Papeles Salmantinos de Educación, Núm. 17, 2013
Facultad de Educación, Universidad Pontificia de Salamanca

ACTUALIZACIÓN Y MODERNIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Update and Modernization of the Education of the Mathematics

Miriam Méndez Coca

RESUMEN: *El objeto de este artículo es presentar dos asuntos de actualidad. El primero es un discurso teórico elaborado a partir de fuentes documentales consistentes centrado en los cambios que han experimentado las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas desde la segunda mitad del siglo veinte hasta la actualidad. En el segundo asunto se muestran los resultados sobre la importancia y utilidad de las matemáticas para la vida académica y el éxito profesional, obtenidos mediante un cuestionario a unos grupos de estudiantes de secundaria.*

Palabras clave: *Probabilidad. Formalismo matemático. Alfabetización numérica. Constructivismo matemático. Motivación.*

ABSTRACT: *This research article focuses on two main aims. The first part is about the change that the mathematics and the teaching of mathematics have undergone from the second half of the twentieth century until today. It has been developed from the review of the relevant bibliographic sources. In the second part several results about the high school students' beliefs about the importance and usefulness of the mathematics to success in academic and professional life are shown.*

Keywords: *probability, mathematical formalism, numeracy literacy, mathematical constructivism. Motivation.*

1. INTRODUCCIÓN

En el siglo XX el impulso del cambio ha adquirido una fuerza tan decisiva que se convirtió en un rasgo omnipresente en toda estructura social, política, económica y cultural de tal manera que a su ubicuidad y generalidad ni una ciencia como las matemáticas se sustrajo a su influencia y en consecuencia es lógico tratar como asuntos de notable interés los cambios y tendencias más significativas por las que se decanta el saber matemático desde mediados del siglo XX. El fundamento del desarrollo actual de las matemáticas se debe tanto a la popularidad y éxitos logrados por este saber en el decurso de la edad moderna como a su diversificación interna: geometría, álgebra, análisis matemático, probabilidad y estadística, investigación operativa, etc.. Se observan asimismo diversas tendencias en la evolución matemática, que los autores suelen sintetizar en teoría de conjuntos, logicismo, formalismo y constructivismo. A este asunto se dedica el primer apartado del presente artículo. El segundo aspecto al que se presta atención, se especifica como contrapartida empírica al diseño de la moderna enseñanza de las matemáticas, que se muestra en el punto primero. Consiste en ofrecer algunos datos de cómo los alumnos en la actualidad perciben la importancia, necesidad y utilidad de las matemáticas para resolver los asuntos de la vida cotidiana, para elegir la carrera que les apetece y para situarse con éxito en el desarrollo de su vida profesional. Estimamos complementarios estos dos aspectos en cuanto los resultados del segundo aspecto pueden ser útiles para confirmar o desmentir el proyecto diseñado de reforma de la enseñanza de las matemáticas. Son también datos ilustrativos para la valoración adecuada de la enseñanza de las matemáticas en la global sociedad del conocimiento. El que ambos apartados sigan métodos diferentes no obsta al meollo del asunto que es mostrar como los cambios y tendencias parecen estar convenciendo y estimulando a los estudiantes de la importancia del estudio de las matemáticas, al menos en el plano de las convicciones y motivaciones, aunque los resultados tal vez no se correspondan totalmente con las respuestas verbales que los estudiantes investigados han ofrecido. No cabe duda que la motivación para el estudio de las matemáticas constituye un factor que nos permite esperar al menos mejores resultados.

2. CAMBIOS Y TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En este apartado se contemplan asuntos de enorme interés en los procesos de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la actualidad, como vincular la necesidad de introducir cambios en la enseñanza de las matemáticas con factores de orden técnico. La sociedad global del conocimiento ya se ha distanciado de épocas precedentes en que los factores de orden técnico se vinculaban con harta frecuencia a poderes extraños, que por su condición de tales resultaban difíciles de asumir y de integrar en los planteamientos de la enseñanza. En la actualidad la tecnología transita por los escenarios científicos con total legitimidad y es demandada por los usuarios del sistema educativo. En el segundo asunto se clarifican los cambios que han tenido lugar en la segunda parte del siglo veinte en el ámbito de las matemáticas y, por último, se exponen las tendencias más relevantes en la enseñanza de las matemáticas modernas[1].

2.1. Origen tecnológico de la moderna enseñanza de las matemáticas

La actual modernización de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene un innegable sabor tecnológico en sus comienzos en los Estados Unidos de América del Norte, donde se inician con decisión los cambios en la enseñanza de las matemáticas. Se vincula con la admiración y el asombro, con que los norteamericanos recibieron la noticia del primer vuelo espacial, realizado por el astronauta soviético Gagarín en abril de 1961. Cuando los expertos e intelectuales americanos visitaron Rusia en la búsqueda de una explicación plausible para el salto tecnológico de tan significativa dimensión cualitativa, que les había dejado, a la vista de toda la humanidad, como más atrasados que la Unión Soviética, al menos en la tecnología espacial, llegaron a la conclusión de que «la superioridad de la URSS radicaba en la diferente y mejor enseñanza científico-matemática impartida

1 Bastantes de los materiales con que se elabora este artículo, pertenecen a la tesis doctoral, *Enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la ESO*, que la autora defendió el 2 de octubre de 2013 en la Universidad Pontificia de Salamanca, dirigida por la Dra. Purificación Cifuentes Vicente, Profesora de la Facultad de Educación de la mencionada universidad.

en las escuelas soviéticas, desde los primeros cursos de la enseñanza elemental, cuyos orígenes se encontraban en los niveles de la enseñanza preescolar» (López, 1997:38).

Poco después, en la Conferencia de Cambridge de 1963, Estados Unidos de América del Norte, se decide la introducción de cambios en la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias a partir del 7º grado, que se apoyan en el convencimiento de que la educación matemática en la enseñanza primaria y secundaria de USA estaba retrasada con respecto a los requerimientos de la ciencia actual y necesitaba mejoras esenciales, sin que ello implicara la supresión de contenidos matemáticos esenciales que ya estaban presentes en el currículo educativo. La opinión mayoritaria, que no unánime, se orientó en el sentido que recoge Piaget.

> El álgebra elemental, la geometría plana y de sólidos, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal son aun fundamentales, como lo fueron hace cincuenta o cien años: *los futuros usuarios de las matemáticas deben aprender todos estos temas* si se están preparando para ser matemáticos, físicos, científicos sociales o ingenieros, y todos estos temas pueden ofrecer valores culturales a los estudiantes en general. El plan tradicional de enseñanza secundaria incluía en alguna medida todos estos temas, excepto el cálculo infinitesimal; quitar alguno de ellos sería desastroso (Piaget, J. y otros, 1978: 331-332).

La razón de este desfase para los profesores americanos de la época no estaba tanto en los temas incluidos en los currículos de la época cuanto en la desconexión de las matemáticas con otros saberes científicos, especialmente la física y con los asuntos de la vida cotidiana, además de una enseñanza excesivamente memorística, que convertía *la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en algo inútil* y aburrido.

A fin de subsanar esta desconexión interna y externa en los currículos de matemáticas, Piaget y otros autores advirtieron que en el nuevo plan curricular de las matemáticas modernas se deberían introducir conceptos generales unificadores:

> Pensamos también que el uso juicioso de los conjuntos, del lenguaje y de los conceptos del álgebra abstracta pueden dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria. Sin embargo, el espíritu de

> la matemática moderna no se aprende repitiendo simplemente su terminología. De acuerdo con nuestros principios, querríamos que la introducción de los nuevos términos y conceptos fuera precedida de una suficiente preparación concreta y seguida de aplicaciones reales estimulantes y no de cuestiones superficiales y sin sentido: es preciso justificar la introducción de nuevos conceptos y mostrar sus aplicaciones si se quiere convencer a un chico inteligente de que estos conceptos merecen atención (Piaget y otros, 1978: 332).

No cabe duda, pues, sobre la importancia del factor tecnológico que alimentó la conveniencia y necesidad de acomodar el estudio de las matemáticas a las nuevas exigencias científicas y técnicas que demandaba la sociedad norteamericana en la década de los sesenta del siglo pasado. La Asociación de Profesores de Matemáticas en los Estados Unidos de Norteamérica hizo suyas estas recomendaciones y puso en marcha las oportunas decisiones para las nuevas enseñanzas de las matemáticas en USA. En Europa se percibieron también preocupaciones semejantes por la actualización y modernización de los estudios de las matemáticas. Francia asume la iniciativa de la necesaria modernización de estos estudios, que luego servirá de modelo a otros países europeos y a España que se adhiere, mediante la Ley General de Educación de 1970 y decretos que le acompañan, a este movimiento renovador de la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias, enfatizando los conceptos de conjunto, de relación, de función y de grupo. Los contenidos de las matemáticas modernas se inspiraron en sus comienzos en la teoría de conjuntos de Cantor y se convirtieron en la base de toda la docencia de las matemáticas tanto en la enseñanza primaria como secundaria, que llega hasta la LOE (2/2006).

2.2. Los cambios en las matemáticas

Los cambios en las matemáticas alcanzaron principalmente a la geometría, el álgebra, al análisis y a la probabilidad. Dos rasgos caracterizan la nueva geometría: el *concepto de espacio* adquiere un sentido más amplio y a la vez más específico y «los métodos de la geometría se hacen más ricos y variados y suministran a su vez unos medios más completos para comprender el mundo que nos rodea, mundo del que fue abstraída la geometría en su forma original» (López, 1997:32). Como segundo rasgo, se han de mencionar los *progresos en la geometría euclídea*, distinguiendo distintos tipos de propiedades que podían estudiarse por separado y esta misma abstracción dentro de la geometría dio lugar a otras ramas específicas que, con el paso del tiempo y de la investigación matemática, se van convirtiendo en geometrías independientes, identificándose nuevos espacios con sus particulares geometrías (López, 1997:32). En el álgebra moderna se consideran magnitudes de naturaleza más general y sobre éstas el álgebra estudia operaciones, que formalmente son semejantes a las operaciones ordinarias de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división. Los nuevos conceptos del álgebra encuentran aplicaciones varias en la física, en el análisis y en la geometría.

En cuanto al análisis se originaron profundos cambios en el desarrollo y precisión de los más importantes conceptos de variable, función, límite, integral y derivada, «surgiendo una nueva rama del análisis que es la teoría de funciones de variable real. Deben mencionarse asimismo la teoría de las funciones de variable compleja, la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales de aplicación en la mecánica, la física y la tecnología» (López, 1997:33). Sobre estos cambios, emerge una nueva sección de las matemáticas, denominada *análisis funcional*, cuyo papel es importante en las matemáticas modernas, en cuya creación participaron muchos matemáticos, destacando Hilbert. En cuanto al contenido de esta nueva rama de las matemáticas se podría resumir, en un lenguaje asequible, en lo siguiente: «Lo que se estudia no es una función aislada sino toda una colección de funciones caracterizadas por una u otra propiedad, por ejemplo, la colección de todas las funciones continuas» (López, 1997: 33).

La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII asociada a los trabajos de Huygens, C. (1629-1665), Pascal, B. (1623-1662), Fermat, P. (1601-1665) y Bernoulli, J. (1654-1705). En los siglos XVIII y XIX, debido a la popularidad de los juegos de azar, el cálculo de probabilidades tuvo un notable desarrollo destacando Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827) con su «Théorie analytique des probabilités» en el que expone un análisis matemático sobre los juegos de azar. Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de las matemáticas fue la carencia de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemáticas. A principios del siglo XX el matemático ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987) la definió de forma axiomática y estableció las bases para la moderna teoría de la probabilidad, que alcanza hasta la actualidad.

2.3. Tendencias en la enseñanza de las matemáticas modernas

Cuatro son las tendencias mas relevantes que canalizan el currículo de las *matemáticas para su enseñanza* en los últimos cincuenta años.

a*) La moderna teoría de conjuntos* se debe con precedencia al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918). La idea de conjunto es tan básica que surge en casi todas partes dentro de las matemáticas y de sus aplicaciones. Cantor define el conjunto como «la agrupación en un todo de objetivos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestra mente» (Bourbaki, 1976: 44), es decir, el conjunto se refiere a cualquier colección, considerada como un todo, de objetos bien definidos de nuestro pensamiento o de nuestra intuición. La idea de conjunto es tan básica que propiamente no admite definición, en el sentido de que no puede definirse a partir de otros entes matemáticos más básicos. Implica las ideas de elementos, de pertenencia, de relación y de operaciones entre conjuntos. El desarrollo de esta «teoría y el intento de utilizarla para fundamentar la matemática han revelado muchas dificultades lógicas, que no son meramente aparentes a partir de la idea intuitiva de conjunto» (Hortalá y otros, 1998: 73). Desde la evidencia de estas dificultades, la teoría parecía avocada a su desaparición hasta que encontró, en Hilbert, al admirador y defensor de sus trabajos como introductorios a un paraíso matemático que no debía perderse.

b) El logicismo es una corriente de pensamiento matemático que pretende hallar en la lógica los materiales para las demostraciones matemáticas, teniendo en cuenta que la lógica estudia las leyes de la inferencia en los razonamientos. Para descubrir estas leyes «la lógica necesita servirse de lenguajes artificiales llamados lenguajes formales, con el fin de evitar las ambigüedades e imprecisiones de las lenguas naturales y poner de manifiesto más claramente los razonamientos lógicamente válidos» (Hortalá y otros, 1998:327). A finales del siglo XIX se produce una aproximación de la lógica a las matemáticas al servirse de los métodos matemáticos (Boole, G., 1815-1864) y pretender servir de fundamento a las matemáticas (G. Frege, 1848-1925) Esta forma de la lógica tiene un precursor importante en la historia de la filosofía, Leibnitz, y su desarrollo actual fue muy intenso durante la primera mitad del siglo XX, especialmente entre los años treinta y sesenta. Se vincula asimismo con la obra *Principia Matemática* de Bertrand Russell escrita en colaboración con Whitehead. Los extensos trabajos prácticos permitieron resolver importantes problemas de fundamentación de las matemáticas, clarificar las relaciones entre la lógica y las matemáticas, avanzar en la formulación rigurosa de la lógica que ha permitido utilizarla como herramienta para las matemáticas y, más recientemente para la informática (Hortalá y otros, 1998: 327-437).

c) El formalismo. Hilbert, D.(1862-1943) matemático alemán, es considerado como un iniciador de la matemática pura del siglo XX. Contribuyó sustancialmente a establecer los fundamentos del enfoque formalista predominante en este siglo hasta el punto que, para algunos autores, es el primer formalista importante:

> …intentó colocar el conjunto de las matemáticas sobre una firme base lógica tratándolo efectivamente como un juego sin significado que se juega con símbolos. (…) Filosóficamente el formalismo murió cuando Kart Gödel demostró, para irritación inicial de Hilbert, que ninguna teoría formal puede abarcar la totalidad de la aritmética y ser lógicamente consistente. Siempre habrá enunciados matemáticos que permanecen fuera del juego de Hilbert: no son ni demostrables ni refutables. Cualquier enunciado semejante puede añadirse a los axiomas de la aritmética sin crear ninguna incongruencia. La negación de un enunciado semejante tiene la misma característica (Stewart, 2006: 30-31).

Gödel demostró, mediante argumentos matemáticos sólidos, que la aritmética formalizada es esencialmente incompleta y el teorema de consistencia o de contradicción queda reducido a lo siguiente: si el sistema de la aritmética formal es consistente entonces es imposible dar una demostración de ello, con los reflejos formales del propio sistema. A pesar de esta consistente crítica que del formalismo hizo Gödel, éste sigue presente en la base de toda matemática actual, en la que se formaron los matemáticos del siglo XX y que se enseña actualmente en las escuelas (López, 1997: 37). Según Garbayo una teoría matemática formalizada consta de tres elementos:1) Una colección de signos o lenguaje y con la yuxtaposición de un número finito de estos se construyen cadenas de símbolos. 2) Unas reglas llamadas de formación que muestran si las cadenas de símbolos son admisibles o no. Las reglas son combinatorias de signos, sin atender a significados que en todo caso no tienen. 3) Unas reglas denominadas de inferencia o deducción permiten escribir cadenas admisibles o construirlas a partir de éstas (Garbayo, 1978: 203).

d) El constructivismo matemático fue iniciado por Brouwer hacia 1910 y se denominó con el término intuicionismo, aunque fue perdiendo vigencia frente a la terminología más generalizada de constructivismo. Lo más significativo de este planteamiento podría resumirse en las siguientes propuestas:

1ª) El *aprendizaje de las matemáticas* ha de entenderse como un proceso de *construcción individual* que se produce mediante la interacción individual y grupal de una tríada de constructos que incluyen el contenido matemático, el profesorado de matemáticas y el alumnado de matemáticas (Bishop, 2000: 36). *El contenido matemático* se refiere tanto al espacio de conocimiento como al entorno en que los profesores y alumnos intercambian sus ideas. Comprende asimismo el currículo intencional de las matemáticas que relaciona la historia y la cultura de las matemáticas con temas actuales ligados a la tecnología de la información y las matemáticas. *El constructo profesores de matemáticas* se refiere a la didáctica, tanto en la formación inicial y continua de los profesores, cuanto al contexto social en que estos operan y ejercen su rol. *El grupo alumnos de matemáticas* se refiere tanto al alumnado como al aprendizaje y, teniendo en cuenta que el aprendizaje se ha trasladado a todos los alumnos, ha aparecido una especial preocupación por los alumnos de riesgo. Los tres grupos se interrelacionan y se constituyen en el foco de investigación de la educación matemática. «Los tres son importantes, los tres interaccionan y todos ellos existen y funcionan dentro de un contexto lingüístico, cultural, histórico y social concreto. No obstante, lo que puede ser apropiado en el contexto de un país puede que no lo sea en otro» (Bishop, A., 2000: 37).

2ª) La construcción individual del *aprendizaje de las matemáticas* ha de respetar los diversos ritmos y maneras de construir los diferentes contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos y actitudes) y las diferencias en las maneras de aprender de los propios alumnos. En todo caso es imprescindible la «comprensión y la actividad mental en el proceso matemático» (Gregorio, 2002: 114). El constructivismo implica que determinadas actitudes hacia las matemáticas, tanto por parte de los profesores, de los alumnos como del centro escolar constituyen un elemento básico para el aprendizaje matemático. En la búsqueda de esta favorable y generalizada actitud ante las matemáticas se ha de avanzar en la valoración positiva de las mismas. Para ello, sugiere el autor, fomentar la reflexión y discusión sobre las matemáticas, en cuanto referentes de la autonomía personal y funcional, para la correcta integración social en el medio en que quiere vivir. Por tanto se ha de considerar «el aprendizaje cooperativo como el centro de la actividad y del contexto de aprendizaje matemático» (Gregorio, 2002: 115). Desde este punto de vista se ha de producir un cambio radical en la concepción del papel de profesor en el aula, que deja de ser instructor, que transmite al alumno conocimientos ignorados por éste, para ocupar el rol de mediador en el proceso de cooperación, en que se inserta el alumno con el que ha de dialogar para facilitar su aprendizaje.

3ª) La profesora Gavilán según sus propias investigaciones y las consultas efectuadas a los estudios de otros autores, concluye en la conveniencia de emplear métodos cooperativos, basándose en tres tipos de argumentaciones:

> En primer lugar el aprendizaje de las matemáticas se mejora cuando los estudiantes se encuentran en un nivel de madurez apropiado para los contenidos que van a aprender y tienen experiencias que les permiten crear y recrear, construir conceptos y relaciones que establecen entre ellos, teniendo la oportunidad de interactuar con otros (…) En segundo

> lugar, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el intercambio intelectual desempeña un importante papel y los grupos cooperativos son un espacio ideal para que se produzca. Las oportunidades de verbalizar razonamientos posibilitan que puedan explicar y clarificar lo que piensan. (…) En tercer lugar, el aprendizaje cooperativo contribuye a que los estudiantes aumenten la confianza en sus habilidades y adquieran autodisciplina; promueve actitudes más favorables hacia la asignatura y hace que le guste más la materia y sientan menos rechazo, lo que incrementa la motivación para aprender, disminuyendo los problemas de de disciplina (Gavilán, 2004: 44).

4ª) Según EACEA/Eurydice (2012: 67) «el uso de las TIC puede incidir positivamente en la motivación, pero es importante que este efecto se emplee de manera que contribuya a que el alumno profundice en su comprensión de las matemáticas». Presenciamos la introducción de recursos tecnológicos en la educación y su incorporación en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y de las ciencias. Sin embargo esta integración se debe hacer según Goos (2010) de forma que se modifiquen los procedimientos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y no sea un remplazo de la pizarra y el lápiz y aprovechando la dimensión tecnológica para hacer más comprensibles aspectos abstractos de esta materia, haciendo más accesibles la modelizaciones matemáticas de la realidad que nos rodea y favoreciendo el encuentro de los contenidos matemáticos estudiados con la realidad que les rodea.

5ª) Según el profesor Bermejo (2010: 241) «resulta prioritario que los alumnos desarrollen ideas personales sobre las matemáticas y utilicen sus propios métodos para resolver los problemas planteados». Esta perspectiva coincide básicamente con otro interesante aspecto al que Alan Bishop ha dedicado muchas horas en su diario quehacer investigador: el concepto de *alfabetización numérica*, que elabora para este procedimiento educativo. Parte del supuesto de que es imposible una verdadera educación matemática si no se tienen en cuenta las prenociones matemáticas que los alumnos han asumido de la cultura de su medio social de pertenencia, que constituyen también para Bishop verdaderas prácticas matemáticas. Estas prenociones, sin embargo, se erigen en marco adecuado en el que insertar el currículo matemático objeto de aprendizaje. A fin de facilitar este ensamblaje al profesor, el autor categoriza esas prácticas matemáticas, obviamente no reconocidas, en seis categorías: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, que pueden identificarse fácilmente en todas las sociedades, alcanzando diferentes niveles, pero juntas forman una base para la cobertura del campo de los conocimientos matemáticos y sirven como punto de partida para la alfabetización matemática.

> Dentro de las matemáticas, explicar significa demostrar teoremas, sin embargo es evidente que la explicación matemática es mucho más importante para la alfabetización numérica, en el sentido de que es capaz de explicar los fenómenos que ocurren dentro de la sociedad. Las matemáticas ponen de manifiesto las estructuras y los conceptos subyacentes de muchos aspectos científicos y tecnológicos de la sociedad. Por ello la alfabetización científica y tecnológica requiere de ideas matemáticas que pongan de manifiesto las estructuras de conocimiento existentes tras los aspectos científicos y tecnológicos de las sociedades industriales modernas (Bishop, A., 2000: 43).

3. LA NECESIDAD Y UTILIDAD DE LAS MATEMÁTICAS

Las creencias sobre la necesidad e importancia de las matemáticas configuran la motivación intrínseca del alumno y son consideradas uno de los factores principales que afectan a los resultados obtenidos por los alumnos en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

> La motivación de los alumnos y su rendimiento en matemáticas también pueden verse influidos por la importancia que le conceden a esta asignatura. El estudio TIMSS recogió información sobre si los alumnos de octavo curso percibían que un buen rendimiento en matemáticas suponía una ventaja para su educación y profesión futuras. (…) De media, en los países participantes de la UE, el rendimiento en matemáticas fue 31 puntos más elevado en alumnos que valoraban mucho las matemáticas, en comparación con aquellos que no las consideraban importantes (EACEA/Eurydice, 2012:106).

En la encuesta llevada a efecto con estudiantes de la ESO, para la elaboración de mi tesis doctoral ya mencionada, con el título de este apartado se agruparon algunas cuestiones motivacionales referidas a la necesidad, utilidad e importancia de las matemáticas. Aunque expresadas de distintas formas, todas ellas estaban orientadas a detectar las creencias y su arraigo en los estudiantes investigados sobre la importancia que otorgaban a las matemáticas para su éxito profesional y académico. En este apartado mostraré de forma sencilla y breve algunos aspectos metodológicos de inexcusable interés, los resultados más significativos y algunas conclusiones.

3.1. Planteamiento metodológico

Los resultados, que se exponen a continuación, forman parte de un conjunto de datos empíricos obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario sobre las motivaciones y creencias para el estudio de matemáticas que los alumnos de los cursos de tercero y segundo de la ESO experimentaban. El test de motivación[2] se aplicó al comienzo y al final del proceso de la enseñanza-aprendizaje de los contenidos de álgebra de ambos cursos para la investigación de la tesis. Con el de comienzo se recababa su general disposición para el estudio de las matemáticas. La aplicación del test al final de la experiencia investigadora permitió medir el efecto producido por las diferentes metodologías utilizadas. En el curso de segundo de la ESO, dos grupos seguían una metodología con recursos TIC mientras que el otro grupo llevaba una metodología tradicional. En el curso de tercero un grupo utilizaba metodología basada en recursos TIC, otro grupo metodología cooperativa y en el otro una enseñanza tradicional. En ninguno de los grupos salieron diferencias significativas entre los tres grupos ($p=0,522$ para segundo y $p=0,272$ para tercero) sin embargo sí se puede apreciar como las creencias de los alumnos sobre la necesidad y utilidad de las matemáticas son positivas[3].

2 Elaborado a partir de un test verificado y publicado por los profesores de la Universidad de Extremadura (Gil, N.; Guerrero, E., y Blanco, L., 2006) y publicado en la *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa,* como *cuestionario sobre creencias y actitudes acerca de las Matemáticas*.

3 Estos datos forman parte del estudio realizado para la tesis doctoral mencionada anteriormente. En ella se recogen la descripción detallada de la muestra y la validación de los resultados del test de motivación

3.2. Resultados de los grupos de secundo curso de la ESO

Tabla 1.a. *Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida* (Preg.1) 2º ESO

Alternativas	1er Grupo TIC (%)		Grupo Tradicional (%)		2º Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
De acuerdo/ muy de acuerdo	84,36	81,82	87,09	80,65	91,18	70,00
Indiferente/ desacuerdo/ muy desacuerdo	15,64	18,18	12,91	19,35	8,82	30,00

Fuente: Elaboración propia

Las alumnas del segundo curso se mantienen en más del 70% en la necesidad y utilidad de las matemáticas, con una ligera caída desde el pretest al postest. Este descenso de frecuencias es más acusado en el segundo grupo TIC. La fluctuación entre los resultados del pretest y postest podrían deberse a razones de edad de los entrevistados. La creencia se percibe porcentualmente más arraigada si se tienen en cuenta, como es obvio, los escasos porcentajes de desacuerdo.

Tabla 1.b. *Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida*. (Preg. 1). 3º ESO

Alternativas	Grupo Cooperativo (%)		Grupo Tradicional (%)		Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
Muy de acuerdo/ De acuerdo	100,00	96,77	90,00	81,25	93,75	83,87
Desacuerdo/ Muy desacuerdo	0,00	3,23	10,00	18,75	6,25	16,13

Fuente: Elaboración propia.

(del que forman parte los datos que se exponen) y los del test de conocimientos.

Los estudiantes de los tres grupos de tercero se decantan con mayor contundencia y estabilidad por la tendencia de que las matemáticas son útiles y necesarias en las actividades de la vida cotidiana. En el grupo cooperativo se mantienen los altos porcentajes durante la experiencia investigadora, y disminuyen ligeramente en el grupo TIC de los alumnos de tercero.

Tabla 2.a. *Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas*. (Preg. 36) 2º ESO

Alternativas	1er Grupo TIC (%)		Grupo Tradicional (%)		2º Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
De acuerdo/ muy de acuerdo	87,50	48,48	58,06	58,06	78,79	53,33
Indiferente/ desacuerdo/ muy desacuerdo	12,50	51,52	41,94	41,94	21,21	46,67

Fuente: Elaboración propia

En el curso segundo la tendencia es mayoritaria en las alternativas *muy de acuerdo* y *de acuerdo*, sin embargo, después de la experiencia investigadora, los dos grupos TIC bajan en porcentaje de frecuencias y se mantiene el grupo tradicional. En todo caso, una mayoría muy alta de estudiantes considera importantes las matemáticas para obtener una profesión bien remunerada.

Tabla 2.b. *Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas*. (Preg. 36) 3º ESO

Alternativas	Grupo Cooperativo (%)		Grupo Tradicional (%)		Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
Muy de acuerdo/ De acuerdo	87,10	74,19	51,73	62,50	77,42	77,42
Desacuerdo/ Muy desacuerdo	12,90	25,81	48,27	37,50	22,58	22,58

Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la importancia que tienen las matemáticas a la hora de alcanzar una profesión bien remunerada, los alumnos tienen opiniones matizadamente dispares. En tercero la tendencia tiene consistencia en el grupo cooperativo y el grupo TIC que se mantiene en los altos porcentajes que tenían en el pretest. En el tradicional los resultados muestran unas tendencias más débiles.

Tabla 3.a. *Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores*. (Preg. 40) 2º ESO

Alternativas	1er Grupo TIC (%)		Grupo Tradicional (%)		2º Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
De acuerdo/ muy de acuerdo	84,37	78,79	67,74	87,09	78,79	76,67
Indiferente/ desacuerdo/ muy desacuerdo	15,63	21,21	32,26	12,91	21,21	23,33

Fuente: Elaboración propia.

La tendencia obtiene una polarización de frecuencias muy altas en la alternativa de acuerdo: en segundo el 75% de los estudiantes considera que la materia es muy importante para sus estudios futuros, este porcentaje se mantiene casi invariable después de la experiencia. Se percibe cierta incoherencia entre los porcentajes a esta pregunta y a la precedente (Tabla 2a).

Tabla 3.b. *Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores*. (Preg. 40) 3º ESO

Alternativas	Grupo Cooperativo (%)		Grupo Tradicional (%)		Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
Muy de acuerdo/ De acuerdo	100,00	93,55	86,67	87,09	93,33	93,54
Desacuerdo/ Muy desacuerdo	0,00	6,45	13,33	12,91	6,67	6,46

Fuente: Elaboración propia.

Cuando a los estudiantes se les cuestiona sobre la importancia de las matemáticas para tener éxito en los estudios posteriores, las dudas son mínimas en términos porcentuales y en este sentido, apenas se perciben cambios entre el pretest y postest. La tendencia obtiene una polarización destacada de frecuencias: más del 85% de los estudiantes considera que la materia es muy importante para sus estudios futuros y este porcentaje se mantiene casi invariable después de la experiencia.

Tabla 4.a. *Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas*. (Preg. 63) 2º ESO

Alternativas	1er Grupo TIC (%)		Grupo Tradicional (%)		2º Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
De acuerdo/ muy de acuerdo	35,49	48,49	31,04	51,72	50,00	66,67
Indiferente/ desacuerdo/ muy desacuerdo	64,51	51,51	68,96	48,28	50,00	33,33

Fuente: Elaboración propia.

No es muy clara la tendencia en las respuestas de 2º ESO.

Aunque las TIC puedan favorecer la motivación por la clase de matemáticas no quiere decir que este aumentando la motivación intrínseca por el aprendizaje de las matemáticas, que les guste hacer actividades con el ordenador más que hacerlas con papel y lápiz no significa que les guste más las matemáticas (Gómez-Chacón, 2010: 237).

En tercer curso, en cambio, donde inician el estudio de la asignatura de física y química, se percibirá más clara la relación de las matemáticas con otras asignaturas.

Tabla 4.b. *Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas*. (Preg. 63) 3º ESO

Alternativas	Grupo Cooperativo (%)		Grupo Tradicional (%)		Grupo TIC (%)	
	Pretest	Postest	Pretest	Postest	Pretest	Postest
Muy de acuerdo/ De acuerdo	75,76	90,32	60,00	68,74	73,33	80,64
Desacuerdo/ Muy desacuerdo	24,24	9,68	40,00	31,26	26,66	19,36

Fuente: Elaboración propia.

Los alumnos están convencidos que las matemáticas ayudan en el estudio de otras materias. En los tres grupos, cooperativo, tradicional y TIC, se observa, al final de la investigación, un aumento porcentual en la valoración de esta tendencia.

Se aprecia que los resultados observados en los grupos de tercero mantienen una notable coherencia mayor que los de segundo en la valoración positiva de la necesidad y utilidad de las matemáticas.

4. CONCLUSIONES

1ª) España se adhiere a los cambios respecto de las matemáticas y de la producción científica, mediante la Ley General de Educación de 1970 y decretos que le acompañan y puede destacarse a modo de conclusión lo siguiente:

En el área de álgebra se consideran magnitudes de naturaleza más general y sobre estas se realizan estudios semejantes a las operaciones ordinarias de la aritmética. En cambio, en el análisis se producen cambios profundos en el desarrollo y precisión de los conceptos de variable, función, límite, integral y derivada, surgiendo una nueva teoría del análisis que es la teoría de las funciones de variable real. En cuanto a las tendencias más relevantes que canalizan el currículo de las matemáticas en los últimos cuarenta años, se han de citar la moderna teoría de conjuntos (Cantor), el logicismo (Boole), el formalismo (Hilbert) y el constructivismo matemático (Brouwer).

2ª) Respecto de las motivaciones detectadas en la investigación empírica, sobresalen las siguientes conclusiones:

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas entre estudiantes del segundo y tercer curso de la ESO es percibida como un asunto de la mayor importancia respecto de los asuntos ordinarios de la vida, del equipamiento necesario para elegir una buena carrera y del éxito económico en el ejercicio profesional. La variable género-edad tiene en el aprendizaje de las matemáticas un papel relevante: los chicos se deciden con mayor contundencia y coherencia por el carácter decisivo de las matemáticas en los asuntos ordinarios y profesionales, económicos y sociales. La variable metodológica con que se impartieron las matemáticas en los distintos grupos pone en evidencia que el grupo Cooperativo y el grupo TIC se han decantado en mayor porcentaje por el papel decisivo de las matemáticas en la vida profesional y económica aunque no haya diferencias significativas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERMEJO, V., (2010). «El PEIM: un programa de intervención», en Bermejo, V. (Coord.), *Como enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.

BISHOP, A., (2000). «Enseñanza de las matemáticas:¿Cómo beneficiar a los alumnos?», en GORGORIÓ, N.; DELOFEU, J. y BIHOP, A., (Coord.). *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

BISHOP, A.J.; HART, K.; LERMAN, S.; NUNES,T., (1993). *Significant influences on children's learning of mathematics*. París: UNESCO.

BOURBAKI, N., (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

DAMEROW, P.; DUNKLEY, M.E.; NEBRES, B.F.; WERRY, B. (eds.), (1984). *Mathematics for all*. París: UNESCO.

EACEA/EURYDICE (2012). La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales. Bruselas: EACEA/Eurydice. Madrid: Secretaría General Técnica del MEC y D.

GARBAYO, E., (1978). *Control ideológico de la invención matemática*. Barcelona: Garbayo.

GAVILÁN, P., (2004). Álgebra en secundaria. Trabajo cooperativo en Matemáticas. Madrid: Narcea-MEC.

GÓMEZ-CHACÓN, I.M. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. En *Enseñanza de las ciencias*, 2010, 28(2), 227—244.

GOOS, M. (2010) «Using technology to support effective mathematics teaching and learning: what counts» Research Conference 2010 Consultado en Noviembre 2013 en http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1067&context=research_conference

GORGORIÓ, N. y BISHOP, A., (2000). «Implicaciones para el cambio», en GORGORIÓ, N.; DELOFEU, J. Y BIHOP, A., *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó.

GREGORIO, J. R., (2002). «El constructivismo y las matemáticas». *Revista SIGMA*, nº 21, Urria. Vitoria: Gobierno Vasco. P. 113-130.

HORTALÁ, M.T.; LEACH, J.; RODRÍGUEZ, M., (1998). *Matemática discreta y lógica matemática*. Madrid: Universidad Complutense.

LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, BOE, núm. 106, de 4 de mayo de 2006.

LÓPEZ, A., (1997). *Fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad.

PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNÉ, J. y THOM, R., (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza.

STEWART, I., (2006). *Cartas a una joven matemática*. Barcelona: Crítica.