmética menos común, la cual habla de números indeterminados en lugar de hacerlo de números determinados, y que recibe el nombre de álgebra. Hay todavía, sin embargo, otra aritmética que medita sobre números artificiales o hipotéticos, los logaritmos [52].

Tras tan largo proemio comienza el texto propiamente dicho de la aritmética [53], que a su vez se divide en otras tres partes, de las que la primera se titula «Proarithmetica: parte proemial». En ella se define así a la ciencia de la que habla: «Arithmetica est Scientia bene numerandi» [54]. La segunda parte recibe el nombre de «Synarithmetica», y en ella se habla de la suma, de la resta, de la multiplicación y de la división, para finalizar con las fracciones. La tercera parte, «Metarithmetica», nos enseña la extración de raíces, para lo cual construye las tablas de cuadrados y de cubos desde el 1 al 1000, que le sirven para hallar las raíces cuadradas y las raíces cúbicas por aproximación, teniendo en cuenta las diferencias entre valores contiguos para una mejor obtención del resultado; es lo que Caramuel denomina extracción de raíces por «lapsum». Además, en esta tercera parte se trata de los números perfectos y demás cuestiones de los pitagóricos [55]. Por fin,

ulterior: et, ut ab illâ distinguatur, aliter denominari debuit. Arabice dicitur AL MUCABALA, ab Europaeis autem COSSICA, et vocabulo notiore ALGEBRA. Nos autem de citeriori Arithmeticâ Syntagmate I. de ulteriori verò Syntagmate II. disputabimus», *Mathesis biceps*, pp. LXXVIII-LXXVIII.

52 Nota III, *De Arithmeticâ, quae Numeros Hypotheticos seu Artificiales meditatur*. Hasta este momento sólo había dos partes de la aritmética, la de los números determinados y la de los indeterminados: «Caeterùm nostrâ aetate, Iannes Neperus, Mathematicus ingeniosissimus, inventione felici, voluit in Algebrâ arithmeticari. Hic distinctos numero proportiones, quos alii videbantur negligere, incipit numerare; et illorum numeros vocabit Logarithmos, et tertiam Arithmeticam, quae hos eosdem numeros edissebat, LOGARITHMICAM denominavit», *Mathesis biceps*, p. LXXVIII.

En la misma página, como ilustración de esta nueva aritmética, coloca la siguiente tabla comparativa de los «nuevos números»:

| PYTHAGORAS. | NEPERUS. | BRIGGIUS. | CARAMUEL. |
|---|---|---|---|
| 10,000;000,000 | 00000 | 10.00000 | 0.00000 |
| 1,000;000,000 | 02303 | 9.00000 | 1.00000 |
| 100;000,000 | 04605 | 8.00000 | 2.00000 |
| 10;000,000 | 06908 | 7.00000 | 3.00000 |
| 1;000,000 | 09210 | 6.00000 | 4.00000 |
| 100,000 | 11513 | 5.00000 | 5.00000 |
| 10,000 | 13815 | 4.00000 | 6.00000 |
| 1,000 | 16118 | 3.00000 | 7.00000 |
| 100 | 18421 | 2.00000 | 8.00000 |
| 10 | 20723 | 1.00000 | 9.00000 |
| 1 | 23026 | 0.00000 | 10.00000 |

En esta tabla encontramos comparados los números naturales y los números «correspondientes» en los logaritmos de Neper, de Briggs y de Caramuel. Todo un «syntagma» posterior se dedicará a explicarlo.

53 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1-96.

54 *Mathesis biceps*, p. 1.

55 Los números perfectos son los que equivalen a la suma de sus divisores, in-

en una parte fuera de concurso que titula «Calculatoria» [56], encontramos toda clase de cómputos de dinero, de cómputos astronómicos, de tablas y cómputos de años, inaugurándose así una gran pasión de nuestro autor: su pasión por los cálculos, por la exactitud de esos cálculos y por la mejor aproximación en el resultado final, que encontraremos a lo largo y a lo ancho del grueso libro.

* * *

Entramos ahora en al parte denominada álgebra: «Syntagma secundum. Algebra de abstracte proportionalitate» [57], en la que nos encontramos con dos proemios, en el primero de los cuales [58] vemos, como en tantos otros lugares del libro, ejemplos en español, pequeños dichos o poesías [59]. En el segundo de los proemios [60] se nos señala que el objeto esencial del álgebra es lo que llama números «enarithmos», es decir, que el álgebra es una ciencia más abstracta que la aritmética porque no se interesa en los números determinados en cuanto tales, sino sólo en sus proporciones [61]. Nos indica también aquí cuáles son

cluido el 1 pero no él mismo. Recuérdese el conjunto de ingeniosas series numéricas de los pitagóricos; cf. Kline, pp. 28-34, referencia en nota 1.

56 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 55-96.

57 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 97-206.

58 «Prooemium de regula falsae positionis, quae est basis algebrae. An Dialectici, Iuristae, Astronomi, Logarithmetae, Geometrae, Arithmetici, etc. falsunt ponant, et verum ex illo deducant?».

59 En página 104 encontramos esta breve poesía:

Un necio Comentador,
El más presumido, digo,
Es el mayor enemigo,
Que tener puede un Author. etc.

También los cuatro primeros versos de la estrofa 65 del panegírico al duque de Lerma, escrito por Luis de Góngora en 1617:

Apenas confundió la sombra fría,
Nuestro Horizonte, que el Salón brillante,
Nueuo epicyclo al gran Rubí del día
Y de la noche fue al mayor Diamante. etc.

(en lugar de «fue» lee «dio» el texto de las *Obras completas* [Aguilar, Madrid 1972] p. 703).

De nuevo en esa misma página encontramos un texto de «D. Garcias Coronel», que dice así: «Nuestro Poëta en esta metaphora es digno de censura, respecto de auer faltado a la propiedad y semejanca, porque el Sol no tiene epyciclo, como lo saben los Astrónomos, y afirma Clauio en su Comentario al quarto capitulo de Sacrobosco».

El libro está plagado de frases, dichos y citas en castellano. Señalaré todavía algunas más.

60 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 117-134. Este segundo proemio no es señalado en el texto, pero sí lo es en el índice.

61 «Numerus, quos Metarithmetos contemplatur: vel sunt Proportionales, et ipsi vocantur *Enarithmi*. vel sunt determinati, et isti *Hyperarithmi* nominantur: Hi autem illis adjacent: et sunt aut Positivi, aut Negativi. His positis.

XXXVII. Conclusio sit. *Objectum essentiale, et primarium Algebrae est Enarithmus, seu Numerus proportionalis: Objectum accidentale, quod interdum abest, est Hyperarithmus, Numerus determinatus superveniens. Finis est Numerus ignoratus, ad cujus cognitionem per Enarithmos devenitur*», *Mathesis biceps*, p. 119.

los signos que utilizará a lo largo de todo su estudio[62]. Para terminar estos proemios, nos indica Caramuel las ocho reglas de la «metarithmetica», esto es, la «additio», la «substractio», la «multiplicatio», la «divisio», la «regula aurea», la «radicis quadrate extractio», la «radicis cubicae extractio» y, por último, la «duorum numerorum aequatio».

Lo que pudiéramos llamar cuerpo principal de esta parte segunda consta de unas «Quaestiones Enarithmeticae» [63], que comienzan citando el libro VIII de la Poética de Aristóteles[64], y que resuelven treinta problemas con nombres y enunciados pomposos. Luego, unas «Quaestiones secundarias» [65] resuelven otros treinta y cuatro problemas distintos.

* * *

La geometría la trata en su «Syntagma tertium. Geometria de Punctis, Lineis, Angulis, Superficiebus et Solidi» [66]; comienza con un prólogo dividido en varios artículos[67], en los que nos habla de la geometría de la antigüedad, del nombre, lo que se trae entre manos y las partes en que se divide, y, por fin, de su objeto. En paralelismo con la definición de la aritmética, la geometría es definida así: «Geometria est *Ars bene metiendi*» [68].

62 «+ est nota numeri positivi: et — negativi.
Æ insinuat numerus, inter quos ponitur aequales esse.
√ est Radix quadrata; et √ √ est Radix cubica.
□ significat Quadrum, seu superficiem: et C cubum, seu corpus.
'. Maluimus ponere apices, nam erat molestum, et errori obnoxium eandem literam A pluries multiplicare», *Mathesis biceps*, p. 121.

Así, por ejemplo, el número 256, cuyo nombre propio es «tricuadrado», y cuya abreviatura es «Tq», y es equivalente a la operación «aaaaaaaa», para él queda así: «v'''». Cf. Florián Cajori, *A History of Mathematical Notations. Notation in Elementary Mathematics* (original de 1928), La Salle, Ill., The Open Court, 1974, pp. 59, 61 (le llama «autor no-español»), 299, 303-304, 326, 349, 350, 370, 383 y 410.

63 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 124-134.

64 *«Exemplis utimur in dicendo, ut faciliùs intelligatur, quod dicitur*, ait Aristoteles *lib. 8 Poëticae»*, *Mathesis biceps*, p. 134.

65 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 177-206.

66 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 207-344.

67 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 209-223.

68 «Geometria est *Ars bene metiendi*. Iam subaudio. Redunbat, inquis, illud *bene*: non enim ad male operandum sunt Artes. Sed non redundat, inquam ego, quod additur majoris claritatis gratiâ. (Ut communis Opinio statuit, Objectum Geometriae est Quantitas Continua: et Discreta Arithmericae. Unde quidquid Quantitas Continua sit, in Geometriae objecto claudetur: et non claudetur, quod Quantitas Continua non sit. Quam ob rem, cùm inquiritur, An Punctum ad Geometricam considerationen pertineat? quaeritur, An illud Quantum sit? si enim est Quantum, ad Geometriae contemplationem spectat: si non est, son spectat). Haec doctrina tanquam fundamentalis supponitur. Sed aliqui, quia volunt Puncta, Vacuum, et Spatia imaginaria Geometriae subjicere, et putant illa Quantitatem non esse, sic pronunciant. (Objectum Geometriae est Ens Mensurabile: et Numerabile Arithmeticae. Unde quicquid mensurabile sit, in Geometriae objecto claudetur; et non claudetur, quod mensurabile non sit. Quam ob rem, cùm inquiritur, An Punctum, an Vacuum, an Spatia imaginaria, etc. ad Geometricam considerationem pertineat, quaeritur, An illa mensurabilia sit? si enim sunt mensurabilia, ad Geoemetriae contemplationem spectant; si non sunt, non spectant). At, si res bene consideratur, hi duo modi cincidunt, quoniam omne mesurabile est quantum, et nunc quantum est mensurabile. Poenans igitur Quantitatis categoriam, cujus posteà species singulas examinabimus», *Mathesis biceps*, pp. 211-212.

Es interesante que nos fijemos con cierto detalle en unas páginas [69] en las que trata de la composición del continuo, del vacío y de los espacios imaginarios. La cantidad ha quedado, para Caramuel, dividida en punto, línea, superficie y cuerpo o sólido. Punto es la cantidad sin longitud, y por tanto sin latitud y sin profundidad; no es asimilable a un número, «punctum non esse quantitatem contendunt» [70]. Línea es la cantidad con longitud, pero sin latitud y sin profundidad. Superficie es la cantidad con longitud y latitud, pero sin profundidad. Por fin, cuerpo es la cantidad que las tiene a las tres. Clarificadas así las cosas, pasa Caramuel a considerar las tres opiniones posibles con respecto a la composición del continuo. La primera es la que defendían los estoicos, y que antes sostuvieron Zenón, Pitágoras, Demócrito, Leucipo, Platón y Anaxágoras, para quienes el número se compone de unidades y la línea se compone de puntos [71]. La segunda es la de quienes rechazan toda indivisibilidad positiva. Por fin, la de quienes componen el continuo de partes y de puntos terminativos y unitativos [72]. Para él, sin embargo, el punto no es mensurable intrínsecamente, pero sí que lo es extrínsecamente. Por ejemplo, la línea circular es la que equidista del centro, y, con todo, esta medida, que es mensurable en geometría, no es intrínseca a la línea circular: «Ergo lineam Circularis dicit formaliter extrinsecam mensurabilitatem» [73]. Con respecto al vacío y al espacio imaginario, deben distinguirse ambos, pues éste, que concebimos fuera del cielo, al no encerrar lugar, no puede contener cuerpos [74]. ¿Es posible el vacío? No, no puede darse el vacío, ni siquiera fuera de los espacios celestes [75].

El texto propiamente dicho del «syntagma» se divide en ocho libros [76]. En el primero de los cuales se preocupa de los fundamentos de la

69 Justo las que siguen a la larga cita anterior. Cf. *Mathesis biceps*, pp. 212-225. Léase Pastine, pp. 236-237. Para Santiago Garma —y para mí— estas páginas son muy interesantes, pues el 'continuo' de Caramuel «no está formado por puntos, lo que quiere decir que los puntos 'matemáticos' de que habla existen cuando se designan, o como se diría en lenguaje actual, cuando se ha encontrado un procedimiento constructivo para hacerlos existir en un momento determinado. Si consideramos predominantemente la 'existencia' de los puntos no creo muy exagerado decir que nos acercamos mucho a la problemática que llevó a la creación de la Teoría de Conjuntos y que hizo necesario el establecimiento del 'axioma de elección'», Garma, pp. 61-62.

70 *Mathesis biceps*, p. 212.

71 Es la que, nos dice, sostienen Emmanuel Maignan, Ildefonso Peñafiel, el P. Herize, el P. Albis, el P. Molina, el P. Ortega y Gassendi.

72 La defendida por santo Tomás y por Duns Scoto. La defiende, nos dice, Fonseca.

73 Cf. *Mathesis biceps*, p. 214.

74 Cf. *Mathesis biceps*, p. 215.

75 Así lo afirma en el índice, *Mathesis biceps*, p. VII: «Non datur nec dari potest vacuum; et hoc, ne quidem de potentiâ Dei absolutâ. Non dantur, aut dari possunt extra coelum spatiâ». Véase también Pastine, pp. 238-239; no dejen de leerse las opiniones que vierte en las pp. 239-240.

76 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 224-344. «Liber Primus: De Fundamentis Geometricis» (224-228); «Liber secundus: De Punctis» (228-247); «Liber tertius: De Lineis» (247-262); «Liber quartus: De Angulis» (262-269); «Liber quintus: De Superficiebus» (269-303); «Liber sextus: De Solidis» (304-310); «Liber septimus: De Figurarum Geometricarum Metamorphosi» (310-326); «Liber octavus: De Argumento, et Imminutione Figurarum» (327-344).

geometría, es decir, de cuáles son sus postulados o axiomas. Dos puntos siempre están separados y sólo se unen entre sí mediante una línea [77], primero de los cinco postulados que nos propone Caramuel [78] y que nadie podrá negar [79]; son así los postulados o axiomas necesidades geométricas, asertos fundamentales, que no pueden ponerse en duda, pocos pero suficientes para todas las demostraciones [80]. Tras ellos puede proponernos ocho principios con los que cerrar este libro de los fundamentos de la geometría, los que nos van a permitir el manejo en el campo de la geometría mediante la igualdad y la comparación [81].

77 «Postulatum I. A puncto quaeris in punctum, quod vis lineam rectam ducere». Le sigue el siguiente comentario: «Et hic petunt aliqui, cur hoc liceat? Michaïl Havemannus hanc rationem adsignat. Quia cùm duo puncta immediatè non possint succedere, nec immediaté uniti, necessariò lineam ut uniantur, requirunt. Sed haec ratio nec Zenoni, nec ejus Discipulis satisfaciet; supponit enim id, quod negat Zeno, videlicet puncta non posse immediate uniri sine intermediâ lineâ. Rem ergo certam Havemannus hoc argumento ad probabilitatem reducit; hucusque enim in Scholis utraque opinio (Zenonis, Aristotelisque) judicatur probabilis. Cur igitur haec Α'ΙΤΗΣΙΣ concedi debet? Dicem inferiùs, postquam omnes quinque explicabero. Num. XLI. Sanè potest Α'ΙΤΗΣΙΣ aliis verbis proponi, videlicet, *Licet Geometrae lineam rectam ducere, und velit, quo velit, et quantam velit*. Sunt enim, quia omnia puncta negant; et isti posse a puncto ad punctum duci lineam, non libenter subaudient», *Mathesis biceps*, p. 224.

78 Los otros cuatro son: II, «Licet lineam datam ulterius producere»; III, «Licèt super quocunque centro, et quocunque radio, aut circulum, aut arcum (hoc est, circuli partem) describere»; IV, «Licet à dato puncto lineam ducere aequalem datae rectae»; V, «Licet datis duabus lineis inaequelibus minorem à majore auferre».

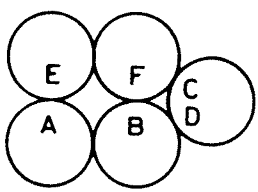
79 «Hae sunt quinque licentiae Geómetris universis concessae, quos non posse negari, sic demonstro», *Mathesis biceps*, p. 225. «La geometria naturale si identifica per Caramuel con gli assiomi, i postulati e le definizioni di Euclide. L'aritmetica decimale ha perduto per lui ogni valore naturale e si reduce ad un sistema scelto arbitrariamente tra e tanti altri possibili; la fisica e la metafisica aristotelica hanno cessato di riflettere l'ordine naturale delle cose nel loro divenire sensibile e nella loro essenza; la logica scolastica non representa piú le leggi connaturate con la stessa ragione umana; il diritto giustinianeo non fonda piú la sua validità sulla conformità al diritto naturale. Persino il Decalogo è dichiarato frutto della libera volontà divina che avrebbe potuto imporre a Mosé leggi diverse da quelle positivamente emanate. Ma la parte introduttiva della geometria euclidea non ammette alcuna critica ed è al di sopra di ogni sospetto. La cultura seicentesca non poteva rinnegare il proprio idolo, il proprio modello, la pietra di paragone che garantiva la validitè di ogni teoria e la sicurezza di ogni procedimento razionale. Di fronte agli Elementi di Euclide i propositi critici e l'analisi scettica di Caramuel cadono completamente disarmati», Pastine, p. 240. «Como vemos, los tres primeros Postulados son los mismos en los dos (Euclides y Caramuel), mientras que el 4° de Euclides aparece en Caramuel en los Principios y el 5° (el célebre de las paralelas) no lo incluye», Garma, p. 49; el contenido de los dos paréntesis es mío, no de Garma.

80 «Sunt autem Axiomata, quaedam *Necessitates Geometricae, quae aliter se habere non possunt: sunt, inquam, quaedam Fundamentales Assertiones, quae in dubium non possunt venire*. Pauca sunt haec Axiomata, sed sufficientia omninò, ut omnis demonstratio formetur», *Mathesis biceps*, p. 225.

81 I, «Quae uni, et eidem sunt aequalia, inter se sunt aequalia. Aliter. Si dentur duo aequalia, quidquid alteri sit aequale, etiam alteri erit aequale: et quidquid alteri sit inaequale, etiam alteri erit inaequale»; II, «Si dentur duae lineae ignotae magnitudinis, aut proportionis, si tamen utraque sit tertiae dimidia (aut etiam, dupla, tripla, et) inter se erunt aequales. Aliter. Si dentur duae lineae aequales, et altera sit tertiae dupla, tripla, etc. etiam hanc eandem proportionem altera»; III, «Si aequalibus addantur, aut adiamntur aequalis, aequalia permanent»; IV, «Si inaequalibus addantur aut adimantur aequalia, inaequalia permanent»; V, «Si inaequalibus addantur inaequalia; (neque majus majori, et minus minori) remanent inaequalia»;

El segundo libro habla del punto, y en él nos las vemos continuamente con Aristóteles y con Zenón [82]. El punto geométrico es un «cuerpo individuo» en el que no se da ni longitud ni latitud ni altitud, y por causa de su incomprensible brevedad no puede dividirse en partes [83]. Para algunos, sin embargo, nos anuncia Caramuel, los problemas del punto no debieran tratarse aquí, pues no es una cuestión que toque a la geometría, sino a la física, pero los puntos de la física son corpúsculos con longitud, latitud y profundidad, que tienen magnitud sensible, mientras que los puntos matemáticos carecen de cualquier magnitud sensible o inteligible [84]. De ahí pueden desprenderse ocho lemas que vamos a ver a continuación.

El lema primero afirma que el punto no tiene partes intrínsecas o entitativas [85]. Los seguidores de Zenón componen el continuo de puntos y de átomos, opinión que, aunque Caramuel no comparte, nos dice que entiende y le parece que puede ser defendida plausiblemente. Sus puntos son de naturaleza indivisible [86], pero, como se ve en la figura adjunta, sus indivisibles deben tener una magnitud dada:




Esos puntos, no pueden llenar todos los pequeños espacios intersticiales, supuestos esféricos, como se aprecia muy bien en esa figura. ¿Qué diremos de esos «espacillos» que quedan entre los átomos? ¿Habrá vacío en ellos? ¿Habrá como una materia líquida de divisibilidad infinita que lo ocupa todo al ocupar los «espacillos» entre los átomos? Así lo pensaba René Descartes, al que muchos «varones ingeniosos»

VI, «Si ab inaequalibus inaequalia auferâtur (minus à majori, et majis à minori) remanet inaequalia»; VII, «Omnes anguli recti sunt aequales»; VIII, «Totum est majus suâ parte».

82 Cuando se refiere a este libro segundo, en la p. VIII del índice comienza así: «An hic liber ad Philosophiam veriùs, quàm ad Mathesim spectet?». Sobre el punto, léase Pastine, pp. 237-238, también Garma, pp. 50-53.

83 «Geometriae Punctum esse corpus individuum, in quo neque longitudo, neque latitudo, neque altitudo deprehenditur; et ob incomprehensibilem brevitatem sui, in partes divisi non posse», *Mathesis biceps*, p. 228.

84 «Puncta Physica esse quaedam corpuscula, habentia longitudinem, latitudinem, et profunditatem, ac propterеà figuram, esse tamen tam parva, ut sensum effugiant, et sensibili magnitudine coreant. Mathematica autem non solùm sensibili, sed etiam intelligibili magnitudine, et extensione carent.

Demonstraturus igitur Quantitatem Continuam, quae Geometriae objectum est, octo Fundamenta adsumam, quae, quia adsumun, *Lemmata* vocabuntur, nan illorum demonstrationes alio in loco ponentur», *Mathesis biceps*, p. 229.

85 «Lemma I. Punctum non habet partes intrinsecas, et entitativas», *Mathesis biceps*, p. 229.

86 «At divinitùs frangi, et incidi possint», *Mathesis biceps*, p. 229.

siguen. Sin embargo, no puede ser así, en opinión de Caramuel [87]. Tampoco está de acuerdo con la opinión de quienes dicen que esos puntos no pueden de ninguna manera ser rotos, ni siquiera por la acción divina; no es partidario Caramuel de los que así piensan, pues ello nos impediría llegar a los sólidos perfectos, y además ¿qué impediría a Dios dividir esos átomos o hacer lo que le venga en gana? Otros consideran puntos reales y entitativamente indivisibles, que ocupan un espacio indivisible [88], lo que tampoco tienta a nuestro autor, pues hablan los partidarios de tal opinión de indivisibles pero con divisibilidad virtual, pero ¿qué significa eso? Rechazadas esas tres maneras de ver, se abre a Caramuel la suya: mirados desde una perspectiva los puntos son indivisibles, desde otra son divisibles hasta el infinito [89].

En los lemas sucesivos, nos enseña Caramuel que la línea no se compone de los solos puntos [90]; que añadiendo un punto a otro punto no resulta un punto más gordo [91]; que toda línea puede dividirse en varias partes iguales [92]; que en todo cuadrado el diámetro es mayor que un único lado y menor que dos tomados a la vez [93]; que en una esfera no puede descansar la superficie cóncava cuando se retiene la convexa [94]; que en cualquier circunferencia desde puntos se pueden trazar líneas iguales hasta el centro [95].

El lema VIII afirma que los puntos, sean terminativos o continuativos, son entidades negativas [96]. Como consecuencia, dado que el con-

87 «Sanè uterque modus dicendi stare non potest, nam quisquis Vacuum dari posse divinitùs asserat, quid sit spatium, nescit», *Mathesis biceps*, pp. 229-230.

88 Cita a Ildefonso Peñafiel in Physicâ disp. 15, quaest. 2, sect. 5. nu. 29.

89 «Vidimus, quid hae tres sententiae de Punctorum indivisibilitate statuant. At, quia eadem puncta, quae in uno genere sunt indivisibilia in alio sectilia dicuntur, hanc secundariam divisibilitatem perpendamus. (...) Ergo facilius esset hanc ipsam divisibilitatem in infinitum admittere in ipsâ materiae entitate», *Mathesis biceps*, pp. 230-231.

90 «Lema II. Linea non componitur ex solis Punctis. Corollarium. Ergo, nec Superficies solis Lineis, nec Corpus solis Superficiebus», *Mathesis biceps*, p. 231.

91 «Lema III. Punctum additum puncto non facit majus. *Aliter*. Indivisibile additum indivisibili, non facit majus. *Aliter*. Nulla extensio addita nulli extentium, non facit majus. *Corollarium I*. Punctum (indivisibile, seu nulla extensio) si addatur parti, non facit majus. *Corollarium II*. Ergo linea non componitur ex punctis», *Mathesis biceps*, p. 232. Tal es, dice Caramuel, la doctrina de Aristóteles, contraria a los principios de Zenón, y lo es también la de Suárez to 3 in 3 part. disp. 52 sect. 3.

92 «Lema IV. Omnis Linea potest in duas, tres, quatuor vel plures aequales partes dividi. *Corollarium*. Ergo linea non componitur Punctis», *Mathesis biceps*, p. 233. También contra Peñafiel.

93 «Lema V. In omni Quadrato diameter est major uno latere solo: et est minor utroque simul sumpto. *Corollarium*. Ergo linea non componitur Punctis», *Mathesis biceps*, p. 235, De nuevo se muestra Caramuel contrario a Peñafiel.

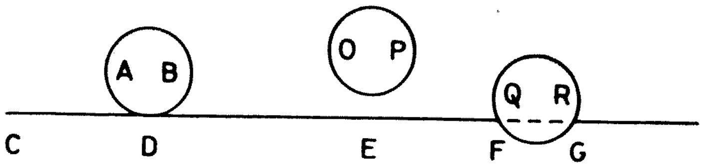
94 «Lema VI. In Globo solido, non potest concava superficies quiescere, quando convexa premovetur. *Corollarium*. Ergo linea non componitur Punctis», *Mathesis biceps*, p. 236. Sigue contra Peñafiel.

95 «Lema VII. Ex quibucumque circunferentiae punctis possunt lineae simul ad centrum dimitti. *Corollarium*. Ergo linea non componitur ex punctis», *Mathesis biceps*, p. 238. Su opositor sigue siendo Peñafiel.

96 «Lema VIII. Puncta, sive terminativa, sive continuativa, in continuo sunt entitates negativae. *Corollarium*. Ergo linea non componitur ex punctis», *Mathesis biceps*, p. 239.

tinuo es algo positivo, no puede terminar con algo, el punto, puramente negativo [97]. En la figura,


la línea AE comienza en A y termina en E, nos dice Caramuel, pero ¿qué significa eso? Que no empieza ni antes de A ni después de A; que no termina ni antes de E ni después de E. Luego el principio y el fin de la línea consiste formalmente en una negación. Se pone a sí mismo una objeción: una esfera perfecta incide en un plano en un punto, el punto de contacto, luego tenemos ahí un punto verdaderamente real y positivo, como se aprecia en la figura.



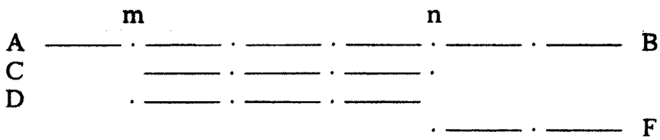

Pero no, no está de acuerdo Caramuel con el contenido de esa objeción, sino que sigue siendo un punto puramente negativo, pues CD es la línea que termina en D, es decir, que no va más allá de D. Al moverse la esfera por la línea CD, se diría que está tocando continuamente puntos, que, por llevar más lejos la objeción, existen, pero tampoco es así, pues simplemente hay que introducir el tiempo en la respuesta que acaba de dar a la objeción, pero sin que cambie fundamentalmente su sentido [98].

Entramos ahora en una segunda objeción en la que hacemos intervenir por entero al tiempo. En la figura, la línea AB será el tiempo, que se compone de partes, como se ve, las cuales se unen por medio de puntos [99].

97 «Patet consequentia: quia Continuum est res positiva, et ideò ex puris negationibus fieri non potest», *Mathesis biceps*, p. 239.

98 «(...) nam Globus motu suo semper tangit partem: quia omne tempus praesus fuit divisibile, et in motu, adeoque in lineâ, debet correspondere pars aliqua analoga, et proportionata. Unde, si Globus AB. motu suo continuo describat lineam DC. uno anno: si *nunc* annum praesentem significet, tota linea DC. respondet uni *nunc*, si significet *nunc* praesentem mentem, praesentem hebdomadem, praesentem diem, praesentem horam, praesentem horae scrupulum, singulis *nunc* in lineâ respondebit pars aliqua analoga, et determinata, nam, ut dicebamus, tempus presus non est instans, aut punctum, aliquod indivisibile, sed illa temporis paris, quae fluit actu», *Mathesis biceps*, p. 245. En la página anterior había dicho: «Respondeo triplicem esse Durationum, et tribus distingui nominibus: vel enim est Aeternitas, vel Tempus, vel Aevum. Aeternitas est duratio totaliter permanens, et simultanea: Tempus est Duratio totaliter fluens, et successiva: Aevum interest, quod partìm simultaneum, et partìm successivum est».

99 «(...) sit in *Fig.* linea AB tempus; quod, ut vides, componitur ex partibus, quos uniunt puncta. Sit C. albedo: nimirùm, materialis qualitas, quae incipit extrinsecè, et definit intrinsecè: nam in instanti *m* est verum dicere, *Nunc non est albedo, sed*




Sea C blanca, eso significa que m no lo es todavía, sino que la blancura comienza inmediatamente después, en el instante m comienza la blancura, pero inmediatamente antes no la había. Con el instante n acontece otro tanto. Así, en el instante n coexisten la forma de la blancura de C y la nueva forma de lo que fuere de F. En D y en F, por el contrario, no coexisten, porque en el instante n ya no era lo de D. Un único instante, pues, hace al tiempo más largo; el instante n está fuera del tiempo inmediatamente precedente, y por tanto al añadirlo aumenta el tiempo. Lo mismo ocurre con el punto, que hace a la línea mayor. Los instantes y los puntos se definen negativamente.

Se ha superado así, según Caramuel, la grave dificultad del continuo, mediante la doctrina que queda resumida en estos cuatro puntos: 1) el continuo no se compone de puntos matemáticos, tanto si son finitos como si son infinitos; 2) el continuo matemático es divisible hasta el infinito; 3) en el continuo los puntos no se encuentran en acto, sino en potencia; 4) los puntos no son positividades sino negatividades.

A continuación, en el libro tercero, habla Caramuel de las líneas, entre las que cita las líneas paralelas sin más problemas, es decir, sin poner en discusión el «axioma de las paralelas». Cita la línea «conchili», de la que, nos dice, el padre Mersenne pensaba que lleva a probar la existencia de Dios [100], y luego estudia el círculo, la citoide, la helicoide, la hipérbola y la parábola de A. Kircher, la descripción de la parábola y la delineación de la hipérbola. El cuarto, habla de los ángulos, espe-

*immediatè post erit:* et in instanti *n*, est verum dicere, *Nunc est albedo, et immediatè post non erit.* Modò in alio subjecto sit forma substantialis D. quae incipit intrinsecè, et definet extrinsecè: nam in instanti *m* est verum dicere, *Nunc est forma, et immediate ante non erat,* et in instanti *n* est verum dicere, *Nunc non est D. forma ligni v. gr. et immediatè ante erat,* et in eodem instanti *n* erit verum dicere, *Nunc est F. forma ignis,* (pono hanc succedere) *et immediatè antè non erat.* (...) At in instanti *n* albedo, et forma ignis coëxistent: ergo tardiùs albedo desiit: sed tardiùs per unum instans. Ergo unicum instans facit tempus longius. Confirmatur. Forma ligni fuit in omni tempore usque ad instans *n*. at non fuit in instanti *n*. Ergo instans *n* est extra tempus immediatè praecedens. Ergo instans additum tempori facit majus. Ergo punctum additum linae facit majus.

Quadraginta annos hoc argumento uter, quod illis volùm videtur elumbe, quis illius vires nō penetrant (...).

*Nunc ad usque punctum* m *res temperanea non est, sed immediaté post erit.*

*Nunc ab usque puncto* n *res temperanea non est, sed immeditè ante erat.*

Et *nunc* significabit tempus praesens, quod fluit. et *m*, aut *n* illud instans negativum, quod est initium finis-ve decorationis corporae.

Superavimus gravem difficultatem de compositione Continui, quàm à Geometriâ expunxerant, et in Physicam protruserant Peripatetici. Ergo suponendo (1) *Continuum ex Punctis Mathematicis (finitis, aut infinitis) componi non posse.* (2) *Continui Mathematicas partes esse in infinitum divisibiles.* (3) Puncta, et partes proportionales, ante designationem non esse actu, sed tantùm potentiâ in Continuo. (4) *Puncta non esse positiva, sed negativa», Mathesis biceps,* pp. 245-246.

100 Cf. *Mathesis biceps,* p. 249. Sobre el libro tercero, cf. Parma, pp. 53-55.

cialmente del ángulo de contacto entre una circunferencia y su tangente. En el libro quinto estudia las superficies: el círculo, las figuras ovales, las elipses, los triángulos y los polígonos, con excursiones astronómicas; se hace aquí bien patente que le interesan sobre todo y preferentemente los cálculos, a los que se dedica con frecuencia desusada. En el libro sexto, sobre los sólidos, estudia la esfera, el triángulo, la pirámide, el cilindro, el «dolio» y los sólidos platónicos inscritos en la esfera.

Nos vamos a detener más en el libro séptimo, en el que trata de las metamorfosis de las figuras geométricas. Habla ahí de la cuadratura del círculo [101], pero con claros intereess práctico-calculatorios: se pregunta si es posible y si se ha encontrado la cuadratura exacta del círculo, haciéndolo con una brevedad a la que no nos tiene habituados [102], una sola columna a la posibilidad y el resto a los que dicen que la han encontrado. Su razonamiento principal es sumamente exiguo y sólo toca, en mi opinión, a la posibilidad de llegar siempre a mejores aproximaciones.

El resto del libro lo dedica a otras transformaciones de sólidos [103], en sus cálculos, en los que con frecuencia aplica los logaritmos, aunque todavía no ha llegado al «syntagma» que les está dedicado. Todo el problema de la diivsión de los ángulos en varias partes está, como siempre, mirado desde la mayor perfección y exactitud de los cálculos [104], a los que dedica la mayor parte del espacio y, seguramente, del tiempo.

101 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 310-314. Se interesa por las soluciones arquimedeanas, cita a la de Christian Huygens en su *De Circuli magnitudinem Inventa*, Lugduni Batavorum, 1654, también la mejor de «Ludolphum à Collèn»; las aproximaciones con mínimo y máximo son: 3,1415926533/3,1415926538; 3,141592653589792/3,14159265358979405 y 3,14159265358979323845/3,14159265358979323846, para lo que nosotros llamamos número $\pi$.

102 «Ecce unum Quadrum, et duos Circulos. Circulum Quadro inscriptum esse minorem Quadro certum est. Et Circulum superscriptum esse majorem Quadro etiam est certum. Ergo Quadrum inter hos Circulis habet determinatam Quantitatem, estque major inscripto, et minor superscripto. Iubeatur igitur, vel minor continuâ successione crescere quousque majorem exequet, vel superat: vel major continuâ successione decrescere, quousque ad minoris quantitatem perveniat. Tunc sic: Circulus major decrescendo, et minor crescendo, transiverunt per omnia media, quae sunt inter ipsos. Ergo aliquando tetigerunt illam determinatam Quantitatem quam habet Quadrum intermedium. Ergo tunc fuerunt aequales Quadro. Ergo Quadratura Circuli non est imposibilis. Ergo dari Circunferentia potest, quae lineam rectam exaequant», *Mathesis biceps*, p. 315.

103 «Transformatio Geometrica, universim sumpta, est unius Figurae in aliam conversio, ut si verbi gratiâ, vel quadretur Circulus, vel rotundetur Triangulus (...)», *Mathesis biceps*, p. 317. Cf. Garma, pp. 58-60.

104 «Porro Angulos subrendeunt, et metiuntur arcus; et arcus sunt portiones Circuli. Qui igitur sciat lineam sphoerica, augere, et imminuere, multiplicare et dividere, sciet, et Angulos. Sanè practicè, et mechanichè facilis est omnis operatio: at, ut procedamus speculativè, oportet fundamentales demonstrationes penetrare», *Mathesis biceps*, p. 329. «Con este último libro de la Geometría, se termina la parte de matemáticas, propiamente dicha, correspondiente a la 'Mathesis Vetus'. La hipótesis de trabajo que sustentamos, referente a que Caramuel es un matemático que contribuye a la formalización de la matemática, que es conocedor de los nuevos métodos y uno de los que aportan sus opiniones participando en la discusión de las ideas matemáticas que nacen en su siglo, siendo considerado por sus contemporáneos, se ve inicialmente justificada (...). Así, pues, vemos que los problemas en que trabajan los matemáticos 'modernos' están tratados en la expectación de Caramuel quien es quien comienza a desarrollar las ideas de los 'novatores', aunque conservando el estilo geométrico y no usando apenas fórmulas», Garma, pp. 60-61.

El cuarto «syntagma» toca largamente la «geometría espacial» [105], como vamos a contemplar; es de una gran complejidad y variedad estructural: su articulado es muy corto [106] y luego tiene algunas cartas y apartados infinitos. El título mismo del sintagma nos indica que vamos a toparnos en estas páginas con nuestra Tierra y con los problemas de su medición. Comienza el conjunto con un corto proemio, en el que nos hallamos al pronto con esta pequeña cita española del español Jerónimo Cáncer:

Contaros quiero esta vez
Muy sin nota de grosero
En mi firmeza,
Que a noche a mas de las diez
Tuue un cierto quebradero
De cabeza.

En realidad, los nueve artículos del «syntagma», pues, como ya he dicho, todo lo demás son apósitos, tipográficamente hablando, tiene en la cabecera de página el título que verdaderamente le corresponde: «Geodaesia, terras metiens». Habla en dicho articulado de los diferentes géneros de medida de tiempos y de lugares, y de su conversión; de los instrumentos, aunque pase sobre ellos como sobre ascuas, sin figuras ni descripciones [107]. Como siempre en aquello en que se interesa más Caramuel es en cálculos y en tablas.

Encontramos después una larga carta a Luis de Bolea, marqués de Tormes [108], en la que se nos describe la Tierra, y que viene acompañada de preciosas láminas. Después comienza la retaila de apartados distintos que completan el larguísimo sintagma.

El primero de ellos es el titulado «Centroscopia» o «De Centro Gravitatis et Terrae» [109], dentro del cual nos volvemos a encontrar un revoltijo de cosas. Otra carta al mismo marqués de Torres, también de Bruselas, sobre el centro de gravedad [110]; otra tercera carta al mismo del mismo destino sobre el tratado de Arquímedes en el que se refiere al centro de gravedad [111]; una carta a Bernardo Ignacio, conde de Martinitz, de Praga, titulada «De Perpendiculorum Inconstantia» [112]; un post-scriptum que lleva por título «An sint Pendulorum vibrationes, seu oscillationes isochronae?» [113], en el que nos dice Caramuel que el péndulo es isócrono si se le separa de la perpendicular unos 30°, lo sabe bien pues ha hecho pruebas, tiempo ha, en Lovaina el año 1643, junto

105 «Syntagma qvartum. Geometria specialis. Nimirvm, Geodaesia, cvivs est ΓHN METREIN, Terram metiri», *Mathesis biceps*, pp. 345-779.

106 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 347-381.

107 Enlas láminas IX y X, sin embargo, encontramos representados varios de esos instrumentos, preciosamente, como siempre también.

108 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 382-414. Cf. nota 12.

109 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 415-486. Cf. nota 12. Léase Pastine, pp. 244-247.

110 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 416-419. Cf. nota 12.

111 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 419-422.

112 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 422-435.

113 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 435-439. Cf. nota 31. Léase Pastine, pp. 248-250.

a Godefroid Wendelin [114]; por fin, varias cartas a Marcus Marci, tanto en Praga como en Lovaina, sobre las libraciones de la Tierra [115].

En este amasijo de cosas, que normalmente recoge de su tiempo lovaniense, encontramos citados a numerosísimos autores: Copérnico, Kepler, Tycho Brahe, Gassendi, Mersenne, Grimaldi, Kircher, Schneider, Galilei, Descartes, Clavius, Cardado. Entre ellos, al que sigue siempre es a Tycho Brahe. Demuestra un gran conocimiento de Kepler. Kircher, como sabemos, es su amigo y confidente. A Mersenne y Descartes los sigue, y discute, de lejos. Pero, insisto, en todo lo que se refiere al movimiento de la Tiera, su maestro es Tycho Brahe [116]: la Tierra está quieta en el centro del Universo, en todo lo demás Copérnico tiene razón. Las teorías copernicanas son buenas, incluso buenísimas, para todo tipo de cálculos y construcción de tablas, pues es una teoría puramente matemática que sirve para eso, pero que no quiere decir nada de la realidad física [117], la cual nos viene dicha por Tycho Brahe.

A partir de ahora nos encontramos con infinitos apartados en los que, como vamos a ver habla de todo a la vez: Orometría [118], Hydrografía [119], Nautica, o arte de marear como se decía entonces tan bonitamente [120], Hipotalática [121], Néctica [122], Náutica terráquea [123], Potomogra-

114 Es aquí en donde viene la cita de Mersenne que dice: «Nescio, quo fato ingeniosissimus Mersennus in Mathematicum audacem (sic Caramuelem vocat, quòd Mathesim audacem ediderit) commotus exersit, ut communes, et ab omnibus approbatus sententias rejiciat, hoc solo capites quod fuerit ab isto approbatae», *Mathesis biceps*, 436. Véase Pastine, pp. 249-250.

115 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 448-486. Cf. nota 12.

116 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 440-444. Sería interesante mirarlo despacio.

117 Recuérdese el prefacio al *De revolutionibus* de Copérnico, escrito por Andreas Osiander, el editor del libro, pero que aparecía sin nombre de autor, por lo que fue atribuido al mismo Copérnico. Sin embargo, como se sabe, Kepler impugnó siempre esa autoría y rechazó de pleno esa distinción entre la 'física' y la 'matemática'. Caramuel conocía a Kepler.

118 «Oromometria. Montium altitudinem metiens», *Mathesis biceps*, pp. 448-486.

119 «Hydrographia. Marium superficiem metitur, et describit, posteàque audentior, in abyssus subterraneos se insinuat expenditque, quomodo in Mare Fluidi exonerent, ut iterum fluant», *Mathesis biceps*, pp. 518-562.

120 «Navtica, seu Ars Navigandi, quam graecè vocans HISTODROMICAM», *Mathesis biceps*, pp. 562-635. Cómo navegar y los diferentes problemas que ello plantea cuando se quiere encontrar la posición de los barcos e incluso la posición de cualquier punto de la Tierra. Sobre esta ciencia y las siguientes, léase Pastine, pp. 257-261.

121 «Hypothalathica, Ars navigandi sub aquis», *Mathesis biceps*, pp. 636-642.

122 «Nectica. Nandi Ars», *Mathesis biceps*, pp. 642-646. En la cabecera de las páginas pone «natandi». Cita aquí al español Antonio Ruiz y a la conquista espiritual del Paraguay, en p. 645.

123 «Nautica terrea. Ars navigandi supra terram», *Mathesis biceps*, pp. 646-648.

fía [124], Hidráulica [125], Aerografía [126], Anemometría [127], Ptética [128], Náutica etérea [129], Esciografía [130]. Por fin, terminando ya, encontramos todavía una epístola a Antonio del Yerro, caballero de la orden de Alcántara, hijo primogénto del marqués de Castelforte [131], una nota [132] y un índice de tablas de cosas y de nombres [133].

* * *

Salidos de esa selva «moral y espiritual» en que nos metió, deliciosamente, el anterior sintagma, entramos ahora en el quinto, el que trata de los logaritmos [134], uno de los más importantes, pues es aquí en donde sí que encontramos a nuestro Caramuel en las historias de esa parte de las matemáticas [135]. Muy bien sabe nuestro autor quién fue el inventor de los logaritmos, Neper; también sabe de sobras el interés y el éxito que en ellos puso Briggs; ha practicado a Kepler lo suficiente paar conocer su papel en la historia naciente de los logaritmos [136], mas ahora quiere él aportar su granito de arena.

124 «Potomographia. De Fluviis Naturalibus et Artificialibus», *Mathesis biceps*, pp. 648-684. En la página 649 leemos esta preciosidad:

Yo soy Duero
Que todas las aguas bebo:
Si no es Guadiana,
Que corre por tierra llana:
Y Guadalquivir,
Que nunca le ví.

125 «Hydraulica. De Fontibus Artificialibus, et Naturalibus», *Mathesis biceps*, pp. 685-714. En lo que toca a las fuentes artificiales, habla sin más de hidráulica.

126 «Aërographia, Aerem mensurans, ac ponderans», *Mathesis biceps*, pp. 715-720.

127 «Anemometria, De Ventorum numero, et varietate», *Mathesis biceps*, pp. 721-739.

128 «Ptetica, Ars volandi», *Mathesis biceps*, pp. 740-742.

129 «Nautica aetherea, Ars navegandi supra aërem», *Mathesis biceps*, pp. 743-762.

130 «Sciographia, de Umbra, et Solari praecipuè: adeòque de Delineatione Horologium», *Mathesis biceps*, pp. 763-772.

131 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 773-777.

132 «De Ferreae Mathesos fundamento, propagatione, et promotione», *Mathesis biceps*, pp. 777-779.

133 Se cierra aquí el primer volumen. El índice de nombres no es completo. Es aquí en donde encontramos las palabras sobre Kircher citadas en la nota 14.

134 «Syntagma qvintvm. Logarithmica, de Numeris et Lineis, Rationalibus seu Artificialibus. Est Scientia Nova; Arithmeticam cum Geometriâ conjuntuus; à Nepero sub annuun MDCXV. inventa, premota à Briggio: et tandem à nobis ut putans, perfecta», *Mathesis biceps*, pp. 781-920. Cf. Pastine, pp. 231-234. Comienza aquí el segundo volumen, el cual tiene la numeración correlativa con el primero.

135 Cf. Charles Naux, *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*. Tomo II, *La promotion des logarithmes au rang de valeur analytique*, París, Blanchard, 1971, pp. 59-62. Aunque Naux nos lo mete «benedictino», opina que Caramuel, en el grueso libro que ahora comentamos, «vulgarise les données les plus récentes de son temps, ou bien reprend les connaissances anciennes sous un jour moderne», en p. 59. En sus breves notas históricas, alaba a Neper y a Briggs, pero «fustige Kepler, parce qu'il a malmené les logarithmes de Neper, et le raille en lui reprochant d'avoir voulu donner une leçons à un mathématicien qui en savait plus que lui».

136 Sobre Kepler, véase las pp. 128-158 del tomo primero de Naux. Sobre Jost Bürgi, alemán que vivió en Praga cuando Caramuel estuvo por allá, véase pp. 92-98 del mismo.

Comienza, como siempre, con un proemio [137], en el que nos pone en situación, es decir, nos explica la importancia de las tablas trigonométricas, y el papel preponderante que en ellas tiene la entrada de los «nuevos números», recientemente inventados. Ya en el articulado del sintagma, comienza con una historia de la invención de los logaritmos [138], para pasar luego, en el artículo segundo [139], a los logaritmos mismos, comenzando por una curiosa definición: la logarítmica «es la ciencia que fabrica logaritmos», los cuales son números artificiales que se interrelacionan con los números naturales [140]. De ellos se dice exactísimamente el axioma español: «Dime con quien andas, y direte quien eres» [141]. La tabla siguiente nos muestra el papel y lugar de la interrelación de los números naturales con los «logarithmi profluens» y los «logarithmi refluens»; en los primeros, los números naturales y los números logarítmicos crecen en idéntico sentido; en los segundos, al crecer los números naturales, decrecen los logaritmos. He aquí dicha tabla [142]:

137 «Proemium. De Sinuum, Tangentium, et Secantium Tabula», *Mathesis biceps*, 783-793.

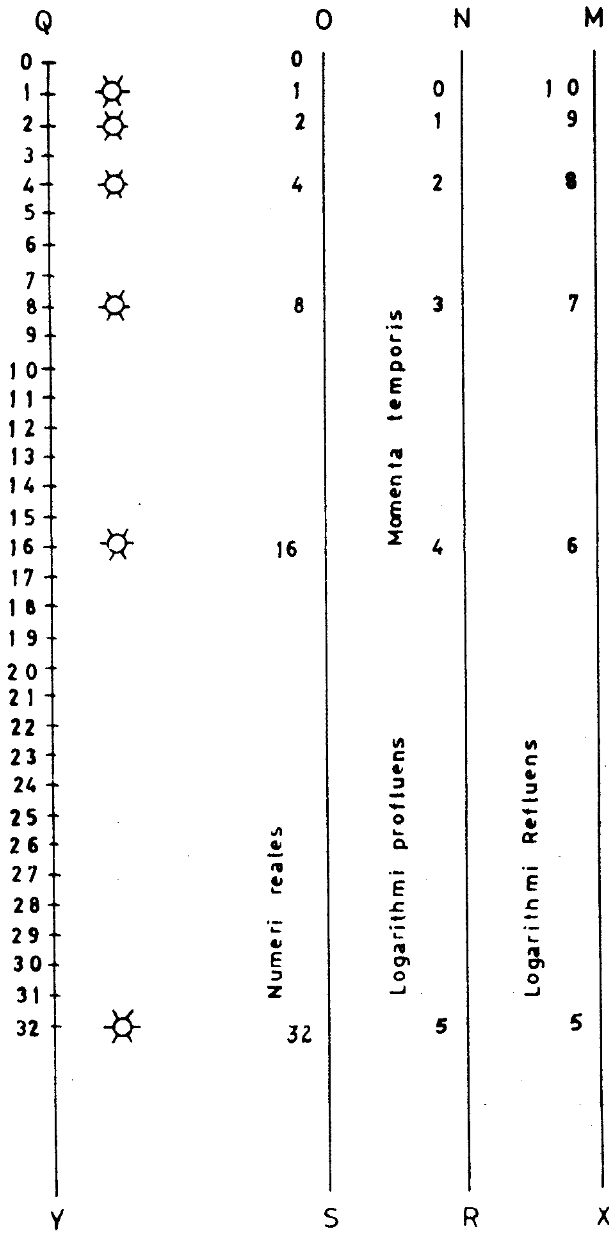
138 «Articulus I. De Logarithmorum Inventione, Varietate, Facilitate, et Perfectione», *Mathesis biceps*, pp. 794-797.

139 «Articulus II. De Logarithmis universim», *Mathesis biceps*, pp. 798-805.

140 «Logarithmica à Logarithmo dicitur, et est Scientia, quae Logarithmos fabricatur, et illis fabricatis utitur. Sunt autem Logarithmi Numeri Artificiales, seu Rationales, qui concomitantur Naturales; et nos ducunt, ut Naturales, qui erant priùs ignoti, cognoscamus», *Mathesis biceps*, p. 798. ¡Con razón dice Naux que «Caramuel commence par une définition qui ne brille pas par l'élévation de pensée»! Según este autor «racional» debe entenderse en el sentido de «construidos por la razón», lo que se acuerda con lo que dice en la p. 844: «La perfección de los logaritmos es doble: absoluta y relativa (absoluta et relata). En lo que concierne a los logaritmos, la perfección reside en su pura entidad de números (in ipsà numerorum entitate consistit)». Para el mismo Naux, «acompaña» significa la simple idea de la interdependencia funcional: como si interpretamos $y=\log x$ en el sentido de que $y$ acompaña al número $x$ (todo ello en Naux, tomo II, p. 59). El ha traducido por «acompaña» lo que yo he dicho «se interrelacionan».

141 En *Mathesis biceps*, p. 798.

142 Cf. *Mathesis biceps*, p. 799.




Como se recuerda, en los logaritmos se pone en correspondencia una 'escala' en la que hay una progresión aritmética, es decir, cuyos intervalos son siempre idénticos, tal como acontece en los números naturales, con otra 'escala' en la que se encuentra una progresión geométrica, es decir, cuyos intervalos son crecientes o decrecientes según se ponga ésta con relación a aquella, sea que los valores más altos de ambas 'escalas' están en sentido inverso en las dos o en el mismo sentido. La primera de las escalas nos viene dada, es la serie de los números naturales. La segunda, aquella que contiene la progresión geométrica, puede escogerse a voluntad, por así decir. En los logaritmos neperianos [143], éstos decrecen al crecer los números naturales a que se corresponden; en los de Briggs [144], las 'escalas' están tomadas de manera que al crecer los números naturales, crezcan los logaritmos. Caramuel sigue a Briggs [145], proponiendo sus propios logaritmos, a los que llama «logaritmos perfectos» [146].

En la «tabla fundamental» [147] nos queda explicado a la perfección, me parece ver, la 'relatividad' en la elección de las bases de los logaritmos y de su amplitud; las 'reglas' que hacen corresponder los números reales con los «números artificiales», se eligen como uno quiere.

VERIS NUMERIS LOGARITHMOS COOPTANS

| NUMERI REALES, SEU NATURALES | | | ARTIFICIALES, SEU LOGARITHMI | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | II. | III. | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. | IX. |
| 1 | 0.9765625 | 1 | 1 | 0 | 35 | 53 | 10 | +5 |
| 2 | 1.9531250 | 3 | 2 | 1 | 36 | 56 | 9 | +4 |
| 4 | 3.9062500 | 9 | 3 | 2 | 37 | 59 | 8 | −3 |
| 8 | 7.8125000 | 27 | 4 | 3 | 38 | 62 | 7 | +2 |
| 16 | 15.6250000 | 81 | 5 | 4 | 39 | 65 | 6 | −1 |
| 32 | 31.2450000 | 243 | 6 | 5 | 40 | 68 | 5 | m 0 |
| 64 | 62.5000000 | 729 | 7 | 6 | 41 | 71 | 4 | −1 |
| 128 | 125.0000000 | 2187 | 8 | 7 | 42 | 74 | 3 | −2 |
| 256 | 250.0000000 | 6561 | 9 | 8 | 43 | 77 | 2 | −3 |
| 512 | 500.0000000 | 19683 | 10 | 9 | 44 | 80 | 1 | −4 |
| 1024 | 1000.0000000 | 59049 | 11 | 10 | 45 | 83 | 0 | −5 |

Con mayor o menor facilidad operatoria, de una forma más o menos simple, mejor o peor adaptada a los diferentes usos, pero como nos prueba muy bien Caramuel a base de ejemplos [148], utilizando su tabla

143 Véase la excelente exposición que hace en su libro Naux, *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*, Tome I, *La découverte des logarithmes et le clacul des premières tables* (Blanchard, París 1966) pp. 34-91.

144 Cf. Naux, tomo I, pp. 99-127.

145 «Après avoir exposé une théorie des logarithmes qui ressemble comme une soeur, en esprit et dans l'expression écrite, à celle de Briggs, il s'étend longuement sur la comparaison des données et des valeurs pratiques des tables de Neper et de Brigg; il ne dit rien de la théorie de Neper», Naux, tomo II, p. 60. En la nota 52 vimos ya una de estas tablas comparativas.

146 David Fernández Diéguez hace una exposición completa, aunque breve y sin adentrarse demasiado en materia, de todo el sintagma; lo recoge por entero Santiago Garma en las pp. 64-66 de su tesis doctoral: cf. nota 1.

147 En *Mathesis biceps*, p. 800.

148 Con ayuda de la «Tabula fundamentalis» véase cómo realiza las raíces cuadradas:

fundamental, hay que decir aquí: todo vale. A los números naturales de la izquierda que están en razón doble en las columnas Iª y IIª y triple en la IIIª, se les hace corresponder unos números «artificiales» en la que la multiplicación por la razón queda convertida en suma de una misma cantidad: 1 en las columnas IVª y Vª, 2 en la VIª, 3 en la VIIª y −1 en la VIIIª y IXª. Además, como se aprecia se comienza como se quiere, por el 1 o por el 0, por el 35 o el 53, por el 10 o el 5. Pero es evidente que habrá que elegir lo mejor posible dentro del conjunto de solicitaciones distintas.

| NUMEROS | LOGARITMOS | NUMEROS | LOGARITMOS |
|---|---|---|---|
| 10 000 000 000 | 0 | 1 | 10,000 000 0 |
| 1 000 000 000 | 1 | 2 | 9,698 970 0 |
| 100 000 000 | 2 | 3 | 9,522 878 7 |
| 10 000 000 | 3 | 4 | 9,397 940 0 |
| 1 000 000 | 4 | 5 | 9,301 030 0 |
| 10 000 | 6 | 7 | 9,154 902 0 |
| 1 000 | 7 | 8 | 9,096 910 0 |
| 100 | 8 | 9 | 9,045 757 5 |
| 10 | 9 | 10 | 9,000 000 0 |
| 1 | 10 | 11 | 8,823 908 7 |
| A | | B | |

Ese es el extracto de su gran tabla de logaritmos 'caramuelenses' del 1 al 1000, en la que se consignan las diferencias [150], y que ocupa largas

| NUMERI NATURALES | | LOGARITHMI | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | | IV. | V. | VI. | VII. | VIII. | |
| Numerus | 1024 | 11 | 10 | 45 | 83 | 0 | A |
| Vnitas | 1 | 1 | 0 | 35 | 53 | +10 | B |
| Differentiae | | 10 | 10 | 10 | 30 | −10 | C |
| Semiss. Differentiae | | 5 | 5 | 5 | 15 | −5 | D |
| Hae addita Vnitati dad | 32 | 6 | 5 | 40 | 68 | +5 | E |

149 Santiago Garma, p. 66. En nota hace una mención del jesuita José Zaragozá que no comprendo. ¿Quiere decir que esta idea la tomó Caramuel del P. Zaragoza? La obra del padre Zaragozá, *Trigonometría española*, fue editada en Mallorca por Francisco Oliver en 1672, es decir, dos años más tarde. «Chilias. Logarithmorum Perfectorum», en *Mathesis biceps*, pp. 850-864. Comienza así este artículo: «Addimus hunc Quintum Articulum (que sólo toma este nombre en la p. XXVI del índice, pero no aquí), in quo nostros Logarithmos producimus, quos *Perfectos* vocavimus (quia enim Neperianorum, et Briggianorum praerogativas, et perfectiones jungum, tanto merentur insigniri vocabulo). Ex his Logarithmis Perfectis Sinuum, Tangentium, et Secantium Artificialium Tabulam condidimus, et superest, ut etiam congenere Chiliadem subjugamus. Illam bene considera, nam Vnitati Logarithmorum 10.00000.00 adscribit: et maximo Numero, seu Sinui toti, qui realiter es 10,000; 000,000. Logarithmum 0.00000.00 hoc est, nihil accesent».

150 En *Mathesis biceps*, pp. 812-822. Debajo de cada logaritmo pone la diferencia con el siguiente, así, por ejemplo.

| NUM. | LOGAR. CUM DIFF. |
|---|---|
| 0 | 0 |
| | 0 |
| 1 | 0.0000000 |
| | 3010300 |
| 2 | 0.3010300 |

páginas. Con ese extracto él se explica y nosotros lo haremos con él. Como muy bien dice Naux [151], a primera vista parece que Caramuel ha obtenido un nuevo sistema de logaritmos, aunque luego, mirando las cosas de cerca, no sea así. La base de su sistema es $10^9$, ya que log $10^9 = 1$, conclusión a la que, evidentemente, llegan Fernández Diéguez y Garma [152]. Pero, con Naux, miremos la tabla de más arriba en el número $10^8$, en donde constatamos que

$$\log_{\text{Car.}} 10^8 = 2 = 10 - 8$$

por donde, de manera general, podremos poner que

$$\log_{\text{Car.}} 10^x = 10 - x$$

si hacemos ahora $10^x = A$, tenemos al punto que $\log_{10} A = x$, por lo que podemos poner más arriba que

$$\log_{\text{Car.}} A = 10 - \log_{10} A$$

lo que se constata sin dificultad ninguna en cada valor.

De aquí que, aunque pueda afirmarse con Fernández Diéguez y con Garma que «se puede considerar a Caramuel como el inventor del cologaritmo», también es verdad, con Naux, que sus logaritmos provienen de los decimales, es decir, los de Briggs, por simple diferencia [153]. Garma

| | |
|---|---|
| | 1760913 |
| 3 | 0.4771213 |
| | 1249387 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| 10 | 1.0000000 |
| | 413927 |
| 11 | 1.0413927 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| 999 | 2.9995655 |
| | 4345 |
| 1000 | 3.0000000 |

151 Cf. Naux, tomo II, p. 61.
152 Cf. Garma, p. 67.
153 Véase la tabla de Naux:

| NOMBRES | 2 | 3 | [illegible] |
|---|---|---|---|
| Log. décimaux | 0,301 02 | 0,477 121 2 | 0,845 098 0 |
| Log. de Caramuel | 9,698 970 0 | 9,522 878 7 | 9,154 902 0 |
| Total | 9,999 999 0 | 9,999 999 0 | 9,999 999 0 |

Naux comenta: «Les logarithmes du Père Caramuel proviennent donc d'une table de logarithmes décimaux par simple différence. Leur calcul es astucieux, mais il manque d'originalité. C'est peut-être pour cela que l'auteur ne dit rien de la génération de ses tables». Sin embargo, continúa: «La superiorité de ces logarithmes sur ceux de Neper et de Briggs paraît bien illusoire. Le Père Caramuel s'est accordé avec eux une satisfaction d'auteur que ses lecteurs n'ont certainement pas tous partagée. Par ailleurs tous ceux qui ont suivi son enseignement n'ont pu que s'en féliciter; car l'exposé est clair, bien ordonné, et fort complet. De nombreuses tables illustrent le texte, qui s'étend aux applications des trigonométries plane et sphérique. La Père Caobserva además que, comparando a Caramuel con la obra de Neper, el conjunto de la obra de éste «está escrita en un lenguaje más formal desde el punto de vista matemático y que el de Caramuel peca de ser un poco discursivo, pero el contenido es el mismo, en uno y en otro» [154]. De hecho, una vez más, hay que decir que el interés de nuestro autor es el de resolver con mayor facilidad los cálculos trigonométricos [155].

Encontramos también en nuestro sintagma una tabla de logaritmos 'refluentes' a la manera de Neper y de Kepler [156], incluidas en ella las diferencias; una tabla de senos, tangentes y secantes en los números 'artificiales' [157]. Una nueva tabla de sus logaritmos del 1 al 1000 [158].

Para finalizar, su artículo sexto [159] lo dedica a los logaritmos «enharmónicos», que encuentra Caramuel son los más apropiados para los cálculos que sean necesarios en la música, para lo que supone la cuerda dividida en 1.024 partes iguales. Al 1.024 le asigna el logaritmo enharmónico 0.00000, llegando, centésima a centésima hasta su mitad, 512, al que se le asigna el 1.00000. La tabla resulta así la que sigue:

| A<br>NUMEROS | B | C<br>LOGARITMOS |
|---|---|---|
| 1024.00 | 0 | 0.00000 |
| 10.24 | | |
| 1013.76 | 1 | 0.01449 |
| 10.14 | | |
| 1003.62 | 2 | 0.02898 |
| 10.04 | | |
| 993.58 | 3 | 0.04348 |
| 9.94 | | |
| . | . | |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 517.01 | 68 | 0.98551 |
| 5.17 | | |
| 511.84 | 69 | 1.00000 |

ramuel a été un des bons vulgarisateurs de cette époque; et le fait d'avoir ajouté ses logarithmes à ceux de Neper et de Briggs —sans toutefois citer les logarithmes naturels— est dejà à lui seul une marque d'originalité qu'il convient de souligner», Naux, tomo II, pp. 61-62.

154 Garma, p. 67.

155 «Luego el sentido para Caramuel de los 'Logaritmos perfectos' no es el de unos logaritmos nuevos con distinta base sino que, para él, está claro que está usando los complementos a 10 de los logaritmos decimales así como de que el cálculo del logaritmo del seno se abrevia con su procedimiento. En esta segunda parte es donde claramente está el origen del cálculo de cologaritmos», Garma, p. 68.

156 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 829-843.

157 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 847-849.

158 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 852-862.

159 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 863-870.

Termina todo con una gran tabla de senos, de tangentes y de secantes 'reales' y 'artificiales' «ad radium 10,000; 000,000» [160], que ocupa larguísimas páginas del *Mathesis biceps*.

* * *

Entramos ahora en otro de los temas más novedosos de todo el grueso libro de Caramuel, el sintagma sexto, en el que expone la combinatoria [161]. Desde la misma primera página cita a Sebastián Izquierdo [162]. Siguiendo a este autor, define Caramuel la combinación como «la agregación o colección de varios en diversos grados según las diferencias posibles de los agregados que con ellos puedan hacerse» [163]. Pero, sin embargo, como bien ve Ceñal [164], no satisface del todo a Caramuel esta definición, pues tras ella la divide en «simplex» y en «complexa», y su definición conviene en rigor sólo a esta segunda. De ahí que prefiera definirla de manera general como «duorum, vel plurium rerum in dato numero contentarum compositio» [165]. Pero el objeto que se propone en la Combinatoria no es el de saber qué sea la combinación, ni el de hacerlas, sino que busca simplemente el numerarlas [166]. Para Ceñal, en donde mejor se nota la huella de Izquierdo es en la división de las especies de combinación: 1) cuando difieren por su substancia. AB y DC;

160 Ocupa las pp. 871 a 920 de *Mathesis biceps*.

161 «Syntagma sextvm. Combinatoria, in qua determinatus Quot Binarii, Ternarii, Quaternarii, et. et quante eorumdem Summa, in quocumque Rerum Numero, ex Substantiae, Positionis, et Repetitionis, seorsim aut simul sumptis, differentis resultunt. Est Profectò Artivm Ars. Et ad omnes Facultates, et Scientias, tam inveniendas, et adquirendas, quàm perficiendas, et illustrandas, et copiosis Rationum thesauris exornandas, viam facilem, et securam sternit. Fuit à Mathematicis inventa: et magno literarii Orbis bono à Raymundo Lullio ad Scholas Philosophiae, et Theologiae translata: et feliciter posteà à doctissimis Viris propagata, et promota»; *Mathesis biceps*, pp. 921-1036.

162 Sebastián Izquierdo, *Pharus Scientiarum ubi quidquid ad cognitionem humanam acquisibilem pertinet...*, Lyon 1659. Hay un libro entero dedicado a la combinatoria de Izquierdo y otro a su lógica: Ramón Ceñal, s.j., *La combinatoria de Sebastián Izquierdo* (Instituto de España, Madrid 1974); José Luis Fuertes Herreros, *La lógica como fundamentación del arte general del saber en Sebastián Izquierdo. Estudio del 'Pharus Scientiarum'* (Universidad de Salamanca, Salamanca 1981). La segunda es una tesis doctoral en filosofía con el profesor Vicente Muñoz, presentada en la Universidad Pontificia de Salamanca.

163 «*Combinatio*, est vox Scholastica, quam apud veteres Latinos non reperies: id autem, quod per illam significatur, est, ut Izquierdus asserit, aggregatio, *seu collectio plurium in varia aggregata secundum omnes possibiles differentias aggregatorum, quae ex illis fieri possunt*», *Mathesis biceps*, p. 923.

164 *Mathesis biceps*, p. 924.

165 «Numerabilitas est celeberrima quadam Combinationem proprietas, quam edisserit Scientia, quae Combinatoria vocatur. Non enim examinat, Quid combinatio sit? Nam rerum essentias intelligere, et dilucidare pertinet ad Metaphysicam. Non facit combinationes, quia omnes Facultates combinant (...). Stat igitur, Artis Combinatoriae exercitium, non esse essentiam Combinationis contemplaris; non esse res ipsas combinare; sed rerum in alique multitudine comprehensarum possibiles omnes combinationes numerare. Unde concluditur Obiectum Combinatoriae esse rerum in multitudine (numero) contentarum possibiles Combinationes, ut numerabiles, vel esse Numerum omnium possibilium Combinationum, quas subire possunt res in aliqua multitudine contentae», *Mathesis biceps*, pp. 924-925; puede leerse este texto entero también en Ceñal, *Izquierdo*, p. 121.

166 Cf. *Mathetsis biceps*, p 925

2) cuando lo hacen por su posición sólo, AB y BA; 3) cuando hay repetición, A y AA. A partir de estas clases de combinación se llega todavía a las siguientes: 4) cuando se diferencian por la substancia y por la posición, ABC y BAD; 5) cuando lo hacen por la substancia y por la repetición, ABC y AAB; 6) cuando lo es por la posición y por la repetición, AAB y BBA; por fin, 7) cuando lo es por las tres cosas, substancia, posición y repetición, ABCD y BBAC [167]. Lo que da ocasión para siete artículos. Tanto las especies como su orden coinciden con las de Izquierdo [168].

Entramos así en el primer artículo [169], en el que sólo se considera la diferencia en razón de la substancia. Compara las soluciones de Clavius [170] y de Izquierdo, prefiriendo la de éste. Encontramos una primera tabla [171], en la que se nos señala las combinaciones con diferencia de la substancia cuando hay 1, 2, 3, etc. objetos, hasta 20 objetos:

| NUMERUS RERUM | NUMERUS COMBINATIONUM |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 7 |
| 4 | 15 |
| 5 | 31 |
| 6 | 63 |
| 7 | 127 |
| 8 | 255 |
| 9 | 511 |
| 10 | 1023 |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| 20 | 1048575 |
| | et sic in inf. |

Vamos a detenernos ahora en la tabla de combinaciones binarias, ternarias, etc., cuando sólo se distinguen por razón de la substancia [172]. El criterio de construcción resulta ser muy sencillo: todo número de ella es la suma de otros dos, el que está justo encima de él y el que

167 Cf. Ceñal, *Izquierdo*, p. 122.

168 «*Articulus I*. De Combinationibus Rerum, penès discriminem solíus Substantiae, differentium», *Mathesis biceps*, pp. 925-932.

169 En su *In Sphaeram Ioannis de Sacro Bosco Commentarius* (Roma 1581). Cf. Ceñal, *Izquierdo*, pp. 54-58. Cristóbal Clavius es el único que explicitamente cita Izquierdo en su disputación sobre la combinatoria.

170 En *Mathesis biceps*, p. 927.

171 En *Mathesis biceps*, p. 929.

172 Uno de los primeros en tratarlo rigurosamente fue Pascal, de ahí que se le conozca a veces como 'triángulo de Pascal'. Véase Pascal, *Oeuvres complètes* (Seuil, París 1963) pp. 50-54, en donde se lee el opúsculo de 1654 que lleva por título «Traité du triangle arithmétique».

se halla a su izquierda. Es éste el triángulo aritmético [173]. Pero hay otra manera de obtenerlos, mediante una regla, de la que dice: «Hanc ego exhibeo, quam apud nullum scriptorem invenies» [174]. He aquí la tabla:

| NUMERO DE COSAS | BINARIAS | TERNARIAS | CUATERNARIAS | QUINARIAS | SEXARIAS | SEPTENARIAS | OCTONARIAS | NOVENARIAS | DENARIAS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | | | | | |
| 4 | 6 | 4 | 1 | 1 | | | | | |
| 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | 0 |
| 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |
| 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 |
| 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 |
| 13 | 78 | 286 | 715 | 1287 | 1716 | 1716 | 1287 | 715 | 286 |
| 16 | 91 | 364 | 1001 | 2002 | 3003 | 3432 | 3003 | 2002 | 1001 |
| 16 | 105 | 455 | 1365 | 3003 | 5005 | 6435 | 6435 | 5005 | 3003 |
| 16 | 120 | 560 | 1820 | 4368 | 8008 | 11440 | 12870 | 11440 | 8008 |
| 17 | 136 | 680 | 2380 | 6188 | 12376 | 19448 | 24310 | 24310 | 19448 |
| 18 | 153 | 816 | 3060 | 8568 | 18564 | 31824 | 43758 | 48620 | 33758 |
| 19 | 171 | 969 | 3876 | 11628 | 27132 | 50388 | 75572 | 92378 | 82378 |
| 20 | 190 | 1140 | 4845 | 15504 | 38760 | 77520 | 125950 | 167950 | 174756 |

La tabla anterior se puede desglosar por «cosas», desde una sola cosa hasta veinte cosas [175], en las que se van obteniendo las sumas totales de cada fila. Valga como ejemplo la que corresponde a cinco cosas, en la que si esas cinco cosas se toman de una en una nos salen cinco combinaciones unitarias, si se toman de dos en dos, nos salen 10 binarias, etc., como sigue:

173 Ceñal nos advierte que su solución es «fundamentalmente la misma enunciada por Herigone». Sobre Pierre Herigone, véase Ceñal, *Izquierdo*, pp. 62-65.
174 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 930-931.
175 En *Mathesis biceps*, p. 931.

RES V.

| | |
|---|---|
| Vnitates | 5 |
| Binarii | 10 |
| Ternarii | 10 |
| Quaternarii | 5 |
| Quinarius | 1 |
| *Suma* | 31 |

Caramuel nos muestra la 'regla' que nos sirve para encontrar cada uno de los números que se encuentran en nuestra gran tabla, partiendo siempre de que la columna de la izquierda, la que nos da las «cosas» combinadas, coincide, evidentemente, con la serie de los números naturales. Esta regla es decisiva, pues con ella calculamos cada uno de los números de la tabla sin necesidad de ir 'gateando' siempre hasta arriba de toda la tabla —según la regla de constitución fundamental—, sino que lo encontramos derechamente mediante multiplicaciones y divisiones:

| MULTIPLICA | NUMERUM | ET FACTU | DIVIDE | ET HABEBIS |
|---|---|---|---|---|
| Reru datar. | per prox. minor. | ''.'' | per 2 | Binarios. |
| Binariorum | per adhuc min. | ''.'' | per 3 | Ternarios. |
| Ternariorum | per adhuc min. | ''.'' | per 4 | Quaternar. |
| Quaternar. | per adhuc min. | ''.'' | per 5 | Quinarios. |
| Quinariorum | per adhuc min. | ''.'' | per 6 | Senarios. |
| **et sic in inf.** | | | | |

La demostración práctica para el caso de 10 de su regla universal es ésta [176]:

| NUMERUM DATARUM | | MULTIPLICO | ET FACTUM | DIVIDO | ET HABEO | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Rerum | 10 | per 9 | 90 | per 2 | 45. | Binarios. |
| Binarium | 45 | per 8 | 360 | per 3 | 120. | Ternarios. |
| Ternarium | 120 | per 7 | 840 | per 4 | 210. | Quaternarios. |
| Quaternar. | 210 | per 6 | 1260 | per 5 | 252. | Quinarios. |
| Quinari. | 252 | per 5 | 1260 | per 6 | 210. | Senarios. |
| Senarium | 210 | per 4 | 840 | per 7 | 120. | Septenarios. |
| Septenar. | 120 | per 3 | 360 | per 8 | 45. | Octonarios. |
| Octonar. | 45 | per 2 | 90 | per 9 | 10. | Novenarios. |
| Novenar. | 10 | per 1 | 10 | per 10 | 1. | Denarium. |
| **** | 0 | 0 | 0 | 0 | 10. | Unitates. |
| | | | | | 1023. | Suma. |

176 En *Mathesis biceps*, p. 932. Es lo que hoy ponemos: $C_{m,n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$.

«Esta tabla, con las debidas modificaciones, será la que más tarde consagrará para la solución del mismo problema Jacques Bernoulli, el más ilustre promotor del cálculo combinatorio», Ceñal, *Izquierdo*, p. 123.

En una pequeña nota, nos explica Caramuel la aplicación de los logaritmos a estos cálculos de la combinatoria [177]. Con ella se termina el primer artículo dedicado a la combinatoria.

El artículo segundo [178] concide con lo que hoy llamamos permutaciones de n elementos. Nos coloca una tabla en la que encontramos el número de 'combinaciones' hasta 24 elementos, con sus logaritmos 'profluens' y 'refluens' junto a sus diferencias [179]. Con 24, es decir, con las letras del alfabeto, se llega a una cifra elevadísima: 620,448:401,733:239;360,000. El artículo tercero [180] toma las cosas cuando hay repetición. El cuarto [181] toca las combinaciones que encuentran su diferencia en la substancia y en la posición, es decir, lo que llamamos hoy las variaciones; calcula hasta cuando hay 20 «cosas» y presenta una tabla detallada, hasta 10 cosas, de las variaciones de m elementos tomados de 2 en 2, de 3 en 3, etcétera.

| RERUM NUM. | BINARII | TERNARII | QUATERNARII | QUINARII | SENARII | SEPTENARII | OCTONARII | NONEVARII | DENARII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| | j | | | | | | | | |
| 2 | 2 | | | | | | | | |
| | ij | j | | | | | | | |
| 3 | 6 | 6 | | | | | | | |
| | iij | ij | j | | | | | | |
| 4 | 12 | 24 | 24 | | | | | | |
| | iv | iij | ij | j | | | | | |
| 5 | 20 | 60 | 120 | 120 | | | | | |
| | v | iv | iij | ij | j | | | | |
| 6 | 30 | 120 | 360 | 720 | 720 | | | | |
| | vi | v | iv | iij | ij | v j | | | |
| 7 | 42 | 210 | 840 | 2520 | 5040 | 5040 | | | |
| | vij | vi | v | iv | iij | ij | j | | |
| 8 | 56 | 336 | 1680 | 6720 | 20160 | 40320 | 40320 | | |
| | viij | vij | vi | v | v | j | j | j | |
| 9 | 72 | 504 | 3024 | 15120 | 60480 | 181440 | 362880 | 362880 | |
| | ix | viij | vij | vi | v | iv | iij | ij | j |
| 10 | 90 | 720 | 5040 | 30240 | 151200 | 604800 | 1814400 | 3628800 | 3628800 |

177 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 932-33.

178 'De Combinationibus rerum, penès discriminem solius Positionis, differentiam', *Mathesis biceps*, pp. 934-38.

179 Toda una página: *Mathesis biceps*, p. 935.

180 «De Combinationibus Rerum, penès discriminen solius Repetitionis differentium», *Mathesis biceps*, pp. 939-942. Cf. Ceñal, *Izquierdo*, p. 125.

181 «De Combinationibus Rerum, penès Substantiae, et Positionis differentium», *Mathesis biceps*, pp. 942-948. La tabla en la página 944. Luego dedica dos páginas y

Pasamos por talto los otros artículos [182], deteniéndonos en el último, el octavo [183], en el que nos dice lo importante que es esta ciencia de la combinatoria, de la que todas las demás son subalternas: la gramática, la anasilábica, la analítica, la analéxica, la rítmica, la metamétrica, el ars lulliano, la lógica, la metafísica, la física, la ética, la jurisprudencia, la medicina, la teología, la aritmética y la geometría. ¡Ni más ni menos!

No me resisto a la tentación de detenerme en sus opiniones sobre el arte luliano [184], aunque no sea más que para reproducir dos maravillosas tablas en las que sugiere maneras combionatorias de hacer piadosas consideraciones, sin más que tomar combinaciones de las palabras contenidas en dichas tablas, lo que nos posibilita distintos discursos, de gran variedad y todos de elevación sin par, como nos demuestra Caramuel.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Fides | *Spes* | Auxilium | *Vocatio* | Lux |
| Amor | *Fidelitas* | Spiritus | *Nuditas* | Perfectio |
| Bonitas | *Liberalitas* | Misericordia | *Beneficium* | Aestimatio |
| Obedientia | *Timor* | Humilitas | *Resignatio* | Paupertas |
| Oratio | *Secessus* | Vnio | *Altitudo* | Cupido |
| *Sanctitas* | Perseverantia | *Propositum* | Renovatio | *Castitas* |
| *Fortitudo* | Valor | *Expugnatio* | Resistentia | *Victoria* |
| *Gubernatio* | Capacitas | *Prudentia* | Consilium | *Iustitia* |
| *Pax* | Suavitas | *Providentia* | Praeventio | *Rectitudo* |

media a hacer los recuentos fila a fila hasta las 10 cosas. En este artículo, como en los anteriores, aplica logaritmos. También aquí encuentra una «regla» (p. 943) para calcular cada uno de los números que se encuentra en la tabla. Nótese los números que están escritos en números romanos en cada una de estas casillas es el del numero que está escrito en la casilla exactamente a su izquierda multiplicado por el número romano que está en su misma casilla. Nosotros ponemos hoy, para hallar las variaciones de m elementos tomados de n en n:

$V_{m,n}=m\ (m-1)\ (m-2)\ldots\ (m-n+1)$.

182 «Articulus V. De Combinationibus Rerum, penès differentiam Substantiae, et Repetitionis», *Mathetsis biceps*, pp. 949-952. «Articulus VI. De Combinationibus Rerum, penès differentiam Positionis, et Repetitionibus» (953-955). «Articulus VII. De Combinationibus Rerum, penès differentiam Substantiae, Positionis, et Repetitionis» (955-957). En opinión de Garma, «Caramuel plantea el problema de la combinatoria de forma exhaustiva. Sabe calcular las Variciones, Permutaciones y Combinaciones con o sin repetición. Lo único que le falta es escribir la expresión general de tipo algebráico», Garma, p. 77.

183 «Articulus VIII. Quemnam Combinatoria locum inter caeteras Disciplinas sortita sit? Demonstrat Combinatoriam esse primam, et illi omnes alias Scientias subalternari», *Mathesis biceps*, pp. 957-972. Pensamiento que es, como se sabe, muy leibniziano, también Leibniz cita frecuentemente a Caramuel; valgan algunas de estas referencias, aunque sea un poco a voleo: *Textos inéditos*, publictado por Gastón Grua, (PUF, Paris 1948) pp. 37, 43, 292; cita la *Mathesis audax* en *Opusculus est fragments inédits*, editados por L. Couturat (1903) Hildesheim, Olms, 1966, p. 561; también en la carta a Juan Bernoulli del 16.9.1702, en *Mathematische Schriften*, editados por C. I. Gerhardt, vol. III/2, p, 715; cf. también vol. IV, p. 219; véase igualmente en *Sämtliche Schriften und Briefe*, la edición definitiva de la obra de Leibniz de la Akademie Verlag, por ejemplo, VI, I, pp. 88, 242, 496; I, I, p. 89; II, I, pp. 38, 39, 68 y 72; I, IV, pp. 441 y 460. ¿Desvelo algún secreto al hacer notar la importancia decisiva que en Leibniz tuvieran autores del estilo de Caramuel?

184 En *Mathesis biceps*, pp. 961-966. No insisto porque sobre este tema del lulismo en Caramuel, habrá una ponencia entera en el Congreso. La primera tabla está en la p. 964; la segunda en la p. 966.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Felicitas* | Summitas | *Appetitus* | Satisfactio | *Centrum* |
| Recognitio | *Conversio* | Contritio | *Penitentia* | Iustificatio |
| Puritas | *Superioritas* | Affabilitas | *Pulchritudo* | Splendor |
| Gratitudo | *Incitatio* | Desiderium | *Gratia* | Redemptio |
| Deificatio | *Religio* | Exemplum | *Patientia* | Mortificatio |
| Devotio | *Conscientia* | Limpitudo | *Quies* | Securitas |
| *Solicitudo* | Exercitium | *Aedificatio* | Dedicatio | *Sacrificium* |
| *Libertas* | Triumphus | *Celebratio* | Restitutio | *Lucruus* |
| *Reformatio* | Lex | *Proportio* | Examen | *Constantia* |
| *Distributio* | Pretectio | *Correctio* | Praemium | *Vigilantia* |
| *Plenitudo* | Abundantia | *Beneplacitum* | Veritas | *Potentia* |
| Disponit | *Extendit* | Elevat | *Meliorat* | Correspondet |
| Adsequitur | *Magnificat* | Promovet | *Communicat* | Ordinat |
| Auget | *Facilitat* | Inclinat | *Reparat* | Requirit |
| Conservat | *Fructificat* | Vtitur | *Debetur* | Metitur |

El otro es todavía más pintoresco, pues se relaciona con el abecedario:

| | | |
|---|---|---|
| A | Amor | Auget |
| B | Bonitas | Beat |
| C | Charitas | Conservat. |
| D | Devotio | Disponit. |
| E | Ecstasis | Extendit. |
| F | Fides | Fortificat. |
| G | Gratia | Glorificat. |
| H | Humilitas | Honorat. |
| I | Iustitia | Intendit. |
| L | Libertas | Lucratur. |
| M | Misericordia | Medetur. |
| N | Nuditas | Nutricatur. |
| O | Obedientia | Ordinat. |
| P | Prudentia | Promovet. |
| Q | Quies | Quaerit. |
| R | Religio | Reparat. |
| S | Spes | Splendet. |
| T | Triumphus | Tutatur. |
| V | Veritas | Vnit |
| X | Xenium | Hospitatur *. |
| Y | 'YMNOC | Celebrat *. |
| Z | Zelus | Zelatur. |

Entramos ahora en unas páginas que llevan el título de KYBEIA, en las que Caramuel toca la teoría de los juegos de azar y el problema de las partidas [185]. Esta aportación de nuestro autor, no es la primera,

185 «KYBEIA, Quae Combinatoriae genus est, de Alea, et Ludis Fortunae seriò disputans. Quantum debeat exponi, quantum rependi, ut necessaria in Ludis, qui a Solâ Fortunâ dependent, observatur aequalias, quaerit, et ex varis fundametis decidit», *Mathesis biceps*, pp. 972-995.

pero sí una de las primeras intervenciones en este campo [186]. Como en el juego y en las cosas de la suerte todo depende exclusivamente de la fortuna —del azar preferiríamos, quizá, decir nosotros—, debe conservarse por todas partes la igualdad. Guardarla significa que, cuando se pone en juego el dinero, todos se expongan por igual, tanto para ganarlo como para perderlo: quien se expone más pondrá una cantidad menor, quien se expone menos pondrá una cantidad mayor. Sólo si el juego tiene tal 'igualdad de oportunidades' será un juego lícito; si no se da dicha igualdad, sea porque no la hay en el peligro, sea porque no proviene de la compensación, el juego será ilícito. Es necesario, pues, conocer en cada juego los peligros y las desigualdades. Las apuestas de cada uno se calculan en proporción al peligro o de las posibilidades de ganar [187].

En el artículo primero [188] nos describe abundantes juegos, que son estudiados por Caramuel en la perspectiva antedicha. Luego, en el segundo [189], trata del problema de 'las partidas': si se ha iniciado ya el juego, es decir, si se ha hecho ya el depósito de la apuesta, hay alguna o algunas partidas ganadas por uno u otro jugador, pero sin que ninguno haya ganado definitivamente todo el juego, ¿qué reparto del dinero depositado debe hacerse en caso de que deba interrumpirse el juego? El tercero [190] toca el juego de los dados cuando se apuesta sacar un número fijo en un cierto número de tiradas con uno o más dados. Aplica aquí por vez primera al cálculo de probabilidades los logaritmos. En el cuarto [191] estudia el juego español del «passa-diez».

186 Todo comenzó en 1654 con la pregunta del caballero de Méré a su amigo Pascal y la correspondencia subsiguiente de éste con Fermat. Por parte de Pascal, léase en sus *Oeuvres* citadas en la nota 172 las pp. 43-49. Con lo de Fermat en el volumen II de las *Oeuvres de Fermat* (Gauthier-Villars, París 1894); I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability*, original de 1865, reproducción en Nueva York, Chelsea, 1965, sigue siendo la más completa de todas las historias sobre la probabilidad.

187 Cf. *Mathesis biceps*, p. 973. «Entonces, si bien es cierto que Caramuel está apoyándose en la igualdad moral del juego, la razón que usa es buscar la homogeneidad de las apuestas que se hacen con la probabilidad de cada jugada. Esto lo único que supone es un conocimiento total del juego y saber que las respuestas, por tanto, están determinadas. En este artículo hemos visto que Caramuel ha descrito el juego de dados y ha hecho una descripción del espacio probabilístico más sencillo, el que se obtiene con dos dados. En el siguiente trabaja sobre el problema de las partidas y nos encontramos que en el caso más complicado comete el error de hacer el reparto en vez de proporcionalmente a la probabilidad de ganar, proporcionalmente al número de las partidas», Garma, p. 83.

188 «Articulus I, De Aleâ: (Hisp. de los Dados)», *Matheis biceps*, pp. 973-975.

189 «Articulus II. De his, qui ludum inceptum relinquunt», *Mathesis biceps*, pp. 976-980. Comienza así: «Saepè contingit, ut negotiis, supervenientibus, ludus intermittatur. Et petis, *Quid fieri debeat de depositis nummis*? Hec Quaestio et ejusdem solutio, non solùm aleas, sed pilam, et ludos universos concernit; et est digna quae examinetur accuratè». La pregunta del caballero de Méré tenía dos vertientes, una sobre la probabilidad de obtener el as doble y otra sobre este problema de las partidas.

190 «D'Articulus III. De eo, qui primâ vice, aut saltem secundâ, aut tertiâ, etc. se talem aleae numerum esse jacturum pollicetur», *Mathesis biceps*, pp. 980-983.

191 «Articulus IV. De ludo ΜΕΤΑ ΔΕΚΑΔΑ, *ultra decem*, qui ab Hispanis vocatur vocatur Passa-diez», *Mathesis biceps*, pp. 983-986.

Una nota [192] nos informa que un claro varón al que Caramuel le enseñó su «Kybeia», le mostró a su vez una «Diatriba», que asigna a Severino Longomontano, en la que se resuelven los problemas de los juegos de azar mejor de lo que él —Caramuel— ha hecho. Así entramos en ese texto, «Diatriba. De Ratiociniis in Aleâ» [193], que resulta ser no de Longomontano, sino de Christian Huygens. Aunque tan grande sea su aprecio de la 'diatriba', no por eso deja de ponerle unas pequeñas apostillas [194], comparando su trabajo con el del (desconocido) Huygens; Caramuel encuentra ventajas en el suyo propio [195].

Se termina el «syntagma» con una «arithmomantica» [196], estudio sobre juegos adivinatorios, especialmente el denominado 'cosmópolis', una especie de lotería basada en la elección de los gobernantes de una ciudad. Hay en él muchas cosas curiosas sobre trampas [197].

* * *

El sintagma séptimo presenta la trigonometría [198]. Encontramos en esta parte la resolución de triángulos planos y esféricos. Aquí, como nunca, todo son cálculos y más cálculos. Consta de tres artículos: la

192 Cf. *Mathesis biceps*, p. 985. Christian Severin Longomontan (1564-1647) fue colaborador de Tycho Brahe; escribió un tratado, *Inventio quadraturae circuli*, publicado en 1634.

193 En *Mathesis biceps*, pp. 986-993. Es la traducción latina del tratado de Huygens titulado «Du calcul dans les jeux de hasard», que se puede leer en el volumen XIV de la edición de sus obras completas pubicada en La Haya por la 'Société hollandaise des sciences' pp. 49-91; originalmente lo publicó su maestro Frans van Schooten como apéndice a su *Exercitationum mathematicarum libri quinque* (Lyon 1967). Además de Todhunter, puede leerse, por ejemplo, las menciones a esta obra de Huygens en la interesante perspectiva de Ian Hacking, *The Emergence of Probability* (Cambridge University Press 1975); también O. B. Sheynin 'Early History of the Theory of Probability', en *Archive for History of Exact Sciences* 17 (1977) 201-259, sobre todo p. 239 y siguientes.

194 'Notae In praecedentem Diatribem', en *Mathesis biceps*, pp. 994-995. Comienza así: «Ante Propositionem primam Dubia proponit, propter quae tota Diatribe scribitur».

195 Sin embargo, para Garma: «El trabajo de Huygens tiene la ventaja sobre el de Caramuel su lenguaje más científico (Caramuel es excesivamente retórico) y mejores resultados», en p. 114. Con todo y con eso, un poco más tarde, en la p. 122, puede añadir que «el hecho de ser el segundo tratado que se escribe sobre juegos de azar, en el que se realizan algunas aportaciones, como son la utilización del cálculo logarítmico, las consideraciones acerca del jugador mano y el problema de los dados hacen de él una interesante contribución a la historia del Cálculo de Probabilidades».

196 'Arithmomantica. Per Combinationem Numerorum divinans', en *Mathesis biceps*, pp. 995-1036.

197 Así una en castellano: «Dice el Padre Ledesma, que uuo una manera de apuesta en Salamanca en una catedra, que auia quatro Oppositores, que la competian, y cada uno dellos tenia apasionados. Vn estudiante hizo apuestas de cien reales con quatro amigos de los quatro Oppositores, de que no la lleuaban, porque si perdia con uno, era fuerça ganar con tres, y dize, que aunque cada apuesta destas en si es licita, todas juntas con ilicitas, y no puede lleuar con buena conciencia las apuestas, y que es comun sentencia de todos, la razon es, porque todos estos contractos juntos hazen una grande deygualdad, no obstante, que cada uno de por si era licito», *Mathesis biceps*, p. 1029. Es al comienzo de la cuestión cuarta, titulada «De Concitationibus Salmanticensibus».

198 «Syntagma septima. Trigonometria generalis, seu logica mathematica, in omni triangulorum genere Ex Evidentibus Principiis, per necessarios Illationes de Linearum, et Angulorum quantitate dialecticans», *Mathesis biceps*, pp. 1037-1140.

trigonometría refluente [199], la trigonometría astronómica [200] y otra sobre un rectángulo bien etéreo [201], en la que describe el sistema solar en todo lo que tiene que ver con la cuestión de la hora, así como con la longitud y la latitud. No nos detendremos en él.

Tampoco lo haremos en el octavo [202], en el que nos habla de instrumentos astronómicos y horarios, no tanto desde el punto de vista de su construcción, sino desde el interés calculatorio que ellos tienen. Por ejemplo, instrumentos para medir la dirección del viento y que nos dan esa dirección sobre un cuadrante; la calibración de instrumentos metálicos; su utilización para mediación de ángulos, sean de uso terrestre o astronómico, cuando no de uso militar.

En el noveno [203] trata de mecánica. Una vez más encontramos con gran frecuencia cálculos. Tiene varias partes. Una «pedársica» [204], en la que nos muestra diferentes géneros de tornillos y polipastos, junto a los problemas que con ellos se resuelven. Una «estática» [205], con los instrumentos para pesar; una «hidrostática» [206]; por fin, una «metereológica» [207], en la que nos habla de crepúsculos, de nubes, de la manera de medir la distancia a la tierra de las nubes, del vapor, de

199 'Trigonometria refluens. Per Logarithmos Recurrens precedens', en *Mathesis biceps*, pp. 1073-1079.

200 «Trigonometria astronomica. Adsumit, et praecipuè dilucidat illum Axioma, *In Triangulis universis (Rectilineis, Sphaericisque) Lateris, et Anguli adjacentis Logarithmi simul sumptis, Anguli, et Lateris oppositorum Logarithmis, simul sumptis, aequaeles sunt:* demonstratque in Oppositione omni Geometrica inveniri Logarithmicam Aequalitatem», en *Mathesis biceps*, pp. 1080-1124.

201 «Aethereus Rectangulis, Per quem in Planetarum, et Aplaneticorum Syderum Hypothesibus delineandis, et eorundem locis quoad longitudinem, et latitudinem determinandis, etc. omnia facta sunt: et sine ipso factum est nihil», en *Mathesis biceps*, pp. 1124-1140. En la última página encontramos varias citas en castellano:

«No ay bien, sin ageno daño,<br>
ni mal, sin probecho ageno».<br>
«Si el Rey no muere,<br>
el Reyno muere».<br>
«La Ciencia calificada<br>
Es, que el Hombre en Gracia acabe:<br>
Porque al fin de la jornada,<br>
Aquel, que se salua, sabe,<br>
Que el otro no sabe nada».

202 «Syntagma octavum. ΔΙΑΒΗΤΗΣ, hoc est, circinum Mathematicus. Vniversus Quaestiones, et Difficultates Arithmeticas, Geometricas, Trigonometricas, Cosmographicas, Astronomicas, etc. mecanicè, nam Logistas à difficilium Suppurtationum taedio liberat; et, si satis sit longum, astronomicam praecissionem, quae intra minutum cadit, exactissomè attingit», *Mathesis biceps*, pp. 1141-1252.

203 «Syntagma nonum. Mechanica, cuius partes sunt duae, Pedarsica, Quae in Motoris Vires, et Virtutem multiplicat, ut, vel tenellus possit puer Saxa gravissima elevere. Statica, Quae gravium Corporum pondera explorat. Et, quia Corporum gravitas in Aëre, et in Aqua exploratur, Statica, in Aëream, Aquaticamque subdividitur: ex quibus adhunc conflatur tertia Ars, quae ponderum in Aëre, et Aqua considerando differentias, ingeniosas, curiosasque, consequentias deducit», *Mathesis biceps*, pp. 1253-1336.

204 «Pedarsica, Gravia Pondera elevans», en *Mathesis biceps*, pp. 1255-1278.

205 «Statica, Gravia corpora ponderans», en *Mathesis biceps*, pp. 1278-1289.

206 «Hydrostatica, Gravia Corpora in Aqua ponderans», en *Mathesis biceps*, pp. 1289-1296.

207 «Metereologica, Quae apparent in sublimi dilucidans», en *Mathesis biceps*, pp. 1297-1336.

la lluvia, del granizo, de la nieve, de la nieve sexangular (con referencia a Kepler [208]), de los vientos, del trueno, del relámpago y del rayo, del arco iris (entre otros cita el capítulo 8 de los *Meteoros* de Descartes), de las diversas luces que se ven en los cielos.

En el décimo y último sintagma [209] habla de la astronomía de los planetas. Dentro de él, una vez más, toca la división (práctica) del círculo [210]. Excepto en la lámina XXVIII, figura XIII, en donde hay un ambiguo dibujo de un instrumento que lleva lentes, en todos los demás no aparecen catalejos ni telescopios ni cosas parecidas, sino medidores de ángulos en gran abundancia, compases, círculos graduados, etc. En una primera parte [211], con referencia siempre a Kepler y, sobre todo, a Tycho Brahe, con cálculos y más cálculos, presenta el sistema de Ptolomeo [212], el sistema de Aristarco [213] y el del mismo Brahe [214]. Habla del Sol [215], de la Luna [216], de los Planetas superiores [217], de los movimientos de Venus [218] y de Mercurio [219], de las distancias de los Planetas al centro de la Tierra [220], de la latitud de los Planetas [221] y de la redución de la Eclíptica a la Equinoccial [222]. Todas estas páginas, claro es, están llenas de epiciclos. La segunda parte [223] toca la «astronomía

208 Hay una preciosa edición, mejor dicho, traducción crítica, de la obra de Kepler, *L'étrenne ou La neige sexangulaire* (Vrin, París 1975) realizada por Robert Halleux. El original latino, *Strena, seu de nive sexangula*, es de 1611; se encuentra en las *Johannes Kepler, Gesammelte Werke*, editadas por W. von Dyck, M. Caspar y F. Hammer, en el vol. IV, pp. 263-280.

209 «Syntagma decimum. Interim Astronomicum, cuius partes sunt tres
Et Prima Per Circulos
Secunda Per Oscillationes Theoricas Planetarum describit.
Tertiaque Per Lineas Rectas
Acceserunt Tractatus Tres: quorum
Prior, novas, et facillius exhibet Motuum Coelestium (tam Planetarum, quàm Syderum Affixorum) Tabulas.

Alter, de Ephemeridum conformatione disserit; ostenditque posse Astronomum ad locorum, quae in Coelo tam in longum, quàm in latum, Errores occupant, exactam cognitionem venire sine calculo.

Posterior, solo circino Eclipses (Solares, et Lunares) in plano accuratè delineat, et Astronomos eximit à taedio molestissime suppurationis», *Mathesis biceps*, pp. 1337-1711. ¡Puede suponer el lector de estas notas que, de nuevo, nos encontramos ante una 'selva moral y espiritual' en la que merecería la pena adentrarse con parsimonia!

210 Cf. *Mathesis biceps*, p. 1341; véase también la p. 1362.

211 «Astronomia sphaerica. Motus omnis Planetarum per Circulos perfectos expediens», *Mathesis biceps*, pp. 1385-1449. Por círculos perfectos, es decir, por epiciclos. No quiere el sistema copernicano, por supuesto.

212 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1389-1391.

213 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1391-1392.

214 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1392-1395.

215 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1402-1408.

216 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1409-1413.

217 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1413-1423.

218 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1423-1425.

219 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1426-1432.

220 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1432-1434. Recuérdese que es de Tycho Brahe.

221 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1434-1443.

222 Cf. *Mathesis biceps*, pp. 1443-1449.

223 «Astronomia Oscillatoria. Disserit de Oceanis Aetheris: illis fluxuum, et refluxuum reciprocationes accenset, et ut tumeant, et detumeant, permittit: tandemque Veros apud Medios oscillando Planetas, earundem in Zodiaco loca quoad longum, et latum determinat», *Mathesis biceps*, pp. 1449-1503. Comienza con tres cartas dirigidas a Gassendi.

oscilatoria». Por fin, en la tercera, habla de los satélites [224]. ¡Por todas partes cálculos y más cálculos!

* * *

Brevemente nos hemos de referir ahora a la *Architectura civil recta y obliqva* [225], pues, aunque dedicado a ser libro de texto de estudiantes de arquitectura, toca a algunos puntos de las matemáticas caramuelenses: «Los artículos que añade Caramuel en esta obra tienen por objeto servir a la formación de los arquitectos, por lo que elimina la parte más farragosa de su obra anterior, prescindiendo de su lenguaje culterano. El trabajo, con respecto a lo anteriormente visto, gana en claridad y, a pesar de lo breve y simple, es bastante importante» [226].

El tratado segundo lo dedica a la aritmética [227]. Quizá lo más nuevo y digno de notar es su método para calcular las raíces cuadradas mediante su «lámina cuadratriz» [228] y un método para calcular las raíces cúbicas de manera aproximada [229]. El tratado tercero es su cálculo

224 «Satellites», *Mathesis biceps*, pp. 1576-1635. Todavía en apéndice contiene nuestro inacabable libro un «Tractatus I. De Tabulorum constructione» (pp. 1637-1664; son tablas astronómicas); un «Tractatus II. De Ephemeridem conformatione» (pp. 1664-1698); para terminar con un «Tractatus III. De Eclipsibus» (pp. 1698-1711).

225 La referencia completa en la nota 4.

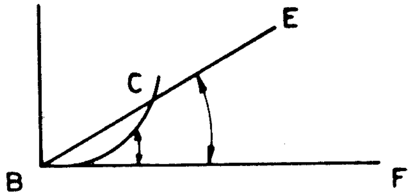
226 Garma, p. 127. Me permitirá el lector que me exprese con cautela —mi desconocimiento es demasiado grande para otra cosa—, pero me da la impresión que Garma, por ejemplo en la p. 137 de su tesis mecanografiada, en su interés en mostrar a Caramuel como un 'novator', desgaja demasiado la *Mathesis*, a la que procura adelantar lo más posible en el tiempo de su composición («cuya redacción corresponde a primer tercio del siglo XVII, a pesar de su tardía edición», p. 140), de la *Architectura*, que se acerca en la composición al momento de su edición. Esta puede ser más clara y nítida —incluso mejor en algunos puntos— por ser específicamente lo que es, un tratado de arquitectura, en donde las matemáticas vienen exclusivamente como ayuda clara y precisa. ¿Hay referencias en la *Mathesis* a que haya sido escrita muchos años antes del momento de su edición? No lo se, en todo caso, si las hay, se me escapan. Con todo, una comparación, aunque sea somera de la *Mathesis biceps* y la *Mathesis audax*, creo que, más bien, prohiben esos pensamientos. Todo lo que en la obra de 1670 hay de los años lovanienses toca a la 'física', no a la 'matemática', y así se dice en ella. No se olvide que en los años italianos parece que Caramuel dispuso de muchas horas para su trabajo intelectual. ¡Qué le vamos a hacer si de aquí sale Caramuel un tantico menos 'novator' de lo que nos gustaría!

227 «Tratado II: En que se enseña l'Arithmetica», *Architectura civil*, pp. 33-53. En el índice con el que comienza el libro se le da un título más largo: «En que por camino nuevo y breve se explica la Arithmetica; Y todas las Cuentas de Rayzes Quadradas, Cubicas, y todo género de Proporciones se reducen a Reglas de gran facilidad». Las reglas a que se refiere son las reglas prácticas para bien realizar las operaciones con las que se encuentre el arquitecto. Comienza así el tratado: «No es hoy mi intento enseñar todas las Ciencias Mathematicas, que de ellas ya trato mi Mathesis, donde las Antiguas se facilitan, y adelantan; y las Nuevas se ilustran; sino lo es solamente instruir un Architecto, para que en esta profesión sea excelente».

228 Cf. Garma, pp. 129-132. Utiliza para ellos: $a^2-b^2=2\ (bx+\frac{x^2}{2})$.

229 Cf. Garma, p. 132. Utiliza para ello: $a^3=(b+x)^3=b^3+3b^2x+3bx^2+x^3$.

logarítmico [230], el cuarto, su geometría [231]. En ella encontramos razonamientos que se justifican provisionalmente, pero no son rigurosos, lo que era una de las principales características de los nuevos métodos matemáticos, la que llevó a su esplendor a la matemática del siglo XVII [232]; ello le coloca, ciertamente, del lado de los 'novatores'. Un artículo entero está dedicado a la cuadratura del círculo [233]; cita en él a varios de los matemáticos que habían tratado el problema antes de él. Su argumento ahora no es el de los peripatéticos: si inscribimos y circunscribimos dos cuadrados a un círculo, aumentando los lados del uno y disminuyendo los del otro, hay un momento en que su área coincide con la del círculo. Para Caramuel no es así. Pone el ejemplo del ángulo de contingencia: «Si en una circunferencia se traza el ángulo EBF, rectilíneo, y se considera el ángulo (de contigencia) correspondiente CBF, al mover el punto C sobre la circunfeerncia, acercándose al B, el ángulo EBF > ángulo CBF, y en ningún momento son iguales» [234]. Véase la figura. Lo mismo acontece con el cuadrado y el círculo.




230 «Tratado III. En que se enseña la Logarithmica», *Architectura civil*, pp. 54-72. El índice decía: «De la Logarithmica, Arte Nueva, y hasta ahora jamas tratada en Castellano. *Ponense* cinco Tablas para abreviar el Calculo, quando las Suppotaciones son largas, y difficultosas». Estas tablas, en páginas sin numerar son: de multiplicar de 1 a 100 por 1 a 100; para raíces cuadradas y cúbicas los cuadrados y cubos del 1 al 1000, a la que se añade una página con una tabla de las raíces cuadradas y cúbicas del 1 al 200; una tabla con los logaritmos decimales del 1 al 1000; por fin, una de senos, tangentes y secantes y de sus logaritmos.

231 «Tratado IV. En que se enseña la Geometria», *Architectura civil*, pp. 1-68. La paginación es nueva, en muchas ocasiones vuelve al uno a lo largo del libro. En el índice poner: «En que se enseña la Geometria, cuyos Maximos, por ser muy necessarios de la Architectura, se explican con gran curiosidad».

232 «El articulo II está dedicado a lo que él llama 'Peticiones', en donde se expone y examinan los tipos de razonamiento usados en las matemáticas. Pone un ejemplo que dice así:

'El punto A es centro de un círculo, el punto B divide a una línea en dos partes iguales'.

Prueba: Todas las demostraciones que se han hecho corren bien si estas dos cosas se suponen. No se puede hacer una demostración que nos persuada de lo contrario. Luego:

El punto A es centro del círculo y el B medio de la línea.

A continuación escribe 'éste es el modo de argumentar de San Vicente, Guldin, Cavalerio y otros'», Garma, p. 136.

233 Cita a Mario Marci, Gregorio San Vicente (*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, Amberes 1647) y Antonio Lovera.

234 *Architectura civil*, p. 55. Cf. Garma, p. 140.

Finalmente, detendremos nuestra atención en el artículo cuarto del tratado cuarto[235]. Distingue los *puntos indivisibles físicos*, que son «indivisibles naturales, corpúsculos, que con sêr tan pequeños, que no se pueden naturalmente dividir: pero esto no quita, que se puedan dividir sobrenatural y milagrosamente de potentiâ Dei absolutâ»; los *puntos indivisibles hiperfísicos*, que «son aquellos que por ser esencialmente indivisibles, no se pueden ni aun milagrosamente, dividir»; por fin, los *puntos indivisibles metafísicos*, que «es el que ni aun por el entendimiento mismo se puede dividir». En este contexto, en el que cita los indivisibles de Cavalieri mostrando su acuerdo, encontramos este largo párrafo[236]:

«Y si me preguntaren, si en el Continuo se han de admitir de hecho Puntos Phisicos, Hyperphysicos, y Metaphysicos les respondere brevemente: que los Physicos los han de admitir por fuerça todos los Philosophos, que afirman, *esse in rebus corporeis terminos parvitatis*. Los indivisibles Hyperphysicos y Metaphysicos los han de admitir los Peripateticos; porque los Puntos, que Aristoteles pone por ser indivisibles de su naturaleça, ni Dios realmente, ni los hombres intellectualmente los pueden dividir. Yo niego, que haya en el Continuo Puntos Hyperphysicos, o Metaphysicos: y affirmo que es imposible quâto de ellos nos refiere Aristoteles: y porque de esta materia *part.* 2. *$ XX. p. 42.* discurre Renato descartes con ingenio y acierto, pondre aquí sus palabras (Cognoscimus fieri non posse ut alique [...] atomi sive materia partes ex naturae...). Por esta raçon hay muchos modernos, a quien Nosotros en la Architectura Natural seguiremos, affirman y defienden que hay Puntos Physicos, y Naturales, que se llaman *Minima parvitatis;* por no poderse dividir naturalmente, aunque Dios milagrosamente siempre los puede romper en las partes, que quiera. Y affirman que de estos Indivisibles Naturales se compone el Continuo. Y con esta Opinion responden a Zenon y Aristoteles, sin que les haga fuerza Argumento alguno.

Los Puntos Mathematicos se differencian de los Physicos, Hyperphysicos, y Metaphysicos; porque en aquellos realmente no hay divisibilidad mas en estos la hay, pero no se concibe. Y Metaphysico viene a tener esta Definicion. *Punto Real es el que verdaderamente no tiene parte alguna,* y el Mathematico esta. *Punto Mathematico es una magnitud, en que, o no se conciben partes; o se suppone, que no las tiene.* De manera que la indivisibilidad del Punto Mathematico, no es atributo real suyo, sino denominacion, que se toma de nuestro entendimiento, que lo concibe como indivisible; o por mejor decir, no lo concibe como lo divisible».

* * *

Juan Vernet en la pequeña noticia que sobre Caramuel da en el volumen III del *Dictionary of Scientific Biography*[237], le reprocha que la solución que nos ofrece de la trisección del triángulo es sólo aproximada y, lo que todavía es peor, que ni siquiera se dio cuenta de ello. No, creo que no es así, pues la

235 «Articulo IV. De los Puntos. Si los hay? que son? y si se han de admitir en Geometria', en *Architectura civil*, pp. 21-25.

236 *Architectura civil*, pp. 21-22.

237 *Dictionary of Scientific Biography*, editado por Ch. C. Gillispie, Nueva York, Scribner, 1971, vol. III, p. 61. Véase, sin embargo, el texto en torno a la nota 101 y el que está en torno a la nota 233.

óptica de Caramuel es siempre la de un 'calculista': para él resolver un problema con ocho decimales es suficiente. Como he notado aquí y allá en el presente trabajo, lo que a nuestro autor interesa sobremanera son los cálculos bien planteados y bien resueltos, con exactitud, con eficacia, con prontitud.

Para Santiago Garma, «hay una idea fija en Caramuel cuando se enfrenta con un problema, es la de solucionarlo numéricamente (...). Por supuesto esto le convierte en un buen calculista y le lleva a buscar formas claras de exposición y a afinar en la solución de los problemas resueltos aproximadamente. Por otro lado pierde algo de su capacidad especulativa al no tratar de buscar mejores condiciones en el planteamiento de los problemas» [238]. Con Pastine [239], deberemos convenir que, sobre todo la *Mathesis biceps* —la que nos ha comido casi todo el tiempo, porque se lo merecía—, tiene sobre todo un carácter enciclopédico, es como una especie de repertorio en el que el estudioso pudiera encontrarlo todo, incluida una abundante bibliografía, gracias a los numerosos autores citados; es esencialmente un tratado con significación pedagógica y didáctica, aunque sean numerosos —como sabemos— los méritos propios.

Por mi parte solamente quiero añadir, a manera de conclusión, unas palabras sobre la utilidad o no de pasar las horas y los días sobando los lomos de los libros de Juan Caramuel y Lobkowitz; no lo echo al saco de los trabajos perdidos, ni mucho menos, me introdujo de lleno en la 'matemática normal' del siglo XVII, además, me divertí mucho con él, lo que, en los tiempos en que vivimos, no es poco [240].

ALFONSO PEREZ DE LABORDA

238 Garma, p. 62. Véase también, Ceñal, *Caramuel*, pp. 110-111.

239 Cf. Pastine, p. 222.

240 En su artículo sobre la gramática de Caramuel, «Juan Caramuel y su teorema fundamental», en *Llull. Boletín de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*, 3 (1980) 39-106, exactamente en la página 41, teme Juan Gutiérrez Cuadrado que pocos españoles recuerden el centenario de la muerte de Caramuel leyéndolo y escribiendo sobre él. Aunque comparto con él dicho temor, presento aquí mi pequeña contribución.