Papeles Salmantinos de Educación, Núm. 19, 2015
Facultad de Educación, Universidad Pontificia de Salamanca

LECCIONES DE LA GRECIA CLÁSICA PARA LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS

Lessons of the Classical Greece for present teaching of mathematics

Miriam Méndez Coca[1]

RESUMEN: *Del análisis de los tres modelos matemáticos de la Grecia Clásica se recogen algunas lecciones para profesores y estudiantes. En el modelo pitagórico se recoge el significado de los números uno y restantes, sus mutuas relaciones y su referencia a la estructura numérica de la naturaleza, que hace posible su conocimiento matemático, por su carácter comprensible. El modelo platónico atiende al conocimiento científico, a la estructura del saber matemático e instala la educación matemática desde la primera infancia. En el modelo aristotélico se descubren las matemáticas como fundamento de su metafísica y como procedimiento para el estudio de la virtud y del valor moral.*

Palabras clave: *Modelos matemáticos, educación matemática, significado de los números, naturaleza.*

ABSTRACT: *From the three models mathematics of Classical Greece analysis teachers and students can extract some lessons. The Pythagorean model focused on the meaning of the numbers One and others, their relationships, the numerical structure of the nature that favored the acquisition of the mathematical knowledge. The Platonic model focused on scientific knowledge structure; institute the mathematical teaching in the infancy. In the Aristotle model, the mathematics was the basis of its metaphysics and contributed to define the virtue and moral worth.*

Keywords: *mathematical models, mathematical education, numerical meaning, nature.*

1 Centro Universitario Villanueva. Universidad Complutense de Madrid.
E-mail: mmendez@villanueva.edu

1. INTRODUCCIÓN

El contenido de las páginas que siguen se orienta, de modo primordial, hacia una aproximación a la mentalidad matemática elaborada por los científicos y filósofos de la Grecia Clásica, más que a los descubrimientos matemáticos de la época. En la convicción de que la actual enseñanza escolar de la matemática debe ir acompañada de una serie de convicciones previas, una especie de previsiones mentales del profesor, que deben actuar como fermento o catalizador de los contenidos que escolarmente está obligado a transmitir. Se pretende acentuar los objetivos pedagógicos, más que los históricos de la cultura clásica, por cuanto aquellos se estiman de interés para la enseñanza actual de las matemáticas.

El profesor de matemáticas, a partir de sus conocimientos sobre la materia a explicar, es el más capacitado para aproximar al alumno el sentido y la función que las matemáticas juegan en el contexto de su articulación intelectual. Esto exige profundizar y reinterpretar personalmente la propia enseñanza para poder transmitir la importancia capital de la mentalidad matemática en orden al conocimiento de la realidad global, del desarrollo tecnológico y del progreso social, en coherencia con el sentido que cada uno de los seres humanos imprime a su propia existencia.

El alumno comprenderá mejor las matemáticas que debe estudiar si, con anterioridad a la explicación de las formas operativas, se alcanza a hacerle comprender tres asuntos del mayor interés: a) *La omnipresencia de las matemáticas*, es decir, la matemática está presente en los objetos naturales y en todas y cada una de las actividades humanas racionalmente producidas. La mentalidad matemática originaria de los griegos es inseparable de su concepción sobre la unidad esencial de la naturaleza, en la que cada cosa ocupa su lugar y desempeña su función, esto es, tiene número, cifra y magnitud determinada. La matemática griega transmite la lección pedagógica del realismo y de la fidelidad a las cosas: nada hay al azar ni nada es por casualidad, todo tiene su lugar y su función. Es una constante invitación al conocimiento de la realidad. Desde este punto de vista, las actuales investigaciones internacionales sobre los resultados del aprendizaje matemático insisten con reiteración en la conveniencia y necesidad de contextualizar los contenidos matemáticos para estimular la atención de los estudiantes en el estudio de este saber. A este objetivo responde el concepto nuevo de *alfabetización matemática*[2] pero de aceptación general y que la OCDE/PISA difundió y definió como "la capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OCDE, 1999). b) El segundo supuesto se refiere a *la autonomía de los procesos matemáticos*, en cuanto se articulan y desarrollan a partir de axiomas racionales de los que se deducen, tanto los procesos puramente formales, que configuran la estructura de la ciencia matemática, cuanto los que tienen utilidad para su aplicación real y verificación empírica. c) Por último, *el carácter instrumental de las matemáticas*: las demás ciencias, sobre todo las de base empírica, adquieren rango científico en la medida en que alcancen a presentar sus conclusiones o "verdades", en forma de leyes matemáticamente formuladas. Esto quiere decir que las matemáticas, además de su racionalidad interna, ofrecen capacidad de racionalización a las demás ciencias y se convierten en el lenguaje de las ciencias empíricas[3].

En el marco de las sociedades europeas, se produce una gran preocupación sobre los resultados del estudio de las matemáticas y en consecuencia, en los últimos años la mayoría de los países "han emprendido reformas de su estructura curricular con la intención de reforzar el desarrollo de competencias y habilidades, de mejorar los aspectos transversales y de hacer mayor hincapié en la aplicación

2 Texto en inglés: "Mathematical literacy is an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgements and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual's current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen".

3 Por racional y racionalización entendemos aquí los procesos discursivos en los cuales cada uno de sus elementos o enunciados es deducido o inducido con necesidad lógico/matemática de otro anterior. El conocimiento matemático inicia la ruta desde la irracionalidad mítica a la racionalidad lógica de la mano de Anaximandro, que atribuye explícitamente el equilibrio universal a la equidistancia, aproximándose así a la concepción matemática del universo: "la tierra está situada en medio (del universo). Ocupando el punto de un centro y es de forma esférica" (Eggers Lan, *Los filósofos presocráticos*, Frag. 154-12 A 1)

de las matemáticas a la vida cotidiana. Este enfoque basado en los resultados del aprendizaje tiende a ser más integral y flexible a la hora de responder a las necesidades de los alumnos" (EURYDICE, 2012,11). Sin embargo la Unión Europea es consciente de la dificultad de trasladar los objetivos curriculares a la práctica docente, mientras los profesores y los centros escolares no reciban el apoyo social necesario y el asesoramiento técnico conveniente, para que el profesorado pueda incluir en el aula los recursos tecnológicos y otros de que carece. Como afirma el profesor David Méndez (2012) "las instituciones no han facilitado al profesorado la formación necesaria para conocer el fundamento de los nuevos avances tecnológicos".

En este contexto de reformas curriculares se ofrece esta reflexión sobre la mentalidad matemática que se desarrolló en la cultura de la Grecia Clásica y cuyo realismo estimuló las diferentes perspectivas matemáticas de aproximación al Cosmos, a la Naturaleza, en la convicción de que su estructura numérica y de orden estimulaba el conocimiento científico y el desarrollo del saber matemático. La perspectiva de la que se parte es más integradora que disyuntiva, puesto que la matemática se caracteriza por ser un *complejo sistémico deductivo que actúa como paradigma de la cultura griega*. Con esta expresión se enuncian los supuestos intuitivos que comprenden las excelentes aportaciones matemáticas de la cultura griega clásica, a las que se atiende en las páginas que siguen: el razonamiento deductivo pitagórico y las relaciones entre totalidad e individualidad; la elaboración del conocimiento científico y matemático en Platón y, por último, el carácter teorético de las matemáticas como coherencia compartida en Aristóteles.

2. MODELO PITAGÓRICO: REALISMO Y RELACIÓN ENTRE TOTALIDAD E INDIVIDUALIDAD

En el modelo pitagórico es claramente perceptible que la matemática es y debe proceder como secuencia de deducciones, pero tan importante como sus formulaciones matemáticas operativas es lo que se denomina "metafísica del número". Las nociones de par/impar, de irracional, de segmentos inconmensurables, de relación entre la diagonal y el lado del triángulo rectángulo isósceles, la que existe entre los cuadrados de los catetos y la hipotenusa, así como aplicaciones de las razones y proporciones supusieron un gran avance de las matemáticas. Si este denso bagaje supuso un progreso para la dimensión operativa de la matemática, en mi parecer, la llamada "metafísica del número", a pesar de su orientación más teórica, constituyó el progreso decisivo de la mentalidad matemática como ciencia deductiva. A continuación se atiende al significado del UNO y de los restantes números.

2.1. El número Uno y la Totalidad

El punto de partida, en la cultura griega, era la afirmación de que la Totalidad coincidía con la Naturaleza, equivalente a lo que hoy entendemos por Universo. Era la unidad perfecta fuera de la cual nada existe, porque nada queda fuera de tal unidad (inmanentismo). Esta unidad perfecta se representa simbólicamente por el pitagorismo a través del Uno, unidad expresada numéricamente a que es reducible cualquier otra magnitud. El Uno no es un concepto abstracto sino el símbolo de que nada puede ser entendido como realidad aislada, individualizada, porque todo cuanto existe en la realidad, no existe por sí mismo, en virtud de su propia entidad singular, sino como partícula integrante de una totalidad. Por tanto, cada ser es lo que es, no por sí mismo, sino por su participación en la unidad, en el Uno. El Uno no expresa, pues, el primer momento de la serie numérica idealmente tendente al infinito, sino el infinito mismo. El Uno es símbolo de la totalidad de lo existente, significa la totalidad de todo lo físicamente real y de todo lo que puede ser pensado, aunque sea físicamente irreal. En este sentido es expresión simbólica, tanto de la totalidad de la Naturaleza, cuanto de la articulación universal de los seres: todos pertenecen y desempeñan un papel dentro de la unidad. Así parece entenderlo y confirmarlo Porfirio en la *Vida de Pitágoras;* una de las obras antiguas que ha transmitido la mentalidad matemática pitagórica con más fidelidad: "Han denominado "uno" *(hen)* al concepto significativo de la unidad, de la identidad y de la igualdad y a la causa del acuerdo conjunto y de la simpatía del universo y de la conservación de lo que mantiene también inmutablemente la identidad" (Porfirio, *Vida de Pitágoras,* parágrafo 49). El uno no es, por tanto, expresión de magnitud que puede ser tomada aditivamente como principio de cantidades o números sucesivos, sino, como dice Porfirio, como "concepto significativo de la unidad" a partir de la cual todos los seres pueden ser valorados como idénticos e iguales si desempeñan el mismo lugar ontológico en esa unidad, y como diferentes y desiguales si su papel no es el mismo. Así pues, el uno es la trama real y auténtica a partir del cual se pueden evaluar los seres, atribuirles cualidades y funciones, distinguirlos, diferenciarlos y relacionarlos, tomando siempre como referencia su forma de estar articulados, y el papel que desempeñan en esa unidad mística expresada por el uno.

2.2. Significado de los restantes números

Cada uno de los números distintos del uno identifica y distingue a cada cosa y su modo de ser relativo al uno. Por eso las diversas clases de números –pares, impares y sus divisiones– son expresión, no sólo de magnitudes o medidas, sino del modo en el que la perfección del uno se especifica o participa en cada cosa. Eso quiere decir que la escala numérica expresa, no solo una magnitud matemática, sino una proporción ontológica, esto es, un modo de ser específico de cada ser diferenciándolo de los demás y asignándole su lugar en el conjunto. De este modo, la inteligibilidad de la realidad se expresa por medio de múltiples analogías, incontables, como incontables son los seres individuales dentro del universo: "To Pythagoras number was the principle of a divine order in the Universe. The study of number and its laws therefore was the immediate contemplation of the divine Law by whish everything is held together and to which the objects of nature owe their being and their being and their essence, and to which man in his thought and life is likewise subjected"[4] (De Vogel, 1966: 196).

El pitagorismo, por tanto, parte de una intuición místico/especulativa, la perfección divina de la Naturaleza, que tiene como

4 "Para Pitágoras el número era el principio del orden divino del Universo. El estudio del número y sus leyes eran, por tanto, la contemplación de la Ley divina, por la cual todo se mantiene junto y a la cual los objetos de la naturaleza deben su ser y su esencia y para lo cual el hombre en su pensamiento y en su vida está sujeto de la misma manera" (Traducción propia).

consecuencia la afirmación de que las cosas singulares son imperfectas, pero no concluye en una actitud de rechazo místico de lo imperfecto, del mundo sensible, sino que recurre a la matemática y luego a la astronomía, como intentos cognitivos por los cuales, sin necesidad de tener delante las cosas, se hace posible aproximarse a la perfección ideal de la unidad a la par que se comprende la imperfección del mundo sensible. En consecuencia, las matemáticas son la única mediación que puede aproximar a la comprensión de la perfección absoluta, ilimitada, de la naturaleza, participada en la imperfección limitada de los seres.

Para el pitagórico, por tanto, es posible alcanzar conocimiento por medio del pensamiento puro basado en la intuición de axiomas de los cuales se deducen teoremas. Si los axiomas son verdaderos, lo serán los teoremas y deducciones. El papel del matemático, no es confrontarlos con la realidad, sino demostrar su racionalidad lógica, su aceptabilidad y deducir sus consecuencias que, de ser contradictorias, llevarían a la negación del axioma del que se había partido. *No hay, pues, conocimientos inconexos puesto que todos los teoremas y ecuaciones se formulan en virtud de deducciones coherentes*. Ahora bien, el único medio para comprobar o, en lenguaje actual, para testar la veracidad del axioma no puede ser otro que empírico. Por eso el pitagorismo concluyó en una matemática aplicada y en el desarrollo de los teoremas geométricos, algunos tan conocidos como el llamado teorema de Pitágoras, aunque su formulación sea anterior, porque lo "conocieron incluso los babilonios, en cuya matemática tenía una función fundamental" (Taton, 971: 232).

Esta forma de entender la matemática nos confirma que el razonamiento deductivo tiene su origen en la mentalidad pitagórica. Deducir equivale a ampliar y extraer nuevos conocimientos a partir afirmaciones anteriores admitidas como verdaderas. Y si bien algunos autores sitúan el origen del conocimiento deductivo en Tales de Mileto y en el desarrollo posterior de la retórica (Boyer, 1996: 111), es en el pitagorismo donde realmente se practicó, como más tarde lo confirmará el mismo Platón, aplicado no sólo a la aritmética, sino y sobre todo la geometría. Este impulso ha sido decisivo para el desarrollo de la matemática desde Euclides a nuestros días, como explícitamente reconoce Hull (1961: 97): "El gran sistema lógico de la geometría ofrecido más tarde al mundo por Euclides era una versión revisada y ampliada del sistema pitagórico, pero idéntica con éste en espíritu. No hay duda de que en la geometría pitagórica había imperfecciones lógicas, como las hay también en la de Euclides; pero el sistema de los pitagóricos fue una creación de enorme importancia e influencia".

En síntesis, el uno se eleva a principio ontológico de la realidad, esto es, la Naturaleza tiene "estructura numérica", en cuanto que cada cosa viene a ser una "variante" o "modificación", imperfecta y limitada, de la perfección de Uno. Dicho de otro modo, el Uno es valor cualitativo absoluto de referencia, y los seres son otras tantas manifestaciones reales e imperfectas, que vienen a ser significadas por todos los demás números, tanto racionales como irracionales. Dicho de otro modo: así como el uno número es referencia límite de las magnitudes positivas o negativas, fraccionarias, del mismo modo las cosas son y significan cualidades diferenciadas, siempre imperfectas, en virtud de su relación con esa perfección cualitativa del uno.

Ahora bien, no se trata de abstractos razonamientos sin fundamento en la realidad y sin conexiones, sino de poner en evidencia la profunda analogía existente entre la estructura de la realidad y la estructura racional de la matemática. No es, pues, extraña la opinión de un gran matemático de nuestro siglo cuando afirma, a nuestro juicio, con toda razón: "A veinticinco siglos de distancia tenemos la convicción de que algunos resultados de Pitágoras o de su escuela no fueron charlatanería, sino profundos análisis de una trascendencia que entonces no podían ni remotamente sospechar; de aquellos primeros balbuceos geométricos desciende en línea directa toda la moderna técnica" (Dou, 1970: 14) .

Y más como anécdota que no categoría, constatamos en pleno siglo XXI, el hallazgo de una nueva utilidad incontestable al desarrollo decimal de π: cuando se desea testar el funcionamiento de un superordenador se le impone como tarea algo arduo de calcular, pero, a la vez, cuyo resultado se conozca bien; los dígitos de π son la solución ideal" (Navarro, 2011: 11).

2.3. Corolarios pedagógicos: Relaciones entre totalidad e individualidad

La mentalidad matemática originaria de los griegos es inseparable de su concepción de la unidad esencial de la naturaleza, en la que cada cosa ocupa su lugar y desempeña su función, esto es, tiene número, cifra y magnitud determinada. En este sentido, podemos decir que la matemática griega transmite la lección pedagógica del realismo y de la fidelidad a las cosas: nada hay al azar ni nada es por casualidad, todo tiene su lugar y su función. En este sentido su preocupación operativa y los progresos que supuso, del pitagorismo a los alejandrinos, es una constante invitación al conocimiento de la realidad y a la solución de problemas reales. Para nuestro punto de vista no se trata tanto del reconocimiento de los aciertos o desaciertos concretos de las matemáticas pitagóricas, cuanto de *atender a su gran mentalidad deductiva y al realismo radical de querer dar cuenta de las cosas y de los fenómenos naturales*. Se sintetiza así la dirección esencialmente educativa de los pitagóricos.

Desde este punto de vista, las matemáticas juegan el papel pedagógico que supone considerar las cosas como depositarias de una inteligibilidad más reveladora que la percibida por los sentidos. El conocimiento matemático, por tanto, desvela aquella parte o participación de lo perfecto y universal que hay en cada cosa individual. *Las matemáticas, pues, expresan la participación de cada cosa en la perfección ideal que sólo puede ser intuida y pensada, pero no realizada en ningún ser natural*. En este sentido la mentalidad matemática pitagórica se distancia de las concepciones matemáticas modernas y actuales, menos realistas, aunque parezca paradójico, en cuanto que en nuestros días predominan tendencias idealistas intuicionistas, según las cuales la matemática es un ámbito consistente a partir de sus propios postulados, poco o nada motivados por la realidad (Dou, 1970: 113).

Apreciando el notable realismo de los griegos, el profesor de matemáticas, en los niveles de la enseñanza secundaria obligatoria y bachillerato, deberá hacer presente los elementos realistas que encierran y representan las operaciones matemáticas. Ellas no hacen sino sacar luz, buscar y *poner de relieve el vínculo que hay entre* *la concreción de cada uno de los temas y problemas concretos que el alumno debe aprender, con el sentido general de las cosas y del mundo*. El profesor sabrá motivarse por la convicción de que cualquier operación, de la más simple suma a la ecuación algebraica o de la geometría analítica, no son un capricho teórico, sino una vía más para completar el conocimiento del mundo real. Nos parece por eso acertada la siguiente opinión:

> *"Hacer matemáticas significa vivir experiencias matemáticas. Y para tener experiencias matemáticas hacen falta deseos de comprender y explicar las cosas de cierto modo, según el enfoque matemático, que pasa por un cuestionamiento bastante objetivo sobre aspectos del mundo en base a la cuantificación. Plantearse cuestiones matemáticas tiene como objeto aprehender la realidad y el entorno (social, cultural, tecnológico) en el que se desarrollan nuestra vidas"* (Alberti, 2011:40).

Un realismo análogo al que expresa esta cita, subyace a la mentalidad matemática griega, de modo muy particular en los pitagóricos, que procede de las intuiciones axiomáticas fundamentales, continúa con la exigencia de deducir con coherencia teoremas y aplicaciones, *lo que sugiere a la mentalidad educativa la convicción de que no hay saberes inconexos, ni acciones caprichosas, sino que la vida teórica y práctica debe proceder de principios o razones que las justifican*.

Este empeño es similar al de Platón que, para enfrentar la realidad de las cosas con su interpretación ideal, usará las matemáticas como instrumento fundamental. Por eso, según la tradición, no quería que entrase en su Academia nadie "que no supiese geometría". Pero teniendo en cuenta que toda la ambición pedagógica de Platón, dominada por la enseñanza de las matemáticas, no tuvo otra finalidad que hacer todo lo que estaba en su mano para que "el más sabio y el mejor gobierne el estado". Esa fue la ambición del realismo de los pitagóricos y de Platón: aprender matemáticas no para salir del mundo, sino para ordenarlo y gobernarlo del mejor modo.

3. MODELO PLATÓNICO: LA MATEMÁTICA Y EL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO

Platón representa el hito quizás más importante, no tanto por sus formulaciones matemáticas concretas, sino por las afortunadas exigencias que trasmitió en cuanto a la formación de la auténtica mentalidad matemático/científica. No introdujo innovaciones respecto al pitagorismo en cuanto a la formulación específica de conceptos y procedimientos concretos, sin embargo hizo de la matemática el pivote sobre el que bascula todo su proceso educativo, encaminado al conocimiento verdadero de lo que son las cosas. Trataremos de aproximarnos a este planteamiento, atendiendo a dos aspectos: la génesis del conocimiento científico y la elaboración del conocimiento matemático, mediante algunos textos significativos.

3.1. Génesis del conocimiento científico

El primer gran texto paradigmático de la mentalidad matemática del platonismo está en las últimas páginas del libro VI del diálogo *República,* en donde Platón propone que el proceso modélico de todo conocimiento verdadero se asemeja a un itinerario ascendente. Se puede comprender gráficamente si se lo compara con una línea, AB, dividida en dos grandes fragmentos desiguales: AC y CB, subdivididos cada uno en otros dos como se muestra en la nota[5] .

I___ conocimiento sensible ____I ______ conocimiento inteligible __ ____ I
A -------------D---------------- C-------------------------------------E-------B

εἰκασία	πίστις	διάνοια	νόησις
imágenes	confianza en lo real	ciencia/razonamiento	intuición

Estableciendo proporciones resultan las siguientes: AD:DC::CE:EB.

5 – AC, representa el conocimiento sensible. Se divide, a su vez, en AD = conocimiento por imágenes, símbolos, o representaciones. Y en DC = conocimiento mediante la percepción directa y sensible de los objetos. – CB que representa el conocimiento intelectual Se divide en CE = conocimiento matemático, o razonamiento científico. Y EB = conocimiento intuitivo, no alcanzable sino mediante intuiciones superiores al propio razonamiento discursivo, facultad de escasísimos espíritus privilegiados (PLATÓN, *República*, VI, 510c.)

El conocimiento verdadero debe recorrer todo ese itinerario que va de las imágenes a los objetos reales y de éstos a su percepción intelectiva o científica, para culminar, en escasísimos casos de sabios perfectos e iluminados y en el momento de la muerte, en el conocimiento intuitivo que supone una previsión de lo que algo podría ser si no estuviese limitado por su materialidad física. Con un ejemplo: el conocimiento de una circunferencia no es el que nos facilita su dibujo en la pizarra, ni ver un aro o una rueda, puesto que esos dos momentos no son sino el paso al conocimiento intelectual, el que tenemos cuando *alcanzamos a conocer y comprender las relaciones que se dan entre el radio y la longitud de la circunferencia* ($2 \cdot \pi \cdot r$) *y la superficie del círculo* ($\pi \cdot r^2$). Y con estos alcances puramente intelectivos, que ya no necesitan ni imágenes ni cosas físicas redondas, se abren paso todas las derivaciones geométricas y trigonométricas que se pueden deducir de un triángulo rectángulo inscrito en uno de sus cuadrantes delimitado por dos de sus radios. El último grado de conocimiento sería el de quien, una vez alcanzado ese conocimiento matemático, fuese capaz de intuir o prever, sin necesidad de razonamientos, todas las posibles implicaciones y derivaciones de tales conocimientos matemáticos. Platón, por tanto, confía que el razonamiento intelectual que actúa a nivel científico, deja todavía un margen de realidad que puede ser pensada como previsible pero no como cognoscible mediante razonamiento. Por eso atribuye este conocimiento al alma, esto es, al entendimiento pero en el momento de la muerte, cuando no está ya constreñido por condiciones materiales, en el lenguaje actual, por nuestras limitaciones cerebrales.

Lo importante para nuestro propósito radica en que es en el fragmento CE en donde, después de ver imágenes u objetos reales, se produce el conocimiento científico que equivale a una concepción matemático/racional de la realidad. Dicho de otro modo: no hay ciencia hasta que no se conocen, mediante el aprendizaje, los principios matemáticos que rigen a los objetos reales. El conocimiento por la percepción sensible de imágenes o cosas reales, no son más que pasos preparatorios que deben ser superados para alcanzar el verdadero conocimiento. Ahora bien, esos conocimientos matemáticos, si bien deben ser aprendidos, sus principios fundamentales son intuitivos, tal como expresa en un célebre pasaje:

> *"Creo que sabes que quienes se ocupan de geometría y de cálculo suponen lo impar y lo par, las figuras y tres clases de ángulos y cosas afines, según lo que investigan en cada caso. Como si las conocieran, las adoptan como supuestos, y de ahí en adelante no estiman que deban dar cuenta de ellas ni a sí mismo ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien, partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en aquello que proponían a examen"* (Platón, *República*, VI, 510 c).

De la cita podemos deducir dos aspectos: *El primero es el carácter intuitivo de los principios matemáticos, que no admiten demostración*, a partir de los cuales el matemático establece procesos deductivos hacia teoremas y conclusiones aplicadas, si bien éstas deben apoyarse en representaciones materiales, esto es, deben tener correspondencia en la realidad. Por tanto, el carácter intuitivo de los principios y axiomas actúa a modo de hipótesis, en su sentido originario, que significa fundamento o punto de partida que está en la base del razonamiento por el que se desciende hasta las conclusiones[6]. Este explícito reconocimiento de Platón, a nuestro parecer, debe ser bien entendido porque no supone ninguna huída hacia "otro mundo", sino que confirma la convicción de que el entendimiento humano, el alma dice él[7], está dotado de atribuciones innatas que se van activando por la experiencia, pero que actúan en virtud de su propia fuerza intelectiva. Esto convierte en muy importante el cultivo de la propia inteligencia, del entendimiento como entendimiento, mediante ejercicios que fomenten la atención a sí mismo, a la propia interioridad y a la propia capacidad reflexiva, antes de entrar en las matemáticas como sistema operacional.

El segundo aspecto afirma que no hay auténtica ciencia hasta que se pueda prescindir de la realidad física de los seres, de su descripción y de sus imágenes, como innecesarias para dar cuenta de

6 En el griego original ὑπόθεσις (hipótesis) significa base, principio, fundamento. No coincide, pues, con el sentido actual.

7 El concepto platónico de alma es sinónimo de lo que nosotros expresamos con los de razón o entendimiento.

la totalidad de lo que son y de todas sus funciones. Las ciencias y el conocimiento no alcanzan la categoría de científicos mientras no sean demostrables racional y razonadamente, sin el recurso a la experiencia, en donde pueda haber tenido su origen el proceso hacia su conocimiento verdadero. La ciencia es siempre episteme, esto es, inteligencia y conocimiento asentado en razones o, en nuestro caso, en razonamientos regidos por la necesidad deductiva. Y así es porque la matemática actúa a partir de verdades eternas, de axiomas intuidos en el espíritu que, sin embargo no son obra del razonamiento científico humano, porque pertenecen al orden supremo que rige la naturaleza.

3.2. Elaboración del conocimiento matemático

Este modo de interpretar la matemática no es ningún trasnochado idealismo como queda bien claro si nos preguntamos, por ejemplo, en dónde radica el principio de no contradicción, o la razón de por qué la superficie del círculo es una variable dependiente del cuadrado del radio multiplicado por π. Ciertamente la realidad lo confirma, pero el matemático trabaja con tales intuiciones como evidencias racionales anteriores a cualquier experiencia. De este modo, el matemático no puede ser asimilado a un "aficionado" que usa de los números para comprar y vender, porque él es quien percibe "por medio de la inteligencia" que en ellos se expresa la "verdad y la esencia" de las cosas (Platón, *República, VII,* 525 c.). Por eso, la primera de las ciencias teoréticas que debe ser enseñada es la aritmética, que ha de conducir a la intelección de la realidad de las cosas. Y la segunda debe ser la geometría que, con más proximidad a la realidad física, es imprescindible porque en ella se cultiva

> *"... apuntando al conocimiento de lo que es siempre, no de algo que en algún momento nace y en algún momento perece (…) pues la geometría es el conocimiento de lo que siempre es (…) Se trata entonces de algo que atrae al alma hacia la verdad y que produce que el pensamiento del filósofo dirija hacia arriba lo que en el presente dirige hacia abajo ya que bien sabemos que hay una enorme diferencia entre quien ha estudiado geometría y quien no"* (Platón, *República*, VII, 527 b.).

Del texto se deduce que la matemática abre dos caminos: Uno hacia *el propio modo de ser del espíritu humano en el que sitúa los axiomas fundamentales* del que se derivan los teoremas y demás aplicaciones matemáticas. *Otro hacia el verdadero conocimiento de lo que son las cosas* en cuanto que su conocimiento especializado, "no de aficionados", no se detiene en lo que de ellas nos dan los sentidos, el conocimiento sensible, sino que alcanza a entrever su "verdad y su esencia". Lo que nos lleva a la conclusión pedagógica de que, sin la comprensión matemática de la realidad, no se alcanza más que un saber fraccionado y parcial. No se trata tanto de aprender teoremas concretos y diseñar aplicaciones específicas, sino de llevar al ánimo del educando que todo en la naturaleza está regido por el orden, la proporción, la medida, las relaciones. O lo que es lo mismo: *adelantar didácticamente que la naturaleza está articulada en virtud de principios matemáticos y no regida por el azar, el destino o el capricho*.

Con ello Platón ha sabido hacer de la matemática mucho más que una ciencia operativa, para elevarla a forma previa de intelección que debe presidir cualquier otra ciencia, todo tipo o grado de conocimiento. Así lo expresa también en una obra de su ancianidad, la conocida como *Carta VII* (342 b) dirigida a los Siracusanos, en la que vuelve sobre las cinco formas en que se nos pueden presentar las cosas: tres de naturaleza sensible que son *el nombre, la definición y la imagen*; dos de naturaleza inteligible: *la ciencia razonada, y la inteligibilidad pura o arquetípica*, esto es, la intuición de que más allá de la ciencia queda la clarividencia de que cualquier realidad puede ser todavía más de lo que facilita el razonamiento. Aunque parezca en apariencia menos significativo, el matematicismo de Platón influyó profundamente en las aplicaciones operacionales de la matemática y en las derivaciones hacia la física incipiente y hacia la astronomía.

Muchos supuestos puramente imaginativos, no justificados científicamente, sin embargo influyeron en el desarrollo realmente científico. Tal es su imaginaria teoría expuesta en el diálogo dedicado a la conformación del mundo, el *Timeo*, en donde propone que la forma última y básica del universo es el triángulo y a partir de éste, se abre paso la convicción de que mediante la triangulación puede ser conocida y calculada cualquier superficie plana. Quizás sea ésta una de las nociones más fructíferas de la geometría antigua que, a su vez, abre paso a la trigonometría ya que, aunque el triángulo se presente bajo formas irregulares, todo triángulo se puede descomponer en triángulos rectángulos. Sabemos que las funciones trigonométricas, como hoy las usamos, se sustentan sobre las relaciones entre los dos catetos entre sí, o de ellos con la hipotenusa. Y de los triángulos equiláteros se derivan las demás figuras, como el pentágono, fundamental en la geometría euclidiana por su relación con la "sección áurea" [8], así como los sólidos platónicos: el cubo, el tetraedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

Interesa señalar que esta concepción geométrica del universo, con su indudable carga de ingenuidad mitológica, nos lega una lección que la ciencia renacentista no tendrá ya más que desarrollar: la concepción de la armonía cósmica como resultante de articulaciones geométricas y de mensurabilidades aritméticas. Nada extraño pues, que se tomasen las proporciones matemáticas como referencia para valorar tanto los seres naturales como los artificiales, los artefactos, esto es, los producidos mediante la actividad humana, entre los que destacan las obras de arte, a las que se reconocerá tal categoría precisamente por la armonía de sus proporciones.

3.3. A modo de síntesis

De esta concepción, más intelectualista que empírica de la matemática, se derivan las pertinentes previsiones pedagógicas que parecen elaboradas para dar respuesta a la enseñanza actual de las matemáticas: Platón toma las cautelas necesarias para transmitir con éxito la mentalidad matemática desde la infancia, aconsejando que no se enseñe la geometría ni las demás ciencias, por la fuerza, ni de forma compulsiva, puesto que "…el alma no conserva ningún conocimiento que haya penetrado en ella por la fuerza (…) Entonces, no

8 De gran influencia en el arte, la arquitectura, la urbanística, etc. el concepto de "sección aurea" está asociada al despuntar de la geometría. La "sección Áurea" es la operación por la cual se divide un segmento entre dos partes, de la cual la mayor es media proporcional entre la menor y la longitud del segmento. En términos aritméticos: a:b = b: (a+b).

En términos algebraicos: b: ½ ($\sqrt{5}$-1) c. Numéricamente: Φ= ½ ($\sqrt{5}$-1) –≈ 1,618.

obligues por la fuerza a los niños en su aprendizaje, sino edúcalos jugando, para que también seas más capaz de divisar aquello para lo que cada uno es naturalmente apto" (*República,* VII*,* 537 a.). Como síntesis final del planteamiento platónico, nos parecen fundamentales *dos conclusiones de gran actualidad*, deducidas del platonismo.

a) La certeza de que las ciencias no alcanzan el valor de conocimiento verdadero hasta que *superen el umbral de la observación y la experimentación*, mediante formulaciones, demostraciones, principios, leyes, conclusiones, etc. con valor universal. Esto supone alcanzar el nivel de la episteme, o sea el razonamiento lógicamente articulado para poder ser compartido, lo que se alcanza cuando tales conclusiones pueden ser objetivamente y matemáticamente.

b) La diligencia platónica hacia la inteligencia, por la cual insiste en que el conocimiento científico y matemático, aún basándose en intuiciones, *debe ser cultivado, más aún, enseñado mediante la práctica desde la infancia*. No hay pues, ciencia infusa, ni siquiera de aquellos principios que se reconocen como previos o fundamentales para ser aplicados en la realidad. La evidencia de los principios, pues, no se alcanza más que con el recorrido pedagógico de una enseñanza que debe comenzar con lo más sensible y comprensible. La enseñanza de las matemáticas, por tanto, debe someterse a una didáctica que, sin reducirla a sus aplicaciones, empiece por éstas para llevar a la compresión de los procesos deductivos.

Esta opinión viene confirmada por el propio Platón cuando insiste en que todo proceso de conocimiento es un proceso dialéctico, entendiendo por tal el camino que se inicia en lo más conocido y se eleva paulatinamente hacia lo menos conocido. Lo hemos visto de modo general cuando ejemplifica este proceso con la división de la línea que empieza por las sombras e imágenes y acaba en la intuición de lo que realmente es la verdad de las cosas, inaccesible al razonamiento. Así debe procederse, no sólo en las ciencias teoréticas como la matemáticas, sino también en entidades más sensibles, como es la belleza, cuya realidad verdadera no se alcanza de inmediato, sino pasando de la belleza de un cuerpo a la de varios cuerpos, de ésta a la belleza de un acto bueno, luego a la de un razonamiento y a la belleza de las ciencias. Proceso que describe Platón con lenguaje muy inteligible en su célebre diálogo que lleva el título *Banquete* (210a -211b). Y su diálogo *Fedro* (248 b y ss), está articulado sobre las bellas imágenes del ascenso hacia la cumbre de la verdad mediante un proceso de superación de etapas sucesivas que van desde las más próximas, inmediatas y concretas a las más abstractas.

Por consiguiente nos parece acertada la opinión de de C.B. Boyer (1996: 126) cuando escribe: “Platón parece haber sido el primero en señalar que a veces es conveniente *desde un punto de vista pedagógico invertir el proceso*, sobre todo cuando la cadena de razonamiento de las premisas a la conclusión no es en principio natural y obvia. Uno podría comenzar así por la proposición que hay que demostrar y deducir de ella una conclusión que se sabe se verifica. Si podemos entonces invertir las etapas de esta cadena de razonamiento, el resultado será una legítima demostración de la proposición dada”.

c) Quizás sea este el mérito más destacado de Platón que, si bien no introdujo especiales adelantos operativos en la matemática, sí supo valorarla como ejemplo de todo conocimiento verdadero siguiendo un proceso analítico de doble dirección. La primera, esencialmente deductiva, parte de la dotación intelectual del científico, de intuiciones como son los axiomas matemáticos, para poder formular proposiciones, conclusiones y aplicaciones precisas. La segunda, más inductiva, parte de lo más conocido, como son las imágenes, lo que sabemos por experiencia de las cosas, para ir ascendiendo hasta el conocimiento de su esencia, de los principios que rigen esa parcela de realidad que observamos. Buen ejemplo de esta mentalidad platónica en que se entrelazan e ilustran mutuamente la deducción y la inducción es su diálogo titulado *Sofista* (240a y ss.). El razonamiento platónico siembra así el germen de una mentalidad científica basada en el razonamiento lógico que, como el propio Popper propone en la actualidad, no es exclusivamente inductivo ni puede ser plenamente deductivo (Popper, 1962:27-56).

La mentalidad pitagórico-platónica supuso un notable avance en los procedimientos prácticos y aplicados de las matemáticas y, con acuerdo entre los historiadores, si no implicó innovaciones concretas, sí introdujo toda una mentalidad, como la de su discípulo Aristóteles y más concretamente la que abre el paso a los axiomas de la geometría de Euclides. No en vano uno de los más importantes matemáticos de la Academia platónica, Teeteto, es considerado como el inspirador de la mayor parte del libro XIII de los *Elementos* de Euclides.

3.4. Corolario pedagógico

Quizás el mejor ejemplo de lo que se pretende afirmar en este apartado sea recordar la concepción platónica del conocimiento verdadero, ejemplificado con sus propias referencias. Frente a un aro o una rueda nuestro conocimiento sensible no va más allá de constatar su cualidad de redondos y no cuadrados, quizás también a comprobar que su centro equidista de la línea que lo circunscribe. Eso lo sabe también el artesano que hace un aro o construye una rueda, sin saber geometría, ajustando las piezas para obtener y mantener la forma circular de los objetos. Ahora bien, el verdadero conocimiento del aro o de la rueda será el de quien, sin necesidad de verlos ni dedicarse a su construcción, conoce intelectivamente las relaciones que existen entre su radio, la longitud de la circunferencia y la superficie del círculo, además de las relaciones que puedan derivarse de sus polígonos inscritos o circunscritos. A esa conclusión llegó Platón, dejando claro que no hay conocimiento verdadero de la estructura y del funcionamiento de las cosas hasta que se tenga de ellas una representación racional, esto es, un saber elaborado por la propia razón, aunque la experiencia y las impresiones sensibles hayan sido su impulso inicial. A esta representación intelectual de las cosas y del mundo, se le denomina en la actualidad conocimiento científico, esto es, saber verdadero sintetizado a través de principios o leyes con valor universal y necesario, aplicables sin límites de tiempo y espacio.

En este proceso, como el propio Platón ejemplificó, la mentalidad matemática es la que ha ido impulsando de modo determinante la racionalización de la experiencia mediante el conocimiento científico. Incluso en la actual diversificación, la base común de la epistemología científica radica en la posible formulación matemática de sus fenómenos y resultados. Sea o no excesiva tal pretensión, no es desacertado afirmar que la verdad científica es aquella que puede ser expresada matemáticamente o en una terminología análoga, como puedan ser las formulaciones físico – químicas, en todas sus ramificaciones, lo que también sucede en las ciencias biológicas y sociales. Las matemáticas son, y así sucedió desde los griegos, el paradigma para la interpretación científica de la realidad.

Con estos supuestos, el profesor ha de ser capaz de trasmitir al alumno la esencial función de la matemática en cualquier proceso de conocimiento que aspire a ser valorado como verdadero. La exactitud, la deducción no infecciosa mediante la introducción indebida de datos injustificados, la inducción coherente, en fin, todo proceso de conocimiento legítimo, debe ser formulado con precisión matemática. Es cierto que los griegos se movían todavía en la conjetura, dentro de una cierta mentalidad de tanteo, en el mundo "del más o menos", pero su mentalidad matemática originaria es la clara iniciación de un proceso hacia la exactitud y la precisión. Y si en la vida cotidiana y en el razonamiento usual no científico, así como en la comunicación entre personas, no tiene cabida el rigorismo matemático, sin embargo la mentalidad calculadora de los griegos es buen ejemplo del uso del sentido común, de la medida razonada y de la "debida proporción" para regular todo tipo de relaciones e intercambios. Incluso en el orden ético, contemplaremos las intentos aristotélicos para expresar la justicia venía en términos racionales asociados a la proporción y a la medida, reconociendo a cada uno lo suyo.

4. MODELO ARISTOTÉLICO: LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA TEORÉTICA

Dos aspectos únicamente vamos a destacar de Aristóteles: la instalación de la matemática en la base de la metafísica y de la lógica y, por otra parte la vinculación fundamental de la matemática con la ética aristotélica, mediante el concepto de la virtud entendida como el término medio entre el exceso y el defecto.

4.1. La matemática en la construcción del sistema científico aristotélico

La matemática ocupa en el sistema aristotélico de las ciencias un lugar destacado, se le reconoce valor de ciencia teorética en cuanto que no trata de los seres desde el punto de vista de su materialidad, ni tampoco se aplica a una clase concreta de seres, sino de principios universales válidos para todos los seres pertenecientes a la Naturaleza (Aristóteles, *Metafísica* VI, 1025 b 5– 1026 a 30)[9], como son la numeración, la figura, las proporciones y los movimientos. Todo esto está relacionado con la materialidad de las cosas, pero se puede considerar y analizar con independencia de su radicación física. En este sentido la matemática pura se distingue de la física, necesaria para conocer cierto tipo de naturalezas o de modos de ser, mientras que "la matemática universal es común a todas las naturalezas" (Ibid., 1026 a 28), lo que equivale a otorgarle la misión de especular sobre los principios universales de la realidad. Esto quiere decir que la matemática atiende a los fundamentos mismos que rigen el mundo de las cosas, tanto en el orden microcósmico como en el macrocósmico. Ahora bien, los principios matemáticos no se hacen presentes al conocimiento sensible, de la vista, el tacto o el oído, sino que es el entendimiento quien realmente los descubre porque en cierto modo están en él mismo, en su capacidad de interpretar la realidad física. En cierto sentido, la matemática es análoga a la filosofía que se interroga sobre los principios del ser, de forma igualmente universal, en paralelo a la matemática, aunque ésta lo hace de forma más precisa y realista porque tiene en cuenta los principios generales desde los que se entiende la figura y la magnitud de las cosas.

Estimo sugerente la distinción que acabamos de apuntar con Aristóteles: la mentalidad matemática introduce la idea de que el número, lo par, lo impar, lo curvo o lo recto, la línea, la figura, en fin, todas las nociones matemáticas básicas, pueden ser concebidas y estudiadas con independencia de los objetos y de las conexiones con la materia, aunque luego sus concreciones vengan dadas por su incardinación material. El ejemplo aristotélico es muy ilustrativo: la concavidad y lo curvo, por ejemplo, puede ser concebido y definido con independencia de los objetos sensibles, mientras que chato sólo

9 Aristóteles en la *Metafísica* divide las ciencias en: a) Poéticas (poiéticas) de las que el arte, sobre todo literario, es la más importante. b) Prácticas que tratan sobre la conducta y la actividad humana, como es la ética. c) Teoréticas que tratan de los principios universales que rigen la realidad en su totalidad. Son la Matemática, la Física y la Teología que cubren diversos grados o niveles de la que califica como Filosofía.

puede ser tomado o dicho en relación con una materia determinada: "pues lo chato es una nariz cóncava", ejemplifica Aristóteles (*Metafísica*, 1025 b 30)[10]. Eso es así porque los "objetos matemáticos", como lo cóncavo, proceden de la abstracción de la materia de las cosas, mientras que lo chato se deriva de la adición de la entidad matemática (cóncavo) a cosa sensible (la nariz). Con sus palabras,

> *"El matemático realiza su investigación en torno a los productos de la abstracción; investiga, en efecto, eliminando previamente todas las cualidades sensibles, como el peso y la levedad y sólo deja la cantidad y la continuidad, de unas cosas en una dimensión, de otras en dos y de otras en tres, y considera las afecciones de estas cosas en su calidad de cuantas y continuas y de unas cosas considera las posiciones recíprocas y de otras la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad, de otras las relaciones proporcionales"* (*Metafísica*, 1061 a 28-1061 b 4).

Por tanto, en el pensamiento aristotélico la aritmética trata de la cantidad discreta y la geometría versa sobre la cantidad continua y extensa, tomándola como pura entidad inteligible, no como dimensión concreta, lo que sucede también cuando el matemático trata del movimiento y las demás cuantificaciones. Para la intención pedagógica que nos anima, el planteamiento aristotélico invita a insistir en la capacitación de competencias lógico intelectivas, antes de proceder a enseñar las aplicaciones y operaciones concretas.

Esta condición de inteligibilidad de la matemática, que Aristóteles hereda del pitagorismo y del platonismo, tendrá en su sistema una gran repercusión porque será la base de su metafísica y de su lógica. Desde el punto de vista metafísico, la matemática le lleva a vertebrar todo su razonamiento estableciendo un proceso que va de causa en causa, para preguntarse por la causa primera de los seres y de la Naturaleza. Proceso análogo a la matemática cuyo ámbito operativo remite a axiomas o intuiciones primeras, inteligibles e indemostrables. En segundo lugar, sirve de base a su lógica, en la doble dirección, deductiva e inductiva. Los procesos lógicos deductivos, deben de proceder como la matemática, a partir de premisas o principios

10 En *Acerca del cielo* 299 a 15 y ss, Aristóteles repite el ejemplo de la "nariz chata" (194 a 30).

intuitivos evidentes, para articular el razonamiento, cuyo principal instrumento es el silogismo. En cambio, la observación y la experimentación que tanto practicó Aristóteles, deben ser el inicio de una cadena inductiva que no se quede en la descripción de los seres, sino que lleve a formular o encontrar los principios generales inteligibles que rigen su estructura y funcionamiento.

4.2. La matemática en la ética

En segundo lugar, la matemática se postula como referencia fundamental para la ética aristotélica a través del concepto de virtud entendida como término medio entre el exceso y el defecto. Tal concepto impregna las orientaciones éticas de Aristóteles, e incluso su mentalidad política. Más allá de su enunciado en términos generales, sus referencias seguirán dominadas por los conceptos de proporción y medida adecuada, no sólo en la conducta individual, sino en las condiciones para reconocer cargos o bienes a los ciudadanos. Por consiguiente, se trata de una mentalidad matemática genérica que debe ser puesta en práctica en cada caso, considerando qué es lo que se compara y en virtud de qué principio debe hacerse el término medio. Se percibe este impulso matematicista en sus propias palabras:

> "*En todo lo continuo y divisible es posible tomar una cantidad mayor, o menor, o igual, y esto, o bien con relación a las cosas mismas o a nosotros; y lo igual es un término medio entre el exceso y el defecto. Llamo término medio de una cosa al que dista lo mismo de ambos extremos, y éste es uno y el mismo para todos; y en relación con nosotros, al que ni excede ni se queda corto, y éste no es ni uno ni el mismo para todos*" (Aristóteles, *Etica Nicomáquea*, 1106 a 25-30).

La idea del "término medio", como es evidente por la cita que acabamos de incluir, está aquí tomada en sentido genérico, pero es ilustrativa de su mentalidad matemática la distinción que se sugiere distinguiendo el término medio "en cuanto a la cosa" y "en cuanto a nosotros". En el primer sentido es claro que el término medio es una magnitud exacta, como el 6 que es término medio entre el 10 y el 2. Pero en el segundo sentido, el término medio requiere el ejercicio de la recta razón y la ponderación de todos los factores, circunstancias y situaciones que intervienen en una conducta, para poder optar por un "termino medio" razonable. Así, sucede por ejemplo, con el alimento que necesita un atleta que tiene que hacer mucho ejercicio y otro principiante. Si al primero le asignamos 10 libras de alimento, al segundo le tocarían mucho menos del término medio 6, para guardar la proporción entre el gran esfuerzo del primero y el exiguo del principiante. Eso supone rectificar la proporción matemática con la ponderación reflexiva de las situaciones. Sin embargo tal circunstancia en nada merma el valor del término medio como referencia de la perfección en todos los campos de la acción y en la propia naturaleza, tal como confirman sus propias palabras:

> *"…si toda ciencia cumple bien su función mirando al término medio y dirigiendo hacia éste sus obras, de ahí procede lo que suele decirse de las obras excelentes, que no se les puede quitar ni añadir nada, porque tanto el exceso como el defecto destruyen la perfección, mientras que el término medio la conserva, y los buenos artistas trabajan con los ojos puestos en él y, si por otra parte la virtud, como la naturaleza, es más exacta y mejor que todo arte, tendrá que tender al término medio"* (*Ibíd*., 1106 b 8-15).

Por tanto, la noción matemática de "termino medio" no tiene en Aristóteles una importancia accidental, puesto que es tomado como referencia de la perfección, tanto en el arte, que en tiempo de Aristóteles había dado ya sus frutos más logrados, sobre todo en escultura y en arquitectura basadas en la proporción; sino también en los seres naturales en los cuales la perfección radica en el término medio que la propia naturaleza acierta a asignarles. Según la profesora Salamone, "la mesótης (término medio) [11] de la Justicia Distributiva de Aristóteles se identifica con la *Proporción Aurea*, es decir, con una igualdad proporcional entre los tres criterios de repartición: la virtud, la libertad y la riqueza" (Salamone, 2007:9). La mentalidad matemática viene así a sustentar la armonía y perfección del universo, alcanzadas porque las cosas y su articulación cósmica, obedecen a principios matemáticos de medida, orden, proporción y relaciones equilibradas.

11 Para la profesora Salamone (2007: 24) "la decisión aristotélica de aplicar la proporción geométrica al ámbito ético refleja el esfuerzo titánico y aparentemente inalcanzable de querer calcular racionalmente un valor prácticamente inconmensurable desde el punto de vista científico: la bondad o fuerza moral del individuo"

4.3. Corolario pedagógico: Las matemáticas como lógica y coherencia compartida

De la mentalidad matemática originaria de los griegos se deriva la convicción de que los entes matemáticos y, por tanto, sus operaciones y aplicaciones, se fundan en la lógica común y elemental compartida por todos los humanos. Las matemáticas no pueden ser entendidas como algo propio de mentes privilegiadas, constituyen la materia básica de la metafísica, forman una estructura que sigue unas reglas deductivas fijas conducentes a la verdad, si se aplican sin errores y encarnan el fundamento para establecer el criterio moral del término medio que determina la acción justa. La atención, por tanto, debe dirigirse a los posibles errores, a poner al descubierto donde se introdujo un elemento infeccioso que, una vez introducido, envenena todo el proceso.

Esto sugiere la exigencia pedagógica del profesor que debe poner en claro, y solicita que así haga el alumno, el punto de partida, el dato o datos iniciales, el principio que se da por evidente para que, mediante la actitud psicológica atenta, se pueda avanzar con acierto en cada uno de los momentos del proceso deductivo. No cabe duda que en matemáticas se eleva a primer plano *la importancia de la atención*, entendiendo que ella se dirige, no a parcelas inconexas, sino a un sistema o complejo sistémico en el que cada parte tiene efectos sobre la totalidad. Por eso la enseñanza de las matemáticas es quizás la medición más adecuada para cultivar y satisfacer "la tendencia más profunda de la naturaleza intelectual" de los seres humanos, que consiste en "amor al sistema", en la ambición por la coherencia interna, decía el científico y filósofo Bertrand Russell (2001:98), quien confirma sus convicciones con estas palabras: "Uno de los fines fundamentales a cuyo servicio están las matemáticas, cuando se enseñan correctamente, es despertar la fe del estudiante en la razón, su confianza en la verdad de lo que se ha demostrado y en el valor de la demostración" (*Ibíd*. p. 92).

En la tendencia del "amor al sistema", que aúna las preocupaciones teóricas y prácticas de todos los seres humanos, la desorientación es la principal fuente de inquietudes: no saber donde se está o no tener claro el camino que se debe emprender. Es aquí donde la enseñanza de la matemática, con la lección de realismo que comentamos en el corolario anterior, debe inducir la mentalidad cuantificadora de la experiencia vivida para encontrar las mediaciones intelectuales y prácticas que contribuyan a clarificar la coherencia o incoherencia de lo que los propios alumnos deben afrontar. Coherencia e incoherencia que discurren de la familia a las contradicciones sociales y culturales que les toca vivir. Plantear cuestiones matemáticas supone aprender a cuantificar y preguntarse por lo que vale más o menos, por lo que tiene mayor o menor importancia, por la densidad intelectual, psicológica, social, etc. de todo lo que nos afecta, aplicando a la vida real la competencia para solucionar problemas prácticos y cotidianos.

5. CONCLUSIONES

a) Modelo pitagórico. De la concepción pitagórica de que el uno es “el principio de todas las cosas”, se infiere que el uno se eleva a principio ontológico de la realidad, esto es, la Naturaleza tiene “estructura numérica”, en cuanto que cada cosa viene a ser una “variante” o “modificación”, imperfecta y limitada, de la perfección de Uno. Del modo como el uno número es referencia límite de las magnitudes positivas, negativas y fraccionarias, del mismo modo las cosas son y significan cualidades diferenciadas, siempre imperfectas, en virtud de su relación con esa perfección cualitativa del uno.

La concepción del número, aun siendo una derivada de la interpretación mítica y religiosa del cosmos, se ha llevado a cabo precisamente con mentalidad deductiva expresada por su concepción básica: como el uno expresa la perfección, todos los demás números son expresión de los seres imperfectos.

Como consecuencia de la estructura numérica de la naturaleza, ésta se hace comprensible, es decir, sobre ella se puede alcanzar, no sólo un conocimiento aproximado, sino ciencia exacta basada en la necesidad a la que están sometidas las secuencias numéricas. Es decir, porque la naturaleza del cosmos está “regida” por los números, en terminología aristotélica, se puede dar cuenta de ella con exactitud. Estas concepciones, enunciadas en lenguaje elemental y mitificante, adelantan la concepción matemática del universo que la ciencia moderna renacentista invocará como justificación para reconocer la universalidad y la necesidad de las leyes científicas.

b) Modelo platónico. Para Platón el conocimiento científico es fruto de las operaciones de la inteligencia humana, si bien en esa operación la inteligencia se verá estimulada y solicitada por la realidad concreta, es decir, la experiencia activa la dotación innata de la inteligencia del individuo. En este modelo es un principio indiscutible que la ciencia se genera por la cultivada inteligencia del ser humano.

En cuanto al conocimiento matemático se afirma el carácter intuitivo de los principios matemáticos, que obviamente no son adquiridos por la argumentación, a partir de los cuales el matemático establece procesos deductivos hacia teoremas y conclusiones aplicadas, si bien éstas deben tener correspondencia en la realidad.

Como tercer paso viene la necesidad de cultivar la inteligencia. Para Platón la educación científica y matemática ha de iniciarse en los primeros años de los individuos. A los niños no ha de obligárseles sino convencerles de la importancia de los estudios matemáticos para el conocimiento del cosmos y para integrarse con provecho personal y eficacia social en la vida política de la ciudad. Tal vez este proyecto de enseñanza de las matemáticas desde los primeros años sea la mayor aportación de Platón al estudio de las matemáticas.

c) Modelo aristotélico. El término medio (mesótης geométrico) en Aristóteles significa tanto la superación de los extremos cuanto la virtud, que identifica no con el equilibrio inestable o la mediocridad, sino con la proporcionalidad y la perfección de la naturaleza y en el caso de la ética remite a la afirmación de la razón sobre lo irracional.

La aplicación aristotélica de la proporción geométrica al ámbito ético refleja el esfuerzo titánico de elaborar un cálculo racional capaz de medir, desde la perspectiva científica, el valor de la bondad y de la fuerza moral del individuo.

Los tres modelos referenciales de las matemáticas de la Grecia Clásica son verdaderos ejemplos de alfabetización matemática, en el sentido que se atribuyó a este concepto en la introducción, no solo por el lugar que ocupan las matemáticas en el marco científico y social, sino por el uso imprescindible de las matemáticas para entender y desenvolverse en la realidad cotidiana que nos toca vivir.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES, *Metafísica* VI, 1025 b5-1026 a 30. Trad. cast., Madrid: Gredos, 1970, vol. I, p. 308).
— *Acerca del Cielo* II 13, 295b. (Trad.cast., Madrid: Gredos, 1998).
— *Ética Nicomáquea,* 1106 a 25-30. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1985).
BOYER, C. B. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 1996.
DOU, A. *Fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor, 1970.
EGGERS Lan, C., (Editor) *Los Filósofos presocráticos*. (Trad. Cast. Madrid: Gredos, 1986, I y III p. 105), 1986.
EURYDICE. *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Madrid: MEC y D, EACEA P9 Eurydice, 2012.
HULL, W. H. *Historia y filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel, 1961.
JÁMBLICO. *Vida pitagórica,* Madrid: Etnos, CV, 64, p. 52, 1991.
MÉNDEZ, D. La sociedad tecnológica actual y sus implicaciones en la educación científica. En revista *Sociedad y Utopía*. *Revista de Ciencias Sociales*, 2012, nº 40, noviembre (pp. 72-85).Madrid: Fundación Pablo VI.
NAVARRO, J. *Los secretos del número* π. Navarra: RBA Coleccionables, 2011.
OCDE. Measuring Student Knowledge and Skills. A new framework for assessment. París, OCDE, 1999.
— *Resultados en España del estudio PISA 2000*. Madrid: Secretaría General Técnica del MEC, 2005.
PLATÓN, *República,* VI, 510 c. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1988, p. 369)
— *República, VII,* 525 c. (Trad. cast., Madrid: Gredos 1988, p. 355).
— *Carta VII*, 342 b. (Trad. cast. Madrid: Gredos, 1998)
— *Banquete*, 210a-211b. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1986, pp. 262-263 y ss).
— *Fedro*, 250 a y ss. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1986, pp. 373 y ss).
— *Sofista,* 240 a y ss. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1988, pp. 392 y ss.)
POPPER, K. *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos, 1962 (Cf. Introducción a la lógica de la ciencia, pp. 27 56)
PORFIRIO. *Vida de protágoras*. Madrid: Gredos, 1987.
RUSSELL, B. M*isticismo y lógica*. Barcelona: Edhasa, 2001.
SALAMONE, Mª. A. *La Ética y la Política de Aristóteles*. Milano: Lampi di stampa, 2007.
TATON, R. y otros. *La Ciencia Antigua y Medieval*. Barcelona: Destino, vol. I, 1971.
VOGEL, C. J. de. *Pythagoras and early Pythagoreanism*. Assen: ed. Royal van Gorcum, 1966.