UNIVERSIDAD PONTIFICIA
DE SALAMANCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESO

DIRECTORA:

Purificación CIFUENTES VICENTE

DOCTORANDA:

Miriam MÉNDEZ COCA

Salamanca 2013

Universidad Pontificia de Salamanca

UNIVERSIDAD PONTIFICIA
DE SALAMANCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

TESIS DOCTORAL

ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESO

Tesis presentada para la obtención del grado de Doctor

DIRECTORA:

Purificación CIFUENTES VICENTE

DOCTORANDA:

Miriam MÉNDEZ COCA

Salamanca 2013

Universidad Pontificia de Salamanca

AGRADECIMIENTOS

Primero quisiera dar las gracias a mi directora de tesis Purificación Cifuentes, por su meticuloso trabajo y sus orientaciones, por su tiempo y dedicación, por su paciencia y su buen humor.

Me gustaría también dar las gracias a mi padre y a mi hermano David que como doctores, profesores y familia me han acompañado en este tiempo enseñándome, orientándome, ayudándome y dando ánimo.

Además también quiero dar las gracias a mi madre, que como mi padre durante toda la vida me lo han dado todo, olvidándose de su propio bienestar siendo ejemplos de profesionales, trabajadores incansables y dándome el cariño más desinteresado y constructivo.

También quiero dar las gracias a mi marido y mis hijos que son una fuente de motivación constante para seguir adelante, para superarme y origen de muchas alegrías.

Por último me parece justo mencionar con gratitud la colaboración desinteresada y eficaz de los profesores que han participado en la investigación, por su vocación, su trabajo, su interés y preocupación en la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sin los cuales la tesis no hubiera podido ser posible. Quisiera hacer partícipes de mi gratitud también a los estudiantes que han colaborado tan desinteresadamente en esta experiencia.

Universidad Pontificia de Salamanca

Í N D I C E PÁGS.

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

IIª PARTE: MARCO EXPERIMENTAL

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

R E S U M E N

En la elaboración de la tesis, *Enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la ESO,* se ha subrayado el carácter instrumental de las matemáticas en el desarrollo de las ciencias que, a mi juicio, debe seguir manteniendo también en relación con las estrategias pedagógicas, para una enseñanza-aprendizaje del conocimiento matemático, que se proyecte con eficacia en el contexto del desarrollo personal y de la integración social en la sociedad globalizada del conocimiento. Las circunstancias sociales, económicas y de crisis de liderazgo político, por las que está pasando España y Europa hacen, si cabe, más oportuna la insistencia en renovar los procedimientos del aprendizaje para lograr la mejora progresiva de los resultados. Esta intención late a lo largo de toda la tesis y se hace, no en virtud de un voluntarismo subjetivo, sino que se va tejiendo como consecuencia de la argumentación general de la tesis, desde la que se pretende justificar la reforma no tanto de los contenidos matemáticos, cuanto de los procedimientos y métodos en la enseñanza secundaria obligatoria. El reto a perseguir es que los programas escolares de las matemáticas, contribuyan a la creación de escenarios, que fomenten la innovación, la creatividad y la satisfacción personal en el estudio matemático. El logro de este objetivo impulsará el progreso de la sociedad española y europea hacia las metas de desarrollo social y científico-técnicos, exigibles para la promoción de los individuos y el desarrollo de los países de la Unión Europea, en la actual coyuntura de competitividad internacional.

Acorde con los supuestos normativos de la legislación vigente, que regula los estudios de Doctorado, Real Decreto 99/2011 (BOE 10/02/2011), la tesis que presento desarrolla una temática actual que, en mi parecer, posee un contenido denso y es relevante: 1º) El seguimiento de lo que he denominado *"mentalidad matemática",* que se investigó en los capítulos más teóricos, con el propósito de mostrar la peculiaridad del *razonamiento matemático y la relevancia metodológico-instrumental de la matemática* respecto de otros saberes y del progreso científico. 2º) Por la novedad que aporta la parte empírica, que instala el discurso en el escenario más actual de las investigaciones sobre el *estudio de los métodos pedagógicos* para la enseñanza de las matemáticas.

Universidad Pontificia de Salamanca

Desde la perspectiva de los supuestos que han guiado esta investigación, tanto en su parte teórica como empírica, con el propósito de ofrecer, desde estas primeras páginas, las claves para la compresión global de la tesis y siguiendo las disposiciones vigentes, con este resumen se muestra una síntesis de algunos aspectos importantes tratados en la tesis:

- Introducción:
- Objetivos de la investigación
- Articulación temática y desarrollo argumental
- Metodología y resultados
- Conclusiones y propuesta

A) INTRODUCCIÓN

La Introducción de la tesis se inicia prestando especial atención a las motivaciones que subyacen a la presente investigación. No he de eludir la propia sensibilidad intelectual que, siguiendo a Gardner, se puede calificar como “inteligencia lógico-matemática”, que me ha motivado al estudio de la carrera de Matemáticas y, entre las posibles y varias especialidades a cursar, la elección se decantó por las matemáticas fundamentales. Mis trabajos profesionales se han ubicado en el entorno tecnológico y en la enseñanza de las matemáticas. Mi experiencia profesional como Ingeniero de SOFTWARE, en una empresa de Tecnología Avanzada, durante casi diez años fue muy interesante. En este contexto de naturaleza científico/técnica, mi formación intelectual lógica-abstracta-matemática fue muy valorada, así como la capacidad para llevar a la práctica los conocimientos matemáticos, sus aplicaciones y operatividad tecnológica, que constituían el elemento clave de la actividad profesional. Desde la perspectiva social es todavía más obvia la actualidad y pertinencia social de la tesis. En Europa preocupa el asunto de la enseñanza de las matemáticas y en España se evidenció en los últimos años esta preocupación en las numerosas reuniones de las Facultades de Matemáticas, de las asociaciones de profesores de Matemáticas, de Congresos de Matemáticas que tuvieron lugar, con motivo de la legislación producida en los últimos años en torno al Grado Académico de Matemáticas, al Master para la formación específica de los profesores de matemáticas en la ESO y en Bachillerato y a las competencias matemáticas. Las reuniones, movilización y exuberancia legislativa no

Universidad Pontificia de Salamanca

son ajenas a las recomendaciones del Consejo Europeo y del Parlamento de la Unión Europea.

La dimensión social de la investigación en matemáticas y su enseñanza, adquiere plena justificación si se atiende al contexto de los planes nacionales de I+D+I en los programas de investigación científica de España y de los países avanzados de la U. E. y en el desarrollo de las modernas tecnologías. En el contexto científico-tecnológico actual, más allá de las motivaciones personales, la mentalidad lógico matemática debe ser estudiada y reinterpretada porque se ha manifestado como esencial en el desarrollo humano y social de la sociedad. La mentalidad matemática y sus aplicaciones operativas, se configuró como el procedimiento metodológico de la Nueva Ciencia del siglo XVI y de la Revolución Científica de los siglos XVII y XVIII. La matematización de las ciencias se generaliza en los siglos posteriores en que emergen los nuevos saberes, cuyo estatuto científico viene garantizado por las matemáticas, tanto respecto de los saberes de la naturaleza como en las ciencias positivas. Las matemáticas acompañaron y animaron el progreso científico-tecnológico del siglo XX y en lo que llevamos del XXI.

B) OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se sitúa entre una dimensión más especulativa y otra estrictamente práctica de datos obtenidos mediante las pruebas empíricas elaboradas en torno al proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Tal fluctuación entre lo teórico y lo aplicado obliga a distinguir con claridad objetivos heterogéneos: aquellos que se dirigen a la comprensión de la propia lógica interna de la matemática entendida como ciencia, y los derivados de las intenciones pedagógicas de la tesis. A esta diversidad se corresponden los distintos tipos de objetivos, que están elaborados en el capítulo metodológico, mencionados en la Introducción de la tesis, que sintetizo en los siguientes:

1)El objetivo fundamental es el objetivo general y fundamental de la tesis y consiste en la investigación de la relación entre los métodos, recursos y técnicas escolares del profesor de matemáticas en los cursos de Enseñanza Secundaria Obligatoria y la comprensión alcanzada por los alumnos para dotarse de competencias suficientes.

Universidad Pontificia de Salamanca

2) Objetivos específicos teórico/documentales son objetivos concretos orientados a precisar los aspectos de la enseñanza-aprendizaje matemático, considerados escolarmente más eficaces. Se proponen los siguientes: a) *Análisis y valoración crítica, desde diversas y complementarias perspectivas, de las metas, estrategias y retos que solicita la educación* de calidad en un mundo globalizado; b*) la revisión crítica de la mentalidad originaria de la matemática en la cultura de la Grecia Clásica,* en cuyo contexto se articulan los procedimientos teóricos para formular las primeras sistematizaciones del razonamiento, de la argumentación matemática y de la interpretación matemática del cosmos; c*) un tercer objetivo específico se centra en la reflexión sobre las coordenadas del movimiento científico* que, tras las aportaciones algebraicas de la cultura árabe e hindú de ascendencia medieval, llegan al Renacimiento, pasan a la Ilustración y se concretizan en la racionalidad moderna.

3) *Objetivo psicológico: la motivación escolar.* Si los estudiantes se sienten motivados y estimulados para el estudio de las matemáticas, el éxito y los buenos resultados serán asequibles. Por esta razón, se ha indagado en los objetivos de motivación interna y externa, ya sean personales, familiares o sociales, que pueden dar razón del interés o desinterés de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

*4) Objetivo operativo: las competencias del profe*sor se elaboraron como objetivo operativo de la tesis desde la valoración analítica de los conocimientos matemáticos y de las competencias específicas que ha de poseer el profesor de matemáticas en los niveles educativos de la ESO y del Bachillerato. Para la consecución de este objetivo, se parte del principio que sitúa al profesor como pieza clave de la enseñanza matemática.

5) Los objetivos empírico analíticos responden a la naturaleza cuasi experimental de la investigación empírica y cuyos resultados se presentan como comprobación de la relación causal entre metodología de la clase y los resultados obtenidos en el proceso de la enseñanza – aprendizaje. Su estructura práctica se articuló sobre variados procedimientos y recursos ensayados en la dinámica de la clase.

6) Objetivos pragmáticos educativos y sociales. Los objetivos enunciados, tanto por lo que atañe a la concepción teórica de la matemática como a su aplicación y transmisión escolar, llevan implícitos propósitos que trascienden la finalidad puramente formal de una investigación argumentada, como es una tesis, porque tienen *consecuencias pragmáticas* que alcanzan al ámbito educativo y social, desde tres perspectivas. a) *Desde un punto de vista pedagógico*, los objetivos de la tesis pretenden

Universidad Pontificia de Salamanca

contribuir a la creación de un ámbito académico más grato y eficaz en el que los estudiantes encuentren *motivaciones para estudiar* y comprendan la significación que ha de atribuirse a la competencia matemática; b) *Desde la perspectiva didáctica*, los objetivos fijados se proponen ensayar nuevas alternativas de procedimientos metodológicos, para la *mejora de los procedimientos docentes de los profesores, de las actitudes de aprendizaje de los estudiantes y de la dinámica de la clase* de matemáticas; c) *Desde la perspectiva cognitiva*, los objetivos se orientan a contribuir, en la medida de mis posibilidades, a potenciar las capacidades mentales del alumno, ya que la adecuada transmisión de los procesos matemáticos tiene como resultado la formación en competencias inductivas, deductivas y argumentativas, útiles para la comprensión de contenidos abstractos.

C) ARTICULACIÓN TEMÁTICA Y DESARROLLO ARGUMENTAL

La tesis se elaboró sobre una plantilla de ocho capítulos, cuya reseña sintética sería la siguiente:

1) En el capítulo primero, *La educación y sus propiedades,* se establecieron los rasgos, retos y cometido de una educación de calidad para la formación integral del ser humano en la sociedad tecnológica actual, enfatice el carácter humanístico, que favorezca la satisfacción personal, el progreso de la humanidad hacia los ideales de bienestar, paz, libertad y justicia social y fomente la convivencia en la diversidad entre los seres humanos, en un mundo progresivamente global y abierto, en el que imperan más las reglas de la competencia que los Derechos Humanos.

2) *La mentalidad matemática griega, paradigma de racionalidad,* constituye el segundo capítulo, en que se desvela como los griegos inauguran una mentalidad esencialmente deductiva, a partir de la intuición de principios racionales, que perduran en la posteridad. En este capítulo la investigación se proyectó hacia la *perspectiva metodológica de la mentalidad matemática* y hacia los caracteres específicos de la argumentación matemática.

3) El capítulo tercero se dedica a *La matematización de la ciencia.* Se muestra la elaboración del nuevo procedimiento para hacer ciencia, que se diseña y construye siguiendo el modelo matemático, acentuando de este modo el carácter instrumental de las matemáticas. Este nuevo procedimiento se constituye en el método, al que los saberes han de recurrir, para asegurar un estatuto científico. De este modo las

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas se configuran como el núcleo denso de los nuevos procedimientos científicos y en el modelo inspirador del nuevo proceso de racionalización moderna.

4) En el capítulo cuatro, *El agente de la educación: el profesor de matemáticas*, se parte de un principio axial: el profesor es la pieza clave de la educación, sin su implicación personal y entusiasta, preparación técnica y formación permanente, el proceso educativo fracasaría. Desde este punto de vista, el objetivo del capítulo incorpora tres dimensiones de la formación: *la humanista* contempla las cualidades básicas y fundamentales del profesor, por su condición de profesor; *la teórica,* comprende la adquisición de conocimientos, competencias y técnicas matemáticas necesarias para su enseñanza, puesto que nadie puede dar lo que no tiene. Por último, la *dimensión didáctica* que se concreta en la adquisición de las habilidades y destrezas pertinentes para motivar a sus alumnos, desarrollar estrategias didácticas eficaces, para lograr un aprendizaje, valorado y asimilado por parte de los estudiantes.

5) El capítulo cinco se dedica al análisis documental de algunos aspectos conceptuales de la mayor importancia: a) *Las dimensiones más actuales de la didáctica de las matemáticas, que competen al profesor que imparte esta materia en la ESO o Bachillerato*, en orden a alcanzar una mejora del aprendizaje matemático por parte de los estudiantes de la ESO. Destacan en la enseñanza de las matemáticas la apuesta por las innovaciones metodológicas, que pueden estar apoyadas por el avance de investigaciones empíricas sobre la enseñanza de las matemáticas, como ésta que presento. Es conveniente estimular avances significativos en el diálogo entre profesor y alumnos, que anime la voluntad participativa de los estudiantes. Reforzar viejos vínculos con otras áreas matemáticas, con otros campos de la ciencia que traerían al escenario matemático nuevas y distintas metodologías de experimentación. Para mejorar la enseñanza de las matemáticas parece interesante prestar atención al contexto en que discurre la vida de los estudiantes. Sin duda que la didáctica ha de animar la comunicación en el aula. No se duda que los profesores en las clases de matemáticas hacen preguntas sobre la materia que se está impartiendo. Pero a veces, esas preguntas son interpretadas por los estudiantes como procedimientos que usa el profesor más para indagar sobre los conocimientos del alumno que para animar a los estudiantes a participar en la conversación. b) Respecto de los asuntos *conceptuales del aprendizaje* se tratan dos aspectos principales: Primero, un esbozo sobre asuntos más conceptuales referidos al aprendizaje, como *definición* del aprendizaje y sus connotaciones de lo que

Universidad Pontificia de Salamanca

implica el cambio que supone el aprendizaje. Las características del aprendizaje son el segundo aspecto y comprende tanto las actividades implicadas en el aprendizaje, como los asuntos y los factores que lo condicionan. El tercer aspecto se dedica a pergeñar con brevedad algunas de las principales aportaciones teóricas al aprendizaje. Durante el siglo XX han sido tres las escuelas que han tenido una mayor influencia en la educación: conductismo, cognitivismo y constructivismo. A cada una de las cuales se solapa un marco conceptual del aprendizaje y la estrategia correspondiente a la práctica educativa. c) Un asunto de interés en este contexto es el aprendizaje *de las matemáticas.* Se tratan algunas *experiencias sobre el aprendizaje matemático,* que se han considerado de interés por la seriedad de sus procedimientos y por el indiscutible prestigio que les acompaña. Las experiencias PISA ofrecen lecciones interesantes para el estudio de las matemáticas en el contexto español: las matemáticas constituyen un *conocimiento indispensabl*e para el desarrollo de los pueblos, para la instalación satisfactoria de los individuos en el escenario social y las matemáticas son útiles y necesarias para comprender los asuntos de la vida cotidiana. En los informes PISA se defiende que la comprensión matemática se manifiesta en la resolución de problemas matemáticos, en consecuencia, la evaluación matemática se debiera hacer siempre mediante los problemas. d) *Dimensiones motivacionales en el estudio de las matemáticas.* Desde una perspectiva conceptual, se indaga en el complejo motivacional del estudiante ante los necesarios esfuerzos que le exige el estudio de las matemáticas. Primero se clarifican las dimensiones de valor, de expectativa y de emociones imbricadas en el concepto de motivación. Asimismo, se referencia la construcción mental del modo como el individuo se percibe a sí mismo, el *autoconcepto*, en cuanto instancia construida por el individuo, a partir de su autoestima y de las actitudes y opiniones que los demás expresan respecto de él. Se trata de una categoría que relaciona al sujeto con el rendimiento escolar, con específicas connotaciones motivadoras en los estudios matemáticos. e) Un último aspecto a tratar se refiere al *contenido curricular del Álgebra en el panorama español e internacional*. Se comienza con una introducción en la cual se establecen algunas dimensiones esenciales del álgebra, en cuanto distinta de la aritmética y se avanzan algunas direcciones en que se está moviendo la investigación actual respecto de los problemas que dificultan los avances en la mejora del aprendizaje del álgebra. Se muestran algunos intentos legislativos más que didácticos llevados a la práctica en el panorama español, en el ámbito nacional. En el escenario autonómico se legisla con profusión y se están haciendo algunas experiencias de aprendizaje, mediante

Universidad Pontificia de Salamanca

el uso de los recursos tecnológicos. En el escenario internacional a favor de la mejora en la enseñanza del álgebra y en general de las matemáticas. En cuanto al espacio internacional he reducido la actuación a mostrar los resultados de dos pruebas internacionales, de prestigio técnico indiscutible, PISA y TIMSS sobre los resultados de la enseñanza de las matemáticas, en diferentes escenarios. El capítulo concluye con una síntesis y unos corolarios para la enseñanza actual de las matemáticas

D) METODOLOGÍA Y RESULTADOS

6) Metodología experimental. En la segunda parte de la tesis se desarrollan los asuntos metodológicos, se muestran los resultados y se infieren las conclusiones, que ocupan los tres últimos capítulos de la tesis: La metodología experimental se desarrolla en el capítulo seis. Como es obvio son aspectos destacados los procedimientos metodológicos que han orientado la docencia de las matemáticas en los cursos de la ESO que se han investigado. La investigación empírica realizada para la elaboración de esta tesis, se ha llevado a cabo mediante la aplicación de tres tipos diferentes de procedimientos metodológicos: 1) *el método tradicional,* se fundamenta en la explicación clara, precisa y ágil del profesor, mediante la exposición oral y la grafía desarrollada en la pizarra, que puede complementarse con el libro de texto. 2) *El método cooperativo* se vincula al concepto de escuela activa en la que el profesor reduce su papel como transmisor de información y lo concentra en la presentación y contextualización temática, explicando los aspectos de difícil comprensión, destacando sus aplicaciones y motivando a los alumnos hacia su estudio, a modo de gestor de los grupos. 3) El uso de recursos tecnológicos que denominamos *método TIC.* En esta modalidad metodológico/didáctica, se revalorizan las explicaciones del profesor, que se apoyan sobre la utilización de videos didácticos y material audiovisual disponible en Internet y que diferentes instituciones españolas ofrecen con generosidad. En este capítulo se muestran los objetivos, se exponen algunos rasgos de los grupos investigados y se señalan los instrumentos que se han utilizado para recoger los datos producidos en la investigación. Dos son los instrumentos de recogida de información: el Test de motivación y el Cuestionario de conocimientos. Se expone también el

Universidad Pontificia de Salamanca

cronograma de actividades a llevar a cabo en torno a la investigación empírica, se muestran los cuadros con la secuencia de los contenidos a explicar y las fechas a realizar las correspondientes evaluaciones.

7) Resultados. El capítulo siete lleva por título *Resultados de la investigación empírica sobre el estudio de las matemáticas.* Comprende dos tipos de asuntos, que estructuramos en cuatro apartados. El primer asunto se refiere a los resultados de las motivaciones que animan o desaniman a los estudiantes en su estudio de las matemáticas. El segundo asunto lo constituyeron los conocimientos matemáticos, en concreto algebraicos, que corresponde enseñar y aprender en la enseñanza secundaria obligatoria. El tratamiento de estos asuntos, los resultados empíricos obtenidos mediante la investigación, se organizan en los siguientes apartados: a) Resultados contextuales referidos al medio familiar, hermanos, estudios y ocupación laboral de los padres, y algunas preferencias en los estudios en relación con las materias cursadas. Esta referencia es obligada, como ya se ha indicado en el capítulo cinco, en el apartado dedicado a la didáctica. b) Resultados sobre las *motivaciones de los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas*. La indagación sobre las motivaciones de los estudiantes ante el aprendizaje matemático tuvo una razón obvia, porque si ellos se sienten motivados y estimulados para el estudio de las matemáticas, las probabilidades de éxito y los buenos resultados serán manifiestos. Los resultados confirmaron este objetivo. Los resultados se presentan de modo separado: primero los correspondientes a los estudiantes de segundo curso y a continuación los del curso tercero. Los resultados se muestran mediante cuadros estadísticos, gráficos y textos escritos que exponen las tendencias y los matices que conllevan.

Los resultados que relacionan los conocimientos aprendidos y los procedimientos metodológicos usados se recogen en dos apartados que se corresponden con los cursos de segundo y tercero de la ESO. c) Los resultados de segundo curso de la ESO, obtenidos mediante la cumplimentación de un Cuestionario de conocimientos, se organizaron en torno a las ecuaciones de primer grado, problemas algebraicos e igualdades notables. Se muestran algunos de los errores más comunes y se exponen algunas sugerencias al respecto. Se termina con un resumen global de datos totales y una breve síntesis. Tanto en este apartado como en el siguiente se establecieron pruebas matemáticas de la fiabilidad de los datos. d) El último apartado se corresponde con los resultados obtenidos mediante el Cuestionario de conocimientos que cumplimentaron

Universidad Pontificia de Salamanca

los estudiantes del curso tercero de la ESO. En este caso las pruebas de conocimiento versaron sobe ecuaciones de primer grado, de segundo grado y sus correspondientes problemas así como sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas. El objetivo perseguido no era solo el aprendizaje sino también las relaciones entre el aprendizaje de los conocimientos algebraicos y los procedimientos metodológicos usados en cada clase. Desde esta perspectiva, el grupo que siguió el método cooperativo se ha sentido muy satisfecho del procedimiento y reconoce de modo específico la utilidad del procedimiento para el aprendizaje. Los grupos que siguieron los procedimientos tecnológicos, objetivamente han logrado visibles progresos en el aprendizaje y manifestaron su satisfacción con el uso de estos recursos tecnológicos, las TIC, que facilitan el aprendizaje de las matemáticas. Finaliza el capítulo con una exposición de los resultados totales y una breve síntesis de todo el capítulo.

E) CONCLUSIONES Y PROPUESTAS

8) Conclusiones y propuestas. Las conclusiones y propuestas se recogen en el capítulo ocho que se despliega en tres apartados: En el primero se trata de una conclusión epistemológica que se adentra en las dimensiones relacionales implicadas en el binomio *educación y matemáticas en la sociedad actual del conocimiento*. En el segundo se atiende a las conclusiones logradas, resaltando su *coherencia con los objetivos* propuestos. En la tercera parte se presenta una propuesta sobre la formación y acreditación profesional del profesorado. Termina el capítulo con las referencias bibliográficas, finalizando la tesis con la Bibliografía.

Universidad Pontificia de Salamanca

INTRODUCCIÓN

De acuerdo a la normativa actualmente en vigor, el objeto y tema de una tesis doctoral, además de significativo y actual, debe consistir en "un trabajo original de investigación elaborado por el candidato en cualquier campo del conocimiento" (Real Decreto 99/2011, art.13. Tesis Doctoral)[1]. Este mismo texto legislativo incluye precisiones que refuerzan la dimensión investigadora de la tesis doctoral, al establecer que "debe capacitar al doctorando para el trabajo autónomo en el ámbito de la I+D+I". Exigencia razonable y científicamente coherente porque, en la sociedad globalizada, los Estados han de preparar investigadores, para garantizar el desarrollo de nuestras sociedades basadas en el conocimiento científico y la innovación.

Con esta perspectiva, la legislación vigente urge a que las universidades desarrollen estrategias institucionales en materia de I+D+I que sitúen los programas de doctorado en el referente de sus actuaciones, favoreciendo una producción de calidad, innovadora y capaz de obtener reconocimiento internacional. En la intención del legislador, la tesis consistirá en un trabajo que avale la competencia investigadora de la doctoranda, no solo por la naturaleza del trabajo, sino por las competencias adquiridas para la aplicación práctica de la metodología científica. En coherencia con tales supuestos, la tesis desarrolla una temática actual que considero de acreditada significación principalmente por dos razones. El seguimiento de la que llamo *"mentalidad lógico matemática"* es la primera, que investigo en los capítulos más teóricos, para demostrar lo que, a mi entender, constituye la peculiaridad del razonamiento matemático y la muestra de la relevancia metodológico-instrumental de la matemática para otros saberes y para el progreso científico. Y, en segundo lugar, por la novedad que aporta la parte empírica, de mi propia autoría y aplicación, que instala el discurso en el escenario más actual de las investigaciones centradas en el estudio de los métodos pedagógicos para la enseñanza de las matemáticas.

[1] La legislación actual sobre la tesis doctoral es sustancialmente coincidente con lo establecido en la legislación precedente sobre la tesis doctoral: Real Decreto.1393/2007, de 29 de octubre (BOE, núm.260, 30 octubre, 2007); Real Decreto 778/ 1998, de 30 de abril (BOE, núm. 104, 1 de mayo, 1998).

Universidad Pontificia de Salamanca

Insistir en la investigación, como rasgo apreciable de la tesis doctoral, es señalar al medio en que se produce, la sociedad globalizada del conocimiento. El desarrollo de la sociedad actual convierte el conocimiento matemático y científico, en general, en el recurso estratégico por excelencia, favoreciendo el hallazgo de nuevos modos y maneras de organizar la producción y el avance de los conocimientos: los equipos de investigadores, además de su crecimiento cuantitativo, de organizarse con criterios de calidad en orden a cotas altas de eficiencia investigadora y de consolidar redes de comunicación e intercambio informativo con otros equipos de investigación, se han abierto a la comunicación con la sociedad de su tiempo y han logrado un reconocimiento social indudable que, además de facilitar recursos progresivamente crecientes para la investigación, disponen favorablemente a la opinión pública respecto de los procedimientos científicos. Ésta no es una cuestión menor, ya que el conocimiento científico y los procedimientos para lograrlo se constituyen en elementos esenciales para el desarrollo y bienestar social. Es indudable la acumulación actual de conocimientos, como lo es también el crecimiento cuantitativo de científicos e investigadores. La producción actual de conocimientos científicos alcanza unas magnitudes inimaginables en épocas precedentes.

Atendiendo a las diversas modalidades de investigación, estoy en condiciones de aseverar que la investigación de la tesis, ***Enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la ESO,*** podía ser calificada como una *investigación aplicada*, fundamentalmente *de tipo sincrónico*, que no se queda en el objetivo de análisis y descripción sino que *pretende el logro de la explicación*[2] *causal, aunque a veces se queda en la explicación referente a los motivos que inspiran la conducta de los alumnos investigados*. Claramente la tesis se ubica en el espacio de aquellas investigaciones de metodología cuasiexperimental que, buscando *dar respuesta a problemas de la vida cotidiana en el marco de la mejora de la práctica educativa*, proponen modelos pedagógicos *susceptibles de ser aplicados a los procesos de la enseñanza-aprendizaje*, en el área de la enseñanza del álgebra y en general de las matemáticas (Latorre et al., 2005: 47).

---

[2] Para Ziman (1986:37), "La forma característica de una explicación científica consiste en un argumento racional que vincula un conjunto de hechos empíricos a un esquema conceptual de índole general". Sin embargo como el mismo autor afirma en la página siguiente "por regla general, los científicos tienen que contentarse con argumentos explicativos que distan mucho de ser convincentes desde el punto de vista de la lógica. En casos extremos una simple analogía puede considerarse como una conexión suficiente para que cuente como explicación" y pone a continuación el ejemplo de Darwin que explicó la "diversidad inmensa de las especies biológicas de su tiempo y del pasado valiéndose de la analogía con la diversidad de razas de animales domésticos, producidos por la selección artificial" (Ziman, 1986: 38)

Universidad Pontificia de Salamanca

En estas páginas introductorias pretendo adelantar los supuestos que han guiado la investigación, tanto en su parte teórica como empírica, con el propósito de ofrecer, desde estas primeras páginas, las claves para la compresión global de la tesis. Eso supone mencionar las motivaciones de la doctoranda, referenciar los objetivos conceptuales de la investigación, articular la temática en los capítulos que integran la tesis, presentar la metodología empírica aplicada y los procedimientos de elaboración de las conclusiones. Asuntos que compendio en los siguientes apartados:

1º.- Motivaciones científicas y profesionales
2º- Objetivos de la investigación
3º- Articulación temática
4º- Metodología aplicada y resultados
5ª.- Conclusiones y propuesta
6º.- Bibliografía

1.- Motivaciones científicas y profesionales

a) Mentalidad lógico/matemática.- Si seguimos la actual teoría sobre "Inteligencias múltiples", no parece dudoso que los seres humanos están dotados de capacidades intelectuales y cognitivas diferenciadas que diversifican las competencias racionales de las personas. En este sentido se puede hablar con propiedad de inteligencia lingüística, lógico-matemática [3], biológica, espacial, musical, kinéstesica, intrapersonal e interpersonal (Gardner, H., 1995: 25). Acogida a esta teoría, debo señalar que mi inclinación a las matemáticas y mi disposición para su estudio y aplicación, no son resultante de convicciones coyunturales u ocasionales, sino que se deriva de mi propia y permanente inclinación intelectual en los años preuniversitarios, que me llevaron a cursar la Licenciatura de Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid y en el segundo ciclo, entre las posibles especialidades a cursar, mi elección se decantó por las *matemáticas fundamentales*. Su estudio ha sido tanto una obligación académica como una tendencia vocacional, que me ha mantenido siempre en contacto con la literatura de investigación y divulgación matemática. Lo que ha supuesto un estímulo y un impulso para la elaboración de la investigación que presento como tesis doctoral. Por

[3] Por inteligencia lógico-matemática entiendo un conjunto de competencias interrelacionadas con el número, la matemática, la lógica y la ciencia, que acumulan un potencial cognitivo con capacidad de comprensión del número y de las operaciones relacionadas con los números, el tiempo, el espacio y la causalidad. "El razonamiento lógico.matemático proporciona la base principal para los test de CI. Esta forma de inteligencia ha sido investigada en profundidad por los psicólogos tradicionales y constituye el arquetipo de la 'inteligencia en bruto' o de la habilidad para resolver problemas, que supuestamente pertenecen a todos los terrenos" (Gardner, H., 1995: 38)

Universidad Pontificia de Salamanca

tanto, el motivo de fondo de la presente investigación, radica en mi propia sensibilidad intelectual que, siguiendo a Gardner, se puede calificar como “inteligencia lógico-matemática”.

Más allá de las motivaciones personales, la mentalidad lógico matemática debe ser estudiada y reinterpretada porque se ha manifestado como esencial, aunque de modo diverso, si se atiende a la perspectiva histórica de la Ciencia, en la que se va haciendo cada vez más necesaria la aplicación de las matemáticas. Aunque no de modo uniforme, la mentalidad lógico matemática y sus aplicaciones operativas, se constituyen en el apoyo que sostiene la Nueva Ciencia del siglo XVI y la Revolución Científica de los siglos siguientes. Cambios que favorecieron el inmenso avance de las ciencias en siglo XIX, como el desarrollo de la nueva Química a partir de Lavoissier, la Biología evolucionista, la Termodinámica y las teorías atómicas, que acompañaron y animaron el progreso en Física Cuántica y la propia Teoría de la Relatividad, bases de todo el progreso científico y sus aplicaciones tecnológicas en el siglo XX y en lo que llevamos del XXI.

b) Experiencia docente.- Me parece significativo, para la interpretación de la tesis, exponer el escenario de mi ubicación personal y profesional que guardan relación estrecha con la investigación que presento. Como profesora de matemáticas de alumnos de los cursos 1º, 3º y 4º de la ESO, y de 1º y 2º de bachillerato durante tres años consecutivos, he tenido la experiencia, compartida por otros profesores con más años de docencia, del limitado interés de los alumnos por el estudio de las matemáticas. Tuve la oportunidad de comprobar la exigua atención con que reciben las explicaciones y los incorrectos modos con que realizan las evaluaciones de sus conocimientos. Situación ésta muy generalizada que provoca la intervención de los padres cuestionando, a su vez, la tarea docente del profesor a partir de la calificación obtenida por sus hijos y no por el acopio de sus conocimientos.

No es infrecuente que algunos órganos responsables de los centros sean proclives a dar por correctas las extemporáneas intervenciones familiares que exigen buenas calificaciones, sin prestar atención a los reiterados mensajes que durante el curso llegan desde los centros a los responsables de los estudiantes, sobre la escasa aplicación de sus hijos estudiantes, sin atender a las bajas o negativas calificaciones parciales y a las notificaciones explícitas de los profesores, poniendo en su conocimiento el limitado interés de los estudiantes. Esta real circunstancia hace muy complicado el ejercicio

Universidad Pontificia de Salamanca

profesional de enseñar matemáticas a quien no se interesa por aprenderlas. Esta experiencia ha inducido y ha acompañado la investigación elaborada para la realización de la tesis.

A pesar de estas encontradas experiencias, he racionalizado la situación para hacerle frente de modo eficaz, como queda claro en las pruebas empíricas que he formalizado, en la confianza de que es posible superar el fracaso en la enseñanza de las matemáticas, a lo que pretende contribuir la presente investigación. Este marco pedagógico, y la experiencia profesional de profesora, confiere sentido al título de la tesis: ***Enseñanza aprendizaje de las matemáticas en la ESO.*** El significado del título es obvio y en él va implícito su objetivo fundamental, que aclaro en el siguiente apartado. Los testimonios aducidos, *Informes Eurydice*, la información que periódicamente se publica con los resultados de las pruebas externas del *Programa Internacional para la Evaluación de Alumnos* (PISA)[4], el *Informe Internacional de Comprensión Lectora PIRLS*[5] *– TIMSS* (*Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias)*[6] y el generalizado consenso sobre el fracaso escolar que tantos estudiantes obtienen en las matemáticas avalan que el asunto tiene una contrastada y lamentable actualidad académica, educativa y social[7].

c) Experiencia profesional.- En la elaboración de la tesis ha tenido influencia también mi experiencia profesional como Ingeniero de SOFTWARE en una empresa de Tecnología Avanzada, y analista en un proyecto para el BBVA, en un entorno tecnológico de trabajo altamente especializado. En este contexto de naturaleza científico/técnica, mi formación intelectual lógica-abstracta-matemática fue valorada como capacidad para llevar a la práctica los conocimientos matemáticos, sus

---

[4] PISA es el acrónimo de Programme for Internacional Student Assessment.

[5] PIRLS es el acrónimo de Progress in International Reading Literacy Study.

[6] TIMSS, es el acrónimo de The Trends in Internacional Mathematics and Science Study.

[7] Una significativa opinión relativa a la enseñanza de las matemáticas y avalada por la experiencia de más de 35 años enseñando matemáticas, la ofrece el profesor Goñi Zabala (2008,13): “Es imprescindible, para la mejora de las enseñanza de las matemáticas y del aporte que ésta puede y debe hacer al desarrollo social, que se rompa ese aislamiento y que la enseñanza de las matemáticas, área que junto con el lenguaje está considerada como un pilar de los currículos escolares en todas las edades, deje de estar fuera del debate social y político, para quedar en manos de los guardianes de un saber arcano, al que miramos con tanto respeto como indiferencia. Para que las matemáticas sean un bien cultural para todos, como hoy en día es habitual escuchar, hace falta que comprendamos que todos estamos llamados a aprenderlas y a opinar sobre su valor social como herramienta al servicio de una educación mejor. Mientras que no se entienda que el currículo de matemáticas es una cuestión que debe estar sometida al debate social y político y se piense que dicho currículo es asunto de los expertos en matemáticas, no creo que podamos avanzar gran cosa”.

Universidad Pontificia de Salamanca

aplicaciones y operatividad tecnológica, que constituían el elemento clave de la actividad profesional. En consecuencia con esta experiencia, acorde con las exigencias de la sociedad globalizada del conocimiento sustentada por el desarrollo científico y tecnológico, llegué a interiorizar la convicción según la cual la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, así como de otras materias científicas, deben constituir un objetivo destacado del proceso educativo, con la debida importancia por parte de los centros educativos y de los estudiantes. Lecturas de divulgación sobre los magnos procesos de la globalización económica y sobre las nuevas tecnologías informáticas y de la comunicación, me descubrieron una sociedad actual donde el incremento de máquinas y sistemas inteligentes es manifiesto, como obvia es la progresiva y preocupante invasión de la computerización.

Estos rasgos técnicos y sociales condicionan un modelo educativo donde las matemáticas han de ocupar un lugar destacado, con la exigencia de motivar a los educandos para estudiarlas con interés, asumiendo el esfuerzo que entraña, teniendo en cuenta que la sociedad pivota, cada día en mayor medida, sobre la matemática y sus aplicaciones. A pesar del reconocimiento de tal exigencia socio/tecnológica, la experiencia profesional, como profesora de matemáticas, me enfrentó a la realidad del escaso interés de los alumnos por esta materia. Antes de hacer precipitadas atribuciones de responsabilidad de esta incongruente situación a los centros educativos, a los alumnos o a los profesores, pude conocer y analizar un informe de la Unión Europea en el que se constata la precaria pero generalizada situación, por la que atraviesa el estudio de las matemáticas en los países de la U.E.[8]. La reposada lectura de esta investigación me descubrió que esta lamentable situación no se restringía a nuestro país, aunque tal vez aquí todavía no se estaban tomando, con la urgencia debida, las oportunas medidas para atajar el desánimo en torno a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en los países de la Unión Europea no solo se han elaborado tres informes de la situación (además del mencionado informe sobre *Matemáticas*, existen dos más sobre *Ciencias* y *Género*), sino que se están poniendo en marcha medidas para atajar que los estudiantes de la enseñanza secundaria obligatoria y de Bachillerato sigan obteniendo

[8] EURYDICE, 2011-d. *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos communes y políticas nacionales* (Madrid: Secretaria general Técnica del MEC y D. y Bruselas: EACEA P9 Eurydice) es un documento realizado para llamar la atención y ofrecer experiencias sobre esta tendencia, que a su vez, viene avalada en las reiteradas pruebas PISA que se hacen en los países de la Unión Europea, de la OCDE y en España. Convergen asimismo con la mencionada tendencia los informes PIRLIS_TIMSS, cuyos últimos resultados se hicieron públicos en España el 12 de diciembre de 2012 y su presentación fue titulada por el periódico ABC en estos términos: *Los españoles suspenden en Lectura, Matemáticas y Ciencias desde los 9 años* (Periódico de Madrid ABC, 12 de diciembre de 2012, p.41)

Universidad Pontificia de Salamanca

tan malos resultados en matemáticas. Medidas igualmente encaminadas a evitar que los profesores de matemáticas sigan cayendo en el desánimo, cambiando su ejercicio profesoral por otros menos onerosos, que permiten ejercer de matemáticos en ambientes más gratificantes.

d) Motivaciones sociales.- De lo mencionado en el apartado anterior, se deduce la actualidad y pertinencia social de la tesis. Si en Europa preocupa el asunto de la enseñanza de matemáticas, en España queda demostrada por la movilización profesional y las numerosas reuniones de las veinticinco Facultades de Matemáticas [9], así como por la legislación producida en los últimos diez años en torno al Grado académico de Matemáticas, al Master para la formación específica de los profesores de matemáticas en la ESO y en Bachillerato, a las competencias matemáticas. Estas reuniones, movilización y exuberancia legislativa no son ajenas a las recomendaciones del Consejo Europeo y del Parlamento de la Unión Europea.

La dimensión social de la investigación matemática y su enseñanza, adquiere plena justificación en el contexto de los planes nacionales de I+D+I (CICYT, 2007), en los programas de investigación científica de los países avanzados y en el desarrollo de las modernas tecnologías. La investigación del espacio exterior, los sondeos en busca de recursos energéticos que se llevan a cabo en las profundidades del suelo terrestre y marítimo, los avances en la aplicación robótica a los campos de la medicina, de la cirugía, de las nuevas armas y de la producción, son escenarios de investigación en que las matemáticas protagonizan el papel fundamental, de manera eficiente y eficaz. Como escribe[10] el catedrático de Economía y Estrategia de la London School of Economics,

[9] En España se constituyeron diversos grupos como el Grupo de Matemáticas de la CRUE, el de Decanos de las Facultades de Matemáticas, que luego delegaron en la Comisión de Decanos de Matemáticas, presidida por el Decano de Valladolid, Antonio CAMPILLO, que elaboraron el libro blanco editado por la ANECA (2005) *Titulo de Grado en Matemáticas*. En España tuvieron también presencia e influencia los trabajos del grupo europeo Grupo de Matemáticas del Proyecto Tuning, en el que se habían integrado varias universidades españolas.

[10] "La revolución que ya ha tenido lugar en la toma de decisiones en finanzas, en *baseball*, en *marketing* (con el análisis masivo de bases de datos de compra) y en la política presidencial americana llegará poco a poco a todas las áreas del conocimiento. Y para beneficiarse de ella, habrá que tener un buen conocimiento de estadística y de matemáticas. Y es que las matemáticas no son solo, como dijo Galileo, el lenguaje en el que Dios escribió el universo, sino que son el lenguaje de los datos y la información en la que estamos inundados. Sin entender modelos matemáticos sencillos, lo que estos pueden predecir y lo que no, los supuestos que requieren, la confianza que merecen, es prácticamente imposible participar activamente en campos aparentemente tan poco matemáticos como la biología, la economía, las finanzas, la contabilidad, la sociología, la ciencia climática, la ciencia política, la medicina (¿cuál es la probabilidad de curación en este caso con quimio, con radio o con cirugía?, ¿de qué depende esta probabilidad?), o el *marketing"* (Garicano, L., 2012. "Son las matemáticas, estúpido", El País, sección Opinión, 13 de noviembre de 2012, http://www.elpais.com Consulta 7 de enero de 2013)

Universidad Pontificia de Salamanca

Luis Garicano (2012), las matemáticas son cada vez más insustituibles en la sociedad actual.

2.- Objetivos de la investigación

En coherencia con las motivaciones que acabo de precisar, en la tesis confluyen objetivos de variada naturaleza, aunque en gran medida sustentados por idéntico propósito pedagógico. La investigación se sitúa entre una dimensión más especulativa, centrada en argumentar la concepción de las matemáticas y sus procesos operativos, y otra estrictamente práctica basada en los datos obtenidos de las pruebas empíricas elaboradas en torno al proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y que se han aplicado a grupos de estudiantes de los cursos segundo y tercero de la ESO. A partir de la experiencia investigadora se proponen mediaciones didácticas para la transmisión escolar de la mentalidad matemática con el propósito de dotar a los alumnos de las consiguientes competencias operativas. La presencia en la tesis de dos enfoques metodológicos diferentes, aunque complementarios obliga a distinguir, a favor de la claridad y del orden, los varios tipos de objetivos propuestos en la tesis: los orientados a la comprensión de la propia lógica interna de la matemática entendida como ciencia, y aquellos otros derivados de las intenciones pedagógicas de la tesis [11]. A esta diversidad obedece la siguiente esquematización, que solo voy a indicar, puesto que los objetivos se exponen de modo amplio en el capítulo dedicado a la metodología empírica.

2.1.- *Objetivo fundamental* que apunta a la renovación de los contenidos curriculares y de los procedimientos didácticos como fórmula para la mejora del aprendizaje matemático.

2.2.- *Objetivos específicos teórico/documentales,* orientados a la determinación de las dimensiones matemáticas que se estiman escolarmente más eficaces y útiles para la vida: 1) a*nálisis y valoración crítica, desde diversas y complementarias perspectivas, de las metas, estrategias y retos que solicita la educación* de calidad en un mundo globalizado. 2) *La revisión crítica de la mentalidad originaria de la matemática en la cultura de la Grecia Clásica,* en cuyo contexto se articulan los procedimientos teóricos para la interpretación matemática del cosmos. *3) Un tercer objetivo específico se*

[11] En la formulación de objetivos tengo en cuenta la exigencia metodológica de Visauta, que exige ***claridad, concisión y precisión terminológica***, a partir de la siguiente cautela epistemológica: "el éxito de una investigación estriba en el logro de unos objetivos, que deben ser revisados en cada fase del proceso investigativo y cuyos resultados deben acomodarse a los mismos" (Visauta, B., 1989:99).

Universidad Pontificia de Salamanca

enmarca en la reflexión sobre las coordenadas del movimiento científico que emerge tras las aportaciones algebraicas de la cultura árabe e hindú, la vertebración matemática de la racionalidad moderna, la matematización de los nuevos saberes y el impulso matemático al desarrollo tecnológico actual.

2.3.- *Objetivos de la investigación empírica: 1) la motivación escolar* es un objetivo esencial en esta tesis, de naturaleza esencialmente pedagógica. Asumo este supuesto porque estoy convencida de que es imposible fomentar la comprensión de la mentalidad matemática y de sus procedimientos operativos sin la implicación psicológica, intelectiva y afectiva, del alumno. Si los estudiantes están motivados y estimulados para el estudio de las matemáticas, el éxito y los buenos resultados serán seguros [12].

2) *Con el término de objetivo operativo, me estoy refiriendo a las competencias del profesor de matemáticas,* que no son únicamente de conocimientos matemáticos, sino también de competencias específicas.

3) Los objetivos empírico analíticos son también de naturaleza experimental y se orientan a la comprobación de la relación causal entre la metodología de la clase y los resultados del proceso de la enseñanza-aprendizaje.

4) Denomino objetivos pragmáticos educativos y sociales[13] a aquellos que trascienden la finalidad puramente formal de la tesis y pueden alcanzar consecuencias pragmáticas que afectan ámbitos educativos y sociales de especial interés.

3.- Articulación temática

En aras del orden y del carácter sistemático de esta investigación, parece coherente clarificar desde la introducción los conceptos que he tomado como hilo conductor en la elaboración de cada capítulo. No se trata tanto de un resumen sintético, cuanto de mostrar la trama de la tesis y revelar las ideas motrices de su articulación argumental.

1º) El capítulo primero dedicado a *La educación y sus propiedades,* parte de lo que entendemos por educación. El objetivo es establecer los rasgos, los retos y el

[12] "Las perspectivas actuales sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje, confirman unánimes el principio según el cual los alumnos deben responsabilizarse de la elaboración de sus propias estrategias cognitivas para dar sentido a lo aprendido. Pero no cabe duda que, además de dotarse de adecuadas habilidades cognitivas, el sujeto educando ha de poseer también estrategias motivadoras que animen su propio proceso de aprendizaje" (Mayor, J., 2009: 2013).

[13] Entiendo por ***pragmático*** aquellos efectos y cambios que en la realidad se pretenden alcanzar mediante la argumentación discursiva de la tesis.

Universidad Pontificia de Salamanca

cometido de la educación para la formación integral del ser humano en la actual sociedad tecnológica. Con ello pretendo dejar claro el marco humanístico de la educación que defiendo en la tesis. La educación es instrumento indispensable para que la humanidad progrese hacia los ideales de bienestar, de paz, de libertad y justicia social que, según nuestro modo de entender el humanismo, debieran informar siempre la precaria convivencia de los seres humanos en un mundo progresivamente global y abierto, en el que imperan más las reglas de la competencia, emanadas de instancias controladas por los poderes fácticos, que los Derechos Humanos. Estos, en teoría, son tan ampliamente reconocidos, como escasamente aplicados.

El análisis sobre la ciencia, en un primer momento, desvela un horizonte preñado de cambios e incertidumbres, que demanda atención a nuevas configuraciones de la identidad individual y al contexto institucional democrático a desarrollar. La calidad educativa en la sociedad global, en la que el conocimiento se ha convertido en el recurso estratégico por excelencia para la moderna economía de servicios, constituye el segundo asunto medular del primer capítulo. El tercero se refiere a la necesidad de dotar de competencia a profesores y alumnos, en orden a la aplicación eficaz de las nuevas tecnologías, no solo desde la perspectiva técnica, sino con sentido ético o axiológico. Al núcleo denso de contenidos que el decurso del tiempo ha elaborado como objetivo propio de la educación han de agregarse ahora las competencias pertinentes para funcionar satisfactoriamente en un mundo computarizado, con un incremento notable de máquinas y sistemas inteligentes, que avanza hacia un vertiginoso desarrollo científico - tecnológico, con harta frecuencia desprovisto de sentido. Otro aspecto emerge en este primer capítulo, la reflexión sobre la peculiar condición de las sociedades en la actualidad y en un futuro previsible: un mundo globalizado, progresivamente abierto a una pluralidad de culturas y valores, es el nuevo hogar del ser humano que cada vez es más consciente de su instalación en un espacio de cambio e incertidumbre, que no colabora precisamente a su tranquilidad, por lo que exige un mejor equipamiento técnico y humano, que facilite su inserción satisfactoria personalmente y socialmente provechosa. El asunto se plantea desde la perspectiva de una ciudadanía universal y desde la exigencia de unos valores éticos que faciliten la convivencia pacífica universal, que ha de ser solidaria y tolerante.

Este es el marco en el que ha de producirse el proceso particular de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas que, como tendremos oportunidad de reiterar, en modo alguno son ajenas a la sociedad globalizada del conocimiento, más bien están insertas en

Universidad Pontificia de Salamanca

el núcleo denso de la misma y tienen asignados papeles decisivos para el progreso de la sociedad. El capítulo concluye con una breve recopilación de lo tratado y algunos corolarios pedagógicos para la enseñanza actual de las matemáticas.

2º) El segundo capítulo, *La mentalidad matemática griega, paradigma de racionalidad,* parte del supuesto, históricamente documentado, de que los griegos inauguran una mentalidad esencialmente deductiva, a partir de la intuición de principios racionales que perduran en la posteridad. Para los griegos, son razones y proporciones las que regulan el orden del macrocosmos o naturaleza y deben ordenar también el mundo del microcosmos, tanto en lo que se refiere al ser humano como al orden social. Los avances en los conocimientos de los procesos operativos y en la elaboración de las demostraciones matemáticas, impulsaron el progreso de la cultura griega, generalmente sometida a un horizonte metodológico deductivo/inductivo, que perduró hasta la actualidad como método esencial de la epistemología de las matemáticas y de las ciencias Si en el primer capítulo la atención se centra en *las propiedades esenciales de la educación*, en éste la investigación deriva hacia la *perspectiva metodológica de la mentalidad matemática* y los caracteres específicos de su argumentación.

En las primeras referencias del capítulo se clarifican nociones epistemológicas básicas, deducción, sistémico y paradigma, que servirán de referencia para una concepción del orden matematizado del cosmos, inicialmente por obra de Anaximandro, que alcanza a superar las figuraciones míticas sustituyéndolas por los conceptos racionales de centro, equidistancia y equilibrio, con consecuencias prácticas en el campo social y artístico. El segundo núcleo temático del capítulo incorpora los tres modelos griegos más significativos y perdurables. El *paradigma pitagórico*, queriendo explicar la relación entre la totalidad cosmológica, entendida como *Uno*, y la diversidad de las demás cosas, concebida como lo *Otro* (=lo demás, lo que no es uno) expresado por los demás números distintos a la unidad, eleva las proporciones cuantitativas a clave de la articulación cualitativa del Cosmos. De este modo, la compresión de la relación matemática unidad/multiplicidad es condición para la comprensión de la armonía universal. *Con Platón las matemáticas llegan a ser el núcleo del conocimiento científico*, al asociarlas a la pura racionalidad, ya que considera los números y las entidades matemáticas como independientes de su origen y de su radicación empírica, así como de sus aplicaciones prácticas. Su comprensión y manejo obedece a la capacidad lógica deductiva, vertebrada por el principio de no contradicción. *En el modelo aristotélico las matemáticas alcanzan tal grado de universalidad científica que*

Universidad Pontificia de Salamanca

hasta la virtud ha de ser definida mediante el concepto de "término medio aritmético y geométrico", como propone en la *Ética a Nicómaco*. Dos asuntos más se tratan en este capítulo: el paso de la aplicación de las matemáticas no solo al conocimiento sino también al dominio de la naturaleza, que se lleva a efecto en el período helenístico, principalmente por la obra de Euclides y de los variados ensayos aplicados por Arquímedes. La aplicación operativa de la matemática se continúa mediante el engarce de la matemática griega con el álgebra árabe, que provocará el encuentro con las matemáticas indúes. El capítulo concluye con las referencias a los nuevos modos de aplicar las matemáticas, desarrollados en los dos centros científicos de mayor excelencia de los siglos XII y XIII europeos, Oxford y París, que abrirán el paso a su aplicación en la Nueva Ciencia, que se desarrollará a partir del siglo XVI. Nos pareció oportuno concluir el capítulo, esencialmente teórico, deduciendo una síntesis operativa para justificar los corolarios que consideramos de utilidad práctica para la enseñanza actual de las matemáticas.

3º) El capítulo tercero se dedica a *La matematización de la ciencia,* y pretende mostrar la elaboración del *nuevo procedimiento para hacer ciencia, que se diseña y construye siguiendo el modelo matemático*, acentuando de este modo el carácter instrumental de las matemáticas. El discurso se inicia con la constatación de la *nueva concepción del movimiento*, que posibilita las aplicaciones matemáticas a los fenómenos físicos y astronómicos, instaurándose las matemáticas como el núcleo denso de los nuevos procedimientos científicos y en el *modelo inspirador del nuevo proceso de racionalización, que se desplegará a lo largo de la edad moderna,* llegando hasta la actual producción del conocimiento científico y tecnológico, que suele presentarse con la denominación de Investigación Científica más Desarrollo más Innovación Tecnológica (I+D+I). A lo largo de los últimos cuatro siglos, las matemáticas se erigen y consolidan en el esquema metodológico y básico de la ciencia y del progreso científico.

Este *tercer capítulo* se sustenta sobre la conveniencia de dejar claro, en siete apartados, la *trayectoria de la progresiva importancia de la matemática desde el entorno de la primera gran revolución científica de la edad moderna hasta los procedimientos científico-tecnológicos actuales*. En el primer apartado se muestra el *marco conceptual*, integrado por dos dimensiones, la matematización del conocimiento científico como procedimiento de referencia y los factores contextuales del nuevo saber. En el segundo apartado *se recrea el escenario de la racionalidad moderna* y las

Universidad Pontificia de Salamanca

exigencias del conocimiento matemático, que se erige en el nuevo diseño de la metodología científica moderna. En el apartado tercero *se analizan tres escenarios*: el *geométrico* con las aportaciones de Copérnico y Kepler; el *de las motivaciones mecánicas* de Galileo y Newton, y el que extiende el *paradigma matemático* a todo conocimiento verdadero, como demandan Descartes y Leibniz. El cuarto asunto de interés dentro de este escenario se refiere a los *éxitos conceptuales* – teorías, leyes científicas y el nuevo método de hacer ciencia – y a los *institucionales de este poderoso movimiento científico,* como la creación de las Academias, las Asociaciones y un primer impulso democratizador de la ciencia.

En el apartado cinco de este capítulo tercero, el análisis comprende tres asuntos: los *cambios y tendencias* que en la actualidad conciernen a las matemáticas; la enorme *producción de conocimientos* a que ha dado lugar el procedimiento matemático puesto en vigor desde el siglo XVII y la progresiva *exigencia mediática* sobre la ciencia y los científicos. El apartado siguiente, *la democratización actual de la ciencia y de las matemáticas*, se concentra en la necesidad de avanzar en la democratización de los saberes científico-matemáticos, como consecuencia de dos factores, el poder de la ciencia es reconocido como más decisivo en el contexto social y los efectos de sus aplicaciones no siempre se ajustan a los positivos efectos programados o al menos publicitados, con graves consecuencias sobre los seres humanos que habitan territorios próximos. La evidencia de los riesgos civilizatorios y la progresiva necesidad de más y más recursos para la investigación refuerzan una sensibilizada opinión pública, que demanda la participación ciudadana en el diseño y seguimiento de las políticas científicas. El último apartado del capítulo tres se decanta por *la innovación científica y las políticas de I+D+I,* que comprende dos aspectos: el primero la descripción de las dimensiones del VI Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica y en el segundo se muestran algunos datos estadísticos sobre los resultados de las políticas científicas en España, en los últimos años. Se concluye, como en los capítulos precedentes, con una breve síntesis de corolarios pedagógicos para la enseñanza actual de las matemáticas y las referencias bibliográficas del capítulo.

4º) En el capítulo cuatro, *El agente de la educación: el profesor de matemáticas*, nuestra concepción parte de *un principio axial: el profesor es la pieza clave de la educación*, sin su implicación personal y entusiasta, preparación técnica y formación permanente, el proceso educativo fracasaría. Desde este punto de vista, *el objetivo del capítulo incorpora tres dimensiones*: a) *La humanista* contempla las cualidades básicas

Universidad Pontificia de Salamanca

y fundamentales del profesor, por su condición de profesor. La formación humana y profesional del profesor se sintetiza en la posesión de aquellas condiciones que la sociedad demanda en cada época y circunstancia puesto que, por la misma naturaleza de sus funciones, debe contribuir a la socialización crítica de sus alumnos, al menos en los niveles de la educación primaria, secundaria y bachillerato. b) L*a teórica* advierte sobre la adquisición de los conocimientos, competencias y técnicas matemáticas necesarias para su enseñanza, puesto que nadie puede dar lo que no tiene. La preparación inicial y específica del profesor de matemáticas, que impartirá docencia en la ESO y en Bachillerato, se hace desde una triple perspectiva: desde los estudios universitarios del Grado de Matemáticas, que especifican los contenidos, competencias, objetivos y valores que configuran la formación matemática de este profesional. La segunda perspectiva se centra en las competencias establecidas en el ordenamiento jurídico español y europeo, que guiarán el ejercicio profesional del profesor de matemáticas. La tercera perspectiva viene dada por los estudios teóricos y prácticos sobre el uso provechoso y recomendado de las tecnologías de la información y de la comunicación en el escenario del aula. Por último, la *dimensión didáctica* de este objetivo se concreta en la adquisición, por parte del profesor, de las habilidades y destrezas pertinentes para motivar a sus alumnos, desarrollar estrategias eficaces de aprendizaje y lograr que sus enseñanzas sean valoradas y asimiladas por los estudiantes. El *procedimiento para la formación didáctica del profesor de matemáticas*, que se ha instituido en la actualidad, en España, comporta un nuevo diseño de formación didáctica del profesorado de la ESO, de Bachillerato y de Formación Profesional en general y de matemáticas en particular, mediante un Master universitario.

5º) El capítulo cinco profundiza en el significado de una serie de conceptos básicos o esenciales, de notable actualidad sobre importantes temáticas que enmarcan conceptualmente la investigación empírica de la tesis. 1ª) *Las dimensiones más actuales de la didáctica de las matemáticas, que competen al profesor que imparte esta materia en la ESO o Bachillerato*, en orden a alcanzar una mejora del aprendizaje matemático por parte de los estudiantes de la ESO. En cuanto particular disciplina de la didáctica para la enseñanza del currículo de las matemáticas, será el objeto de atención preferente puesto que afecta directamente al objeto de la tesis y sin desatender la viva preocupación social por la enseñanza de las matemáticas, al menos por las especiales dificultades que parece entrañar el asunto. 2ª) La aproximación conceptual al

Universidad Pontificia de Salamanca

*aprendizaje*constituye el segundo núcleo temático de este capítulo en el que se trata con brevedad y orden, un esbozo teórico sobre el aprendizaje, esto es, *definición, estructura y algunas aportaciones teóricas de mayor relevancia*. 3º) El aprendizaje matemático. A continuación, se muestran también algunas experiencias españolas e internacionales, socialmente acreditadas, sobre el aprendizaje matemático. En cuanto a las experiencias españolas, la mención se extiende a la actuación nacional – legislación vigente - y a la autonómica en cuyo ámbito se está produciendo una cierta teoría sobre la enseñanza de las matemáticas en el plano de las normativas legales y en el de las experiencias que impulsan en su ámbito de actuación. En el escenario internacional, las acreditadas experiencias *PISA ofrecen lecciones importantes para el estudio de las matemáticas en el contexto español*: 1ª) las matemáticas constituyen un conocimiento indispensable para el desarrollo de los pueblos y para la instalación satisfactoria de los individuos en el escenario social; 2ª) las matemáticas son útiles y necesarias para comprender los asuntos de la vida cotidiana. 3ª) PISA defiende además que la comprensión matemática se manifiesta en la resolución de problemas matemáticos, de ahí que la evaluación matemática se debiera hacer siempre mediante los problemas. Se reivindica asimismo la *importancia de los problemas verbales*, que tienen una tradición milenaria. 4) Otro apartado se refiere a *Las dimensiones motivadoras en el estudio de las matemáticas,* en la que se indaga en el complejo motivacional del estudiante ante los necesarios esfuerzos que le exige el estudio de las matemáticas, prestando especial atención a las *dimensiones de la motivación y al autoconcepto*, en cuanto construcción mental del modo en que el individuo se percibe a sí mismo, a partir de la autoestima y de las opiniones que le expresan los otros respecto de él mismo. 5) Una última cuestión: La plural *referencia al contenido curricular del álgebra*, así como una específica mención a los avatares que le afectan tanto en el plano internacional como en el escenario nacional y autonómico sin eludir las obvias diferencias que presentan los resultados de las evaluaciones del álgebra, en los distintos escenarios territoriales y sociales. El capítulo concluye con unos *corolarios pedagógicos* para la enseñanza actual de las matemáticas y las referencias bibliográficas sobre los asuntos tratados.

6º) En el *capítulo seis se expone la metodología experimental* seguida en la investigación empírica llevada a cabo en la tesis. Se contemplan los aspectos siguientes: una breve entradilla en torno a la investigación científica, los objetivos de la tesis de forma ordenada y sistematizada sobre la temática desarrollada en la tesis, se contextualizan los grupos que fueron objeto de la investigación empírica, se identifican

Universidad Pontificia de Salamanca

los instrumentos mediante los cuales se recabó la información para verificar los objetivos de la tesis: un test de motivación y otro de conocimientos. Se describen los procedimientos metodológicos empleados y se da cuenta de las diferentes circunstancias en que se efectuó la recogida de información, la tabulación de los datos, la interpretación y el análisis de los resultados para la verificación de los objetivos.

7º) El *capítulo siete se organiza en tres apartados sucesivos: 7.1.- Resultados del test de motivación.* El análisis de los resultados de la investigación empírica se estructuraron en tres partes. a) *la contextualización de los estudiantes* con los que se llevó a cabo la experiencia investigadora; b) *en la segunda* se desvela la delicada tarea de *agrupamiento de las preguntas del test* de motivación en diez dimensiones que responden a las cuestiones planteadas en las sesenta y siete preguntas. El *análisis de los resultados se orienta por las dimensiones* en las que se agruparon las respuestas habidas primero por parte de los estudiantes de segundo curso y luego por los estudiantes de tercer curso de la ESO. 7.2.- *Los resultados del test de conocimiento en el 2º curso de la ESO* comprenden dos tipos de cuestiones, las ecuaciones y los problemas. Respeto de las ecuaciones, una matización previa respecto de los resultados habidos, se trata de una temática fácil, que ya se ha enseñado en el curso precedente. Los tres primeros ejercicios, correspondientes a las ecuaciones, fueron solucionados correctamente por la mayor parte de los estudiantes, más del 90 % de los casos. La cuarta ecuación presentaba especiales dificultades y el naufragio fue estrepitoso, solo el grupo de 2º A alcanzó un nivel aceptable de soluciones correctas del 56%. Los errores más frecuentes se hallaron en las habilidades para hacer el despeje y con bastante frecuencia en el planteamiento. 7.3.- Los *resultados del test de conocimientos en el 3º curso de la ESO* presenta el siguiente panorama: Este capítulo se estructuró empíricamente sobre los estudios de álgebra en tres bloques temáticos: en el primero se integraban las ecuaciones de primer grado y los problemas correspondientes a estas. En el segundo se pusieron ejercicios y problemas correspondientes a ecuaciones de segundo grado y el tercer bloque temático lo constituyeron los sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y sus respectivos problemas. El capítulo concluye con una síntesis.

8º) El capitulo octavo esta dedicado a *conclusiones y propuesta.* Se muestran las conclusiones a que se ha llegado con la investigación cuasi experimental llevada a cabo, resaltando principalmente la coherencia entre los objetivos propuestos y las conclusiones inferidas de los resultados. Se presenta a continuación la propuesta respecto de la formación del profesorado de matemáticas.

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- Metodología aplicada y resultados

El *capítulo sobre metodología experimental,* comprende tres aspectos importantes: los objetivos de la tesis, se contextualizan los grupos de estudiantes que fueron objeto de la investigación empírica, se identifican los instrumentos mediante los cuales se recabó la información para verificar los objetivos de la tesis: un test de motivación y un cuestionario de conocimientos y por último se describen los procedimientos metodológicos a seguir y se da cuenta de las diferentes circunstancias en que se efectuó la recogida de información para la verificación de los objetivos.

5.- Conclusiones y propuesta

Como se afirma en el capítulo ocho dedicado a las conclusiones, las pretensiones de validez de una investigación deben valorarse a partir de la coherencia entre los objetivos propuestos y las conclusiones alcanzadas tras la argumentación documental o empírica utilizada en la investigación. Tal coherencia nos parece clara a través de la lectura de los objetivos y de las conclusiones que se formulan teniendo presente los objetivos propuestos y los resultados obtenidos. Entiendo que, en el caso de esta tesis, tal propósito se ha alcanzado. Las conclusiones vienen a ser la concreción práctica de los objetivos que habíamos prefijado. La propuesta que se hace en la tesis, está referida a la formación permanente del profesor de matemáticas, que se inserta en un proceso de acreditación profesional del profesorado de matemáticas de la ESO y Bachillerato.

6.- Bibliografía

Al final se recoge toda la bibliografía utilizada en la tesis, aunque al final de cada capítulo se muestran las referencias bibliográficas usadas en el mismo.

7.- Anexos

En los anexos se recogen los materiales más significados como textos legislativos sobre competencias matemáticas, sobre la tesis doctoral, sobre el Grado y el Master de Matemáticas y otros sobre el profesorado. También se recogen en los anexos el Test de Motivación como documentos a cumplimentar y este instrumento con los datos habidos en todas y cada una de las cuestiones presentadas y el Cuestionario de Conocimientos. Todo este material importante en la elaboración de la tesis se contiene en un CD embuchado en la parte de dentro de la contracubierta.

Universidad Pontificia de Salamanca

8.- Referencias bibliográficas.

CAMPILLO, A. (Coord. y Presidente de la CDM), (2005). *Titulo de Grado en Matemáticas*. Madrid: ANECA.

COMISIÓN INTERMINISTERIAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CICYT) (2007). *Estrategia Nacional de Ciencia y Tecnología*, Madrid: Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT).

EURYDICE, (2011d). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales.* Madrid: MEC y D, EACEA P9 Eurydice).

GARDNER, H., (1995). *Inteligencias múltiples.* Barcelona: Paidós.

GARICANO, L., (2012). "Son las matemáticas, estúpido", El País, sección Opinión, 13 de noviembre de 2012. http://www.elpais.com (Consulta 7 de enero de 2013).

GOÑI, J. Mª, (2008). *El desarrollo de la competencia matemática.* Barcelona: Graó.

ISAMA, (1974). *Curso de técnicas de investigación social.* Madrid. Instituto de Sociología Aplicada de Madrid.

LATORRE, A., DEL RINCÓN, D. Y ARNAL, J., (2005). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Ediciones Experiencia.

MAYOR, J., (2009). *La actividad humana. Un incierto camino entre la necesidad y la posibilidad*. Madrid: Editorial Universidad Complutense.

.REAL DECRETO 778/ 1998, de 30 de abril. BOE, núm. 104, viernes 1 de mayo de 1998. Art. 7 a 13.

REAL DECRETO 1393/2007, de 29 de octubre*, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.* BOE núm. 260, de 30 octubre de 2007.

REAL DECRETO 99 / 2011, de 28 de enero, *por el que se regulan las enseñanzas oficiales de doctorado*. BOE, núm. 35, jueves 10 de febrero de 2011.

SIERRA, R., (1991). *Técnicas de Investigación social*. Madrid: Paraninfo.

VISAUTA V., B., (1989). *Técnicas de investigación social.* Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

ZIMAN, J., (1986). *Introducción al estudio de las ciencias*. Barcelona: Ariel.

Universidad Pontificia de Salamanca

Iª PARTE: MARCO TEÓRICO

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 1

LA EDUCACIÓN Y SUS PROPIEDADES ESPECÍFICAS

C O N T E N I D O **PÁGS.**

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 1.- LA EDUCACIÓN Y SUS PROPIEDADES ESPECÍFICAS

Es un hecho de experiencia la reflexión generalizada sobre la Educación, al parecer se ha difundido con gran amplitud la conveniencia y la necesidad de deliberar sobre el sistema educativo, que ha devenido en la piedra angular de la nueva economía de servicios, con todo el elenco de conceptos antiguos pero con renovados contenidos – competitividad, productividad, innovación – y se ha convertido en la nueva filosofía del desarrollo sostenible. Este discurso suele partir de dos premisas que, en mi parecer, pueden ser perfectamente válidas: cómo enfrentar el futuro de los sistemas educativos en un mundo sometido a profundos cambios sociales y tecnológicos y, en segundo término, de qué modo el sistema educativo puede promover la consecución de los objetivos que la sociedad nacional establece para sus ciudadanos en el momento actual. A los valores tradicionales que propone la sociedad y que constituyen el contexto socio-histórico-cultural, ha de adjuntarse el propio análisis que de la situación hace el individuo que se educa, lo que dota de mayor complejidad al asunto. En todo caso, en este capítulo se señalan como metas permanentes y prioritarias de la educación el desarrollo del individuo, de la sociedad y de la economía. Es correcto afirmar que la educación ha de asumir como objetivo prioritario la mejor promoción del individuo, para que pueda desplegar todo su potencial y llevar una vida saludablemente feliz y provechosa tanto para él como para la sociedad. Los estudiantes que hoy llenan las aulas de los centros educativos se constituirán mas pronto que tarde en agentes responsables de la acción histórica de la sociedad, para lo que han de formarse en las condiciones que les faciliten la adaptación a los cambios que sobrevengan, *"para que puedan ejercer plenamente su libertad, sin estar sujetos a la subordinación de otras personas y cosas ni a todo tipo de manipulaciones y para que pueda participar activamente en la vida social"* (Carbonell, 2008: 12). En segundo término será siempre una meta a perseguir por la educación el desarrollo de la sociedad. La educación es un proyecto utópico que, por su misma condición, entraña la construcción de una sociedad más próspera pero también más justa, a la que ha de acompañar la reducción de las desigualdades entre

Universidad Pontificia de Salamanca

individuos o grupos. En tercer término ha de considerarse como una meta de la educación el progreso económico, haciendo lo necesario para que las capacidades de la oferta se correspondan con las tareas demandadas en la sociedad, que serán acordes a las necesidades diversas de las empresas y de los empresarios. En la sociedad globalizada la economía requiere trabajadores con capacidad de aprender, de decidir, de responsabilizarse de su trabajo y de trabajar en equipo..

Para alcanzar estas metas permanentes, habrá de configurarse una estrategia educativa apropiada a las circunstancias actuales. Además de la formación se requiere organización, para que cada cual asuma la responsabilidad más adecuada a sus competencias, habilidades y conocimientos que vienen compendiadas en la llamada *"sociedad de la información"* que impone avances significativos hacia el reconocimiento de las diferencias, hacia una *educación inclusiva* y a una formación científica. En relación con las metas educativas propuestas es necesario disponer de un conjunto de presupuestos, de máxima relevancia a los que atender y, en mi parecer, han de enmarcar el proceso educativo, si se pretende siga siendo relevante en la sociedad. Me refiero a los tres asuntos siguientes: en primer término, la educación ha de seguir la estela de la ciencia, ha de apropiarse del rigor metodológico de la investigación científica; lo segundo, la secuencia de cambios que están transformando con gran celeridad la sociedad actual contiene un elocuente mensaje para la educación; en tercer término está la perentoria necesidad de que la educación prepare a los individuos a asumir las exigentes tareas productivas en la sociedad.

1º) Rigor metodológico de la ciencia

Enunciamos algo que luego se va a reiterar a lo largo del capítulo y es lo siguiente: estamos inmersos en la sociedad del conocimiento, en la que por primera vez en la historia de la humanidad la ciencia ha adquirido un carácter rector e insustituible en relación con la actividad humana. La producción de conocimientos se ha incrementado y sigue la senda de una progresiva aceleración, destacando de manera significativa el relevante dinamismo social de la ciencia. La ciencia ha asumido un rol destacado en el ámbito de las actividades productivas a lo largo de la edad moderna, mediante la obra de sus grandes pensadores, sin embargo, su activa presencia se hace más patente a partir de la revolución industrial, se consolida omnipresencia en los siglos XIX y XX y es más obvia a medida que nos adentramos en el siglo XXI. Como testimonio del dinamismo social de la ciencia y de la producción acelerada de los conocimientos basta mencionar unos breves indicios como los siguientes: las

Universidad Pontificia de Salamanca

estimaciones actuales apuntan que el caudal de conocimientos científicos se duplica cada cinco años; las publicaciones científicas se multiplican y del 80 al 90 por cien de todos los científicos que han existido a lo largo de la historia están vivos en la actualidad. Este dinamismo de la ciencia no es fruto de un presupuesto meramente apriorístico, responde a las experiencias de tantos adelantos científicos que han contribuido a producir bienes necesarios o convenientes para el ser humano, a solucionar problemas, a eliminar el dolor y a superar múltiples limitaciones que encadenaban el devenir del ser humano, favoreciendo la generación de fundadas esperanzas de una mejor calidad de vida para las mujeres y los hombres asentados en este diminuto pero bello planeta. Muchos progresos técnicos avalan la creencia generalizada del ser humano en el poder indefinido de la ciencia. Esta creencia está siendo institucionalizada en normativas legales de casi todos los países mas avanzados para normalizar el proceso educativo respecto de las exigencias del procedimiento científico. Por tanto este es el primer rasgo que influencia el proceso educativo. Estará reiteradamente presente a lo largo de este primer capítulo de la tesis y tendré oportunidad de ofrecer testimonios del año 2011 en relación con los países de la Unión Europea.

2º) Cambios sociales.

El segundo lado del hipotético polígono que enmarca esta tesis viene dado por el cambio social o la cascada de variados cambios presentes en los más diferentes ámbitos de la actividad humana en la actualidad. La cultura del cambio tomó impulso en los últimos 60 años y se difundió de modo amplio en los países del mundo desarrollado y en vías de desarrollo, favoreciendo importantes transformaciones en la sociedad actual e hicieron efectiva la reestructuración mundial más profunda desde el inicio de la civilización industrial, hasta alcanzar lo que algunos han denominado la "primera revolución mundial" (King, A.y Schneider, B.,1991). Los cambios sociales ocurren constantemente en cualquier sociedad o cultura actual y ni temporal ni espacialmente son fenómenos aislados, se suceden en cadenas de sucesiones, con un doble sentido: son probables en todas partes y sus consecuencias pueden ser de importancia en cualquier lugar del planeta, hasta el punto de configurar una novedosa ruta hacia un mundo global, que puede caracterizar el siglo veintiuno (Giddens, 1999: 153 -179). Se impone una concisa identificación de los cambios que se consideran de interés general y tienen una resonancia global:

Universidad Pontificia de Salamanca

1) La extraordinaria transformación tecnológica, el indiscutible avance en la digitalización, las crecientes posibilidades de la comunicación (TIC), los progresos en las comunicaciones, parece esta expandiéndose, según los autores, a la biotecnología, rompiendo límites hasta el presente infranqueables.

2) Las dimensiones planetarias de los mercados, su fuerte "tendencia hacia el mercado competitivo y hacia la limitación del crecimiento explosivo del estado benefactor" (Samuelson, 1996) y la liberación del mercado han causado el positivo efecto de la incorporación de países y gentes a unos incuestionables niveles de bienestar material.

3) El nuevo papel de las mujeres, liberadas de viejos estereotipos, es fuente de tensión y de oportunidades individuales, familiares y sociales, no sólo en el mundo desarrollado sino también en las sociedades en vías de desarrollo. (Méndez, 2003: 416-418) El nuevo papel de las mujeres converge con un poderoso movimiento de la sociedad civil mundial que se está generando en la actualidad, como consecuencia de la intensa y dinámica actividad desplegada tanto por los movimientos sociales, entre los que destacan los movimientos feministas y las ONGs, cuyas tareas desbordan todas las fronteras, cuanto por la expansión mundial de los Medios de comunicación, que de manera continua y reiterada ofrecen en tiempo real, en el salón de cada hogar, los variados e importantes eventos que acontecen en el planeta. También Held y McGrew (2003:109) entiende que los cambios hacia unas cotas de mayor aproximación y la intensidad de las comunicaciones, "pueden estimular nuevas imágenes de comunidad, nuevas avenidas de participación política y nuevos discursos de identidad".

4) Los riesgos a que se enfrentan en este planeta los seres vivos, en los comienzos del siglo veintiuno, producen incertidumbre e inseguridad a una escala cuantitativa y cualitativa sin precedentes[14]. En 1992 la mayoría de los responsables políticos de los Estados se reunieron en Río de Janeiro estuvieron de acuerdo que la actividad humana estaba generando el grave deterioro del normal funcionamiento de los sistemas sostenedores de la vida en el planeta, con evidentes consecuencias: *el cambio climático, la erosión de la biodiversidad, la disminución y contaminación de los recursos acuíferos, la acumulación de residuos tóxicos, deforestación, etc..*

[14] Beck, Ulrich es muy conocido como autor de libros significativos en torno a los riesgos que afronta el hombre contemporáneo: *La sociedad de riesgo,* (editorial Paidós, Barcelona, 1998) y uno más reciente *La sociedad de riesgo global,* (Siglo XXI, Madrid 2006).

Universidad Pontificia de Salamanca

5) La crisis económica y social que en este momento está viviendo la humanidad, que se tiende a considerar como un problema técnico de funcionamiento del capitalismo, es esencialmente un problema de crisis de valores, que afecta a la humanidad en mayor medida que una crisis técnica de gestión económica. Muchos autores muestran su coincidencia al respecto:"las organizaciones del mundo económico y político no han asumido el discurso de la Responsabilidad Social Empresarial" (Cortina, 2009). El Premio Nóbel, Amartya Sen[15] (2009), refiriéndose a las causas de la crisis económica, afirma que "Más que falta de ética, que también fue una causa, yo diría que jugó una mayor parte la falta de disciplina. Había una oportunidad de hacer dinero muy rápido y sin control del estado. La falta de regulación fue otra clave". Para Jiménez de Parga (2009) el valor de la confianza es un valor básico para el quehacer económico: "La confianza está en la base de los comportamientos de los mercados; la confianza es el antídoto de la incertidumbre y el lubricante del emprendimiento; (…) En política económica, suscitar confianza es determinante, y si es deseable en la bonanza lo es más en la adversidad". Benedicto XVI en la encíclica "Caritas in veritate" apunta largamente a esta ausencia de valores como elemento decisivo de la crisis económica: "Sin formas internas de solidaridad y de confianza recíproca, el mercado no puede cumplir plenamente su propia función económica. Hoy precisamente esta confianza ha fallado y esta perdida de confianza es algo realmente grave" (2009:35).

Esta acumulación de cambios de enorme envergadura, que tienen lugar en un breve lapso de tiempo y se inicia en espacios limitados, toma luego un impulso planetario como factor determinante de la acción humana, constituyéndose como componente de indiscutible vigor en la configuración de la educación para el nuevo horizonte global. Para Giddens y Hutton es preciso y urgente elaborar una nueva filosofía, capaz de entender, comprender y explicar los resultados de estos los procesos de cambio que dan lugar a lo que vulgarmente se denomina la globalización. Una filosofía que trascienda las limitaciones del liberalismo y los excesos del socialismo, capaz de repensar los fundamentos ontológicos y éticos del Estado Nación y sus posibilidades de adaptación a las nuevas condiciones de la existencia humana; una

[15] Amartya Sen, con motivo de su investidura como Doctor Honoris Causa por parte de la Universidad Complutense de Madrid el 28 de enero de 2009 hizo unas declaraciones sobre la crisis económica que afecta al mundo desarrollado, enfatizando que la economía de mercado necesita límites, regulación y que el mercado no puede basarse sólo en buscar beneficios sino también en valores, en la confianza en el otro y en acciones responsables.

Universidad Pontificia de Salamanca

filosofía nueva que combine una dirección social y económica eficaz, que implique una fe apasionada en la democracia y una intensa preocupación por los derechos humanos. Esta filosofía obviamente servirá de acicate para el progreso democrático en la dirección de una activa participación personal y responsabilidad internacional (Giddens y Hutton, 2001: 299-313).

3º) Productividad.

El desarrollo económico y las exigencias de la nueva economía constituyen el tercer factor de insoslayable exigencia para la nueva configuración del sistema educativo que ha de asumir, como objetivo prioritario la necesidad de preparar al individuo desde el inicio pero también de modo permanente para hacerse cargo de las tareas económicas que la sociedad actual necesita realizar para afrontar con éxito las demandas del interés general. La acumulación de cambios mencionada deja sentir su influyente presencia, antes que en otra parte, en la producción económica, en las empresas, en los empleos, en los salarios y en el bienestar general de la población. La nueva economía o la economía inmaterial como a veces se le denomina, no por casualidad nace en los espacios más avanzados de la sociedad del conocimiento, lo que implica que el empleo en esas tareas requerirá unas cualificaciones profesionales de gran competencia, que ha de ser actualizada de manera continua. La economía de la sociedad global se lleva a cabo en espacios abiertos y en consecuencia la competitividad va a subir de nivel. Serán muchos más los competidores y no es casual que puedan presentarse con mejor preparación. Por consiguiente el nivel educativo de un centro no puede fijar como punto de referencia el nivel del centro de la barriada próxima o del pueblo vecino sino el de los centros mejor situados en el nivel educativo de cualquier parte del planeta, puesto que el empleador procediendo con la lógica más razonable incorporará a las tareas de su empresa a los que mejor preparación posean. En un mundo de fronteras progresivamente abiertas, esta circunstancia tiene relevancia en la actualidad y la adquirirá en mayor grado en etapas futuras a medida que el sistema financiera se estabilice y el comercio mundial adquiera nuevos bríos.

Estos rasgos específicos o propiedades de la sociedad globalizada del conocimiento componen la plantilla sobre la cual se elabora este primer capítulo de la tesis que, de algún modo, tiene un carácter introductorio a la elaboración de la especifica temática a desarrollar en los siguientes capítulos de la investigación sobre la educación de las matemáticas para el nivel de educación secundaria obligatoria (ESO).

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuatro son los apartados que se desarrollan en el presente capítulo, con las que se pretende mostrar algunas de las muchas y variadas dimensiones del proceso educativo con especial referencia siempre al trasfondo de la manifiesta exigencia que entraña la enseñanza de las matemáticas en la sociedad actual. Esbozamos estos cuatro apartados de manera somera en orden a facilitar la lectura y comprensión de la temática del capítulo. En concreto el capítulo se estructura como sigue.

1.1.- La educación ante los cambios científicos

En este apartado se especifican las variadas expectativas que los cambios actuales presentan a la educación desde la perspectiva de la ciencia, teniendo en cuenta especialmente que la sociedad globalizada se caracteriza prioritariamente por el despliegue del conocimiento científico. Esta ubicuidad de la ciencia produce efectos positivos pero también crea escenarios de incertidumbre, que afectan al individuo y a las instituciones sociales. La respuesta educativa viene de la mano de la igualdad de oportunidades que demanda la equidad.

1.2.- La calidad de la educación

La necesidad y los procedimientos para avanzar hacia una educación de calidad, con especial atención a los indicadores de calidad, de uso más frecuente en nuestro país, constituye el segundo apartado del capítulo. Asimismo se hace mención específica de algunos de los documentos que la Administración Educativa ha producido para orientar los procesos educativos hacia horizontes de calidad.

1.3.- Objetivos educativos: competencias y tecnologías

En el tercero se tratan los conocimientos y las competencias como objetivos inmediatos, no únicos evidentemente de la educación. Asimismo se presta atención a las nuevas tecnologías como instrumentos a integrar en los procesos educativos.

1.4.- Hacia una educación humanística

Termina el capítulo desarrollando una temática que estimo de la mayor importancia cual es la condición humanista de la educación que parte de la consideración del ser humano como un todo y la necesidad de su desarrollo integral que pretende integrarse en la cambiante realidad de un mundo global con provecho para él y satisfacción para la sociedad. En esta perspectiva se toma en consideración la necesidad de unos específicos valores de solidaridad y tolerancia con los diferentes.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.1. LA EDUCACIÓN ANTE LOS CAMBIOS CIENTÍFICOS

El título de este apartado apunta de manera provocadora a los contenidos y procedimientos científicos que han de impregnar el proceso de la enseñanza-aprendizaje en cualquier nivel de la educación, teniendo en cuenta las circunstancias científicas de la sociedad del conocimiento. Estamos ubicados en el espacio económico y cultural europeo, en el que es evidente esta tendencia a valorar la ciencia en términos muy positivos. Los argumentos y razones generales y territoriales al respecto ocupan este primer apartado. En el siguiente, ubicación socioeconómica y factores de incertidumbre, se relaciona la exigente preparación técnica debida a los sujetos educandos con la inserción profesional y laboral y, teniendo en cuenta la crisis económica que padecen los ciudadanos europeos, cualquier cosa que se diga sobre la precariedad del empleo, se quedará corta. En Europa está muy avanzada la desaparición práctica de fronteras y en cualquier parte está el fenómeno de las migraciones que hace más complicada la inserción laboral y más difícil la conservación del empleo. Desde este supuesto es obvio que la presión sobre el sistema educativo para que prepare mejor a los estudiantes será permanente y ha de adquirir un nivel aceptable, por convencimiento interno o por coacción exterior. En las circunstancias presentes, de niveles educativos poco exigentes, de escasa correspondencia con las tareas nuevas a realizar y de precariedad del empleo, sin duda que los riesgos e incertidumbres saldrán al encuentro del ser humano en su diario devenir por la sociedad moderna. En el tercer apartado se plantea un reto nuevo al que la educación ha de hacer frente, la necesaria aportación de elementos que faciliten al educando el descubrimiento y la maduración de su propia identidad como ser humano, como ciudadano de una sociedad democrática con su cultura y tradición, sin obviar que ese sujeto educando ha generar actitudes de apertura a otras culturas y de tolerancia hacia individuos diferentes, dado el carácter abierto de las sociedades modernas. Mejor podrá avanzar en actitudes de solidaridad con el otro y de tolerancia con el diferente en la medida en que esté seguro de sus convicciones, de sus creencias y de su cultura. Desde este supuesto, debe surgir la ayuda al estudiante por parte de la escuela, para la construcción de su propia identidad a fin de lograr personalidades seguras, abiertas y tolerantes. En el último apartado se arranca del logro de la escolarización prácticamente universal de los individuos en edad escolar y se da un paso más en la exigencia ética, planteando como objetivo del sistema educativo la igualdad de oportunidades. Estos son los asuntos a que se dedican las páginas que siguen.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.1.1.- La educación ante los cambios científicos actuales

Como consecuencia de los cambios profundos y acelerados hacia una sociedad global, se presentan significativas oportunidades individuales y grupales de acceder a la información, a la urdimbre de nuevas relaciones o toparse con encuentros inesperados. Los habitantes de las sociedades más avanzadas interiorizan experiencias de la situación excepcional y privilegiada de reiterados encuentros con individuos de otras culturas. En la actualidad se ha tomado conciencia de las frecuentes interrelaciones entre los pueblos y sus densas interdependencias económicas y políticas. Los inevitables encuentros abren posibilidades comunicativas entre gentes situadas en espacios alejados, mientras las nuevas tecnologías, de modo especial Internet y el correo electrónico, facilitan la comunicación conectando en pocos segundos a interlocutores de uno a otro extremo del planeta.

A la favorable situación comunicativa se ha de agregar que las comunicaciones se hacen más rápidas, se modernizan los medios de transporte y se abaratan los desplazamientos, mientras crecen las ansias de viajar por todas partes y la movilidad turística sobrepasa en los comienzos del siglo veintiuno los mil millones de personas, que anualmente se trasladan a otros países y a distintos continentes y se estima que la tendencia sigue ascendiendo. Si a estos fenómenos de movilidad turística se acumulan los millones de migrantes, los movimientos poblacionales a nivel global están creciendo por millones anualmente. El fenómeno todavía no cuantificado con el necesario rigor a nivel mundial está favoreciendo, sin embargo, cambios acelerados hacia horizontes de relaciones más amplias y diversificadas, lo que se traduce en una lúcida conciencia ciudadana de moverse en espacios progresivamente más abiertos, donde las relaciones sociales, políticas, económicas, culturales, religiosas y morales se hacen mas complicadas y exigen más conocimientos, mejores competencias y mayores habilidades para alcanzar éxito. El diagnóstico de la realidad comunicativa y de la movilidad estimula el análisis sobre los equipamientos científicos requeridos para que los educandos se preparen a integrarse con tranquilidad al medio, teniendo en cuenta la esencial condición de espacios abiertos que caracteriza la sociedad actual.

La mejor calidad competencial demandada, en las relaciones entre los individuos, aconseja que desde los primeros años de su preparación y formación se les dote de un capital humano de calidad, se les estimule a mantenerlo y acrecentarlo a fin de incorporarse de manera satisfactoria en los espacios sociales y económicos por los

Universidad Pontificia de Salamanca

que pretende trazar el curso de su existencia. La adolescencia y la juventud constituyen las etapas que, en todos los países, se destinan preferentemente a la especial preparación técnica y humano – social, en la que los individuos se supone que se aprovisionan de conocimientos, competencias, destrezas y habilidades en cantidad y calidad científica superior a las generaciones pasadas, puesto que han de enfrentarse con más competidores y mejor preparados, debido a que en la actualidad se compite en espacios abiertos y cambiantes. Teniendo en cuenta tales supuestos, en la sociedad del conocimiento, la política educativa ha de esforzarse en poner al alcance de los ciudadanos los medios y recursos que faciliten su progresivo equipamiento cognoscitivo y competencial, no solo en las etapas de la adolescencia y la juventud sino a lo largo de toda la vida activa del ciudadano. La promoción individual y el progreso de la humanidad van a seguir vinculados a los procesos de producción e innovación, conservación y difusión, enseñanza - aprendizaje de los conocimientos.

La sociedad globalizada del conocimiento se caracteriza prioritariamente por el despliegue del conocimiento científico mediante fluidas interacciones entre el hombre y la tecnología, la innovación del conocimiento científico se alumbra en equipos de numerosos investigadores y la investigación en centros acogidos a los planes de I+D+I crece a un ritmo acelerado. La difusión del conocimiento científico se canaliza con preferencia a través de selectas publicaciones y mediante redes de comunicación que generan y sostienen las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TICs). En la sociedad actual se perciben intensas pautas de diferenciación y de especialización, se induce la aplicación del saber a la creación de nuevos saberes, es ostensible la presencia del conocimiento científico-tecnológico, como criterio de diferenciación económica y social no solo dentro de los grupos poblacionales que integran un país sino también entre los distintos países.

En la sociedad del conocimiento los equipos investigadores alcanzan cotas altas de eficiencia investigadora, a lo que contribuye el establecimiento de redes de comunicación fluida e intercambio informativo con otros equipos de científicos. En la actualidad los científicos han logrado un reconocimiento social indudable. Desde esta perspectiva es obvio que las políticas científicas de los Estados han de promover en la población en general y, de manera específica, en los sujetos educandos, el aprecio y estima de la ciencia y de los científicos. El sistema educativo ha de hacer esfuerzos de planificación para inculcar la valoración positiva de la ciencia, que debiera concretarse en un mayor interés de los estudiantes por el estudio de las matemáticas, de la física, de

Universidad Pontificia de Salamanca

la química y de las ciencias de la naturaleza, que en España y en la Unión Europea es realmente deficiente [16]. Los resultados publicados del estudio no son positivos y por consiguiente la Comisión Europea insiste en la necesidad de dar relevancia a la enseñanza-aprendizaje de las materias científicas y atender a la formación científica del profesorado, para lo que se están organizando centros de formación científica para los profesores. Las fuentes a que se recurre en la evaluación son los datos recogidos principalmente de PISA –programa internacional para evaluar a los estudiantes-, TIMSS –tendencias en el estudio de ciencias (física, biología y química) y de matemáticas- y una encuesta piloto a 2.500 profesores para recoger información de las prácticas realizadas en la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas. Con posterioridad a esta investigación, se prepara en la Unión Europea otro estudio específico sobre la formación matemática de los estudiantes europeos y de sus profesores. Al igual que el anterior, el estudio se enmarca en el programa de "Education and Training 2020", una de cuyas metas consiste en disminuir el número de alumnos de 15 años, que tienen nivel de lectura, matemáticas o de ciencias insuficiente, con el objetivo de bajar el porcentaje del 15% de los estudiantes que tienen un nivel deficiente. Para el logro de este objetivo se elabora el estudio que mencionamos y que pretende iluminar el debate acerca de cómo mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Comisión Europea, 2011-b: 13-24).

En resumen desde la situación actual emerge la exigencia al sistema educativo de una sustancial mejora en la adquisición de conocimientos, competencias y habilidades de los sujetos educandos para que en el presente y en el porvenir puedan comunicarse con la debida destreza con individuos de otras culturas en la persecución de sus intereses. Un segundo argumento se construye desde las crecientes ansias de viajar y hacer turismo por los más recónditos lugares del planeta. Ahora bien el sistema educativo que busque la eficiencia y no desestime la eficacia ha de comenzar su tarea por elevar los niveles de exigencia en el estudio de la lengua, de las matemáticas y de aquellas disciplinas que poseen un notorio reconocimiento científico como la física, la química, la biología o la geología. En favor de esta utopía se puede iniciar el camino

[16] La Comisión Europea (2011-a: 25 - 59) publicó un informe a finales de octubre de 2011 referido a un estudio llevado a cabo en 37 países europeos, impulsado por la red Eurydice, que se enmarca en el programa "Education and Training 2020", para animar y mejorar la enseñanza que los sistemas educativos llevan a cabo respecto de la ciencia, de las materias especialmente científicas y de las matemáticas. La recogida de los datos investigados toma como año de referencia el curso 2010/11 y se realiza en los niveles de primaria, secundaria y secundaria postobligatoria.

Universidad Pontificia de Salamanca

como lo hizo la Comisión Europea, elevando el rango de valoración y estima de esos saberes, creando centros de perfeccionamiento del profesorado de primaria y secundaria y promoviendo investigaciones para pulsar el nivel educativo existente en la realidad. En todo caso, antes o después, otros comportamientos son obligados: programas con más horas lectivas para estas asignaturas, seleccionar profesores con competencia probada en dichas disciplinas, realizar exámenes más exigentes, establecer criterios claros de evaluación para pasar de curso el estudiante, que habrá de demostrar la posesión de los conocimientos y competencias requeridos en el curso precedente, etc. La sociedad, no solo la española sino también la europea, debería tomar la decisión de no seguir con un sistema educativo de ficción. Como dice la Dra. Inger Enkvist, (2012: 22-23) tal vez la más respetada opinión en el panorama educativo internacional, hace cuarenta años era impensable que "un asiático tuviese mejor nivel académico que un europeo. Hoy, los mejores alumnos están en China, Corea, Singapur. Asia ha mejorado poco sus resultados desde hace décadas y Europa ha retrocedido". En general todos los analistas coinciden que los recursos educativos de esos países son muy inferiores a los europeos, en cambio los resultados son tan superiores que hasta sus universidades ocupan los primeros puestos en los estudios de calidad y sus productos, que se imponen en los mercados, son indicadores elocuentes de sus competencias. Establecida pues, la necesidad de una formación científica y técnica de calidad, en el apartado siguiente indicaremos su inmediata finalidad.

1.1.2.-Dimensión socioeconómica y factores de incertidumbre

El análisis que ofrecemos en este apartado, pretende mostrar algunos asuntos de tipo económico, que afectan al proceso educativo y al equipamiento técnico y humanístico exigible en el proceso de enseñanza-aprendizaje y requerido por el hombre como ciudadano de la sociedad globalizada del conocimiento, para su inserción socio-cultural, su correcta ubicación socio-económica y su práctica democrática de manera satisfactoria y provechosa. Si bien los cambios sociales han comportado excelentes oportunidades para los habitantes del primer mundo, sin embargo también han favorecido el crecimiento de la incertidumbre que siempre acompaña el devenir humano, aunque se manifieste con mayor intensidad en la actual sociedad global. Zygmunt Baumann (2007) establece algunos novedosos retos de radical incertidumbre que afectan al hombre de la sociedad global: 1) lo que él denomina la vida líquida en que caen las estructuras de la sociedad moderna, que se descomponen antes de tener

Universidad Pontificia de Salamanca

tiempo el individuo para asumirlas y percibir las respuestas pertinentes a las expectativas ciudadanas, que les convierten en soportes eficaces de la vida social. 2) Otro ámbito de incertidumbre viene dada por la separación definitiva entre poder y política, la "pareja de la que desde el surgimiento del Estado moderno y hasta hace bien poco se esperaba que compartiese la casa común constituida por el Estado-Nación". 3) Un tercer núcleo de incertidumbre, inducida consecuencia de la crisis actual, aparece como posible y hasta probable la desaparición gradual de algunos seguros públicos garantizados por el Estado del bienestar y que cubrían el fracaso individual. Es demostrable que, para algunos las mudanzas habidas se han convertido en fuente de gozosas oportunidades, mientras que para muchos otros han creado situaciones intolerables de pobreza, marginación y exclusión.

Desde la abundante información que ofrecen los medios de comunicación de masas y la experiencia vivida en nuestro quehacer cotidiano se constata con relativa facilidad que, en los períodos dedicados a la educación y formación, cuando los individuos habrían de aprovisionarse de conocimientos, competencias, destrezas y habilidades, sin embargo la realidad nos muestra cierta falta de motivación al respecto, un rutinario decaimiento de la enseñanza que se traduce en menor esfuerzo exigido en la formación de los estudiantes y un limitado compromiso de los padres, más preocupados porque sus hijos pasen de curso que por una sólida formación. Puede ser válido también para España lo que comentaba hace pocos días la Dra. Inger Enkvist (2012: 22): "mucha gente pensó que íbamos a vivir bien para siempre, sin peligros, y que podíamos permitirnos ser menos severos en la educación, exigir menos esfuerzo y formación a los alumnos. Hay un paralelismo entre una vida menos dura … con querer ser mas agradables y menos exigentes en la educación de nuestros hijos". Sin embargo, en las circunstancias actuales a lo largo de su vida activa, los hoy sujetos educandos, habrán de competir cada vez con más numerosos participantes, mejor preparados, de diferentes culturas y procedencias, dada la progresiva competencia instalada en los espacios abiertos y cambiantes de la sociedad global. También es cierto que las nuevas generaciones dispondrán también de nuevos y más poderosos instrumentos que las generaciones precedentes. Las nuevas tecnologías de la información y la comunicación constituyen la evidencia. Es razonablemente obvio que no les va a satisfacer la condición de sujetos pasivos de la situación, sino como actores individual y colectivamente responsables querrán participar en la construcción de la sociedad en que vivirán y, en cuanto agentes activos de la acción histórica, exigen una comprometida

Universidad Pontificia de Salamanca

acción educativa, acorde con las circunstancias de complejidad y de cambio tecnológico de la presente y futura coyuntura. La política educativa, en coherencia con esta hipótesis que subyace a la mera presencia de los estudiantes en nuestras aulas, ha de esforzarse en poner al alcance de los ciudadanos los medios y recursos que faciliten su progresivo equipamiento cognoscitivo y competencial, con demandas de mayor exigencia formativa en las etapas de la adolescencia y la juventud pero también como proyecto asequible a la población adulta a lo largo de toda la vida activa del ciudadano.

El estancamiento de las crisis económicas y las dificultades relativas a la inserción laboral están mostrando con evidencia incuestionable que la situación actual se convierte para muchos en fuente de preocupación, marginación y hasta exclusión. Las informaciones que transmiten los medios de comunicación y las voces autorizadas de los expertos coinciden en indicar que, al menos un 50 % de nuestros jóvenes en edad de trabajar y con sus estudios terminados, formarán parte de las listas del paro. Al mismo tiempo, los medios de información publicitan puestos de trabajo variados y remunerados por países como Holanda, Alemania, Inglaterra, Suiza, Dinamarca y algunos otros solicitando trabajadores con cualificaciones técnicas y hablando inglés o algún otro idioma. Al parecer nuestros jóvenes no pueden optar a dichas ofertas por no hablar esos idiomas y en otros momentos serán otros los obstáculos que causan idéntico contratiempo. Desde estas circunstancias o sorprende el cuestionamiento de la educación que aquí se imparte

Los cambios se producen con intensidad arrolladora en los ámbitos laborales y profesionales, deteriorando los conocimientos y competencias de los individuos, dejando sentir su influencia también en el ámbito de las relaciones de la convivencia familiar y social y en el proyecto de la realización personal, lo cual exige cambios sustanciales en los parámetros educativos vigentes. En todo caso no es conveniente olvidar que “la desesperanza nos inmoviliza y constituye el gran freno al cambio y a la innovación y que la educación exige optimismo (…) sólo se avanza a partir de la pedagogía de la esperanza. Una esperanza que se refugia y confía en la utopía que da sentido a la acción, energía para encarar la realidad y alas para ensanchar la mirada y volar hacia el futuro” (Carbonell, 2008:12). Sin caer en la desesperanza, se exigen decisiones perentorias de política educativa para que las mujeres y los hombres, adolescentes y jóvenes, adultos y mayores obtengan un bagaje formativo actualizado y provechoso para su incorporación exitosa al mundo del trabajo, del ocio y de su realización personal y social, no sólo en España sino también en los países de nuestro

Universidad Pontificia de Salamanca

entorno socio-económico. En un mundo globalizado, a las empresas ha de facilitárseles una mano de obra cualificada para el necesario cambio tecnológico en la producción y la sociedad requiere contemplar la incorporación responsable y entusiasta de las nuevas generaciones al proyecto productivo asumido por la colectividad. Esta será la señal inequívoca de que la educación está cumpliendo su objetivo de dotar de la formación humana, técnico – profesional y política adecuada a las circunstancias presentes.

De esta hipótesis no ha de inferirse que la educación se orienta prioritariamente a producir la adaptación del individuo a la realidad del presente, que obviamente es uno de sus objetivos. La educación ha de asumir un proyecto utópico de que un mundo mejor es posible, ha de inculcar en el individuo la responsabilidad de prepararse para animar los cambios que mejoren la realidad actual, siendo capaz de adaptarse a las nuevas transformaciones que se produzcan a lo largo de su vida activa. El objetivo de la educación no se agota en la promoción del individuo sino que es también un procedimiento adecuado para el progreso de la sociedad. La proyección de esta perspectiva sobre el escenario laboral, donde tienen lugar las mayores transformaciones sociales y técnicas, exigen cambios en algunas dimensiones de los sistemas educativos. Las competencias, destrezas y habilidades que han de adquirir los jóvenes en la actualidad, integrarán componentes de información tecnológica, conocimientos lingüísticos y profesionales, que pueden y deben obtenerse en la escuela, aunque para ello hayan de introducirse cambios en el currículo educativo, en especial en los idiomas, en la informática, en las materias específicamente científicas y matemáticas y en esta dirección avanzar en la formación técnica y humanística del profesorado. Tal vez los currículos nuestros estén sobrecargados de componentes de la identidad territorial u otras más vagas todavía, que no son especialmente favorecedoras de la convivencia en unas sociedades abiertas y culturalmente plurales. No cabe duda que la formación en la identidad personal es un nuevo reto de la educación como veremos en el apartado siguiente.

Para concluir estimo de interés dejar constancia del hecho, aunque sin entrar por el momento a dilucidar las causas del fenómeno: en mi parecer es una cuestión importante que los estudiantes, situados en los ciclos educativos de primaria, secundaria y de bachillerato, que suelen hacer pruebas internacionales o regionales con cierta periodicidad, obtengan unos resultados menos satisfactorios de los convenientes, evidenciando algunas limitaciones del sistema educativo. Una segunda realidad viva y preocupante es que el 50 por ciento de los jóvenes con estudios superiores o

Universidad Pontificia de Salamanca

profesionales concluidos engrosan las listas del desempleo en nuestro país y, al parecer, por sus limitaciones idiomáticas o por sus deficiencias informáticas no pueden acceder a los empleos, como hemos mencionado en el texto precedente. Tal vez no sea muy acertado bucear en las limitaciones del sistema educativo indagando las causas del fenómeno, más bien prestaría atención a la cultura de la vida fácil, de las subvenciones a los jóvenes y a la construcción de la identidad personal desde la cultura territorial u otras causas semejantes, a fin de alcanzar un diagnóstico aceptable. Esta reflexión no descarta que también pueda afirmarse con cierta contundencia que nuestro sistema educativo necesita introducir algunas correcciones en su funcionamiento.

1.1.3.- Identidad personal e instituciones democráticas

Hasta tiempos muy recientes, el hombre y la mujer incorporados a un trabajo profesional, encontraban normalmente en el trabajo una parte importante de los elementos sustanciales para la formación y expresión de su identidad personal, con la consiguiente educación del carácter mediante la disciplina laboral, el trabajo en equipo, el salario, la necesidad de cumplir unos objetivos que constituyeron siempre un elemento decisivo. Sin embargo en la actualidad, el ideal de la realización personal en el trabajo aparece como un bien escaso, debido a las circunstancias de dificultad de acceso al mismo, la sobrevenida escasez del empleo y su generalizada precariedad. La educación con la familia y el grupo de pares ha de abrirse a una nueva área de contenidos que ayuden mediante el estudio y la práctica de valores y mitos, ideas y creencias, a la construcción de la propia identidad personal y social, teniendo en cuenta que el espacio nacional se hace progresivamente abierto, que estamos comenzando a vivir en unas sociedades culturalmente plurales, en donde las diferencias constituyen un valor apreciable y con los diferentes se ha de practicar la tolerancia. Al sistema educativo incumbe pergeñar el diseño técnico, que responda a las necesidades de conocimiento y de competencias, pero también un diseño humanista capaz de ofrecer, a las generaciones jóvenes, elementos válidos para estimularles a la construcción de una personalidad sólida, integrada y abierta. El objetivo definitivo consiste en lograr individuos responsables, equilibrados y capaces de convivir y abiertos al otro sin renunciar a sus convicciones, creencias y cultura y sin dejar de ser ellos mismos.

Desde esta perspectiva cívica, se ha de avanzar en la superación del individualismo radical que cada cual porta en sí mismo y en el cultivo de un conjunto de actitudes y hábitos que faciliten al individuo su integración social en la comunidad

Universidad Pontificia de Salamanca

nacional, política, cultural y religiosa donde ha nacido y en la que quiere vivir la mayor parte de su vida, sin renunciar a la necesaria apertura y solidaridad con todos los seres humanos. Se hace imprescindible prestar la debida atención a los Derechos Humanos que fundamentan la convivencia pacífica, exigen la participación activa y democrática en la vida social y política de la comunidad donde se ubica. El aprendizaje y la práctica democrática han de estar presentes en las dimensiones del proyecto educativo, que ha de consolidar el desarrollo y la maduración de la autonomía, la libertad y la responsabilidad de los sujetos educandos, tanto en su ámbito de actuación individual como social (Carbonell, 2008: 15-16). Favorecen este objetivo el recuerdo y celebración de aquellos eventos relevantes de la propia tradición cultural que, a los estudiantes les hacen beneficiarios de la sabiduría acumulada en la tradición a lo largo de las generaciones precedentes, que pueden darles útiles explicaciones de algunas ocurrencias de mundo actual. El recuerdo de los hitos relevantes de nuestra historia nos vincula con "la tradición en cuanto ésta ofrece albergue al hombre en el tiempo", lo cobija como su casa, le descubre el sentido temporal de las cosas y facilita al hombre del presente no perder la vida en la incoherencia, la incertidumbre o la dispersión (Prada, 2011: 8).

La educación asimismo ha de facilitar al individuo su integración satisfactoria en la comunidad nacional de pertenencia, que ha de ser abierta a los necesarios cambios, a profesar la conveniente devoción a su patria, a respetar su trayectoria cultural, disponiéndose desde el conocimiento y aprecio de sus importantes espacios naturales y creaciones culturales, a conservarlos y enriquecerlos con su talento y esfuerzo. El fortalecimiento de las instituciones democráticas y la convivencia democrática en una sociedad más justa constituye un fin ineludible del que han de ocuparse las sociedades exigiendo al Estado el cumplimiento de estas demandas mediante los recursos adecuados a los tiempos presentes. Desde esta perspectiva es rentable invertir en educación, aunque su rendimiento no sea inmediato. En esta tarea socializadora, orientada a desarrollar la identidad integrada de los sujetos educandos, la cultura propia es el ámbito de donde obtienen los principales referentes por lo que la tarea contribuye muy directamente al fortalecimiento de las instituciones democráticas. En consecuencia, la igualdad de oportunidades ha de alcanzar a todos los escolarizados, constituyéndose de ese modo en un rasgo específico del sistema educativo, que es el asunto a tratar en el apartado siguiente.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.1.4.- Equidad e igualdad de oportunidades

A fin de ajustar de manera conveniente el significado del término equidad se ha de consignar que ya Aristóteles [17] estableció la distinción entre justicia y equidad, considerando que ésta es "una rectificación de la justicia legal", en cuanto que la "causa de ello es que toda ley es universal y hay cosas que no se pueden tratar rectamente de un modo universal". La existencia de casos concretos a los que no se acomoda la ley, que no alcanza a resolverse convenientemente mediante la ley, es donde entra la equidad y lo equitativo, "siendo lo justo, no es lo justo legal", es decir, una rectificación de la justicia legal como dice Aristóteles. De esta circunstancia no se infiere que la ley no sea buena, puesto que el desajuste no se produce por parte de la ley, ni por parte del legislador, sino por "la naturaleza de la cosa, puesto que tal es desde luego la índole de las cosas prácticas". Estas breves precisiones conceptuales permiten una mayor precisión conceptual de la relación entre educación y equidad. A partir de la Ley General, todos los niños y las niñas, los adolescentes de ambos sexos hasta los dieciséis años están obligados a cursar los estudios de Primaria y de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. En la sociedad contemporánea, conseguida esta universal escolarización, se pretende un paso más, que el aprovechamiento de los alumnos se generalice, estimando que mediante su asistencia a las clases, que el servicio educativo pone al alcance de todos y con el trabajo personal que ha de realizar, el estudiante alcanzará los resultados previstos en el proceso de la enseñanza – aprendizaje. Desde la hipótesis de que los resultados no siempre se acomodan a lo previsto en la ley (Comisión Europea, 2010: 11-14) la indagación de los factores causantes de la inadecuación diseña una nueva estrategia, desde los presupuestos de la equidad, en orden a conseguir la justa igualdad prevista pero no lograda. En los países más avanzados y en otros en vías de desarrollo, a lo largo del siglo XX, lograda la escolarización de la población infantil y juvenil, se plantea con decisión el asunto de la igualdad de oportunidades puesto que ya no se tata tanto de elevar los porcentajes de escolarización cuanto de mejorar los resultados y lograr una educación de calidad.

Normalmente el asunto de la equidad se contempla en el marco de la denominada educación de calidad. Quisiera hacer en este punto dos precisiones: la

[17] Aristóteles, Ética a Nicómaco, libro V; punto 10; 1137b (Trad. cast., Centro de Estudios Constitucionales, Madrid 1981, Traducción de María Araujo y Julián Marias): "Lo mismo es, por tanto, justo y equitativo, y siendo ambos buenos, es mejor lo equitativo. Lo que ocasiona la dificultad es que lo equitativo es justo, pero no en el sentido de la ley, sino como una rectificación de la justicia legal".

Universidad Pontificia de Salamanca

primera es que teniendo en cuenta el objetivo de la igualdad de oportunidades, estaría mejor situado este planteamiento en el marco de la educación sin añadidos, puesto que la calidad es una dimensión esencial y un reto indiscutible de la educación en la sociedad del conocimiento. La segunda precisión se refiere al sentido de la igualdad o de la igualdad de oportunidades que es una temática, cuya inserción e interpretación en el área educativa constituye un asunto propio del siglo XX, en el que hallamos varias interpretaciones al efecto (Comisión Europea, 2010: 20-26). Una primera en el tiempo (Halsey & al., 1980) establece tres categorías: *oportunidades formales*, todos los estudiantes tienen el mismo derecho de acceso y participación; *oportunidades reales* implican además otros factores relacionados con el origen familiar, las circunstancias del centro escolar y la calidad educativa *y los resultados educativos*, que los autores consideran la mejor manera de evaluar las oportunidades reales.

Una interpretación más novedosa es la de Wood que parte de la hipótesis siguiente: considerar la educación como el instrumento si no exclusivo, sí principal para la igualdad de oportunidades en la vida es algo imprudente y excesivamente presuntuoso, puesto que requeriría como condición inexcusable que todas las restantes variables fuesen iguales, lo que es un error evidente. En una sociedad desigual como nuestras sociedades no son muchas las posibilidades de que la educación logre igualar las oportunidades de los desiguales por razones de género o económicas u otras parecidas, lo que no es óbice para que la educación asuma ese objetivo como el horizonte hacia el que avanzar. El autor establece cuatro tipos de igualdad:

- igualdad de oportunidades en la vida;
- competencia abierta ante la escasez de oportunidades;
- desarrollo igualitario de diferentes capacidades;
- independencia entre el rendimiento escolar y el origen social.

El intento de un desarrollo igualitario de las diferentes capacidades se instauró en Gran Bretaña a mediados del siglo XX, realizando los estudiantes una serie de pruebas y en función de los resultados obtenidos se les orientaba hacia distintos centros de secundaria que mejor se correspondiera con sus capacidades. Para el autor la opción preferida para avanzar en el proyecto de igualdad es la cuarta opción, *independencia entre el rendimiento escolar y el origen social*, aunque resulte problemático garantizar el éxito escolar (Wood, 1987: 5-6).

Un tercer intento se centra en la igualdad de género y destaca tres aspectos para lograrla: la *igualdad de trato* con independencia del origen familiar y social; la *discriminación positiva* que implica acciones e iniciativas dirigidas a corregir las

Universidad Pontificia de Salamanca

desventajas entre las chicas y los chicos y la *transversalidad de género* que implica las correspondientes políticas educativas para integrar la igualdad de género en la cultura de las instituciones educativas (Booth, C. & Miskolci, J.,2002: 430 – 446).

La UNESCO en un documento sobre la "Reorganización y reforma de la Educación Secundaria en Asia, Área del Pacífico" establece una noción de equidad que comprende el acceso que debiera llegar a los grupos desfavorecidos, la equidad en el trato exige a los profesores y centros la no discriminación por razones de sexo y cultura. En buena medida para la UNESCO (1989) las desigualdades o falta de equidad en los resultados proviene de las desigualdades económicas de origen, diferencias de trato y curriculares establecidas en los centros educativos, que pueden tener su origen en la asunción de los valores de las clases medias, por ejemplo, la competitividad, como normas del sistema educativo y en consecuencia la pertenencia a culturas diferentes y las dificultades de acceso constituyen verdaderos obstáculos para alcanzar la deseada equidad de resultados.

Por último, el sistema educativo tiene pendientes algunas dificultades de considerable importancia, para alcanzar el necesario o conveniente equilibrio entre la eficiencia y la equidad, entre otros, favorecer a los menos dotados en perjuicio de los más capacitados. Esto sucede cuando se bajan los niveles de exigencia en los resultados del estudio para que todos puedan acceder al nivel determinado. Priorizar estudios más productivos o invertir en otros mas ineficientes, que bastan como ejemplo de que el desarrollo de la equidad tiene dimensiones que implican problemas. Para algunos autores, la exigencia de la igualdad de oportunidades viene señalada por algunos indicadores relevantes de equidad que tomo de Cano (1998:116):

- Los servicios públicos educativos deben estar asequibles a toda la población.
- Todos sectores sociales han de tener igual acceso a esos servicios.
- Disfrute de una participación equitativa en la utilización de los servicios.
- Los niveles de logro deben ser significativamente distintos para los diferentes grupos.
- Los conocimientos exigidos para alcanzar los objetivos del servicio no deben ser sustancialmente diferentes para los distintos grupos.
- Las aspiraciones vitales han de ser similares en todos los grupos sociales.
- El sistema de servicios debe producir resultados semejantes en el bienestar de todos los grupos sociales.

La atendida relación de la equidad con la educación da a esta no unos nuevos objetivos sino una original dimensión, como corresponde a la índole de la actividad educativa que trata con seres humanos en la excelsa tarea de modelar la personalidad de

Universidad Pontificia de Salamanca

los individuos desde las edades más tempranas y por consiguiente es ineludible en un momento o en cualquier otro referenciar la educación al ámbito ético donde el ser humano halla su normal contexto del respeto que le corresponde y espera ser tratado siempre. Esta exigencia moral se materializa durante el siglo XX y evidencia el éxito de la escolarización universal de las niñas y niños de las edades infantil, adolescente y primera juventud en nuestro país y en los de nuestro entorno. También muestra una parcial deficiencia del sistema educativo en cuanto a los resultados del proceso de la enseñanza-aprendizaje practicada.

1.1.5.- A modo de síntesis

Sería algo precipitado presentar lo que sigue como conclusiones. Se trata únicamente de hacer sólo una breve recopilación de lo tratado en el primer apartado de este capítulo, sintetizándolo en las siguientes propuestas:

1) Desde la sociedad global abierta, son muchas las demandas para una sustancial mejora en la adquisición de conocimientos, competencias y habilidades para que los estudiantes puedan comunicarse con la debida destreza con individuos de otras culturas en la persecución de sus intereses, relacionándose hábilmente con personas de culturas diferentes.

2) Desde el ámbito de las instituciones europeas en que estamos integrados, urge la necesidad de avanzar en una más excelente preparación científica y matemática, que en todo caso constituyen el fundamento del progreso social. Nuestros estudiantes de primaria, secundaria y bachillerato, en las pruebas externas que suelen hacer con cierta periodicidad, obtienen unos resultados claramente perfectibles, lo que parece evidenciar ciertos desajustes en el sistema de la enseñanza- aprendizaje. El 50 por ciento de los jóvenes con estudios superiores o profesionales concluidos engrosan las listas del desempleo en nuestro país. Lo que parece mostrar ciertos distanciamientos entre la educación y las necesidades del sistema productivo.

3)El sistema educativo, mediante el procedimiento y los contenidos educativos apoyará la construcción de la identidad personal y social de sus educandos para facilitar al individuo su integración satisfactoria en la comunidad nacional de pertenencia, para fortalecer las instituciones democráticas, profesar la conveniente devoción a su patria y disponerse desde el conocimiento y el aprecio de sus espacios naturales y creaciones culturales, a conservarlos y enriquecerlos con su talento y esfuerzo.

Universidad Pontificia de Salamanca

4) Las justas exigencias que la equidad demanda a la educación constituyen un aporte de progreso que se ha logrado, una vez satisfechas las necesidades de la universal escolarización y constituye una dimensión moral que urge a todos los integrantes del sistema educativo a tratar con el debido respeto a los sujetos educandos que les compete instruir pero sobre todo educar dentro del más estricto respeto a esos frágiles destinatarios que son los estudiantes.

1.2. LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN

En la Unión Europea se está llevando a cabo una extensa reflexión sobre la Educación, que parte de dos premisas: primero, cómo enfrentar el futuro de las sociedades y de los sistemas educativos, en un mundo sometido a tantos y tan profundos cambios, en orden a la consecución de los objetivos que le son propios. Segundo, cuál será el lugar que ha de ocupar el sistema educativo en el contexto de los objetivos que se propone la sociedad nacional. El horizonte al que parecen orientarse los procesos educativos y formativos en Europa ha de tomar en consideración los objetivos más generales que la sociedad atribuye a la educación, el desarrollo del individuo, de la sociedad y de la economía. Aunque el análisis sobre la educación muestra que hasta desborda el área de las metas y objetivos que le son socialmente asignados, sin embargo sería más conveniente tener en cuenta el marco ecológico y las circunstancias socio-económicas en que los procesos educativos tienen lugar. Por simple inercia, la obvia aceleración de los ritmos de cambio a que está sometida la sociedad y, de manera especial, la economía en la era de la globalización, con evidentes consecuencias sobre la convergencia e interdependencia progresiva que afectan a las sociedades actuales, han de contemplarse en los análisis sobre los procesos educativos de cualquier país.

En el presente apartado se comprenden varios asuntos, estimados de actualidad y de notoria importancia y que agrupamos como siguen:

1º) el análisis de los fines permanentes de la educación, desarrollo del individuo, de la sociedad y de la economía, pueden ser útiles para conocer el camino del proceso educativo de calidad para la formación del estudiante.

2º) La expresión, educación de calidad, recibe variadas significaciones que trataré de exponer siguiendo preferentemente la obra *Evaluación de la Calidad Educativa* de Elena Cano García.

Universidad Pontificia de Salamanca

3º) Otro aspecto interesante se refiere a los factores e indicadores de uso frecuente para la evaluación de la calidad educativa. Se hará especial mención del *Sistema estatal de indicadores de la evaluación*, que, en España, presenta con cierta regularidad el MECD mediante el Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE).

4º) Se concluye este apartado con una escueta mención a los factores de calidad contemplados en los principales documentos político – administrativos, LOGSE, LOPEG que reglan la educación en España. Se menciona la LOCE que, si bien no tuvo implantación real dada su expeditiva derogación, advertía del asunto con interesantes aportaciones a la calidad educativa.

1.2.1.- Retos educativos en la sociedad del conocimiento

Es reiterativo pero también es obligado afirmar que la educación puede prestar su inestimable concurso para responder satisfactoriamente a los grandes retos sociales del desarrollo del individuo, de la sociedad y de la economía.

a) El desarrollo del individuo

El desarrollo del individuo exige que pueda desplegar todo su potencial y llevar una vida saludablemente feliz y provechosa. "Una educación de calidad es una educación integral, esto es, una educación de la persona, de toda persona, de cada persona, orientada a su capacitación para formular y llevar a cabo un proyecto de vida valioso en lo personal y socialmente útil" (Comité de Educación de la AEC, 2005: 107). Benedicto XVI (2012) en el mensaje para la celebración de la *XLV Jornada Mundial de la Paz* (01/01/2012) que este año lleva por título "Educar a los jóvenes en la justicia y la paz" advierte que la "educación es la aventura más fascinante y difícil de la vida" y explica a continuación en qué consiste esa tarea: "Educar – que viene de educere en latín – significa conducir fuera de sí mismos para introducirlos en la realidad, hacia una plenitud que hace crecer a la persona. Ese proceso se nutre del encuentro de dos libertades, la del adulto y la del joven. Requiere la responsabilidad del discípulo, que ha de estar abierto a dejarse guiar al conocimiento de la realidad, y la del educador, que debe de estar dispuesto a darse a sí mismo". En este sentido ha de entenderse este proceso de desarrollo del individuo. En otros escenarios sociales ya pretéritos, la consecución de este objetivo pudiera seguir otras rutas, suficientemente satisfactorias. Sin embargo en las circunstancias actuales la vía normal de acceso a los objetivos de un nivel de calidad de vida aceptable, para la inmensa mayoría de los individuos de

Universidad Pontificia de Salamanca

cualquier sociedad moderna, pasa por los procesos educativos y formativos. Los padres, en coherencia con este punto de vista, suelen invertir con generosidad en la educación de los hijos convencidos de la mayor rentabilidad que supone la inversión en educación que en la compra de otros bienes materiales para dejar en herencia a sus hijos.

b) El desarrollo de la sociedad

El desarrollo social constituye para la educación un desafío permanente, orientado a la reducción de las desigualdades entre individuos y grupos, para asegurar la convivencia pacífica, dar contenido al pacto social**,** favorecer la integración social, cohesionar a los individuos de una colectividad en torno al proyecto nacional y asegurar la convivencia pacífica. La UNESCO (2000) defiende que la educación de calidad ha de vincularse con el concepto de la pertinencia social, es decir, una educación de calidad ha de orientarse directamente a "dar soluciones a las necesidades y problemas de la sociedad y, más especialmente, a los relacionados con la construcción de una cultura de paz y de un desarrollo sostenible". En este planteamiento, la educación se integra como elemento esencial del interés general o del Bien Común. Las sociedades que en la actualidad se han decidido resueltamente por la innovación y el progreso – la U. E., los EE.UU. de América, Japón, Canadá, Australia y un grupo significativo de países asiáticos - han alcanzado tales objetivos porque su substrato social y sus agentes más activos actuaron como estímulo de actitudes imprescindibles: fomento del espíritu emprendedor de individuos y grupos; actitudes para asumir los riesgos implícitos en la implantación de una empresa o un negocio y actitudes de seriedad en las relaciones mutuas entre los usuarios y los servicios que se prestan.

c) Desarrollo de la economía.

Un desafío que la educación ha de asumir, se refiere al desarrollo de la economía, haciendo lo necesario para que las capacidades de la mano de obra correspondan a las necesidades de las empresas y los empleadores. Alcanzar esta meta significa que las mujeres y hombres de cualquier sociedad y, con mayor rigor, en las sociedades mas avanzadas del conocimiento, al concluir su período específico de formación, puedan incorporarse con éxito al mundo laboral, porque se les ha dotado del equipamiento técnico – profesional adecuado. Es preciso tomar en consideración la situación real en que vivimos: nos adentramos cada vez más en la sociedad del conocimiento, las sociedades se hacen más abiertas y competitivas. Por consiguiente, es exigible un esfuerzo mayor para que el sistema educativo y formativo prepare a los individuos en conocimientos, competencias y habilidades que le permitan su integración social y

Universidad Pontificia de Salamanca

profesional, en el contexto de una vida buena para el individuo y satisfactoria para sus contemporáneos.

En la sociedad del conocimiento, la economía requiere trabajadores con "la capacidad de aprender rápidamente – pero principalmente de aprender de manera permanente - y de trabajar en equipo de manera confiable y creativa" (Torres y Morrow, 2005: 37). En la sociedad europea, las reformas educativas contemplan como horizonte a lograr la meta económica establecida en la reunión de Lisboa de la primavera del año 2000, que consistía en convertir la *economía basada en el conocimiento,* en la más competitiva y dinámica del mundo, con capacidad de crecimiento sostenible y de cohesionar a la población europea. A nivel global, estamos inmersos en lo que se denomina la *economía inmaterial* que, a diferencia de la economía tradicional ligada a productos y a su transformación, esta nueva economía "se basa fundamentalmente en el conocimiento y en la adecuada gestión de sus especializaciones" (Maceiras, 2006: 25-84). En ella también se trata con productos, pero su fuerza y las motivaciones son independientes de la acción de producir. En esta economía, el origen del producto no se debe tanto al esfuerzo físico, a la materia prima o a los procesos de manufactura, cuanto a la habilidad y a la capacidad de quienes lo generan, es decir, el componente básico de la producción es el conocimiento, más todavía, el ingenio, la organización y la actividad mental. De ahí se concluye que el precio de los objetos no es independiente de las estrategias racionales, de la preparación científica de los profesionales y de sus destrezas técnicas para planificar, diseñar y prever la eficacia competitiva.

A favor de estos objetivos, habrá de aplicarse una estrategia educativa apropiada a las circunstancias. Además de la formación se requiere organización, para que cada cual pueda ocupar el lugar y asumir la responsabilidad adecuada a su formación. Está claro que la formación para la nueva ciudadanía nacional ha de contar con un proyecto cultural nacional coherente con la ineludible y decisiva apertura hacia unos horizontes de cambio de funciones y de competencias básicas y sociales que vienen compendiadas en la llamada *la sociedad de la información* que impone avances significativos de "un mayor reconocimiento de la diversidad y la interdependencia global" (Torres y Morrow, 2005: 37). Como he mencionado al comienzo del capítulo, yo añadiría también que los cambios pasan por el reconocimiento de formas diferentes de aprendizaje, por avances significativos en la organización y gestión de los recursos para hacer efectivo el aprendizaje permanente de la población adulta necesitada de actualizarse y contemplar

Universidad Pontificia de Salamanca

la implicación de otros agentes en el proceso educativo, con especial atención a la función informativa y educativa de los medios de comunicación de masas.

Una segunda vía, que nos aproxima a los aledaños de las dimensiones conceptuales de la educación de calidad, se refiere a las aportaciones de documentos de importancia indiscutible, producidos por los organismos internacionales competentes, que plantean exigencias educativas más adecuadas para responder al nuevo paradigma y hacerlo humanamente más valioso. La vida de las nuevas generaciones en un mundo abierto, donde el complejo científico-tecnológico ha adquirido una preeminencia indiscutible y las nuevas tecnologías constituyen una evidencia, es igualmente obvio que los individuos de las nuevas generaciones habrán de comportarse como actores responsables, lo que exige tener muy clara la orientación educativa que demanda la coyuntura. En todas las situaciones de cambio se producen ámbitos de la realidad que presentan notables ambigüedades.

La situación actual de la educación, en su dimensión de inversión económica y de rentabilidad social, o también la relación tecnología y especialización y aún la diversidad de equipamiento competencial y el puesto de trabajo constituyen áreas de discusión desde perspectivas diversas. Sin entrar en tales zonas pantanosas, teniendo claro que cualquier alternativa ha de contemplarse a la luz de las coordenadas que configuran la estructura de una sociedad concreta y, tratando de evitar el voluntarismo subjetivista, me parece que es posible intentar una aproximación a ciertas convicciones básicas, deducidas de la lectura de algunos documentos de autoridad reconocida[18], acordes con la nueva sociedad global y con la economía del conocimiento. Podrían recapitularse de la siguiente manera: (Maceiras, 2006: 14)

1ª. La educación es la condición básica para el progreso y para la construcción de la sociedad contemporánea: el desarrollo y el subdesarrollo tecnológico y humano son variables dependientes de los niveles educativos y cognitivos.

[18] Los documentos que citamos son en gran parte de su contenido reiterativos.

UNESCO /OCDE, 2003, Financing Education: Investments and Returns, París.

UNESCO, (2002), Informe final del Foro Mundial sobre la Educación, París.

UNESCO, (1996), La Educación encierra un tesoro, Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI. (coord.. Jacques Delors, ed. UNESCO / Santillana, Madrid).

UNESCO, (1998), Conferencia Mundial sobre la Educación Superior: La Educación superior en el siglo XXI: Visión y Acción.

BANCO MUNDIAL, (1999), El Conocimiento al servicio del Desarrollo, Mundi-prensa / Banco Mundial, Madrid.

ONU, Informe sobre Desarrollo Humano 2004, cap. 4: "Políticas públicas para mejorar la salud y la educación de las personas, p. 83 – 110. Madrid: Mundi-prensa.

COMISIÓN EUROPEA, (1995). Enseñar y aprender: hacia la sociedad del conocimiento.

Tratado de Ámsterdam, firmado el 2 de octubre de 1997.

Agenda 2000.

Espacio Europeo de Investigación – Ciencia y Sociedad, 2003.

Futuros objetivos precisos de los sistemas educativos. 2002.

Universidad Pontificia de Salamanca

2ª. La inversión en educación es rentable para todos los países, sea cual fuere su nivel de desarrollo: inversión educativa y crecimiento económico son correlativos.

3ª. Las exigencias de invención e innovación no permiten que los objetivos educativos sean definidos por el mercado, respondiendo a la demanda de trabajadores genéricos o expertos asociados a competencias específicas.

4ª. La formación básica inicial – primera y segunda enseñanza – tanto en la configuración de los hábitos como en conocimientos, es el substrato que facilitará siempre y en mayor grado la adaptabilidad, el reciclaje, la formación permanente y la adecuación a situaciones inicialmente no previstas.

5ª. La ordenación de prioridades y la previsión de necesidades profesionales futuras, según sectores de actividad, es una exigencia política, con una aproximación a sus costes educativos.

1.2.2.- Aproximación conceptual a la educación de calidad

Desde este contexto, la educación como condición del progreso humano y social, que se ha expuesto en el apartado precedente, se ha de enmarcar la reflexión sobre los aspectos más influyentes de la calidad en la educación con los que pergeñar la definición de la calidad educativa, que se pretende elaborar en los párrafos que siguen. Estamos inmersos en un nuevo espacio científico cultural que revaloriza los aspectos éticos del conocimiento y del entorno del sujeto para hacer así del individuo un ciudadano, miembro de una familia, pero también un consumidor – productor, abierto a los otros con los que colabora. Se parte del supuesto de que la educación básica de calidad puede adquirirse normalmente en las instituciones educativas escolares y se pretende que sea flexible, diversificada y accesible a los destinatarios del sistema educativo. Se trataría de que, en la trayectoria vital de cada persona aprendamos a aprender, a conocer, a hacer, a vivir juntos y a ser nosotros mismos. Esta enseñanza – aprendizaje para la comprensión es el gran reto para nuestro tiempo como en su tiempo mostró con gran éxito el Informe Delors (1996). En una primera aproximación al concepto de educación de calidad, seguiré el planteamiento que elabora la profesora Cano (1998: 89-105), desde la perspectiva de los factores más influyentes: el profesorado, el alumnado, el currículo, el centro educativo, el proceso de enseñanza-aprendizaje y otros factores varios.

a) Definiciones de educación de calidad centradas en el profesorado

No cabe duda que los profesores y los formadores son un agente esencial del proceso educativo. La calidad en la educación recaba un mejoramiento en la selección

Universidad Pontificia de Salamanca

de los futuros profesores, en la formación inicial y en la formación permanente de los profesores y de los formadores. Para la analista de los sistemas educativos, la profesora sueca Inger Enkvist (2012) el problema de la debacle educativa europea no se soluciona solo con la educación continua: “se ha de seleccionar mejor a los profesores. Con la formación enseñas conocimientos a quien no los sepa, pero si no es buena persona o no sirve para profesor, no lo puedes enmendar. Para mejorar la calidad del profesorado hay que quitar volumen a lo pedagógico”. La formación ha de comprender el contenido científico y de la materia concreta de la que se responsabiliza – volveré sobre este asunto en el capítulo IV dedicado al profesorado – , ha de incluir asimismo capacidad y procedimientos para motivar a los estudiantes en su proyecto hacia el conocimiento y manejar las estrategias oportunas para ilusionar y animar a los profesores y formadores con sus tareas. La calidad de la educación implica reflexionar sobre los procesos de selección, sobre la formación inicial y continua de los profesores pero también se han de tomar en consideración las circunstancias sociales, económicas, políticas, culturales y científicas de la etapa histórica en que los profesores desarrollan su tarea. No cabe duda que la politización de la escuela dejará caer la calidad educativa, puesto que alejará de la misma a buenos profesores que estarían dispuestos a hacer un buen trabajo en la escuela, pero no están dispuestos a formar en las banderías ideológicas.

Se ha de prestar especial apoyo a los profesores y formadores que se ocupan de grupos desfavorecidos, de inmigrantes o de adultos, en primer término para que se dediquen a esta difícil tarea y en segundo término facilitando los recursos, instrumentos y materiales varios para ayudar a la gente a aprender. No cabe duda de las apremiantes carencias que se experimenta en los procesos educativos de estos grupos. Es obvia la exigencia de generosidad de recursos humanos y materiales para ayudar a todos los profesores a perfeccionar sus competencias y habilidades pero también para satisfacer las demandas sociales respecto de la educación de las diferencias. Para el profesor García (2006:116-117) el profesorado está inserto en una situación conflictiva que le tensiona haciendo muy complicada su tarea:”ha de ser trasmisor y a la vez crítico de la cultura ante las nuevas generaciones; ha de enseñar a pensar, a decidir, a disfrutar del ocio, a cuidar de la salud, a respetar el medio natural y el patrimonio sociocultural, a ser solidario con los demás. Se le pide integrar en la sociedad al alumno como miembro comprometido y responsable, pero se le presenta una sociedad en continua crisis económico-social, con paro, competitividad, injusticia y marginación. Se le pide una relación personal con el alumno, un trabajo en equipo, una permanente actualización de

Universidad Pontificia de Salamanca

su quehacer. Se pretende un profesor agente compensador de las desigualdades sociales y de las deficiencias personales, al integrar a los alumnos con necesidades educativas especiales en una escuela inclusiva para todos". Desde esta situación en que la sociedad ubica al profesor, mucha será la insatisfacción personal y de estrés que afectan al sujeto de la profesión docente, como para que sea él el causante de los fracasos de la educación. En atención a estas y otras posibles circunstancias parece razonable la propuesta de la profesora Cano (1998:89) cuando reclama la necesidad de reflexionar "acerca de la tendencia a culpabilizar a los profesores de todos los males del sistema educativo porque quizás todos seamos, al fin, responsables del modo en que se ejerce la docencia".

b) Definiciones de educación de calidad centradas en el alumnado

La educación atiende prioritariamente a la preparación y aprendizaje de jóvenes y adultos, a fin de que estos puedan desarrollar mejor sus propias capacidades y desplegar su potencial de cualidades como personas, como miembros de una determinada sociedad y como agentes económicos. La definición del Ministerio de Educación y Ciencia se inscribe en esta perspectiva: "El esfuerzo por mejorar la calidad tiene como últimos destinatarios a los alumnos. Son ellos quienes, finalmente, han de verse beneficiados por el mejor funcionamiento de los centros docentes. Lo que se intenta conseguir es que los alumnos, todos los alumnos y, de acuerdo con sus posibilidades, aprendan más y mejor, aprendan a aprender por si mismos, desarrollen el gusto por el estudio, el deseo de saber más, y alcancen progresivamente una madurez personal, social y moral que les permita actuar de forma responsable y autónoma" (MEC, 1994. Cita tomada de Cano, 1998: 92). Con esta orientación, la definición de calidad se elabora sobre los resultados que alcanza el alumno en el proceso de la enseñanza-aprendizaje y no cabe duda de que, en la noción de la calidad educativa, habrán de entrar los resultados a que se llega en el proceso educativo, sin embargo, no ha de obviarse la pluralidad y variedad interpretativa de lo que puede entenderse por buenos resultados, que en modo alguno dependen únicamente de los alumnos, teniendo en cuenta que, en este caso como en el de los profesores, influyen una amplia variedad de factores, condiciones del centro, situaciones económico-sociales, familiares y personales que condicionan los resultados.

c) Definiciones de educación de calidad centradas en el currículum

Universidad Pontificia de Salamanca

La autora que estoy siguiendo en este apartado, Cano García (1998: 93), toma de Wilson (1992) la definición de educación de calidad basada en el currículo: “La calidad consiste en planificar, proporcionar y evaluar el currículo óptimo (según criterios de optimalidad de cada país) para cada alumno, en el contexto de una diversidad de individuos que aprenden”. Como bien señala Cano la calidad de la educación no puede reducirse a los contenidos de currículo. No cabe duda que los fines, los objetivos y competencias, que se ofrecen en el propio currículo del centro educativo son elementos de importancia para la educación de calidad. Sría excesivamente simple reducir la calidad a este factor, desde luego importante, pero que no invalida la pujanza de otros como los profesores, los alumnos, el proceso de la enseñanza-aprendizaje y las condiciones de todo tipo que se integran en el centro escolar y que influyen claramente en la calidad.

d) Definiciones de educación de calidad centradas en el centro educativo

Los centros docentes son el escenario donde tienen lugar los procesos educativos de tipo formal y es el ámbito preferente de la enseñanza. Parece obvio deducir que los centros habrán de ser medios relevantes a tomar en consideración cuando de la calidad educativa se trate. No parece que sea razonable esperar que la educación de calidad dependa únicamente ni siquiera de modo preferente de las políticas educativas puesto que estas están diseñadas, programadas y ejecutadas desde un centro que promulga normas estandarizadas y uniformes para toda la variedad de centros que pueden existir en un territorio. Se presume con fundamento la mejor posición del centro en la mejora de la calidad educativa por cuanto desde “cada plantel educativo se generen de manera participada y compartida, las condiciones que esa escuela necesita para lograr resultados de calidad en la educación impartida a esos alumnos determinados en las condiciones específicas de la comunidad concreta en que presta sus servicios” (Cano García, 1998: 95). Otros autores, como Marchesi y Martín (1998: 33) apuestan decididamente por los centros como unidad de análisis en la investigación sobre la calidad de la enseñanza a fin de formular una definición más completa de la educación de calidad: “Un centro educativo de calidad es aquel que potencia el desarrollo de las capacidades cognitivas, sociales, afectivas, estéticas y morales de los alumnos, contribuye a la participación y a la satisfacción de la comunidad educativa, promueve el desarrollo profesional de los docentes e influye con su oferta educativa en su entorno social. Un centro educativo de calidad tiene en cuenta las características de sus alumnos y de su medio social. Un

Universidad Pontificia de Salamanca

sistema educativo de calidad favorece el funcionamiento de este tipo de centros y apoya especialmente a aquellos que escolarizan alumnos con necesidades educativas especiales o están situados en zonas social y culturalmente desfavorecidas". En este planteamiento la definición de calidad educativa se identifica con los "centros educativos de calidad" definición en la que se entiende la calidad vinculada con la equidad. Arturo González Galán comparte el precedente planteamiento de tomar el centro como el núcleo de producción de calidad: "Siendo ésta representada generalmente por los logros de los estudiantes (cognitivos y no cognitivos), teniendo en cuenta las características socioeconómicas de partida de sus familias. Esto no quita importancia al papel fundamental que desempeña el profesor, pero éste no es visto como un ser autónomo en una clase y con un grupo de alumnos, sino integrado dentro de una red de relaciones en la que se comparten objetivos y experiencias". El autor muestra un cuadro en el que relaciona la educación de calidad del centro con la calidad del sistema, - principalmente depende del centro escolar – con la calidad de los resultados obtenidos por los estudiantes - variable que el autor estima dependiente asimismo del centro escolar. Establecidas sus preferencias, el autor no obvia que los centros escolares no son estamentos aislados sino que están sujetos a muy varias influencias como las decisiones de la política académica que la administración les comunica, las decisiones de los administradores políticos afectan al centro y a su actividad, principalmente en las decisiones que tome el centro y que repercutirán en la calidad del funcionamiento de las actividades y en la calidad de los resultados. "El logro de los buenos resultados académicos por parte de los alumnos (teniendo en cuenta sus características de entrada al centro) ha sido y continua siendo el criterio de eficacia más utilizado en la investigación anglosajona sobre escuelas eficaces: a mayor rendimiento, mayor eficacia y, consecuentemente, mayor calidad" (González Galán, 2004:74-75).

e) Definiciones de educación de calidad centradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje

Teniendo en cuenta que el fin de la educación es el desarrollo de las potencialidades de la persona, "desde el marco constructivista que impera actualmente, hay que facilitar las condiciones para que el alumno realice sus aprendizajes. Por ello el proceso de enseñanza-aprendizaje aparece, en ocasiones, como el elemento nuclear de la calidad" (Cano,1998:97). Desde esta perspectiva la autora ofrece algunas definiciones de diferentes autores en que toman el proceso de la enseñanza aprendizaje como el

Universidad Pontificia de Salamanca

elemento esencial de la calidad educativa. Desde esta perspectiva una definición bastante completa es la de Coombs (1985: 147. Cita tomada de Cano, Ibid): "La calidad tiene que ver con la coherencia de lo que se enseña y se aprende, con el grado de adecuación a las necesidades de aprendizaje, presentes y futuras de los aprendices concretos, habida cuenta de sus circunstancias y expectativas particulares. La calidad de la educación exige contemplar, además, las características de los elementos que integran el sistema educativo: estudiantes, profesores, instalaciones, equipamiento y otros medios, sus objetivos, contenidos de la programación y tecnologías educativas; también los entornos socioeconómicos, culturales y políticos".

f) Definiciones de educación de calidad centradas en otros factores influyentes

La calidad educativa implica el necesario incremento de la alfabetización que concierne a los contenidos y a los recursos metodológicos de profunda influencia cognitiva y notable valor formativo como los siguientes: Primero, la lectura comprensiva y el comentario de textos son la mejor introducción a la diversidad de métodos, lo que implica entender la lectura, reproducir e interpretar lo leído, que se complementa con la escritura y la composición. En segundo término, no escribir y no exigir la escritura es privar de un instrumento eficaz para dotar de competencias, no solo asociadas a la comunicación sino al análisis en general y a la configuración de aptitudes para la planificación, la invención y la innovación. La escritura es la mediación eficaz para la clarificación mental y de la conciencia, por tanto escribir y organizar discursivamente los conocimientos, experiencias y vivencias supone dotarse del equipamiento más importante para alcanzar la flexibilidad en las competencias operativas que imponen los cambios tecnológicos (Maceiras, 2006: 19).

La calidad en la educación implica asimismo una más completa formación científica y matemática. No puede obviarse que en la sociedad del conocimiento nuestra vida discurre diariamente en contacto con máquinas progresivamente más sofisticadas, las relaciones de producción siguen procedimientos científicos y el soporte de la ciencia moderna está apoyado en las matemáticas, que formalizan la adecuada capacitación de los individuos para el uso de las modernas tecnologías y de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación, que han protagonizado la auténtica revolución científica de finales del siglo precedente y del actual. Nadie es ajeno a ellas ni los individuos, ni las empresas, ni las instituciones ni la sociedad globalizada del conocimiento. Sobre sus virtualidades y aplicaciones al área educativa se hacen

Universidad Pontificia de Salamanca

interesantes aportaciones en el apartado *la educación y las TIC* de este mismo capítulo, por lo que en este caso se estima suficiente con su mención.

Es de interés señalar que una educación de calidad ha de acentuar el carácter continuo del aprendizaje, lo que exigirá cambios, a veces no fáciles de introducir y consolidar, en los procedimientos educativos y de formación respecto de los profesores actuales, los futuros profesores y los estudiantes. La educación de calidad ha de hacerse compatible con un aprendizaje más atractivo. Si se quiere que el aprendizaje sea asequible para todos, en todas las etapas de la vida, habrá que empezar por hacer atractivo el aprendizaje. En este sentido ha de plantearse la cuestión de los incentivos para seguir aprendiendo, o el asunto de en qué medida los servicios, que se prestan a los ciudadanos – en este contexto el servicio educativo - están orientados a la demanda. Al alcanzar la edad en que pueden dejar la educación formal, muchos jóvenes tienden cada vez más (con unos mercados de trabajo reducidos) a incorporarse a un empleo remunerado, pero también son numerosos los que pretenden seguir estudios de formación más exigentes y de mayor calidad, por lo que se les han de ofrecer alternativas educativas adecuadas al mercado y satisfactorias para los estudiantes. En etapas más avanzadas de la vida surge el problema de la financiación de actualización de las competencias y de los conocimientos, aunque en un contexto diferente. En el marco del aprendizaje continuo, el empleo y el aprendizaje no deben verse como algo mutuamente excluyente[19].

g) Definición de educación de calidad

Como hemos indicado al comienzo del apartado, en la elaboración de la definición de educación de calidad, seguimos los pasos de Cano García (1998:105 – 106) como lo venimos haciendo en las páginas precedentes y que la autora estructura en cuatro dimensiones.

1ª) La calidad en el área educativa ha de entenderse "como *tendencia*, como trayectoria y como proceso de construcción continua y no tanto como los resultados" finales obtenidos, sin que esto obstaculice reconocer su importancia.

2ª) L educación de calidad también puede entenderse como "*filosofía* o como un proyecto común" que compromete a toda la comunidad educativa que lo asume para

[19] La manera en que se plantean estas cuestiones varía (por definición) de un Estado miembro a otro, pero el caso es que se plantean de una manera generalizada y que han de hallarse soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

mejorar las cosas, en general dentro del contexto de la política educativa establecida por la normativa externa e interna.

3ª) La educación de calidad puede considerarse como un *proceso* que comprende muchas fases y aunque presenta dificultades insalvables para una medición rigurosa, sin embargo siempre puede evaluarse con cierta aproximación, aunque se pierda algo de la complejidad que importa el proceso educativo, pero siempre será mas rico que una medición de resultados.

4ª) La educación de calidad ha de entenderse como una *espiral ascendente*, es decir, ha de plantearse como un proceso continuo en que las mejoras se sobreponen y no tienen otro fin que seguir mejorando, como "un proceso que, una vez iniciado, nunca termina".

h) Indicadores de la calidad educativa de un centro

Desde esta concepción de la calidad educativa, la profesora Elena Cano García se decanta por señalar, de entre los muchos y variados indicadores generales, que presenta la específica literatura educativa, algunos de los que le parecen ejercer mayor impacto en la calidad educativa y poseer una mayor consistencia entre los muchos teóricos de esta temática, como *indicadores de la calidad educativa de un centro*.

1º) *Cumplimiento de la normativa interna y externa al centro educativo*. Todavía hay muchas limitaciones y la igualdad de oportunidades está lejos de afectar a todos por igual y por consiguiente se ha de proceder con el mayor rigor en el cumplimiento de las normas establecidas ya sea por la autoridad política competente como también aquellas normas que el centro establece para su mejor funcionamiento y tendentes a mejorar la calidad educativa.

2º) *La selección y formación del profesorado* nos parece en todo caso que es un factor de la mayor relevancia en cualquier proceso de mejora de la calidad educativa. Le dedicamos un capítulo (el cuatro) específico de la tesis: a las condiciones que ha de reunir un profesor y a la capacidad competencial y pedagógica del profesor de matemáticas.

3º) *Escuchar la voz de los padres* es un indicador excelente y que no aparece con este directo enunciado en literatura específica, sin embargo se contempla bajo la rúbrica de niveles de satisfacción y otros semejantes. Sin embargo, no se trata solo de la satisfacción de los padres con el centro sino también la necesidad de implicar y estimular a que los padres sean mas activos y participen en mayor medida en conjunción

Universidad Pontificia de Salamanca

con los profesionales de la enseñanza para la mejora de la calidad educativa en el centro.

4º) Se ha de resaltar *la importancia del clima* que ha de lograrse entre el profesorado, de éste con el centro, con otros profesores y el clima de clase, escenario en que discurren principalmente las relaciones profesor – alumno y del ambiente escolar en general.

El clima del centro escolar ha sido el objetivo de un riguroso estudio de González Galán (2004), que lo valora como elemento determinante de la calidad educativa:

"El clima de trabajo y sus dimensiones explicativas se confirman como factores esenciales en los modelos de evaluación de los centros educativos, especialmente por su potencia para explicar la varianza de los productos afectivos, aunque también inciden en productos relacionados con la productividad. Recomendamos por tanto, tenerlo muy en cuenta en la elaboración de modelos de evaluación de la calidad, más aun en un época donde cada vez se presta más atención a los productos educativos no cognitivos". (González Galán 2004:300)

1.2.3.- Criterios e indicadores de calidad educativa

La calidad educativa es un concepto de gran complejidad, que presenta plurales perspectivas, de las que resultan múltiples manifestaciones. También se puede mencionar, al menos, que los estudios empíricos sobre la dimensión cualitativa de la educación son bastante novedosos y sobre los que todavía no se ha logrado la conveniente convergencia de consensos.

a) La calidad educativa en función de las metas

El profesor Pérez Juste (2008:24-29) describe unos interesantes criterios para valorar la educación de calidad que permiten una mayor clarificación del asunto. Parte del supuesto de que las metas educativas a lograr son el "componente nuclear, esencial, de la calidad" que, en cuanto metas de calidad requieren que todos los elementos de la educación, los medios, los recursos, los procesos y los resultados, formen un conjunto armónico e integrado. El autor se decanta visiblemente por un enfoque integral de la educación, donde han de insertarse los criterios de valoración para identificar planteamientos educativos de calidad.

Universidad Pontificia de Salamanca

a.1) *La totalidad como criterio de valoración* significa que la educación ha de cumplir dos objetivos claros y contundentes: mejorar la persona en lugar de degradarla o limitarla, y perfeccionar a cada persona y a toda persona. Lo primero significa que la educación no puede tomarse como instrumento de manipulación y lo segundo apunta directamente a la personalización del proceso educativo.

a.2) *Integralidad y calidad.* La excelencia significa la calidad en cuanto se logra la "integración armónica" de todas y cada una de las dimensiones del proceso educativo, mediante la coordinación ejercida por los responsables del proceso educativo. Esta integración armónica exige la participación de todos los integrantes del sistema en la realización del proyecto, sobre el que hay un "acuerdo y compromiso de toda la comunidad educativa", en el que cada cual asume la responsabilidad que le compete.

a.3) *La adaptación como criterio de calidad* denota la conveniencia de tomar en consideración las diferencias cuantitativas y cualitativas que el ser humano educando porta por su misma naturaleza. El proyecto educativo, pues, ha de tener la necesaria flexibilidad de adaptación, de modo que permita una cierta personalización educativa a canalizar por la "opcionalidad y la posibilidad de proyectos personales que permitan el desarrollo de estrategias" a la atención de determinados sujetos educandos.

a.4) *Armonía y coherencia* son dos aspectos interesantes a tener en cuenta, puesto que el proceso educativo no es algo estático, sino que discurre por cursos, etapas, ciclos, etc., evidenciando la dinámica y evolución del mismo. Un proyecto asumido por la comunidad educativa del centro puede evitar sobresaltos e imprevistos, facilitando accesos más tranquilos a situaciones distintas, el paso a la universidad, a la formación profesional, al mundo del trabajo, etc., pues se hacen previsibles y ofrecen una cierta tranquilidad.

Desde la consideración de los criterios precedentes, Pérez Juste (2008) colige que una educación de calidad ha de mejorar la persona, formar a la persona en su totalidad de tal modo que le permita alcanzar la unidad de vida con sentido y al mismo tiempo sea un proyecto adaptado y adaptable a la diversidad, que el autor especifica en la definición de calidad educativa como un proceso para "formar personas autónomas, capaces de darse un proyecto personal de vida valioso y de llevarlo libremente a la práctica" lo cual comprende obviamente los aspectos cognitivos del sujeto, la formación de las dimensiones afectivas y la influencia en los comportamientos del educando, formando todo ello una unidad armónica que coopere a su autonomía personal y al ejercicio de una libertad responsable.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) El Sistema Estatal de Indicadores de la Educación (2011)

El Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE), a instancias del Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, desde el año 2000, elabora un sistema de indicadores para evaluar el grado de eficacia y de eficiencia educativa de los centros educativos de España, con una secuencia bianual. Los datos obtenidos mediante este instrumento tienen notable utilidad para conocer las tendencias de los resultados escolares obtenidos por los alumnos y el nivel de calidad educativa de los centros de educación. El actual sistema de indicadores que ofrecemos a continuación correspondiente al 2011, *"Sistema estatal de indicadores de la educación"*, ha sido elaborado por el equipo del Instituto de Evaluación del Ministerio de Educación y como se dice en el Informe de su presentación, ofrece 16 indicadores en esta última edición que se agrupan en los siguientes apartados: *Escolarización y entorno educativo,* compuesto por 5 indicadores, *Financiación educativa*, integrado por 2 indicadores, y *Resultados educativos,* constituido por 9 indicadores. Con el fin de profundizar en el análisis, algunos de estos indicadores se han dividido, a su vez, en diversos subindicadores. Reproducimos a continuación este valioso instrumento para la evaluación de la educación de calidad.

A) Escolarización y entorno educativos:

E1 *Escolarización y población*:

Escolarización y población escolarizable en las edades de 0 a 24años
Escolarización según la titularidad
Esperanza de vida escolar a los seis años

E2 *Tasas de escolarización en las edades teóricas de los niveles no obligatorios (CINE 0, 3, 4 y 5)* [20]

Educación Infantil
Educación Secundaria segunda etapa
Educación Superior

E3 *Alumnado extranjero*

E4 *Alumnos por grupo y por profesor:*
Alumnos por grupo educativo
Alumnos por profesor

E5 *Participación en el aprendizaje permanente*

[20] Nota: CINE es el acrónimo de la Clasificación Internacional Normalizada de Educación

Universidad Pontificia de Salamanca

B) Financiación educativa:

F1 *Gasto total en educación:*

Gasto total en educación con relación al PIB
Gasto público total en educación
Gasto público destinado a conciertos

F2 Gasto en educación por alumno

C) Resultados educativos:

R1 *Competencias básicas en cuarto curso de Educación Primaria*

Competencia básica en comunicación lingüística
Competencia básica en matemáticas
Competencia básica en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
Competencia básica social y ciudadana

R2 *Competencias básicas en segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria*

Competencia básica en comunicación lingüística
Competencia básica en matemáticas
Competencia básica en el conocimiento y la interacción con el mundo físico
Competencia básica social y ciudadana
Conocimiento cívico y ciudadano

R3 *Competencias clave a los 15 años de edad*

Competencias clave a los 15 años en Lectura
Competencias clave a los 15 años en Matemáticas
Competencias clave a los 15 años en Ciencias

R4 *Idoneidad en la edad del alumnado*

Idoneidad en la edad del alumnado de educación obligatoria
Alumnado repetidor

R5 *Abandono temprano de la educación y la formación*

R.6 *Tasas de graduación (CINE 2, 3, 5 y 6)*
Tasa bruta de graduación en Educación Secundaria Obligatoria
Tasa bruta de graduación en estudios secundarios segunda etapa
Tasa bruta de graduación en estudios superiores
Tasa de graduados superiores en Ciencias, Matemáticas y Tecnología

R7 *Nivel de estudios de la población adulta*

R8 *Tasa de actividad y de desempleo según nivel educativo*

Tasa de actividad según nivel educativo
Tasa de desempleo según nivel educativo

Universidad Pontificia de Salamanca

R9 *Diferencias de ingresos laborales según el nivel de estudios*

Ingresos laborales de la población y nivel de estudios
Ingresos laborales por sexo y nivel de estudios

Con estos indicadores se recoge la necesaria información sobre el sistema educativo español que, una vez tabulados, discriminados y organizados los datos recogidos, se ofrecerá al público, como dicen los autores, para contribuir al conocimiento del sistema educativo, evaluar su grado de eficacia y de eficiencia y orientar la toma de decisiones por parte de las administraciones educativas. El Informe ha sido elaborado por el equipo del Instituto de Evaluación del Ministerio de Educación, responsable de los indicadores educativos, coordinado por Sagrario Avezuela, e integrado por Joaquín Martín, Lourdes Hernández, Beatriz Ventureira y Noelia Valle (2011).

c) Calidad y modelos culturales

Un especialista en la materia, Pedro Municio, (2008) profesor de 'Gestión de Calidad' en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense, ofrece un planteamiento interesante y original sobre la calidad educativa, que se pormenoriza a continuación. Parte de un concepto de calidad que depende de la comparación establecida entre las expectativas previas generadas y la valoración que cada cual establece sobre el producto o servicio recibido. En el caso que tratamos, la educación de calidad sería la diferencia entre "la formación deseada (expectativas) y la formación recibida… o el funcionamiento de un proceso de enseñanza en comparación con los criterios de funcionamiento del sistema … representan medidas de calidad en educación" (Municio, 2008:103-104). El autor establece luego cuatro tipos de calidad que representan otros tantos modos de entender la educación y los procesos a analizar, en orden a establecer la calidad educativa en función del momento determinado y de la estructura social, económica y política concreta. A partir de las formas culturales que adquiere el paradigma científico en el siglo XX, denomina estos modelos de análisis de la calidad educativa: la cultura satisfaciente, la cultura política, la cultura optimizante y la cultura integradora.

c.1) *Modelo de análisis de la calidad educativa: la cultura satisfaciente*, denominado también modelo burocrático, se caracteriza por la "carencia de valores institucionales comunes, escasa intervención de los miembros en la dinámica

Universidad Pontificia de Salamanca

institucional”, se estructura en torno a una burocracia estable al servicio del funcionamiento de la organización. El ejemplar de referencia actual sería la administración pública y los miembros que integran la organización son considerados recursos. El concepto de calidad se elabora en torno al aprendizaje: el alumno aprende lo que debe aprender y lo que debe aprender está establecido en los planes educativos y programas curriculares. La metodología de evaluación busca los datos prestados por el servicio sin relación con los usuarios. Es el modelo dominante desde finales del siglo XIX y primer tercio del siglo veinte (Municio, 2008).

c.2) C*alidad y evaluación en la cultura política.* Este modelo se inicia dentro de una “filosofía humanista de defensa del hombre, de la individualidad y de desarrollo personal”. Sin embargo una vez que se constituye un grupo con valores próximos e intereses comunes se transforma en grupo de presión que trata de imponer a los demás su concepción del mundo, del hombre y de la vida. Desde esta perspectiva sobresale la carencia de valores institucionales, alta intervención en la dinámica social. Su presencia en el sistema educativo es directamente dependiente del grado de desarrollo y de la financiación. El esfuerzo de racionalización y planificación consigue escasos resultados. Este modelo obtiene una notable difusión en el sistema educativo, en la década de los años veinte y treinta del siglo pasado y se convierte en modelo dominante para muchos grupos, atacando la educación institucionalizada. Un ejemplo representativo de la escuela alternativa que se pretende es Summerhill, fundada por A.S.Neill en 1921 que defiende la libertad de los alumnos para ir o no a clase, crecer emocionalmente, librarse de los miedos y coerciones y aprender según sus deseos. En el modelo la prioridad está más en los objetivos de los miembros que sobre los de la institución. En la institución educativa política predominan las estrategias, las decisiones, las actividades y las valoraciones políticas sobre la norma o la respuesta de su entorno. En cuanto al aprendizaje desde este punto de vista las personas y su desarrollo es lo que cuenta, por lo que la calidad del aprendizaje no está en aprender lo que debe aprenderse sino en la aceptación de que cada individuo tiene sus preferencias, su ritmo de aprender, sus intereses y expectativas, que vienen a constituirse en criterio de calidad. Los importante de la calidad, pues, será como los conocimientos se ofrecen y como se aprenden (Municio, 2008).

c.3) *Calidad y evaluación en la cultura optimizante.* A fin de corregir los fallos del modelo de la cultura satisfaciente surge el modelo optimizante que sustituyó la eficacia basada en las actividades por la eficacia basada en los objetivos. “Este modelo

Universidad Pontificia de Salamanca

se caracteriza por la existencia de valores institucionales comunes, aceptados por todos o por la mayoría de sus miembros, pero con limitada intervención de éstos en la dinámica institucional y en el logro de sus fines" (Municio, 2008:129). La calidad del sistema educativo avanza a la par del sistema industrial y los ministerios de los países asumen la competencia de reglar el funcionamiento del sistema educativo. La introducción de normas reguladoras pretenden no solo la calidad del sistema sino que todo el proceso funcione de manera que los alumnos que no cumplan los requisitos mínimos en la evaluación final, sean pocos. En educación se introducen pruebas trimestrales para controlar el funcionamiento de los puntos intermedios del proceso, concepto que se sustituye por el de evaluación continua (Ley General de Educación, de 1970) aunque en la práctica persiste el modelo de evaluación final en educación secundaria y universitaria. La calidad se pretende asegurar estableciendo standares en cada elemento clave. En los centros educativos con cultura optimizante puede existir un alto nivel de coordinación que permita un trabajo en equipo estructurado y productivo. La cultura optimizante está orientada hacia el futuro y por tanto en los programas se diseñan los caminos para alcanzar ese futuro y el mismo diseño está preparado para forzar a su ejecución. "El programador optimizador formula las metas institucionales de forma precisa, describiéndolas en forma cuantitativa y especificándolas para todos los tipos de resultados posibles. Salvo en casos excepcionales, y siempre considerados como secundarios, los datos cualitativos no son tenidos por válidos" (Municio, 2008: 137). La metodología de la cultura optimizante se orienta a la medición de cambio puesto que la calidad se especifica por las diferencias entre la situación inicial y la final definida por los objetivos alcanzados. La secuencia de los procesos a analizar está configurada por la entrada (input), los procesos (medios) y la salida (output) y el evaluador actúa manteniéndose ajeno y con el mayor grado de independencia. La cultura optimizante exige obtener los mejores efectos posibles en forma de productos directos que respondan a unos criterios dados de calidad. Los indicadores de calidad en este enfoque, para medir el éxito del programa, se centran en los productos intermedios y finales (Municio, 2008).

c.4) *Calidad y evaluación en la cultura integradora.* Este enfoque se caracteriza por la presencia de valores institucionales aceptados por la mayoría de la comunidad educativa cuyos miembros se adhieren activa y voluntariamente al proyecto educativo. El avance destacado de este enfoque se ha producido en el último tercio del siglo XX como "desarrollo de la cultura optimizante para solucionar sus puntos débiles" y

Universidad Pontificia de Salamanca

satisfacer al cliente a quien sirve. Dos aspectos novedosos a destacar: “El primero es la importancia del factor humano para lograr la calidad, pues las normas cuidadosamente elaboradas que se tratan de aplicar solo tienen éxito se son apoyadas por los que tienen que realizar el trabajo. El segundo es que la calidad técnica que se define desde dentro del sistema, no tiene ningún valor si no se tiene en cuenta la percepción de los consumidores usuarios y clientes” (Municio, 2008:142). La calidad como perfección técnica para nada sirve si no satisface a los consumidores. Por consiguiente al depender la calidad de la satisfacción de los clientes, es obvio que la evaluación de la calidad ha de apuntar al conocimiento de las causas de la insatisfacción. La sustitución de otros enfoques por el integrador supone ciertas dificultades, que le convierten en un proceso lento, puesto que ha de atenderse a la medida de la calidad, a la evaluación de la organización y a la tecnología. El significado de un aprendizaje de calidad se refiere a todo aquello que demanda la sociedad global, el entorno institucional y la persona para alcanzar sus últimas metas. El aprendizaje ha de ser personalizado y ha de referirse a lo que repercute en la actuación del sujeto educando en su inserción social. El programador integrador busca armonizar los intereses de las personas con los intereses de la institución y también favorecer la interacción con el entorno que condiciona los movimientos de la institución escolar y determina el futuro del conjunto social. En cuanto a la metodología de la evaluación una regla de oro a tomar en consideración: “la información se complementa combinando los datos en porcentajes de las cuestiones cerradas y estructuradas con las reacciones, aportaciones de experiencias y especulaciones que permiten las preguntas abiertas” (Municio, 2008: 153).

d) Planteamiento empírico sobre el clima[21] de trabajo en los centros de González Galán

[21] El profesor González Galán estudia la noción de clima como un factor de calidad en las organizaciones educativas en el capítulo 4 de la obra mencionada, mediante la relación que establece entre conceptos de clima, calidad y eficacia. En la conclusión general 4 afirma textualmente: “El clima de trabajo y sus dimensiones explicativas se confirman como factores esenciales en los modelos d evaluación de los centros educativos, especialmente por su potencia para explicar la varianza de los productos afectivos …Recomendamos, por tanto, tenerlo muy en cuenta en la elaboración de modelos de evaluación de la calidad” (Gonzalez Galán, 2004: 300).

Universidad Pontificia de Salamanca

El profesor González Galán (2004) ofrece un modelo de investigación de la calidad educativa muy bien fundado en aportaciones teóricas y evidencias empíricas, siguiendo una razonada selección de variables perfectamente contrastadas en la realidad a investigar. Las dimensiones del clima de trabajo constituyen el objetivo explícito en el modelo elaborado, que consta de las siguientes dimensiones:

d.1.- *Ecología* que no se centra inmediatamente en los "aspectos físicos de los centros educativos cuanto en los recursos" de que consta el centro, especificando en esta categoría los recursos humanos, los recursos materiales y el tiempo.

d.2.- La *cultura* apunta a tres aspectos normativos: la *disciplina* que suele vincularse con los resultados y con el clima; las *normas internas* del centro y las *normas de origen externo*, establecidas por la legislación vigente.

d.3.- La dirección comprende los aspectos de *dirección* del centro con la planificación, con la *gestión* de los asuntos administrativos del centro, con el *control y con la confianza* que la gestión del centro ofrece a los que forman parte del mismo.

d.4.- "La dimensión *medio* hace referencia a las características de las personas de la organización". Se integra en este constructo la "motivación personal, la valoración y el reconocimiento que percibe el profesor de su propio trabajo por parte de otros".

d.5.- El sistema social que, según el autor, es el rasgo más decisivo en la investigación sobre el clima del trabajo. Esta dimensión comprende la comunicación, la relación, la participación, la confianza, la autonomía y los grupos (González Galán, 2004: 260 – 261).

El autor en el capítulo 5 de la obra mencionada (González Galán, 2004: 263-293) establece la validación del modelo para investigar la calidad de los centros educativos y hace asimismo la validación de las variables que corresponden a cada una de las dimensiones mostradas del modelo. En mi parecer es un modelo muy trabajado y que puede ser de gran utilidad para estudiar el asunto de la educación de calidad, de la eficacia u otros asuntos de interés relacionados con la estructura y funcionamiento de los centros educativos.

1.2.4.- Los documentos de la Administración

En los documentos de la Administración Pública referidos a la educación se ofrecen derechos, objetivos, criterios, indicadores y factores para la evaluación de los centros de enseñanza. En la Constitución española, aprobada por las Cortes el 31 de octubre de 1978, y votada favorablemente en Referéndum Nacional de 6 de diciembre

Universidad Pontificia de Salamanca

de 1978, se declara la libertad de enseñanza y el derecho a la educación en el art. 27, que en los puntos que afectan a este asunto se manifiesta en los términos que siguen:

> 1. Todos tienen el derecho a la educación. Se reconoce la libertad de enseñanza.
> 2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana en el respecto a los principios democráticos de convivencia y a los derechos y libertades fundamentales.
> 3. Los poderes públicos garantizan el derecho que asiste a los padres para que sus hijos reciban la formación religiosa y moral que esté de acuerdo con sus propias convicciones.
> 4. La enseñanza básica es obligatoria y gratuita.
> 5. Los poderes públicos garantizan el derecho de todos a la educación, mediante una programación general de la enseñanza, con participación efectiva de todos los sectores afectados y la creación de centros docentes.

Con la finalidad de desarrollar, en su conjunto y en sus partes, este articulado de derechos fundamentales y libertades básicas sobre la educación, contenidos en el art. 27 de la Constitución, se dictaron una serie de leyes de diverso rango y contenido. Reseñamos algunas de las más significativas como ejemplo del interés sobre la calidad educativa que muestran las leyes reguladoras del sistema educativo.

a) ***Ley Orgánica del Derecho a la Educación, (LODE)***

En la Ley Orgánica del Derecho a la Educación, (LODE), de 3 de julio de 1985, desarrolla legislativamente el art. 27 de la Constitución, a excepción del punto 10, que se refiere a la enseñanza universitaria. La LODE consta de un título preliminar seguido de otros cuatro títulos más:

1) *El Título Preliminar*, recoge el derecho a la educación de los españoles y extranjeros residentes en España, en los distintos niveles. Establece, a su vez, los fines básicos de la educación.

2) *El Título Primero* está dedicado a los centros docentes, que clasifica en centros privados y públicos. Establece una nueva categoría de centro, que denomina centros concertados y que son centros de gestión privada pero que están sostenidos por fondos públicos.

3) *El Título Segundo* trata la participación en la programación general de la enseñanza, en sus distintos planos y niveles: el Estado, las Comunidades Autónomas, los diversos sectores afectados, padres, profesores y alumnos, a través del Consejo Escolar.

Universidad Pontificia de Salamanca

4) *El Título Tercero* se refiere a los Órganos de Gobierno de los Centros Públicos. Establece dos categorías: los unipersonales (Director, Secretario y Jefe de Estudios) y los colegiados (el Claustro de Profesores y el Consejo Escolar).

5) *El Título Cuarto* está dedicado a los centros concertados: los derechos y obligaciones, que asumen respectivamente los Centros Concertados y el Estado.

b) *Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE)*

En la *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo* (LOGSE) para favorecer la calidad y la mejora de la enseñanza se destacan los siguientes factores:

- La cualificación y formación del profesorado
- La programación docente
- Los recursos educativos y la función directiva
- La innovación y la investigación educativa
- La orientación educativa y profesional
- La inspección educativa
- La evaluación del sistema educativo.

c) *Ley Orgánica de la Participación, la Evaluación y el Gobierno de los Centros docentes (LOPEGCD)*

En la *Ley Orgánica 9/1995, de 20 de noviembre, de la Participación, la Evaluación y el Gobierno de los Centros docentes* (LOPEGCD) se especifican múltiples medidas relacionadas con los puntos anteriores, añadiendo también otros aspectos como: fomentar la participación de la comunidad educativa en la organización y gobierno de los centros sostenidos con fondos públicos y en la definición de su proyecto educativo, establecer procedimientos para la evaluación de los centros, de la labor docente, de los cargos directivos y de la actuación de la administración educativa.

d) *Ley Orgánica de calidad de la Educación (LOCE)*

En la *Ley Orgánica 10/ 2002, de 23 de diciembre, de calidad de la Educación* (LOCE). (Vigente hasta el 24 de mayo de 2006). Consta de un Titulo preliminar, siete título más, que comprenden 108 artículos. En esta ley se desgranan algunos principios

Universidad Pontificia de Salamanca

sobre la Educación de Calidad sobre los que habría de hacerse la evaluación. Entre otros destacan los que siguen:

• La equidad.
• La transmisión de valores que favorezcan la libertad personal, la responsabilidad social y la cohesión y mejora de las sociedades.
• La compensación de las desigualdades personales y sociales.
• Participación de los centros, en el ámbito de sus competencias y responsabilidades, promoviendo un clima de convivencia y estudio.
• La educación como proceso permanente.
• Responsabilidad y esfuerzo, elementos esenciales del proceso educativo
• La flexibilidad.
• Reconocimiento de la función docente.
• La capacidad de los alumnos para confiar en sus aptitudes y conocimientos.
• La evaluación y la inspección.
• El fomento y la promoción de la investigación, la experimentación y la innovación.
• La eficacia de los centros, mediante el refuerzo de su autonomia y la potenciación de la función directiva.

e) Proyecto PISA.

El Proyecto Programme for International Student Assesment (PISA), es un proyecto de la OCDE (2000) para obtener datos del rendimiento de los alumnos que terminan la enseñanza obligatoria (15 años), centrado en las habilidades culturales y en los conocimientos básicos de los alumnos, en su comprensión lectora, en los conocimientos de matemáticas y de ciencias de la naturaleza. Este proyecto está adquiriendo cada año más importancia, debido a la seriedad y rigor del planteamiento cuanto a los datos que ha recogido en los últimos años, puesto que de esta forma se pueden comparar los resultados sobre los niveles de aprendizaje de los alumnos de España con los de otros países, introduciendo elementos que animen cierta competencia.

Como final de este análisis sobre la calidad de la educación, quisiera llamar la atención sobre un problema de cierto interés, que bien pudiera suceder y habría d evitarse. Sería un error, en mi parecer, que se polaricen los centros educativos en obtener unos rendimientos altos según los criterios de evaluación, puesto que ello pudiera incidir desfavorablemente en la persecución de los fines educativos del centro, teniendo en cuenta que los criterios de evaluación, pronto o tarde, consciente o inconscientemente, explícita o implícitamente, pudieran constituirse de hecho en los verdaderos fines de la educación y de la formación cultural.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.2.5.- A modo de síntesis

En referencia a la calidad educativa pueden concluirse algunas propuestas que se infieren, con cierto rigor y legitimidad, del análisis precedente:

1) La calidad de la educación en la sociedad global, más que en cualquier otra época precedente se elabora y puede consolidarse sobre el pilar seguro del despliegue de las metas permanentes de la educación: el desarrollo del individuo implica la promoción y maduración de la persona; el desarrollo democrático de la sociedad que demanda ciudadanos activos y participativos, siempre en un clima de seguridad. La educación de calidad se legitima en el nivel práctico, por el satisfactorio equipamiento conceptual y competencial de los individuos en orden a su integración laboral, a su capacidad de decisión en la actividad económica, a la capacidad de trabajar en equipo y a su disposición responsable respecto de las tareas productivas encomendadas. Desde los documentos de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO)[22], la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y de otros organismos internacionales de semejante autoridad se acentúa la calidad educativa por su condición básica para el desarrollo; por su exigencia incuestionable para la invención e innovación; condición de la necesaria adaptabilidad social y laboral y la exigencia de recursos que hacen rentable la inversión en la educación.

2) En una aproximación a la noción de educación de calidad se han de asumir como elementos esencialmente integrantes del concepto: el profesorado, el alumnado, el centro educativo y sus normativas interna y externa estructuran el clima de actuación y compromiso de la comunidad educativa con el proyecto del centro. Los procesos de la enseñanza – aprendizaje y los diferentes procedimientos metodológicos implicados constituyen dimensiones de incuestionable relevancia de la educación de calidad. Aunque con una influencia menos decisiva, otros factores influencias la educación de calidad: el incremento de la alfabetización, en sentido amplio, que comprende esencialmente cuatro cosas: la lectura comprensiva, la escritura como mediación eficaz

[22] Las siglas UNESCO responden a su denominación en inglés: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, que se fundó el 16 de noviembre de 1945, con el objetivo de contribuir a la paz y a la seguridad en el mundo, mediante la educación, la ciencia, la cultura y las comunicaciones. Tiene su sede en parís.

Universidad Pontificia de Salamanca

para la clarificación mental y de la conciencia, la habituación con los procedimientos científicos y la formación matemática.

3) En la investigación empírica de la educación de calidad, en España, desde hace unos diez años se cuenta con un sistema de indicadores, técnicamente bien elaborado por parte del Instituto Nacional de Evaluación del Ministerio de Educación y con él se realizan las correspondientes pruebas nacionales lo que permite comparaciones sobre el nivel de calidad entre centros, favoreciendo alguna competencia. En cuanto a otros indicadores, la investigación empírica está avanzando con esmerado rigor, PISA reitera una y otra vez investigaciones sobre resultados educativos en comprensión lectora, competencias matemáticas y conocimientos científicos en muchos países lo que produce una acumulación de datos, elevando así los niveles de validez de otros modelos de indicadores, que sin duda favorecerán estudios parciales y sectoriales sobre asuntos relacionados con la calidad educativa en España.

4) De los documentos oficiales de la Administración educativa se infieren, como por otra parte es obligado, las mejores intenciones y propuestas para una educación de calidad. No hay, sin embargo, un documento específico sobre la calidad educativa. Lo hubo pero tuvo una existencia demasiado corta para dejar huellas permanentes.

1.3. OBJETIVOS EDUCATIVOS: COMPETENCIAS Y TECNOLOGÍAS

La sostenibilidad de la sociedad global exige la socialización del saber, lo que significa tener establecidos variados cauces de aproximación a la cultura social y en especial al conocimiento científico. En cualquier país moderno, la educación se ofrece a los ciudadanos como un sistema reglado mediante el cual se organiza el acceso de los ciudadanos al conocimiento que, en la sociedad tecnológica actual, asume la condición de recurso estratégico, mediante la integración de competencias, habilidades y actitudes con las que procede equipar a los ciudadanos. El sentido inmediato de este equipamiento conceptual y técnico consiste en dar respuesta satisfactoria a las complejas y cambiantes exigencias de la moderna economía de servicios que progresivamente ocupa el espacio productivo. En correspondencia con el precedente supuesto, el sistema educativo en Europa y en cualquier parte del mundo tratará de organizarse en orden a responder adecuadamente a los retos competenciales y tecnológicos que demanda la sociedad. En este apartado son dos los asuntos a tratar:

Universidad Pontificia de Salamanca

1º) El desarrollo de las capacidades cognitivas del sujeto educando, mediante el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las competencias, habilidades y destrezas necesarias y convenientes para su inserción y funcionamiento en el medio productivo y social, económico y cultural en que pretende vivir como ciudadano integrado y satisfecho en la sociedad de su tiempo. Como se alega en Prólogo del Informe PISA 2009 de la OCDE (2010: 7): La incorporación a la evaluación del concepto de competencia básica, que tiene que ver con la capacidad de los estudiantes para extrapolar lo que han aprendido y aplicar sus conocimientos ante nuevas circunstancias y su relevancia para el aprendizaje a lo largo de la vida".

2º) El necesario equipamiento tecnológico de los estudiantes viene exigido por las circunstancias mismas de la sociedad tecnológica. La educación no puede ni quiere sustraerse al reto de transmitir el oportuno conocimiento técnico, de entrenar a los estudiantes en las nuevas tecnologías y de constituirse en ejemplo práctico del uso de las TICs en los procesos de la enseñanza-aprendizaje. La temática tecnológica constituye, pues, el segundo asunto a tratar en este apartado.

1.3.1.- Competencias educativas

La incorporación al mundo laboral y productivo exige no solo capacidades, habilidades y destrezas sino incluso calidad competencial, de continuo actualizada, para el desempeño de las tareas productivas. En la sociedad abierta, el flujo de tareas que cambian es caudaloso y el ritmo de su transformación es progresivamente acelerado. La concreción de esta perspectiva en el ámbito de las tareas productivas, en que tienen lugar las radicales transformaciones técnicas y sociales, demanda el cambio de los parámetros educativos vigentes, si hay voluntad política decidida para que las mujeres y los hombres, cuando concluyan su período específico de formación no entren a engrosar las listas millonarias de parados, sino que se incorporen con éxito al mundo laboral de ese momento histórico. Una aproximación realista a la interacción economía / educación no puede desconocer los factores que determinan la llamada economía inmaterial porque, "a diferencia de la economía tradicional ligada a productos y a su transformación, esta nueva economía se basa fundamentalmente en el conocimiento y en la adecuada gestión de sus especializaciones. En ella también se trata con productos, pero su fuerza y motivaciones son independientes de la acción de producir, en cuanto que procede a partir de aplicaciones tecnocientíficas" (Maceiras, 2006: 39). Su gestión va asociada a algunas notas características: el conocimiento como fuerza de producción,

Universidad Pontificia de Salamanca

el equipamiento y aplicación de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación, en cuanto soporte de almacenamiento de información, instrumento de procesamiento y difusión de la información a cualquier distancia, a bajo coste y en cuanto soporte del nuevo trabajo y actividad profesional mediante la red de redes, Internet.

La educación ha de elaborarse con el concurso de todos los integrantes en el proceso educativo y requiere la incorporación de los procedimientos más avanzados y sofisticados a favor del éxito del proceso de enseñanza - aprendizaje. Sin embargo, la educación no se restringe al área de los procedimientos. Ha de abrirse al ámbito de los contenidos, teniendo como horizonte insoslayable la formación integral del hombre y su preparación para el empleo, que puede concretarse en los conocimientos fundamentales de la lectura comprensiva, la escritura, las matemáticas, las materias científico-técnicas y un meritorio conocimiento y manejo de las TICs. Se requieren asimismo, entre otras, aptitudes sociales como la capacidad de relación, comportamientos responsables en el trabajo, adquisición de las competencias propias de las tareas laborales, la capacidad de cooperar y de trabajar en equipo, la creatividad y la búsqueda de calidad. Ello significará introducir cambios en el aprendizaje de los estudiantes, que exige atender a la formación del profesorado, que habrá de poseer en grado excelente los conocimientos a transmitir y manejar con fluidez los conocimientos científicos, los procedimientos, los métodos, las técnicas y las reglas de didáctica.

En la Unión Europea hay verdadera preocupación por la formación científica de los profesores y por la escasa estima de la ciencia acreditada por los estudiantes. En una investigación llevada a cabo en 27 países de Europa en 2010, los resultados de PISA en la UE manifiestan una ligera mejoría respecto de la ciencia pero la actitud de los estudiantes en general frente a las ciencias aún es muy deficiente. En el capítulo dos de este informe (Comisión Europea, 2011a: 25-59) se tratan las estrategias y políticas de los diferentes Estados europeos para promocionar la educación científica. Entre las medidas más comunes, destaca la promoción de una imagen positiva de la ciencia, el aumento de colaboración entre universidades y colegios para mejorar la formación del profesorado de secundaria y primaria, el intento de motivar al alumnado frente a los estudios de ciencias, la implementación de reformas en los currículos, la creación de asociaciones entre colegios, empresas y centros de investigación de ciencias, visitas a museos y centros de actividades científicas. Se constata la fundación de centros nacionales de ciencias o instituciones que promuevan la educación de las ciencias en

Universidad Pontificia de Salamanca

algunos países. Incluso se han organizado competiciones para fomentar una actitud positiva frente a las ciencias, editando guías específicas que animan a realizar estudios de ciencias y programas para estudiantes superdotados. Esta preocupación por la ciencia se explica porque la sociedad global necesita más de la ciencia y la economía de servicios pende prioritariamente del conocimiento científico. En el documento informe de las Comunidades Europeas (2001) al Consejo Europeo, "Futuros objetivos precisos de los sistemas educativos", a fin de asegurar el futuro del desarrollo sostenible, se señalan como objetivos necesarios relativos al conocimiento la mejora del aprendizaje y la mejora en la formación de los profesores y de los formadores. En el punto 12 del documento, *aumentar la alfabetización y la formación aritmética*, el Consejo Europeo se decanta por elevar el nivel de contenidos en los tres ámbitos que ya hemos indicado: "es primordial que todos los ciudadanos aprendan a leer, escribir y hacer los cálculos aritméticos para garantizar la calidad del aprendizaje, pues esta formación básica es fundamental para adquirir las demás aptitudes de aprendizaje y poder acceder al empleo**"** (2001: 7).

En un documento del Parlamento y del Consejo europeo que toma el formato de "Recomendación" a los Estados miembros (18/ diciembre/ 2006) sobre las "competencias clave para el aprendizaje permanente" se establece que "dados los nuevos retos que la globalización sigue planteando a la Unión Europea, cada ciudadano requerirá una amplia gama de competencias para adaptarse de modo flexible a un mundo que está cambiando con rapidez y muestra múltiples interconexiones. En su doble función — social y económica —, la educación y la formación deben desempeñar un papel fundamental para garantizar que los ciudadanos europeos adquieran las competencias clave necesarias para poder adaptarse de manera flexible a dichos cambios" (Comisión Europea, 2006).

En los ámbitos educativos de los últimos años se ha acentuado en las publicaciones el concepto de competencia. Las competencias se definen como el conjunto de habilidades y destrezas necesarias para realizar una tarea específica, en un contexto laboral determinado. La identificación de las competencias en la formación y selección de profesionales se extendió al ámbito educativo, tanto de profesores como de alumnos. El diseño y desarrollo de las reformas de planes de estudio, desde la educación infantil hasta la universidad, está pivotando en la actualidad sobre el concepto de competencia. El profesor García García (2009: 46 – 51) escribe que los estudios, publicaciones y la legislación de la OCDE y la Unión Europea "proponen las

Universidad Pontificia de Salamanca

competencias como componente nuclear de los procesos de aprendizaje de los alumnos, de la formación del profesor y de la evaluación de la calidad de las instituciones. Hasta el extremo que se llegan a utilizar las competencias como fórmula mágica para resolver todo tipo de problemas". Los estudios universitarios y, en general, la educación española está inmersa en esta dinámica, desde reformas en los niveles más básicos (Ley Orgánica de la Educación), hasta el diseño de nuevas titulaciones universitarias en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (ANECA, 2005). Se requiere diferenciar las competencias que han de alcanzar los alumnos en cada nivel de enseñanza, de las competencias que han de desarrollar los profesores en el ejercicio de la profesión. El "Proyecto Tuning" (2003) supone un avance muy importante en el estudio de las diversas y complejas competencias que hoy se demandan a la educación. Con la explícita voluntad de acomodarse a las estructuras educativas de Europa, el sistema español está completando las actuaciones indicadas en los documentos de Bolonia (1988, 1999), Sorbona (1998), Salamanca (2001), Praga (2001), Graz (2003), Berlin (2003) Bergen (2005) Londres (2007).

El Proyecto Tuning (2003) se apoya en anteriores experiencias de cooperación, realizadas en el marco de los proyectos de redes temáticas de Sócrates-Erasmus, y de los proyectos piloto ECTS. Se escogió el término Tuning, afinar en términos musicales, con la intención de transmitir la idea no de unificar u obligar a homogeneizar, sino de sintonizar y converger. El Proyecto Tuning persigue proteger la diversidad de la educación europea y determinar los aspectos esenciales para las competencias genéricas, que los estudiantes han de adquirir por el hecho de ser universitarios, y las específicas de cada disciplina o campo temático. Las competencias describen los resultados del aprendizaje: el conjunto de saberes que un estudiante puede demostrar una vez completado su proceso de aprendizaje. Los académicos, los estudiantes y los empleadores han sido consultados sobre las competencias deseables a adquirir los titulados.

El Proyecto Tuning (2003) se ha elaborado con una metodología basado en cuatro ejes: a) Competencias genéricas; b) competencias específicas; c) papel del sistema ECTS en el currículo; d) la función del aprendizaje, la docencia, la evaluación y el rendimiento en relación con el aseguramiento y evaluación de la calidad. Un objetivo general del Proyecto Tuning es servir de plataforma para el intercambio de experiencias y conocimientos entre países e instituciones de educación superior, para facilitar una

Universidad Pontificia de Salamanca

mayor transparencia de las estructuras educativas e impulsar la innovación y la calidad. Se diferencian tres ámbitos de competencias o destrezas: 1) conocer o comprender el conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender; 2) saber cómo actuar, es decir, la aplicación practica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones; 3) saber cómo ser: los valores se consideran como parte integrante de la forma de percibir al otro y vivir en un contexto social. El concepto de competencia hace referencia a las capacidades, aptitudes, destrezas y recursos que permiten a una persona realizar una acción, una tarea o un producto. Poseer una competencia significa que una persona, al manifestar una cierta capacidad o destreza para el desempeño de una tarea, puede demostrar que la realiza de manera tal que permita evaluar el grado de realización de la misma. Las competencias se sitúan en un continuo y cada persona puede dominar unas u otras (Arguelles, 1997; Levy-Leboyer, 2000). El profesor García García (2009: 49) analiza dos conjuntos de competencias: "las genéricas y las específicas. Las competencias específicas se relacionan con las áreas temáticas y resultan claves para cada titulación universitaria, ya que están específicamente relacionadas con el conocimiento concreto de un área temática. Son pues las competencias relacionadas con las disciplinas académicas y son las que confieren identidad y consistencia a cualquier programa" En cambio las competencias genéricas se refieren a aquellas "habilidades y destrezas que un estudiante universitario debe adquirir por el hecho de pasar por una universidad". Son aquellas que cualquier titulación debe proporcionar, tales como la capacidad de aprendizaje, de análisis y de síntesis".

El proyecto Tuning (2010) limita el estudio a 30 competencias genéricas clasificándolas en tres grupos: a) *las competencias instrumentales*, que incluyen destrezas cognitivas, como la capacidad de comprender y manipular ideas y pensamientos; capacidades metodológicas como tomar decisiones y resolver problemas; capacidades tecnológicas como la de manejar ordenadores; y capacidad lingüística, como comunicación oral y escrita o conocimiento de una lengua. *b) Las competencias interpersonales* referidas a las capacidades individuales para expresar los propios sentimientos, habilidades críticas y de autocrítica**;** destrezas sociales relacionadas con las relaciones interpersonales, la capacidad de trabajar en equipo, el compromiso social y ético. Estas competencias facilitan la interacción y cooperación social. *c) Las competencias sistémicas*, comprenden las destrezas y habilidades que conciernen a los

Universidad Pontificia de Salamanca

sistemas como totalidad. Suponen una combinación de la comprensión, la sensibilidad y el conocimiento que permiten al individuo ver como las partes de un todo se relacionan y agrupan. Estas capacidades incluyen la habilidad de planificar cambios para mejorar e innovar los sistemas. Las competencias sistémicas requieren como base la adquisición previa de competencias instrumentales e interpersonales. No entramos en este momento en una literatura más específica sobre competencias porque en los procesos de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas hemos de referirnos a las competencias propias de esta enseñanza.

1.3.2.- La educación y las TICs

La sociedad global se sostiene sobre las frecuentes interrelaciones entre los pueblos, las densas interdependencias económicas y políticas, los gratificantes encuentros entre individuos de culturas diferentes, las comunicaciones entre gentes que, ubicadas en espacios alejados, se mueven con frecuencia de unos a otros lugares y la intensa comunicación cultural, científica o simplemente de curiosidad entre quienes las nuevas tecnologías y, de modo especial Internet, facilitan sus intercambios, mediante las conexiones tecnológicas que vinculan en pocos segundos a interlocutores de uno a otro extremo del planeta. Esta radical apertura a lo global, exige las pertinentes decisiones de política educativa para que los estudiantes en sus etapas de primaria, secundaria y bachillerato, su periodo de formación, obtengan un capital de conocimientos y de manejo de las tecnologías que le permita acceder con éxito a los ámbitos relacionales, ocupacionales y profesionales en cualquier parte, se hallen complacidos con el capital humano y técnico adquirido mediante la educación y se incorporen con entusiasmo a la sociedad global. En la situación social actual se desarrolla con fuerza el espacio digital, como fruto de la convergencia de las TICs y de una serie de factores culturales favorables a los avances tecnológicos. Resulta de interés la referencia a la formación tecnológica de los estudiantes por dos razones innegables: las TICs constituyen los nuevos soportes de almacenamiento seguro de la información, son además instrumentos insustituibles para la disponibilidad de difusión y de manipulación de la información y el conocimiento. De este supuesto se infiere la necesidad de incorporar las TICs a los escenarios culturales y educativos, puesto que su presencia y uso en los ámbitos científicos, comunicativos y económicos es imprescindible.

Universidad Pontificia de Salamanca

En cuanto soportes de almacenamiento de información las TICs son receptáculo fiable de los conocimientos precedentes que el hombre ha elaborado y guardado sobre sí mismo, sobre la naturaleza y sobre la ciudad que "están siendo transferidos al entorno electrónico" (Echevarría, 2000: 27). El éxito del nuevo espacio tecnológico reside en el continuo avance de instrumentos producidos, útiles y eficaces para guardar las enormes existencias de la información disponible desde tiempos antiguos y recoger con éxito la rápida acumulación y variedad de conocimientos que se produce en los tiempos actuales, permitiendo a la vez la manipulación fácil y eficiente de la información acumulada y disponible. Las TICs son además instrumentos de transmisión de información, es decir, ponen al alcance, hacen disponible a los ciudadanos las ingentes cantidades de información y de conocimientos. También son eficientes procedimientos para transmitir con seguridad, celeridad y fiabilidad la información y los conocimientos a las distancias más alejadas y dispersas, con un coste mínimo.

Las TICs son también instrumentos de eficacia probada para la creación y organización de potentes bases de datos actualizados, de inmediata disponibilidad y necesarios para el progreso cognitivo individual y colectivo. El hombre actual está muy sensibilizado con el depósito cultural acumulado por las generaciones anteriores, enriquecido por los seres humanos vivos, que se esfuerzan por legarlo en las mejores condiciones a las generaciones futuras. El formato electrónico permite conservar este legado y ponerlo a disposición de nuevos individuos sin que ello entrañe riesgos de conservación. Es importante que las sociedades trasladen al formato digital los archivos y registros en que están depositados el conocimiento científico, los datos culturales de la sociedad, los libros importantes, la información sobre las obras de arte y cualesquiera otros archivos de interés. Es obvia la superioridad de los actuales soportes de conservación del conocimiento sobre los de otras épocas: En la primera se archivaba la cultura del grupo en la memoria individual y colectiva, con posterioridad el hombre inventó nuevos modos de conservar la información, la escritura, la imprenta y los libros. En el nuevo espacio, el mundo digital aporta un nuevo modo de memorizar, almacenar y procesar el conocimiento. El soporte electrónico y digital, constituye un poderoso instrumento para almacenar los conocimientos y es rápido para identificar los conocimientos buscados, flexible para procesarlos y fácil para manipularlos. En la actualidad, además de recurrir a los libros y bibliotecas, se acude con progresiva frecuencia a Internet, a una base digital de datos, a una enciclopedia electrónica y cada vez es más asequible y seguro actuar en el espacio digital. El mundo digital y telemático

Universidad Pontificia de Salamanca

constituye un nuevo espacio para la acción social, que exige a los individuos, participantes en el escenario nuevo, dotarse de conocimientos, competencias y habilidades para intervenir y actuar en él.

Desde los mencionados supuestos, la integración de los recursos tecnológicos en los sistemas educativos se hace imprescindible, de modo que los profesores y los estudiantes de la sociedad actual habrán de aprender no solo a conocer y cuidar la naturaleza y recrearse en su belleza, continuar su aprendizaje para funcionar en un medio urbano, de creciente volumen y complejidad. Con la misma exigencia se impone la adquisición de conocimientos, competencias y habilidades para funcionar en el espacio digital. A medida que la sociedad del conocimiento se consolida y propaga, las sucesivas generaciones han de aprender también a moverse, jugar, representarse, diseñar, leer y escribir en los sistemas multimedia, a trabajar en el entorno telemático y construir su propia identidad en el nuevo contexto. El mundo digital "genera nuevos conocimientos, tanto teóricos como prácticos, y por ello se convierte en una nueva forma de cultura y civilización. Nuestra identidad en el espacio digital (E3) se superpone a la que ya tenemos en E1 (la identidad genérica) y en E2, la identidad social (nuestro nombre, DNI, lugar de residencia y de nacimiento, estudios y profesión, etc. la identidad social). Estamos ante la circunstancia de tres medio-ambientes, y en cada uno de ellos hemos de saber ser y actuar" (Echevarría, 2000:29).

Las TICs son herramientas que pueden facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin embargo se deberían tener en cuenta algunos requisitos: el desarrollo del auto-estímulo en el uso de los sistemas tecnológicos, la participación activa del estudiante y la realimentación, mediante otros recursos didácticos, durante el uso de los sistemas digitales. En el área de la didáctica y del aprendizaje se le viene prestando progresiva atención a la aplicación de las nuevas tecnologías (Méndez, D., 2012: 199-224). A pesar de las utilidades y ventajas mencionadas, las TIC, todavía no se emplean con gran asiduidad (Clares y Gil, 2008). Sin embargo, cada vez más los profesores coinciden en mayor número con los estudiantes en la utilidad de las TIC para el desarrollo de sus habilidades y para la comprensión de los contenidos educativos (Edmunds et al., 2012). No obstante, para un aprendizaje satisfactorio de los contenidos, el proceso de implantación de las TIC exige un diseño de planificación de actividades docentes, realizado con minuciosidad y compartiendo experiencias con profesores de la especialidad (Vázquez, 2011). El uso de estos instrumentos en el proceso de la enseñanza, si contamos con las unidades didácticas bien diseñadas y detalladas, facilita

Universidad Pontificia de Salamanca

unas clases más participativas y activas por parte del alumnado (Aguaded-Gómez et al., 2010). En la integración de estas herramientas tecnológicas como ayuda al aprendizaje de las ciencias y de las matemáticas, encontramos experiencias como la aplicación del LabView en que se mejora el aprendizaje de los estudiantes (Quiñónez et al., 2006). Desde este punto de vista, está adquiriendo progresiva relevancia el diseño y la esmerada elaboración de las unidades didácticas, mediante el empleo de las TIC, de simulaciones y de laboratorios virtuales (Donnelly et al., 2011). En el capítulo dedicado a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tendré oportunidad de referirme de manera más amplia y precisa a la preparación de las unidades didácticas, que considero un asunto del mayor interés .

La educación tiene una función de política social, que supera los límites de la economía, estableciendo articulaciones con la paz social, el progreso y la esperanza de movilidad social hacia los estratos sociales y económicos más estimados. Mediante el sistema educativo el estudiante se capacita para asimilar las competencias necesarias para las nuevas tareas que continuamente surgirán en el espacio económico en que se ubique y en cualquier parte donde pueda encontrar el empleo que mejor le convenga. También ha de ser capaz de mirar la realidad desde el punto de vista de su perfectibilidad. Desde la extendida máxima de que 'nada es posible hacer distinto de lo ya hecho', no se puede pretender cambio alguno ni mejora de ninguna clase. Si el hombre no fuera capaz de imaginar y realizar nuevas y mejores alternativas, viviría todavía en las cavernas. Han de ser bienvenidas nuevas utopías que permitan sobreponerse al generalizado pesimismo actual. La experiencia de las épocas pasadas nos induce a ser positivos, a aceptar el postulado de que la educación adquirida fue capaz de ajustarse a las cambiantes circunstancias mediante la definición de nuevos objetivos y el diseño de originales estrategias. Sin embargo, en las circunstancias tecnológicas actuales habrá de procederse con prudencia puesto que las situaciones cambiantes del presente no admiten fáciles comparaciones con los cambios del pasado. En un ensayo sobre la educación moderna Bauman (2008: 46) llega a la conclusión vagamente pesimista, que sin necesidad de identificarnos con ella, puede ser útil tenerla presente: "en ningún otro punto de inflexión de la historia humana los educadores debieron afrontar un desafío estrictamente comparable con el que presenta la divisoria de aguas contemporánea. Sencillamente, nunca antes estuvimos en una situación semejante. Aún debemos aprender el arte de vivir en un mundo sobresaturado de

Universidad Pontificia de Salamanca

información. Y también debemos aprender el aún más difícil arte de preparar a las próximas generaciones para vivir en semejante mundo".

1.3.3.- A modo de síntesis.

En este apartado se consideran los asuntos del texto precedente: los conocimientos y las tecnologías de la información y de la comunicación como objetivos fundamentales del proceso educativo. Una síntesis de lo expuesto podía resumirse en las siguientes propuestas:

1) En el proceso educativo actual se perciben evidentes limitaciones en los contenidos científicos y matemáticos de la educación europea y también española. Asimismo la imagen de la ciencia en los estudiantes y en los profesores no es tan positiva como fuere deseable en la sociedad del conocimiento, en que el progreso socio-económico de los individuos, de la sociedad y de la economía pende de los avances científico-técnicos y de una educación consecuente. Se trata de equipar al sujeto educando con los conocimientos, competencias y habilidades que le permitan comprender algo razonablemente general sobre la estructura y funcionamiento de todo un conjunto de informaciones, aparatos, sistemas y organizaciones que están al alcance de los individuos, mejoran su calidad de vida y son imprescindibles en la vida cotidiana. Todo este bagaje es fruto de la ciencia y para asegurar que esta trayectoria va a continuar, es imprescindible generar vocaciones de científicos y difundir una imagen positiva de la ciencia, en sí misma y en sus aplicaciones prácticas.

La situación ha puesto en alerta a las autoridades europeas, que están organizando centros para la formación científica de los profesores, para que sean capaces de motivar a los estudiantes a favor de las materias científicas, de comprender los currículos científicos y de transmitir esos conocimientos con rigor y éxito. Asimismo para los estudiantes se crean concursos, olimpiadas y competiciones para estimularlos en el aprendizaje, se repetirán pruebas internacionales para hacer el seguimiento del asunto y se recurrirá a investigaciones empíricas que ofrezcan los progresos o retrocesos en la cuestión. La conversión de los conocimientos en competencias, habilidades y destrezas permite unas evaluaciones más adecuadas por su mayor nivel de concreción que importan. Están, sin embargo, ocupando gran parte de las energías de profesores y centros y tal vez no se esté dedicando la suficiente atención a la elaboración y ajustamiento de las competencias a los conocimientos y a poner de

Universidad Pontificia de Salamanca

manifiesto las conexiones de las competencias con la ciencia práctica en los comportamientos de la vida cotidiana de los individuos.

2) En cuanto a la aplicación de las tecnologías de la información y de la comunicación en los procesos de la enseñanza-aprendizaje se constata que no resultó fácil su introducción. Las reticencias vinieron sobre todo de los ambientes del profesorado y de los centros que, aunque con cierta lentitud, van equipándose con las TIC. En la actualidad su uso en las materias científicas y en las matemáticas es todavía bastante limitado, pero se ha alcanzado una cierta convergencia de opiniones favorables entre profesores y estudiantes, aunque siempre utilizando diversos procedimientos complementarios. En todo caso, su utilización es de apoyo a otros procedimientos. Se da el convencimiento que la introducción de las TIC en el proceso de la enseñanza-aprendizaje exige por parte del profesor una mayor dedicación al diseño y meticulosa preparación de las unidades didácticas.

1.4. HACIA UNA EDUCACIÓN HUMANISTA

La educación para la responsabilidad social y moral constituye la verdadera plantilla sobre la cual se puede y debe construir la formación del ser humano hasta llegar a la persona humana formada, capaz de convivir de modo solidario en la sociedad abierta y global y de practicar la tolerancia con los diferentes. Suscribo con total convicción el planteamiento de la profesora Labrador (2006: 97) respecto del "compromiso educativo con los valores de la libertad, la tolerancia, la solidaridad, la justicia, la igualdad, la fraternidad es un compromiso para un humanista. La impersonalidad de cada hombre sumergido en el anonimato de los grupos humanos y de las grandes ciudades, en los pueblos menos favorecidos pero también de los países más avanzados, interpela fuertemente al educador y en este sentido la educación debe someterse a una exigente autorrevisión. Los humanistas del mundo clásico grecorromano y también del renacentista fueron conscientes de los límites que las posibilidades humanas tenían, actualmente nuestra situación de progreso material ha sobrepasado a los propios límites individuales".

En este apartado el análisis se lleva a cabo sobre cuatro aspectos, en mi parecer, interesantes por si mismos, puesto que en las circunstancias actuales nuestra convivencia ha de diseñarse sobre un mundo abierto en donde las diferentes culturas

Universidad Pontificia de Salamanca

encarnadas en individuos concretos están domiciliadas en los edificios, calles, pueblos y ciudades en que nosotros vivimos. Son nuestros vecinos con los que compartimos tiendas y ascensores y nuestros hijos van a los colegios de sus hijos. Es decir, se hace preciso convivir con los diferentes y con las diferencias. En este escenario es obvio que no solo con conocimientos, competencias y tecnologías se han de equipar a nuestras generaciones jóvenes y no tan jóvenes, sino también en valores que les faciliten la convivencia con los diferentes en clave de satisfacción tanto para ellos como para quienes pertenecen a culturas diferentes.

La temática de este apartado se divide en cuatro dimensiones relevantes o aspectos que son los que siguen:

1) El primer asunto que se trata es la necesaria y responsable apertura del ser humano, en este caso nuestros compatriotas, a la realidad que le circunda, con disponibilidad a asumir un compromiso con todos los habitantes de un planeta, cuyas modernas comunicaciones hacen presentes en nuestro hogar los asuntos más problemáticos, por muy remotos que ellos sean. Las comunicaciones y los sistemas de comunicación empequeñecen cada día este bello planeta que habitamos, acercándonos más los unos a los otros.

2) He estimado pertinente la mención al tímido avance hacia una ciudadanía global, que ayude al ser humano a trascender los *escenarios tribales del nosotros y los otros* para aproximarnos ala configuración de una comunidad humana global. La dimensión de una ciudadanía universal exige una convivencia universal y pacífica, en un escenario donde todos nos sintamos suficientemente seguros. La educación juega un papel decisivo como trasmisora de ideas, creencias y valores que den soporte a la pacífica convivencia. La creación de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia, la Cultura y las comunicaciones (UNESCO) tenía como finalidad inmediata y permanente luchar por la paz y la seguridad que convirtieran en obsoleto aquel principio de Hobbes: *el hombre es un lobo para otro hombre.*

3) En la exploración de la dimensión humanística de la educación para la convivencia pacífica universal, dedicamos el tercer apartado a un valor social tan necesario como la solidaridad, desde cuya convicción se anima al ser humano a acercarse al otro para mostrarle su simpatía, su afecto y su respeto como ser humano revestido de la mayor dignidad, pero especialmente vulnerable en la sociedad abierta y global.

Universidad Pontificia de Salamanca

4) Otro asunto, objeto de especial atención, es el valor social de la tolerancia no solo como virtud clave en la organización democrática de la sociedad moderna sino también como valor insustituible para la convivencia en un mundo culturalmente plural, donde los medios de comunicación muestran de continuo las diferentes culturas y a los habitantes de cualquier lejano país hoy, mañana convertidos en vecinos no siempre deseables.

1.4.1.- La necesaria apertura hacia el hombre actual

La educación ha de plantearse siempre, pero de manera especial en la actualidad, como un proyecto que desde la realidad del presente se proyecta hacia el futuro, puesto que en sí misma entraña la naturaleza de un proyecto, por definición realizable con el sujeto educando, en su mayoría jóvenes que podrían definirse, como lo hacía Julian Marías (1980: 40-43), en términos de proyecto y proyección: "el momento de la vida humana en que el individuo atiende para decidirse a elegir entre los diferentes modos que tiene para hacerse y manifestarse". El hombre se ha afianzado durante la modernidad en una específica orientación hacia el tiempo, - su sentido 'cuasi' sagrado de los horarios y de la puntualidad - que acentúa la relevancia del presente, menos la del futuro y minusvalorando definitivamente el pasado. A esta obsesión que muestra la juventud actual respecto del presente no es ajena la presión que en la sociedad actual ejerce el consumismo. No en vano, la economía actual pende más del consumo que de la producción, como sucedía en épocas pasadas. Sin embargo, esta acentuación del presente unido a un 'enfermizo afán de seguridad' (Pieper, 1984:113), está alimentando un cierto retroprogresismo, que repite fórmulas y análisis del pasado, aunque remozados según los indicadores de la sociedad actual. Aunque, si el pasado no se recoge como historia de vida y de enseñanza de los que nos precedieron y legaron el denso bagaje científico, cultural y técnico, sino solo el sentimiento de cálida nostalgia se puede decir que 'cualquier tiempo pasado fue mejor', aunque *"sensata y objetivamente, debería simplemente afirmarse que cualquier tiempo pasado fue anterior"*. No voy a repetir aquí lo ya dicho anteriormente sobre la tradición y la conveniencia del reconocimiento de nuestras raíces, como bien lo expresaba Benedicto XVI al hacerse eco de esta situación, en su visita a Portugal, el día 12 de mayo de 2010, en un breve discurso dirigido a los intelectuales, *representantes de la cultura y artistas portugueses* reunidos en el Centro Cultural Belém de Lisboa, que lleva por título *Haced de vuestra vida un*

Universidad Pontificia de Salamanca

lugar de belleza le comentó entre otras cosas, lo siguiente: "El 'conflicto' entre la tradición y el presente se expresa en la crisis de la verdad, pero únicamente ésta puede orientar y trazar el sendero de una existencia lograda, tanto como individuo que como pueblo. De hecho, un pueblo que deja de saber cuál es su propia verdad, acaba perdido en los laberintos del tiempo y de la historia, privado de valores claramente definidos y sin grandes objetivos claramente enunciados" (2010).

No estoy defendiendo que haya de afrontarse el futuro a partir de esquemas pretéritos, refugiándonos en la tienda de lo caduco. Solo recordar la máxima de Comte que somos más deudores de los muertos que de los vivos, en el sentido de que somos hechura de la cultura de nuestra sociedad y ese es el gran patrimonio que los antepasados nos transfirieron. El futuro llega inexorablemente y la actitud más sensata consiste en aprovechar las oportunidades que ofrece. También hemos de ser conscientes que el futuro lo actualizamos cada vez con mayor frecuencia, haciendo más complicado el análisis de la realidad que nos circunda. La razón de la complejidad se apoya sobre el carácter reflexivo de la sociedad del conocimiento en un doble sentido: por una parte, la ciencia posee la fuerza de actualizar virtualmente lo que va a ser y el agente de la acción histórica se aproxima a la realidad mediante las categorías que la ciencia ofrece de los fenómenos sociales y en la relación dialéctica, "distancia – pertenencia, lo que va a pasar, entra a formar parte de lo que sucede". Al incorporar el futuro al presente, el actor está modificando el objeto social del conocimiento, es decir, "el universo social se reestructura continuamente mediante los actos reflexivos de los seres humanos" (Mújica, 2003:77), instalándose de esta manera el cambio en el meollo mismo de la realidad, añadiendo una nueva dificultad a la educación.

Teniendo en cuenta el nuevo marco de las sociedades tecnificadas y el nuevo imperativo de la innovación, el proceso educativo de calidad debe ser, antes que cualquier otra cosa, una formación básica en hábitos intelectuales, operativos y éticos de la persona. Esto permitirá ofrecer el *capital humano* indispensable para las previsibles readaptaciones profesionales, a la par que garantiza el desarrollo técnico y económico sostenible y compatible con el deseo de vida buena, esto es, psicológica y moralmente satisfactoria, anhelo irrenunciable de todo ser humano, sea cual fuere su nivel de bienestar. Desde la perspectiva de la tradición y de la modernidad podemos precisar que capital humano es "la persona formada e informada para hacerse capaz de asumir por sí misma la responsabilidad de su biografía con el fin de realizarla como un proyecto personal e intranferible" (Maceiras, 2006:52). A esta formulación subyace la convicción

Universidad Pontificia de Salamanca

de que cada vida es la biografía de la que sólo puede ser autor quien se la atribuye como proyecto personal, en el que concurren episodios, situaciones, acciones y elecciones que, sea cual fuere el grado de autonomía o coacción, deben ser asumidas y reconocidas como propias. Incluso la ley, la obligación, la norma, el mandato y la creencia deberán ser legitimadas racional y reflexivamente por cada persona. Sólo así el ser humano podrá reconocerse como persona y se calificarán como éticas aquellas conductas que vienen motivadas por los aspectos teleológicos de la acción en vistas a la realización de proyecto biográfico. En el marco de la sociedad global del conocimiento, el discurso sobre la calidad de los procesos educativos urge la identificación de los aspectos radicales de la situación presente que, a modo de señales pueden "sugerir posibles enfoques innovadores para afrontar el porvenir en consonancia con las nuevas realidades" (Altarejos et al., 2003:18). Aunque sea brevemente, me detendré en dos dimensiones de la mayor relevancia en la configuración de ese horizonte humanístico: la educación para una ciudadanía universal y la educación en los valores para una convivencia pacífica, como explícitamente asevera la Ley[23] Orgánica de Educación (2/2006).

1.4.2.- Convivencia universal y educación en valores

La apertura educativa a la diversidad es una de las actitudes elementales que reclama la sociedad globalizada del conocimiento. Los procesos de globalización plantean como verosímil la aspiración a la universalidad de la comunidad humana que puede entrar en conflicto con la identidad bien sea nacional, religiosa o cultural. Este es un reto al que la educación de calidad y los procedimientos metodológicos para lograrlo no pueden sustraerse por mucho tiempo. Una formación humanística y cívica atenderá a los valores de la democracia, de la igualdad de oportunidades, del respeto a la diversidad, de la solidaridad y de la tolerancia. La ciudadanía es una realidad que "los miembros de la comunidad deben aprender a ejercitar y este aprendizaje requiere educación tanto para saber exigir nuestros derechos propios como para aceptar y saber asumir las responsabilidades como ciudadanos" (Cobo, 2005:122). La interpelación

[23] "Asimismo, se propone el ejercicio de la tolerancia y de la libertad, dentro de los principios democráticos de convivencia y la prevención de conflictos y la resolución pacífica de los mismos. Igualmente se insiste en la importancia de la preparación del alumnado para el ejercicio de la ciudadanía y para la participación en la vida económica, social y cultural, con actitud crítica y responsable. La relación completa de principios y fines permitirá asentar sobre bases firmes el conjunto de la actividad educativa" (Titulo Preliminar de la Ley Orgánica (2/2006) de Educación.

Universidad Pontificia de Salamanca

ética a la conciencia del individuo, desde la perspectiva de los derechos humanos exige, por parte de todos, la superación de las *propias miopías* y la necesidad de abrir nuestras conciencias a la elaboración de un pensamiento consistente e imprescindible, cuando se trata de prestar la debida atención a los asuntos relacionados con la educación, la pobreza o el medio ambiente.

Nos hallamos situados en un pequeño planeta, en que las distancias se acortan progresivamente, por lo que se requiere un esfuerzo que afiance en la vida de todo ser humano el convencimiento y el sentimiento de la *ciudadanía universal*, que nos estimule a pasar "del nosotros tribal al nosotros plural, ... pasar de un modelo de sociedad donde 'los demás', los que no son de mi comunidad ... no sean 'ellos', sino que formen parte de un 'nosotros' mayor", promoviendo la incorporación a este 'nosotros' de la misma naturaleza física, en que estamos instalados, lo que exige "pasar de una relación de explotación ... a una relación de protección y cuidado de una entidad vulnerable" (Carrera i Carrera, 2003:8).

El desarrollo de la ciudadanía universal[24] supone y exige la puesta en práctica de un conjunto de deberes y derechos de las comunidades políticas con los sujetos físicos y jurídicos que las componen y viceversa, así como las relaciones de dichos sujetos entre sí en el ámbito de la convivencia ciudadana. El concepto moderno de *ciudadano o ciudadana* no se refiere únicamente a algunos deberes y derechos humanos, como podía ser antaño el derecho de ciudadanía, que se vinculaba a algunos derechos políticos y civiles, sino a "todos los deberes y derechos humanos que dicen relación con la convivencia social. En consecuencia la ciudadanía universal es una síntesis de lo que puede ser la realización social integral de esos deberes y derechos en una comunidad política actual" (Cobo, 2005:121).

En la sociedad del conocimiento la función educativa no se agota en la transmisión de conocimientos y competencias sino que ha de atender a los valores como

[24] Para el profesor Graciano González "el primer escenario es el pluralismo social, que admite una variedad de interpretaciones. Aunque aquí, nosotros, lo vamos a entender como un descriptor social y sociológico. Social, en la medida en la que describe una situación de hecho, como es la variedad de cosmovisiones y de culturas que conviven en un mismo espacio socio-cultural; y sociológico por la consideración que la Sociología y la teoría Social han llevado a cabo sobre el mismo. En este último sentido, el denominado politeísmo axiológico weberiano puede ser considerado como la primera consideración relevante sobre la realidad de la pluralidad de cosmovisiones en el interior de la civilización occidental" (González, G., 2012)

Universidad Pontificia de Salamanca

objetivo inexcusable y asequible a todos los ciudadanos. Los efectos de la educación se extiende así al fortalecimiento de la cohesión e integración social y al debilitamiento de las desigualdades, entendidas como pobreza, marginación y exclusión. La educación de calidad se configura como el factor relevante, de notable eficacia, en la promoción social del individuo porque es una educación integral, de la persona y de cada persona, encaminada a su capacitación para realizar un proyecto de vida valioso en lo personal y social. Esta perspectiva urge la conveniencia de aportar valores pertinentes para que el educando no solo sea un buen técnico y un eficiente profesional, sino también un buen ciudadano capaz de identificarse críticamente con el proyecto nacional democrático, hacer su generosa participación al fortalecimiento de las instituciones democráticas y a la eficaz organización de la convivencia pacífica con los otros ciudadanos. Se ha de formar a los ciudadanos como trabajadores responsables de sus acciones, dotarles de competencias y habilidades para integrarse productivamente en el sistema económico; generar en los educandos las virtudes sociales de la tolerancia y la solidaridad que le habiliten para el ejercicio de la corresponsabilidad con las necesidades de sus vecinos, con las causas justas del ser humano en cualquier lugar y circunstancia y con la defensa del interés general sobre los intereses particulares. La vinculación explícita con los Derechos Humanos testifica que la educación se fundamenta en principios axiales básicos sobre los que se sustenten comportamientos solidarios y tolerantes que habrán de adquirir los sujetos educandos en el decurso de su formación, a fin de realizar exitosamente su integración en el medio social y profesional. Benedicto XVI (2012)a en el Mensaje para la XLV Jornada Mundial de la Paz del año 2012, que lleva por título *Educar a los jóvenes en la justicia y la Paz* insiste en la necesidad de educar a los jóvenes en los valores: "Prestar atención al mundo juvenil, saber escucharlo y valorarlo, no es solo una oportunidad, sino un deber primario de toda sociedad, para la construcción de un futuro de justicia y paz. Se ha de transmitir a los jóvenes el aprecio por el valor positivo de la vida, suscitando en ellos el deseo de gastarla al servicio del bien". La referencia a los grandes principios de la dignidad humana y del respeto con que ha de ser tratado siempre el ser humano, incluyen obviamente la libertad de todos, la preeminencia del principio de la frugalidad sobre la ostentación, la responsabilidad en el trabajo, la participación activa y tolerante en la organización democrática, la convivencia armoniosa, el ahorro, la solidaridad y otros semejantes.

Esta perspectiva en modo alguno ha de mermar la atención y esfuerzo en cuanto a los contenidos científicos y técnicos, obtenidos mediante procesos rigurosos de

Universidad Pontificia de Salamanca

investigación, depurados a lo largo del tiempo a través de la experiencia colectiva y por contraste con otros conocimientos difundidos por las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación. En la cesta del contenido de la educación han de estar presentes con igual o mayor rango los valores que, integrando la cultura del pueblo, han cristalizado en instituciones y comportamientos, como también los derechos y deberes recogidos en la Declaración Universal de los Derechos Humanos constituyen una senda segura de responsabilidad moral incuestionable: En el art. 26.2 se dice que "la educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las Naciones y todos los grupos étnicos o religiosos y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz"**.** Contextualizan también la educación aquellos valores, derechos y deberes, que acompañan la dignidad de la persona, la libertad, la solidaridad, la frugalidad, la convivencia democrática y pacífica, el trabajo y el ahorro, la responsabilidad con los bienes comunes naturales y sociales y tantos otros que se recogen en las Constituciones modernas de las sociedades democráticas y que han de ocupar un lugar preferente en la educación de las nuevas generaciones.

La exigencia de esta educación en valores se apoya también en el hecho de que la educación ha de orientar la formación integral del hombre que, en cuanto ser humano no es reducible a un ente económico, ayer productor y hoy consumidor. Es un constitutivo esencial del ser humano la tensión hacia la felicidad y, como decía el filósofo estoico Séneca, (1986:5.2) "*nadie puede ser llamado feliz, si se coloca fuera de la verdad*". La verdad que necesita y busca el hombre se inicia por el reconocimiento de la dignidad y la libertad del hombre, como defendió por primera vez en las tierras americanas fray Antonio de Montesino, formado en el convento de san Esteban de Salamanca y que proclamó en la predicación dominical del cuarto domingo de adviento del año 1511. Aquellos valores son tan válidos entonces como ahora por su indisociable raigambre en la verdad de la persona humana. Benedicto XVI (2011) en el discurso que dirigió a un grupo de jóvenes profesores de la universidad, con motivo de la Jornada Mundial de la Juventud celebrada en Madrid, indicó que "la Universidad ha sido, y está llamada a ser siempre, la casa donde se busca la propia verdad de la persona humana", que se asienta en la creación del ser humano a imagen y semejanza de Dios, cuya buena noticia "descubre una racionalidad en todo lo creado y contempla al hombre como criatura que participa y puede llegar a reconocer esa racionalidad". La búsqueda de la

Universidad Pontificia de Salamanca

verdad del ser humano complica la vida a todos los hombres de buena voluntad, puesto que el camino hacia la verdad completa compromete también al ser humano por entero: es un camino de inteligencia y de amor, que no se alcanza plenamente nunca, pero a pesar de esa circunstancia se debe buscar aunque no podamos poseerla del todo, porque siempre estará más allá de nuestro alcance. En el Mensaje para la celebración de la *XLV Jornada Mundial para la Paz* se reitera la necesidad y obligación de todos los integrantes en el proceso educativo de prestar la debida atención a los valores de justicia y verdad, a educar para la paz y en los valores sociales de la solidaridad y la tolerancia que la hacen posible: "La paz no es solo un don que se recibe, sino también una obra que se ha de construir. Para ser verdaderamente constructores de la paz debemos ser educados en la compasión, la solidaridad, la colaboración, la fraternidad; hemos de ser activos dentro de las comunidades y atentos a despertar las conciencias sobre las cuestiones nacionales e internacionales, así como sobre la importancia de buscar modos adecuados de redistribución de la riqueza, de promoción del crecimiento, de la cooperación al desarrollo y de la resolución de los conflictos" (Benedicto XVI, 2012)a. Se trata de un programa educativo de valores al servicio de la paz. En los dos asuntos siguientes presentamos algunos comportamientos y actitudes referidos a dos virtudes sociales necesarias para la consolidación y la expansión de la paz: la solidaridad se articula en sus exigencias con la colaboración y la compasión y la tolerancia apunta al horizonte de la resolución de conflictos. Ambas suscitan desde la fraternidad que vincula a todos los seres humanos no solo por la comunidad de origen y destino, sino principalmente por la igual dignidad que corresponde a todo ser humano.

1.4.3.- El valor de la solidaridad

La educación de calidad se plantea transmitir a los educandos valores de solidaridad y tolerancia, virtudes sociales por antonomasia, a fin de capacitarles para su integración en el mundo económico, social y político con provecho propio, beneficio para la sociedad y satisfacción de todos. La educación ha de hacer ciudadanos motivados a participar críticamente en las instituciones democráticas que se construyen y sustentan sobre el despliegue de la justicia en la organización, estructuración y funcionamiento de la democracia: aunque la justicia haya alcanzado un notable grado de realización, necesita el complemento de la solidaridad. Al afán de hacer solidarios a los estudiantes han de dedicarse los esfuerzos y recursos del sistema educativo, en la

Universidad Pontificia de Salamanca

convicción de que los ciudadanos educados en la solidaridad serán más intrépidos en la mejora, siempre posible y deseable, de las instituciones, al servicio del bienestar y calidad de vida de los ciudadanos. Como dice el profesor Rincón de Castro (2004:109) "después de 14 años de experiencia profesional educando a jóvenes mediante proyectos de voluntariado social, acompañando sus encuentros y desencuentros en la realidad social, investigando caminos y veredas transitables para educar en valores, se me ocurren varias razones y fundamentos que justifican ampliamente la promoción educativa hoy de los valores humanos, más concretamente los relacionados con la solidaridad y la cooperación social".

En la actualidad más que en otras épocas pasadas el hombre se ubica en situaciones de riesgo, peligro e incertidumbre, propias de la sociedad global. La expresión de riesgo y peligro no evoca los accidentes naturales, sino las situaciones peligrosas ocasionadas por la acción humana. La instalación pasiva del ser humano en la sociedad de riesgo le sitúa en coordenadas de incertidumbre y desconcierto, con muy escasa capacidad de hacer frente a las situaciones que afectan al bienestar, a la salud física y a la calidad de vida que tiene derecho a exigir desde la dignidad que posee por su condición de ser humano. Debido a estas limitaciones y carencias se exigen con mayor urgencia conductas y espacios de solidaridad, en que los seres humanos hallen cálida acogida, se encuentren con el otro que le ofrece simpatía y consideración compasiva, reforzando en la concurrencia los escenarios del 'nosotros' a fin de superar las dificultades propias de la sociedad del riesgo. La sociabilidad humana estimula y alienta originales modos y maneras de aproximación, compasión, cooperación, consideración y solidaridad. La prueba más obvia de esta disposición son los cientos de miles de personas solidarias que, agrupadas en el gigantesco movimiento de ONGs, dedican su tiempo, competencia y recursos a una intensa y solidaria actividad en la sociedad global. La escuela actual haría un buen servicio a la sociedad y a los educandos favoreciendo encuentros de estudiantes con cooperantes y tejiendo lazos de colaboración con algunas de las ONGs. que, con la exposición de los proyectos y el relato de sus experiencias, despertarían sentimientos de solidaridad y vocaciones de cooperantes [25]. Muchos de estos movimientos sociales constituyen verdaderas escuelas

[25] En la revista de Ciencias Sociales, SOCIEDAD Y UTOPÍA, nº 23, año 2004 hay un estupendo Dossier de 14 artículos de distintos expertos de indiscutible competencia sobre JÓVENES SOLIDARIOS, en que se tratan los nuevos modos de educar en valores, de practicar la solidaridad y de socializar a los jóvenes en valores socialmente apreciados.

Universidad Pontificia de Salamanca

de vida que educan para la solidaridad y la disponibilidad para entregarse a sí mismos. En todo caso contribuiría con notables posibilidades de éxito al conocimiento y a la experiencia existencial de valores e ideales emergentes en la sociedad actual que, transformados e interiorizados en pautas o normas de conducta, conducen el devenir existencial de la muchedumbre de individuos que profesan los valores morales de la solidaridad y dan vida al movimiento de las ONGs a nivel global. Facilitar y animar a los educandos a asomarse a estos escenarios de solidaridad constituye un modo digno de ejercer la educación en valores y “una actitud ética desde la solidaridad supone trabajar por conseguir buenos ciudadanos. Es preciso inculcar en ellos buenas costumbres a través de buenas leyes. Aquí la educación, los medios de formación de masas (televisiones principalmente) y una legislación con instituciones adecuadas son elementos claves y determinantes” (Velasco, 2004: 248).

No cabe duda que la justicia es el valor o la virtud clave de la ética y en consecuencia es la condición necesaria para la felicidad del ser humano y fin último de la vida moral, puesto que donde no habita la justicia, como escribe Victoria Camps (1990: 33-34), el discurso de la dignidad del ser humano no tiene sentido: “a fin de cuentas la justicia intenta hacer realidad esa hipotética igualdad de todos los humanos y la no menos dudosa libertad en tanto derechos fundamentales del individuo. Derechos que son el requisito de una calidad de vida que debe ser objeto luego de conquista individual”. Ahora bien, la realización de la justicia no depende sólo de la buena voluntad de los individuos, sino también de la ley y del pertinente soporte material e institucional. Los buenos sentimientos implicados en la solidaridad ayudan al logro de los fines de la justicia pero no la constituyen. Ahora bien, la justicia tiene manifiestas limitaciones que evidencian la necesidad del valor vecino de la justicia que es la solidaridad. Desde este punto de vista la justicia para alcanzar su objetivo en plenitud necesita de la solidaridad. Para Manuel Sánchez Cuesta (2003:136-137) la solidaridad es la virtud social que ejerce como complemento necesario de la justicia: “si para la justicia lo que merece el otro es aquello que en derecho le corresponde – derecho subjetivo, naturalmente – la virtud de la solidaridad nos insta a la simpatía, estado que nos conduce a sentir al otro desde el interior de si mismo y, por lo tanto, hacer nuestras sus necesidades. Esta vivencia compartida es la que nos aúna en una igualdad de fines y derechos”. De esta manera la solidaridad es la virtud que, situándose en la órbita de la justicia, permite recorrer el trecho disponible para la debida aproximación al individuo facilitando que la justicia se centre en el interés general. Mediante la solidaridad nos

Universidad Pontificia de Salamanca

acercamos al ser humano en cuanto individuo concreto con el que compartimos el sufrimiento que necesita consuelo, nos afanamos en la búsqueda de soluciones a los problemas socioeconómicos que le apremian, compartimos las tristezas que le oprimen, le acompañamos en su soledad, le hacemos presente nuestra compasión por lo irremediable que le hiere y le manifestamos nuestra simpatía, amistad y consideración por su persona.

1.4.4.- La tolerancia en la sociedad global

La sociedad global por definición es una sociedad multicultural, genéticamente plural, religiosamente diversificada, con estilos de vida muy diferenciados, aunque las interdependencias que, desde el punto de vista económico y político, vertebran y pretenden organizar la diversidad planetaria, facilitan y alientan la movilidad de grandes masas de individuos de unas a otras regiones situadas en diferentes latitudes del planeta. La educación de calidad en este escenario, ha de tener presente un asunto del mayor interés: el individuo desea alcanzar una vida buena, socialmente integrada y personalmente gratificante en la sociedad donde quiere vivir. Desde este punto de vista, la educación debería alcanzar estimables logros en la formación de individuos tolerantes. Un mundo progresivamente abierto espera a las generaciones futuras. Los intercambios culturales y la convivencia con individuos de religiones distintas y costumbres diversas será el normal acontecer que la educación ha de asumir como estímulo para habituar en los sujetos educandos actitudes tolerantes y comportamientos coherentes que faciliten la convivencia gratificante con seres humanos de otras procedencias culturales, religiosas o de costumbres. La tolerancia [26] se ha desarrollado con cierto retraso respecto de la constancia y la discreción: "se ha formado primero en el terreno confesional cuando, después de la Reforma, se perdió en Alemania la unidad, hasta entonces evidente de Iglesia y Estado y varias confesiones tuvieron que convivir dentro del mismo Estado" (Bollnow,1960:136). En los párrafos que siguen se pretende el análisis conceptual de la tolerancia como imprescindible virtud social para la consolidación y funcionamiento de las instituciones democráticas en la sociedad global.

[26] La tolerancia forma parte de las tres virtudes que constituyen el argumento de la exhortación hecha a Tamino en la 'Flauta Mágica' de Wolfgang Amadeus Mozart: "sé constante, tolerante y discreto". El significado de esta fórmula parece responder a un ideal ético de lo que podría denominarse el ideal burgués de las virtudes morales que debieran configurar el perfil profesional de los gestores del Estado.

Universidad Pontificia de Salamanca

En el uso común del lenguaje el término tolerancia señala a una actitud comprensiva hacia culturas, costumbres y hechos diferentes a los propios de la persona tolerante. En un sentido más propio, la tolerancia implica una disposición de mayor alcance que la mera comprensión y exige organizar la convivencia pacífica con creencias y actitudes religiosas, ideológicas y sociales que uno desaprueba sin impedirlas ni hostilizar a quienes las practican. La tolerancia, desde este punto de vista, no se identifica con la indiferencia en el sentido de tolerar cualquier opinión, creencias, usos sociales y costumbres porque todas se consideran de igual valor en relación con la verdad y el bien. La indiferencia apunta a todo aquello que nos da igual, mientras que la tolerancia significa tolerar aquello que nos desagrada. Tampoco se ha de identificar tolerancia con actitudes de respeto hacia lo respetado, más bien la tolerancia suscita actitudes de rechazo y reprobación respecto de lo tolerado (Sabater, 2006) . Tampoco se identifica tolerancia con permisividad, cuando ésta tiene el significado de consideración amoral de la vida humana y especialmente de la vida de la colectividad. La tolerancia habría de entenderse especialmente como una respetuosa consideración hacia la diferencia, "como una aceptación del legítimo pluralismo o como una disposición a admitir en los demás una manera de ser y obrar distinta a la propia" y esto es obviamente un valor de gran importancia en la sociedad moderna (Aguiló, 1995: 267).

En el resumen final del libro *La Tolerancia,* Iring Fetscher (1996:143) la define en los términos siguientes: "He calificado la tolerancia de 'pequeña virtud', no porque la considere insignificante, sino porque depende de otras virtudes y condiciones institucionales, sin las cuales perdería su valor". La tolerancia significa principalmente el reconocimiento de las diferencias y de su derecho a ser diferentes. No ha de confundirse con la indiferencia y está relacionada con la simpatía y el interés, aunque en distinto grado respecto de las diferencias y de los diferentes. En relación al compromiso con la tolerancia, el autor se decanta por implicar no solo a los individuos sino a las instituciones sociales puesto que es una actitud a practicar por el individuo, el grupo social, el gobierno, el parlamento y la 'opinión pública'.

Salvador Giner (1998) escribe un amplio capítulo dedicado a la tolerancia, a la necesidad de establecer limitaciones y a dar ánimo a las personas tolerantes a manifestar sus firmes convicciones respecto de las propias verdades, que no se afirman contra alguien y a defender sus convicciones como verdaderas. Para el autor, la tolerancia consiste en "soportar las actitudes y comportamientos de los demás aunque vayan contra lo que consideramos correcto y hasta verdadero. Como sólo puede haber una

Universidad Pontificia de Salamanca

única verdad para cada cosa (…) el resultado es que tolerar puede entrañar soportar de grado el error del prójimo. (…) La tolerancia también puede significar que esperamos que la persuasión, el curso de los acontecimientos y el paso del tiempo permitirán juntos que se haga la luz para aquellos que moran en el error" (Giner,1998:120). El autor distingue la tolerancia activa de la pasiva. La pasiva consiste en cierta disponibilidad a que cada cual haga lo que le parezca más oportuno y conveniente sin que ello moleste a los demás. Es la actitud de no entrometerse en el ámbito de lo que cada cual considera su espacio propio y, por mor de la convivencia pacífica, se estima conveniente aceptar las diferencias llevaderas. No presenta especiales dificultades para el común de los ciudadanos este tipo de tolerancia, que se incluye en el recetario de los buenos modales más que entre los hábitos virtuosos. En cambio, la tolerancia activa "es una actitud deliberada que nos permite apoyar el pleno derecho que todos tenemos a expresar y predicar nuestras opiniones, fe y creencias, así como practicar nuestras costumbres y discrepar de cuantas nos parezca. (…) Esta suerte de tolerancia es un fenómeno que va estrechamente ligado a la modernidad ". La tolerancia activa imbrica un acto "de libertad profunda porque no puede ejercerse sin reconocer explícitamente la libertad del otro" (Giner,1998:122). La práctica de la tolerancia activa crea problemas y plantea dificultades muy lejos de lo que sucede cuando tomamos la senda de la indiferencia, sobre todo si nuestra disposición es no intervenir.

Los Estados Miembros de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) congregados en París con motivo de la 28ª reunión de la Conferencia General, del 25 de octubre al 16 de noviembre de 1995, hacen una *Declaración de Principios sobre la Tolerancia,* en la que se contiene una noción de la misma y unos principios básicos que han de orientar la educación para formar individuos tolerantes. En cuanto al significado de la tolerancia, la UNESCO (1995) elabora una definición descriptiva en el artículo 1, en los siguientes términos: "La tolerancia consiste en el respeto, la aceptación y el aprecio de la rica diversidad de las culturas de nuestro mundo, de nuestras formas de expresión y medios de ser humanos. La fomentan el conocimiento, la actitud de apertura, la comunicación y la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión. La tolerancia consiste en la armonía en la diferencia. No sólo es un deber moral, sino además una exigencia política y jurídica. La tolerancia, la virtud que hace posible la paz, contribuye a sustituir la cultura de guerra por la cultura de paz". Se completa la noción con algunas matizaciones en las que se identifica la tolerancia con una "actitud activa de

Universidad Pontificia de Salamanca

reconocimiento de los derechos humanos universales"; se consideran sujetos que han de practicar la tolerancia "los individuos, los grupos y los Estados"; se añade también que la tolerancia supone "el rechazo del dogmatismo y del absolutismo". Tolerancia no significa "tolerar la injusticia social ni renunciar a las convicciones personales (…) significa que toda persona es libre de adherirse a sus propias convicciones y acepta que los demás se adhieran a las suyas". En los siguientes artículos de esta Declaración de Principios se tratan aspectos complementarios sobre la virtud social de la tolerancia. En el art. 2 se anima a los Estados a ratificar "las convenciones internacionales existentes en materia de derechos humanos" a fin de construir sociedades más tolerantes. En el tercer artículo, se afirma que la tolerancia es en la actualidad "más esencial que nunca" precisamente por la globalización económica, la movilidad global de los individuos y la expansión mundial de las comunicaciones. El artículo 4 relaciona la tolerancia con la educación: "la educación es el medio más eficaz de prevenir la intolerancia" y a renglón seguido señala que "la educación para la tolerancia ha de considerarse un imperativo urgente; por eso es necesario fomentar métodos sistemáticos y racionales de enseñanza de la tolerancia". El compromiso para la acción se menciona en el artículo 5 y en el siguiente se atiende al objetivo principal del Documento: "A fin de reafirmar nuestro apoyo y acción en pro del fomento de la tolerancia y de la educación en favor de ésta, proclamamos solemnemente Día Internacional para la Tolerancia el día 16 de noviembre de cada año" (UNESCO:1995).

En síntesis, la tolerancia es la virtud social de la democracia moderna, propia de las sociedades globalizadas del conocimiento, donde la pluralidad de individuos de culturas diversas, diferentes religiones y distintas costumbres traen a nuestra vecindad el fenómeno de la diferencia, con el que parece necesario convivir. Para asegurar la convivencia pacífica y armoniosa se han de difundir actitudes y comportamientos tolerantes, es decir, la educación ha de asumir el reto de preparar a los sujetos educandos en valores y actitudes favorables a la tolerancia. La virtud de la tolerancia es una difícil virtud, no es innata a nuestra naturaleza sino que se ha de adquirir como efecto de una socialización bien lograda, que sólo emerge en las culturas ya maduras y "cuya pérdida puede ser un signo infalible de la caída en una nueva barbarie" (Bollnow: 1960:). El profesor Arteta concreta un poco más esta exigencia y añade que "la tolerancia aparece como demanda política y virtud moral allí donde está amenazada la libertad o incluso la vida de las personas a propósito de sus creencias". Es decir, en aquellas sociedades donde se persiguen las creencias, pero también en las llamadas

Universidad Pontificia de Salamanca

"sociedades multiculturales", cuyo objetivo es "acabar con todo género de injusta discriminación" (Arteta: 1998: 65). Entre otras características relevantes respecto de la tolerancia podrían mencionarse, que la tolerancia se fundamenta en la capacidad racional del ser humano, emerge al socaire de la pluralidad cultural de las sociedades modernas y se hace insustituible con la intensidad de las comunicaciones. En las sociedades modernas las comunicaciones tejen sistemas de redes que alcanzan al orbe entero, el turismo crece exponencialmente y los intercambios culturales, económicos y de toda condición se acentúan considerablemente y por tanto parece lógico que el aprendizaje de la tolerancia se consolide y acreciente notablemente en los espacios abiertos de la sociedad global.

Para concluir este apartado sobre la tolerancia, traemos a estas páginas un requerimiento a favor de la libertad tomado del discurso que Benedicto XVI dirigió a los Diplomáticos acreditados ante la Santa Sede, el día 9 de enero de 2012, en el que se articula la difícil realidad internacional con la necesidad de una educación eficaz y la exigencia de la tolerancia, que tanto se echa de menos en el concierto internacional, referida a las minorías y de modo especial a las minorías cristianas, que son las más vulnerables en la actual sociedad globalizada: "Se comprende que una labor educativa eficaz requiera igualmente el respeto de la *libertad religiosa.* Ésta se caracteriza por una dimensión individual, así como por una dimensión colectiva y una dimensión institucional. Se trata del primer derecho del hombre, porque expresa la realidad más fundamental de la persona. Este derecho, con demasiada frecuencia y por distintos motivos, se sigue limitando y violando. Al tratar este tema no puedo dejar de honrar la memoria del ministro paquistaní Shahbaz Bhatti, cuyo combate infatigable por los derechos de las minorías culminó con su trágica muerte. Desgraciadamente no se trata de un caso aislado. En muchos países, los cristianos son privados de sus derechos fundamentales y marginados de la vida pública; en otros, sufren ataques violentos contra sus iglesias y sus casas" (Benedicto XVI, 2012)b.

1.4.5.- A modo de síntesis

Como resumen del apartado, la educación humanista, se ofrecen las proposiciones siguientes:

1) En el marco de la sociedad global del conocimiento, el discurso sobre la calidad de los procesos educativos ha de apuntar a una formación integral del ser humano para que pueda adaptarse a las cambiantes circunstancias, posibilitando las

Universidad Pontificia de Salamanca

posibles readaptaciones profesionales, ejercitando la necesaria apertura al otro y a sus circunstancias en cualquier situación en que el ser humano individual o colectivamente se ve afectado en su dignidad y humanidad.

2) El desarrollo de la ciudadanía y de la convivencia universal exige el conocimiento y la práctica de un conjunto de deberes y derechos de las comunidades políticas con los sujetos físicos y jurídicos que las integran y viceversa, así como las relaciones de dichos sujetos entre sí en el ámbito de la convivencia ciudadana. El concepto moderno de ciudadano del mundo muestra una vinculación con los deberes y derechos humanos que dicen relación con la convivencia social, puesto que la ciudadanía universal viene a ser una síntesis de la realización social integral de esos deberes y derechos en una comunidad política actual, todavía nacional, pero ya exigente a la gradual aceptación de la comunidad humana en cuanto tal. La conveniencia universal aporta valores pertinentes para que el educando alcance a realizarse como un buen ciudadano capaz de identificarse críticamente con el proyecto nacional democrático, hacer su generosa participación al fortalecimiento de las instituciones democráticas y a la mejor organización de una convivencia pacífica con los otros ciudadanos y a responsabilizarse con con las causas justas del ser humano en cualquier lugar y circunstancia y con la defensa del interés general sobre los intereses particulares. La ciudadanía universal y la convivencia global han de contextualizar una educación en valores, deberes y derechos humanos que muestren el respeto por la dignidad de la persona humana.

3) La vinculación explícita con los Derechos Humanos avala una educación fundamentada en principios axiales sólidos, capaces de generar comportamientos solidarios para realizar exitosamente su integración en el medio social y profesional. La sociabilidad humana estimula y alienta originales modos y maneras de aproximación, compasión, cooperación, consideración y solidaridad entre los seres humanos. La prueba más obvia es el gigantesco movimiento de ONGs, los cientos de miles de personas solidarias que dedican su tiempo, competencia y recursos a una intensa y solidaria actividad en la sociedad global. La escuela actual haría un buen servicio a la sociedad y a los educandos trasmitiendo valores de solidaridad mediante encuentros de estudiantes con cooperantes y tejiendo lazos de colaboración con las ONGs más responsables y dinámicas. Muchos de estos movimientos sociales constituyen verdaderas escuelas de vida que educan para la solidaridad. Contribuiría con notables posibilidades de éxito El conocimiento y la experiencia existencial de estos solidarios

Universidad Pontificia de Salamanca

ideales, emergentes en la sociedad actual, facilitaría el éxito de la tarea educativa y constituiría un modo digno de ejercer la educación en valores.

4) La tolerancia es la virtud social de la democracia moderna, propia de las sociedades globalizadas del conocimiento donde la pluralidad de individuos de culturas diversas, diferentes religiones y distintas costumbres traen a nuestra vecindad el fenómeno de la diferencia, con el que es necesario convivir. Para asegurar la convivencia pacífica y armoniosa se han de difundir actitudes y comportamientos tolerantes, es decir, la educación ha de asumir el reto de preparar a los estudiantes en valores y actitudes favorables a la tolerancia. La virtud de la tolerancia es una difícil virtud, no es innata a nuestra naturaleza sino que se ha de adquirir como efecto de una socialización bien lograda. La tolerancia se fundamenta en la capacidad racional del ser humano, emerge al socaire de la pluralidad cultural de las sociedades modernas y se hace insustituible con la intensidad de las comunicaciones que en la sociedad global tejen sistemas de redes que potencian la comunicación. El crecimiento del turismo y los intercambios culturales, económicos y científicos se acentúan considerablemente y, en consecuencia, es pertinente que el aprendizaje y la práctica de la tolerancia se consolide y acreciente notablemente en los espacios abiertos de la sociedad global.

1.5.- COROLARIOS PEDAGÓGICOS PARA LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS

En el análisis de la situación actual se impone con impulso incuestionable, la crisis económica europea que padecemos, la falta de valores auténticos que nos permitan orientarnos con cierta seguridad, la precariedad y escasez del trabajo, una cultura de la vida fácil que choca inevitablemente con la realidad cotidiana, de la búsqueda angustiosa del placer inmediato, del pesimismo y del descrédito social de la institución familiar.

Sin embargo, aun el análisis más superficial de la realidad nos lleva a apreciar los grandes avances científicos, tecnológicos; el potente desarrollo que han tenido las comunicaciones a través de internet y los Mass Media, la progresiva cercanía de los diferentes mercados y la ampliación de fronteras que hemos vivido los últimos años, en el mundo occidental desarrollado.

Universidad Pontificia de Salamanca

En este marco de realidad, la educación tiene como meta el desarrollo y maduración de la persona, el desarrollo y progreso de las sociedades y el crecimiento económico, que, en conjunto, motivan la específica reflexión sobre cuál es la situación actual de la educación, hacia donde caminamos y que líneas debemos perseguir en esa búsqueda de una educación de la mayor calidad, como proyecto que involucre los tres grandes retos mencionados y aquellos otros que las políticas educativas nos ofrezcan en convergencia con los intereses de los alumnos y las convicciones que demandan al sistema educativo los padres de los alumnos. Nuestra convivencia en la sociedad globalizada del conocimiento, que es esencialmente una sociedad abierta, exige una mejor y mayor adquisición de conocimientos y valores, de competencias y habilidades.

Nuestra observación participada del sistema educativo nos delata cierta falta de ilusión, un rutinario decaimiento de los procesos de enseñanza que se traduce en menor esfuerzo exigido en la formación de los estudiantes y en un menor compromiso de los padres, más preocupados porque sus hijos pasen de curso que por su formación. En los análisis efectuados sobre los resultados de las diferentes pruebas, internacionales, nacionales y autonómicas, se perciben nítidas limitaciones en los contenidos científicos en la educación y en la percepción de la ciencia y de las matemáticas por parte de los estudiantes y de los profesores que no guarda la adecuada coherencia con las exigencias de la sociedad del conocimiento. En las circunstancias críticas actuales, la falta de autoridad de los profesores, el quebranto de su estatus social y los recortes en sus remuneraciones evidencian una infravaloración por parte de la sociedad, respecto del profesor y de su tarea, que degrada la educación.

La precedente reflexión que sobre la educación se ha llevado a cabo en este capítulo primero de una tesis dedicada al estudio del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el escenario de la ESO en España, tenía la finalidad de establecer el marco general educativo en que ha de insertarse en todo caso el proceso de la educación matemática, que es una parte esencial, pero una parte, del necesario proceso educativo de la ciencia en la sociedad tecnológica del conocimiento. En este contexto se ofrece ahora una síntesis o resumen abreviado de los asuntos tratados, siguiendo el orden de los apartados del capítulo.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.5.1.- El progreso educativo hacia la equidad.

Una breve recopilación de lo tratado en el primer apartado de este capítulo y elaborando una nueva síntesis de lo mostrado en su lugar se podía presentar de la siguiente manera:

1) La primera perspectiva de incuestionable eficacia apunta a que los ciudadanos en la actualidad y más si cabe hacia el futuro inmediato se organizarán para convivir en una sociedad global abierta. La imperiosa necesidad de comunicarse con la debida corrección y la adecuada pericia con individuos de otras culturas en la persecución de sus intereses, relacionándose hábilmente con personas de culturas diferentes, motivan las oportunas demandas para una sustancial mejora en la adquisición de conocimientos, competencias y habilidades para que los hoy estudiantes, mañana puedan relacionarse satisfactoriamente con los otros.

2) Las pruebas internacionales, nacionales y autonómicas que realizan con periodicidad los estudiantes de primaria, secundaria y bachillerato muestran unos resultados claramente perfectibles, lo que parece evidenciar desajustes en el sistema de la enseñanza- aprendizaje. Si el 50 por ciento de los jóvenes con estudios superiores o profesionales concluidos, dispusieran de un equipamiento de dos o tres idiomas, como demandan las resoluciones de la Unión Europea, tal vez no engrosarían las listas del desempleo en nuestro país. Las instituciones europeas denuncian desde hace varios años la deficiente preparación científica y matemática así como el excesivo distanciamiento entre la educación y las necesidades del sistema productivo. El profesor en el aula podría a veces iniciar sus explicaciones, haciendo referencia a estos problemas que afectan a la sociedad española, para desde esa constatación suscitar motivos y vocaciones hacia ámbitos de ajuste entre educación y necesidades.

3) Las dimensiones concernientes a la construcción de la identidad personal y social han de ser analizadas mediante procedimientos y contenidos educativos que apoyen la reflexión personal y social de sus educandos. El sistema educativo ha de asumir como un reto inexcusable facilitar al individuo su integración satisfactoria en la comunidad nacional de pertenencia, para fortalecer las instituciones democráticas y profesar la conveniente devoción a la patria, que ha de apoyarse en el conocimiento de su trayectoria histórica y en el aprecio de sus espacios naturales y de sus creaciones culturales, para conservarlos y enriquecerlos con su talento y esfuerzo.

4) Las exigencias que la equidad demanda a la educación constituyen un aporte de progreso, una vez satisfechas las necesidades de la universal escolarización y constituye

Universidad Pontificia de Salamanca

una dimensión moral que urge a todos los integrantes del sistema educativo a tratar con el debido respeto a los sujetos educandos que les compete instruir pero sobre todo educar dentro del más estricto respeto a esos frágiles destinatarios que son los estudiantes.

1.5.2.- La calidad educativa.

En una aproximación al concepto de calidad educativa, en cuanto proceso, camino o trayectoria más que como logro o resultado, se ha enfatizado la conveniencia y necesidad a atender a una pluralidad de elementos, sin priorizar unos sobre otros, que requeriría una mas profunda y muy concreta investigación. En este apartado se han considerado relevantes el profesorado, el alumnado, el entorno educativo, el centro escolar, el currículo y las políticas que ayudan, motivan e incentivan, las familias y otros factores, que nos han permitido inferir algunas conclusiones, aunque todavía muy provisionales, sobre la necesidad de avanzar en la identificación de las metas permanentes de la educación, aproximarnos a los elementos esenciales de una definición de educación de calidad, mencionando los indicadores de calidad y mostrando los criterios de calidad mas destacados de la política educativa.

1) Respecto de las metas permanentes de la educación el análisis se centra en el desarrollo del individuo que implica la promoción y maduración de la persona; el desarrollo democrático de la sociedad que demanda ciudadanos activos y participativos. En el nivel práctico, la educación de calidad se legitima por el satisfactorio equipamiento conceptual y competencial de los individuos en orden a su integración laboral, a su capacidad de decisión en la actividad económica, a la capacidad de trabajar en equipo y a su disposición responsable respecto de las tareas productivas encomendadas. Desde los documentos de la UNESCO, de la OCDE y de otros organismos internacionales de semejante autoridad se acentúa la calidad educativa en cuanto condición inexcusable para el desarrollo, para la invención e innovación, para la necesaria adaptabilidad social y laboral y para hacer rentable la inversión en la educación.

2) Tradicionalmente, la noción de educación de calidad integra una pluralidad de factores. En primer término están el profesorado, el alumnado, el centro educativo y sus normativas interna y externa estructuran el clima de actuación y compromiso de la comunidad educativa con el proyecto del centro. En segundo término, pero con

Universidad Pontificia de Salamanca

reconocida influencia, por parte de los expertos de calidad educativa, se apunta a los procesos de enseñanza – aprendizaje y los diferentes procedimientos metodológicos implicados. Aunque con una influencia todavía sin cuantificar, en la actualidad se consideran decisivos otros factores, como el incremento de la alfabetización que, en sentido amplio, incluye la lectura comprensiva, la escritura como mediación eficaz para la clarificación mental y de la conciencia, la habituación con los procedimientos científicos y la formación matemática.

3) En la investigación empírica de la educación de calidad, en España, desde hace unos diez años se cuenta con un sistema de indicadores, técnicamente bien elaborado por parte del Instituto Nacional de Evaluación del Ministerio de Educación y con él se realizan las correspondientes pruebas nacionales lo que permite comparaciones sobre el nivel de calidad entre centros, favoreciendo alguna competencia. En cuanto a otros indicadores, la investigación empírica está avanzando con esmerado rigor. Se han de mencionar las investigaciones que lleva a cabo PISA sobre resultados educativos en comprensión lectora, competencias matemáticas y conocimientos científicos. Tienen estos la ventaja de que se realizan en muchos países lo que produce una acumulación de datos, elevando así los niveles de validez de otros modelos de indicadores, que sin duda favorecen estudios parciales y sectoriales sobre asuntos relacionados con la calidad educativa.

4) En el contexto de política educativa, nos encontramos con los documentos de la Administración educativa, que regula la educación obligatoria, aunque también deberían tomarse en consideración las actitudes sociales de las empresas privadas respecto de la formación educativa, las orientaciones educativas e investigadoras de las Universidades en relación con los profesores de enseñanza secundaria y bachillerato, así como las ayudas y becas para la formación permanente del profesorado de ESO y bachillerato, como también los centros de investigación. De los documentos oficiales de la Administración educativa se infieren las mejores intenciones y propuestas para una educación de calidad, aunque no siempre acompañan los adecuados recursos. No hay, sin embargo, un documento específico sobre la calidad educativa.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.5.3.- Las competencias y las tecnologías.

En este apartado el análisis se centró en las competencias y las tecnologías de la información y de la comunicación como objetivos fundamentales del proceso educativo.

1) El análisis sobre las competencias puso de manifiesto algunos aspectos del sistema educativo que se consideran importantes: evidentes limitaciones en los contenidos científicos y matemáticos de la educación europea y también español; la imagen de la ciencia en los estudiantes y en los profesores no es tan positiva como fuere deseable en la sociedad del conocimiento; insuficiente conocimiento y escasa valoración de la dependencia que el progreso socio-económico de los individuos, de la sociedad y de la economía tiene respecto de los avances científico-técnicos y de una educación consecuente. Se percibe la urgencia de equipar al sujeto educando con los conocimientos, competencias y habilidades que le permitan una razonable comprensión de la estructura y funcionamiento de todo un conjunto de informaciones, aparatos, sistemas y organizaciones que están al alcance de los individuos, mejoran su calidad de vida y son imprescindibles en la vida cotidiana. Todo este bagaje es fruto de la ciencia. Para asegurar que esta trayectoria va a continuar, es imprescindible generar recursos y vocaciones de científicos, para lo cual es imprescindible difundir una imagen positiva de la ciencia, en sí misma y en sus aplicaciones prácticas.

En el espacio de la Unión Europea, en el que estamos ubicados, la percepción de deterioro de la situación ha puesto en alerta a las autoridades europeas, que están organizando centros para la formación científica de los profesores, renovar los contenidos científicos del currículo a impartir y formarlos para que sean capaces de motivar a los estudiantes a favor de las matemáticas y de las materias científicas y de transmitir los mencionados conocimientos con rigor y éxito. Para lograr actitudes positivas respecto de los contenidos matemáticos y científicos, por parte de los estudiantes, se crean concursos, olimpiadas y competiciones para estimularlos en el aprendizaje matemático y científico, se ha decidido repetir pruebas internacionales para hacer el seguimiento del asunto y se recurrirá a investigaciones empíricas a fin de conocer los progresos o retrocesos en la cuestión. La conversión de los conocimientos en competencias, habilidades y destrezas permite unas evaluaciones más adecuadas por su mayor nivel de concreción que importan. Están, sin embargo, ocupando gran parte de las energías de profesores y centros y tal vez no se esté dedicando la suficiente atención

Universidad Pontificia de Salamanca

a la elaboración y ajustamiento de las competencias a los conocimientos y a poner de manifiesto las conexiones de las competencias con la ciencia práctica en los comportamientos de la vida cotidiana de los individuos.

2) En cuanto a la aplicación de las tecnologías de la información y de la comunicación en los procesos de la enseñanza-aprendizaje se constata que no resultó fácil su introducción. Las reticencias vinieron sobre todo de los ambientes del profesorado y de los centros que, aunque con cierta lentitud, van equipándose con las TICs. En la actualidad el uso de las TICs en las materias científicas y en las matemáticas es todavía bastante limitado, pero se ha alcanzado una cierta convergencia de opiniones favorables a su empleo en la explicación del aula entre profesores y estudiantes, aunque siempre utilizando diferentes procedimientos que se complementen. En todo caso, su utilización es de apoyo a otros procedimientos. Se ha generalizado el convencimiento de que la introducción de las TICs en el proceso de la enseñanza-aprendizaje exige por parte del profesor una mayor dedicación al diseño y una meticulosa preparación de las unidades didácticas.

1.5.4.- La dimensión humanista de la educación.

Como resumen del apartado, la educación humanista, se ha alcanzado la elaboración de algunas proposiciones con el siguiente contenido:

1) En el marco abierto de la sociedad global del conocimiento, el discurso sobre la calidad de los procesos educativos ha de apuntar a una formación integral del ser humano para que pueda adaptarse a las cambiantes circunstancias, se posibiliten las sucesivas readaptaciones profesionales, sea capaz de practicar el diálogo con el otro, de ejercitar la necesaria apertura a la diferencia y a la aceptación del otro diferente y de defender, en cualquier situación y circunstancia, al ser humano individual o colectivamente dañado en su dignidad y humanidad.

2) El desarrollo de la ciudadanía y de la convivencia universal exige el conocimiento y la práctica de un conjunto de deberes y derechos de las comunidades políticas con los sujetos físicos y jurídicos que las integran y viceversa, así como las relaciones de dichos sujetos entre sí en el ámbito de la convivencia ciudadana. El concepto moderno de ciudadano del mundo muestra una vinculación con los deberes y derechos humanos que dicen relación con la convivencia social, puesto que la ciudadanía universal viene a ser una síntesis de la realización social integral de esos

Universidad Pontificia de Salamanca

deberes y derechos en una comunidad política actual, todavía nacional, pero ya exigente a la gradual aceptación de la comunidad humana en cuanto tal. La conveniencia universal aporta valores pertinentes para que el educando alcance a realizarse como un buen ciudadano capaz de identificarse críticamente con el proyecto nacional democrático, hacer su generosa participación al fortalecimiento de las instituciones democráticas y a la mejor organización de una convivencia pacífica con los otros ciudadanos y a responsabilizarse con las causas justas del ser humano en cualquier lugar y circunstancia y con la defensa del interés general sobre los intereses particulares. La ciudadanía universal y la convivencia global han de contextualizar una educación en valores, deberes y derechos humanos que muestren el respeto por la dignidad de la persona humana.

3) La vinculación explícita con los Derechos Humanos avala una educación fundamentada en principios axiales sólidos, capaces de generar comportamientos solidarios para realizar exitosamente su integración en el medio social y profesional. La sociabilidad humana estimula y alienta originales modos y maneras de aproximación, compasión, cooperación, consideración y solidaridad entre los seres humanos. La prueba más obvia es el gigantesco movimiento de ONGs, los cientos de miles de personas solidarias que dedican su tiempo, competencia y recursos a una intensa y solidaria actividad en la sociedad global. La escuela actual haría un buen servicio a la sociedad y a los educandos trasmitiendo valores de solidaridad mediante encuentros de estudiantes con cooperantes y tejiendo lazos de colaboración con las ONGs más responsables y dinámicas. Muchos de estos movimientos sociales constituyen verdaderas escuelas de vida que educan para la solidaridad. El conocimiento y la experiencia existencial de estos solidarios ideales, emergentes en la sociedad actual, facilitaría el éxito de la tarea educativa y constituiría un modo digno de ejercer la educación en valores.

4) La tolerancia es la virtud social de la democracia moderna, propia de las sociedades globalizadas del conocimiento donde la pluralidad de individuos de culturas diversas, diferentes religiones y distintas costumbres traen a nuestra vecindad el fenómeno de la diferencia, con el que es necesario convivir. Para asegurar la convivencia pacífica y armoniosa se han de difundir actitudes y comportamientos tolerantes, es decir, la educación ha de asumir el reto de preparar a los estudiantes en valores y actitudes favorables a la tolerancia. La virtud de la tolerancia es una difícil virtud, no es innata a nuestra naturaleza sino que se ha de adquirir como efecto de una

Universidad Pontificia de Salamanca

socialización bien lograda. La tolerancia se fundamenta en la capacidad racional del ser humano, emerge al socaire de la pluralidad cultural de las sociedades modernas y se hace insustituible con la intensidad de las comunicaciones que en la sociedad global tejen sistemas de redes que potencian la comunicación. El crecimiento del turismo y los intercambios culturales, económicos y científicos se acentúan considerablemente y, en consecuencia, es pertinente que el aprendizaje y la práctica de la tolerancia se consolide y acreciente notablemente en los espacios abiertos de la sociedad global.

1.6.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

AGUADED, J.I.; PÉREZ, M.A. y MONESCILLO, M., (2010). Hacia una integración curricular de las TIC en los centros educativos andaluces de Primaria y Secundaria. *Bordón* 62 (4), 7-23.

AGUILÓ, A., (1995). *La tolerancia*. Madrid: ediciones Palabra.

ALLPORT, G., (1961). *Pattern and Growth in Personality*. New York: Harcourt College.

ALTAREJOS, F.; RODRÍGUEZ, A. y FONTRODONA, J., (2003). *Retos educativos de la globalización.* Pamplona: EUNSA.

ANECA, (2005). Libro Blanco *Título de Grado en Magisterio.*www.aneca.es

ARGUELLES, A., (1997). *Formación basada en competencias laborales*. Mexico: Limusa.

ARTETA, A., (1998). *"La tolerancia como barbarie"*, en CRUZ, M. (Comp), *Tolerancia o barbarie*. Barcelona: Gedisa.

AVEZUELA, S. (Coord.); MARTÍN, J.; HERNÁNDEZ, L.; BEATRIZ VENTUREIRA, B. y VALLE, N., (2011). *Sistema estatal de indicadores de la educación.* Madrid: Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación.

Universidad Pontificia de Salamanca

BAUMAN, Z., (2007). *Tiempos líquidos.* Barcelona: Tusquets.

__ (2008). *Los retos de la educación en la Modernidad Líquida.* Barcelona: Gedisa.

BENEDICTO XVI, (2009). *Caritas in veritate*. Librería editrice Vaticana. (Trad. cast., Madrid: editorial San Pablo).

__ (2010). *Haced de vuestra vida un lugar de belleza*. http://www.vatican.va/ (consulta 17/05/2010). (Discurso a los Representantes de la Cultura y Artistas portugueses, en el Centro Cultural de Belém, Lisboa, 12 de mayo):.

__ (2011). *Discurso*. http://vatican.va/. (Consulta: 23/02/2012) (Encuentro con los Jóvenes profesores Universitarios, en la Basílica de El Escorial, 19 de agosto).

__ (2012-a). *Educar a los jóvenes en la justicia y la paz*. http://vatican.va/ .Vaticano: Librería editrice Vaticana (Consulta:08/12/2011). Mensaje para la XLV Jornada Mundial de la Paz, (01/01/ 2012).

__ (2012-b). *Discurso*. http://vatican.va/ al Cuerpo Diplomático acreditado ante la Santa Sede, Vaticano: Librería editrice Vaticana (09/01/2012)

BOLLNOW, O. F., (1960). *Esencia y cambios de las virtudes*. Madrid: Revista de Occidente.

BOOTH, C. & MISKOLCI, J.,(2002). Gender mainstreaming in the European Union: Towards a new conception and practice of equal opportunities?. *The European Journal of Women's Studies*, 9(4) 430-460)

CAMPS, V., (1990). *Virtudes públicas*. Madrid: Espasa – Calpe.

CANO, E., (1998). *Evaluación de la calidad educativa.* Madrid: La Muralla.

CARBONELL, J., (2008). *Una educación para mañana*. Barcelona: Octaedro.

Universidad Pontificia de Salamanca

CARRERA I CARRERA, J., (2003). *Mundo Global Ética Global*, Barcelona: Cristianisme i Justicia. Cuadernos C J, nº 118, 1-32.

CLARES, J. y GIL, J., (2008). "Recursos tecnológicos y metodologías de enseñanza en titulaciones del ámbito de las ciencias de la educación". *Bordón* 60(3), 21-33.

COBO, J. M., (2005). *Otro mundo es posible*. Madrid: Biblioteca Nueva.

COMISIÓN DE LAS COMUNIDADES EUROPEAS, (2001). *Futuros objetivos precisos de los sistemas educativos*. Bruselas: COM (31/01/2001): punto 4 y 12.

COMISIÓN EUROPEA, (2006). *Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente* (2006/962/CE). L 394/18 ES Diario Oficial de la Unión Europea 30.12.2006. (Consulta 11/03/2012)

EACEA P9 EURYDICE , (2010). *Diferencias de género en los resultados educativos: medidas adoptadas y situación actual en Europa*. Madrid: Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación.

__ (2011-a). *Science Education in Europe: National Policies, Practices and Research.* Bruselas: EACEA P9 Eurydice.

__(2011-b). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies.* Bruselas: EACEA P9 Eurydice.

COMITÉ DE EDUCACIÓN DE LA ASOCIACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CALIDAD (AEC), (2005). *Calidad en educación, calidad de la educación*, Madrid: Asociación Española para la Calidad.

CORTINA, A., (2009). "Economía sin ética". Madrid: *periódico El País*, (martes 5 de mayo de 2009).

DELORS, J., (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid: Santillana.

DONNELLY, D.; McGARR, O. y O'REILLY, J., (2011). A framework for teachers' integration of ICT into their classroom practice. *Computers & Education, 57 (2), 1469-1483.*

Universidad Pontificia de Salamanca

DRIVER, R.; GUESNE, E. y TIBERGHIEN, A., (1989). *Ideas científicas en la infancia y la adolescencia.* Madrid: Morata.

EDMUNDS, R.; THORPE, M. y CONOLE, G., (2012). Student attitudes towards and use of ICT in course study, work and social activity: A technology acceptance model approach. *British journal of educational technology,* 43 (1), 71-84.

ECHEVARRÍA, J., (2000). Conocimiento en el medio ambiente digital. *Nueva Revista*. (Madrid) 70, julio – agosto, 25-29.

ENKVIST, I., (2012). "Sentarse en la calle a gritar no sirve de nada". Madrid: periódico *ALFA Y OMEGA*, (jueves 1, marzo 2012).

FETSCHER, I., (1996). *La tolerancia*. Barcelona: ed. Gedisa.

GARCÍA, E., (2006). Las competencias del profesor en la sociedad del conocimiento, en MEJÍA, R. (Coord.), *Educación, globalización y desarrollo humano.* Santo Domingo (R, Dominicana): editora Buho.

GARCÍA, E., (2009). Identidad profesional y responsabilidad moral del profesor, en MACEIRAS, M. y MEJÍA, R., *Investigación e innovación*. Salamanca: San Esteban.

__ *Mente y Cerebro. (2001). Madrid:* Síntesis.

GARCÍA – RINCÓN DE CASTRO, C. (2004)). "Educación en valores y los nuevos espacios de socialización juvenil", en revista de ciencias sociales *SOCIEDAD Y UTOPÍA,* nº 23, Mayo. Madrid: edita Fundación Pablo VI.

GIDDENS, A., (1999). *La tercera vía.* Madrid: editorial Taurus.

GIDDENS, A. Y HUTTON, W., (2001). Luchar para defendernos, en el libro Giddens, A. y Hutton, W. (edit.), *En el Límite*. Barcelona: Criterios Tusquets.

Universidad Pontificia de Salamanca

GINER, S., (1998).Verdad, tolerancia y virtud republicana, en Cruz, M. (comp.) *Tolerancia o barbarie*. Barcelona: Gedisa.

GONZÁLEZ, A., (2004). *Evaluación del clima escolar como factor de calidad.* Madrid: La Muralla.

GONZÁLEZ, G., (ed.), (2012). *Derechos Humanos*. Madrid: Escolar y Mayo Editores.

HALSEY, A.H.; HEATH, A.F., & RIDGE, J.M., (1980). *Origins and destinations: Family, class and education in modern Britain*. Oxford: Clarendon Press.

HELD, D. y MCGREW, A., (2003). *Globalización / Antiglobalización.* Barcelona: Paidos.

JIMÉNEZ de P., M., (2009). "La desconfianza, un agravante de la crisis". Madrid: periódico *ABC, LA TERCERA*, (domingo 24, mayo 2009).

KING, A.y SCHNEIDER, B., (1991). *La primera revolución mundial.* (Informe del Club de Roma). Barcelona: Plaza y Janés.

LABRADOR, C., (2006). Aportaciones significativas de la pedagogía contemporánea, en MEJÍA, R. (Coord.), *Educación, Globalización y desarrollo humano*. Santo Domingo: Buho.

LEY ORGÁNICA 8/ 1985, de 3 de julio, Reguladora del Derecho a la Educación (LODE)

LEY ORGÁNICA 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE)

LEY ORGÁNICA 9/1995, de 20 de noviembre, de la Participación, la Evaluación y el Gobierno de los Centros D*ocentes* (LOPEGCD)

LEY ORGÁNICA 10/ 2002, de 23 de diciembre, de calidad de la Educación (LOCE). (Vigente hasta el 24 de mayo de 2006)

LEVY- LEBOYER, C. (2000). *Gestión de competencias*. Barcelona: Gestión, 2000

MACEIRAS, M., (2002). *Metamorfosis del Lenguaje*. Madrid: Síntesis.

Universidad Pontificia de Salamanca

MACEIRAS F., M., (2006). Política educativa, tecnociencia y desarrollo, en MACEIRAS, M. y MEJÍA, R., (Coord.), *Educación, globalización y desarrollo humano.* Santo Domingo(R: Dominicana): Búho.

MACEIRAS, M., (2007). *La experiencia como argumento.* Madrid: Síntesis.

MACEIRAS, M., (2010). La investigación científica, bioética y derechos humanos, en MACEIRAS, M. y MÉNDEZ F., L., (Coord.), *Ciencia e Investigación en la sociedad actual*. Salamanca: San Esteban.

MARCHESI, A.y MARTÍN, E., (1998). *Calidad de la enseñanza en tiempos de cambio*. Madrid: Alianza.

MARÍAS, J., (1980). La instalación juvenil en la vida, en *La juventud en la familia y en la sociedad actual*. Madrid: Karpos.

MÉNDEZ C., D., (2012). "Cambio motivacional realizado por las TIC en los alumnos de secundaria de física", en la Revista de Ciencias Humanas y Sociales *Miscelánea Comillas,* Vol. 70; Núm. 136, Enero-Junio. Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

MÉNDEZ F., L., (2003). La ambivalencia de la globalización, en Méndez F., L. (Coord.), *La Ética aliento de lo eterno*. Salamanca: San Esteban.

MÉNDEZ F., L., (2008). La Sociedad del Conocimiento, en Maceiras, M.y Mejía, R. (Coord.), *Investigación e Innovación.* Salamanca: san Esteban.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA, (1994). *Centros educativos y calidad de la enseñanza*. Madrid: Centro de publicaciones del MEC.

MÚJICA, F., (2003). Sociedad del conocimiento y sociedad del trabajo: rasgos estructurales de la sociedad activa, en HERRERO, M., (Coord.), *Sociedad del trabajo y sociedad del conocimiento en la era de la globalización.* Madrid: Pearson-Prentice Hall.

MUNICIO, P., (2008). Evaluación de la calidad", en Pérez J., R. et al. *Hacia una educación de calidad*. Madrid: Narcea

Universidad Pontificia de Salamanca

OCDE/OECD, (2000). Knowledge and Skills for Life. Fers results from PISA 2000. París 2001. (Trad. Castellana: Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (2005). *Resultados en España del estudio PISA 2000. Conocimientos y destrezas de los alumnos de 15 años*. Madrid: Secretaría General Técnica del MEC).

OCDE, (2010). *Informe español: PISA 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos.* Madrid: Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación.

PÉREZ, R., (2008). "La calidad de la educación", en PÉREZ J., R. ET AL. *Hacia una educación de calidad*. Madrid: Narcea.

PIAGET, J., (1982). *Estudios sobre lógica y psicología.* Madrid: Alianza.

PIEPER, J., (1984). *El fin del tiempo*. Barcelona: Herder.

PINILLOS, J. L., (1977). *Principios de Psicología*. Madrid: Alianza, Madrid.

PRADA, J. M. de., (2011). "Pueblos sin tradición". Madrid: periódico *XL SEMANAL. ABC*, nº 1238, del 17 al 25 de julio.

PROYECTO TUNING, *(2003). Informe final. Fase I.* Deusto, Groningen: Universidades.

PUYOL, R., (1997). *La universidad del siglo XXI*, (Texto mecanografiado de la conferencia en el Club siglo XXI). Madrid: Club Siglo XXI.

QUIÑONEZ, C.; RAMÍREZ, D.; RODRÍGUEZ, Z.; RIVERA, F.; TOVAR, E.; VÁSQUEZ, G. y RAMÍREZ, A., (2006). Desarrollo de herramientas Virtuales para la enseñanza de la termodinámica básica, en *Revista Colombiana de Física* 38, 1423-1426.

SAMUELSON, P. A., (1996). "El siglo XXI ya revelado". Madrid: Diario de Economía, periódico ABC, (2 / 12 / 1996) p. 49.

Universidad Pontificia de Salamanca

SÁNCHEZ, M., (2003). *Ética para la vida cotidiana*. Madrid: ediciones del Orto.

SABATER, F., (2006). “Tolerancia”, en Giner, S. y otros, *Diccionario de sociología.* Madrid: Alianza.

SEN, A., (2009). “El mercado no puede basarse sólo en el beneficio, necesita también valores”, (Texto de Isabel Bernal). Madrid: *Tribuna Complutense*, nº 81, 10 de febrero.

SÉNECA, L. A., (1986). Sobre la felicidad, en *Diálogos*. Madrid: Tecnos.

SCHULTZ, T. W., (1985). *Invirtiendo en la gente.* Barcelona: Ariel.

TORRES, C. A. y MORROW, R.A., (2005). Estado, globalización y política educacional, en Morrow, R. A., y otros, *Globalización y educación*. Madrid: Editorial Popular.

TRIBÓ, G., (2008). El nuevo perfil de los profesores de secundaria, en *Educación XXI,* Madrid, 11, 183-209.

UNESCO, (1989). Reorganización y reforma de la Educación Secundaria en Asia, Área del Pacífico. http://www.ibe.unesco.org/fileadmin/user-upload/archive (consulta 21 abril 2012).

UNESCO, (1995). *Declaración de Principios sobre la Tolerancia.* (Conferencia General de 25 de octubre al 16 de noviembre de 1995).. http://www.unesco.org/general/spa/ (consulta 13 enero de 2012).

UNESCO, (2000). *Informe Final* del Foro Mundial sobre la Educación 2000. Dakar.. www.unesco.org/efa (consulta 11 de junio de 2012).

VÁZQUEZ, A., (2011). «Plan_Do ‑ Check ‑ Act en una experiencia TIC en el aula: desde la idea a la evaluación.» [artículo en línea].EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa.Núm.36/Junio 2011. http://edutec.rediris.es/revelec2/revelec36 (Consulta 26 octubre 2011)

VELASCO, F., (2004). La solidaridad como ‘marca’, en la la revista de ciencias sociales *SOCIEDAD Y UTOPÍA*. Madrid: edita Fundación Pablo V.

Universidad Pontificia de Salamanca

WILSON, J. D., (1992). *Como valorar la calidad de la enseñanza*. Madrid: Paidós.

WOOD, R., (1987). *Assessment and equal opportunities,* (Conferencia pública), University of London, Institute of Education, 11 de noviembre.

WOLFENSOHN, J. D., (1999). Prefacio, en Banco Mundial, *Informe sobre el desarrollo mundial: el conocimiento al servicio del desarrollo.* Madrid: Mundi – Prensa

WEBGRAFIA

Bolonia (1988). En http://www.crue.org/cmue.htm

Sorbona (1998). En http://eees.universia.es/documentos.htm

Bolonia (1999). En http://eees.universia.es/documentos.htm

Salamanca (2001). En http://www.crue.org/mensajecomESP.htm

Praga (2001). En http://www.crue.org/comcumbrepraga.htm

Graz (2003). En http://eees.universia.es/documentos.htm

Berlín (2003). En http://www.bologna-berlin2003

Bergen (2005). En http://www.bologna-bergen2005.no/

Londres (2007). En http://eees.universia.es/documentos.htm

Père Marqués :

http://www.peremarques.pangea.org/calida2.htm#gestionconocimiento

Tuning (2003, 2010). En http://www.relint.deusto.es/TuningPorject/index.htm

ANECA (2005). En http://www.aneca.es

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 2

LA MENTALIDAD MATEMÁTICA GRIEGA: PARADIGMA DE RACIONALIDAD

C O N T E N I D O **PÁGS.**

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 2.- LA MENTALIDAD MATEMÁTICA GRIEGA: PARADIGMA DE RACIONALIDAD

Coherente con el propósito pedagógico de nuestra tesis expuesto en el capítulo primero, este segundo tiene como objetivo fundamental *investigar las convicciones y actuaciones matemáticas que impulsaron el progreso de la cultura griega* en la que se fraguaron elementos esenciales con profunda repercusión en la racionalidad científica posterior. De modo muy particular, de los griegos heredamos la metodología deductiva/inductiva que caracterizó el desarrollo de la epistemología científica hasta nuestros días.

De acuerdo a los objetivos de la presente investigación, el propósito de este capítulo no se dirige tanto a seguir el desarrollo histórico de los avances en los conocimientos de los procesos matemáticos operativos, cuanto a poner de manifiesto *los supuestos* que indujeron a los griegos a desplegar una auténtica cultura y *mentalidad matemática originaria* presente en las inquietudes de la ciencia moderna.

Si en el capítulo anterior se centró la atención y la reflexión en lo sustantivo del proceso en que se polariza la tesis, la *educación y sus rasgos esenciales,* en este segundo y en los siguientes la reflexión y el análisis se concentran en la perspectiva matemática, el otro polo del proceso. Sin embargo no se pretende recapitular la historia del progreso matemático, sino de investigar la que, por nuestra cuenta, llamamos *mentalidad matemática originaria,* sin perder de vista la orientación pedagógica de nuestra tesis. En este contexto educativo, entendemos que la enseñanza de las matemáticas en sus niveles elementales, en primer lugar deberá atender a nociones y estrategias dirigidas a la articulación y cultivo de ciertas convicciones intelectuales orientadas a las *competencias para el razonamiento*. A partir de ellas se hará más comprensible para los alumnos aprender y poner en práctica las aplicaciones operativas concretas.

En este contexto no historicista sino pedagógico, que puede calificarse como *epistemología originaria de la matemática*, se hacen, sin embargo, insalvables algunas referencias históricas concretas y el seguimiento de cierto orden cronológico que se estructura de acuerdo a los apartados que comprende el capítulo. Cada uno de los

Universidad Pontificia de Salamanca

apartados introduce los elementos más significativos que fueron consolidando la mentalidad matemática originaria en la cultura griega, germen perdurable en el tiempo y presente en los avances posteriores de las matemáticas aplicadas, hasta nuestros días.

2.1.- Las matemáticas como complejo sistémico deductivo

Enlazando con el capítulo anterior, dedicamos este apartado a la exploración de los conceptos que actúan como referencias del presente capítulo, fundamentalmente los de *deducción, sistémico y paradigma*. Del significado de los dos primeros se infiere el sentido de la *mentalidad matemática* que, desde su origen, los griegos entendieron como un *sistema esencialmente deductivo*.

2.2.- La matemática griega como paradigma de racionalidad deductiva

Precisando el concepto de paradigma como sistema previo de referencias, analizamos aquí la analogía entre concepciones metafísicas e ideas matemáticas primordiales. Si metafísicamente se requiere el *logos* como principio básico de la coherencia armónica de la Naturaleza, del mismo modo se postulan entidades racionales matemáticas para conferir lógica a los fenómenos naturales. Tales son los *conceptos de centro, equidistancia, equilibrio y proporción* que, introducidos por los presocráticos, hacen comprensible el equilibrio y la autonomía del cosmos, actuando a su vez como estímulo para la organización social y la creación artística. .

2.3.- Paradigma pitagórico: proporción y razonamiento deductivo

Pitágoras y el pitagorismo han supuesto un avance decisivo en la mentalidad matemática porque entendieron que la *Naturaleza estaba articulada por relaciones cualitativas que se expresaban mediante proporciones cuantitativas*. El Uno aparece así como símbolo y síntesis de la perfección y del infinito, siendo todos los demás números expresión de “lo otro”, esto es de todas las demás cosas, imperfectas y finitas. De tan místico idealismo, sin embargo, el pitagorismo fue impulsor de una amplísima matemática operativa, válida hasta la actualidad.

2.4.- Platón: la matemática y el conocimiento científico

La mentalidad matemática adquiere madurez educativa a través de Platón, para quien el conocimiento verdadero de las cosas empieza en la interpretación racional de la realidad, cuya expresión modélica es el conocimiento aritmético y geométrico. Dejó claramente establecido que el *conocimiento matemático no se sustenta en la investigación empírica sino en el razonamiento y en demostraciones lógicas*, sustentadas por el principio de contradicción. Como corolarios educativos, además del

Universidad Pontificia de Salamanca

valor pedagógico otorgado a la enseñanza de la matemática, Platón presagia el fracaso de toda enseñanza mediante la coerción y la violencia.

2.5.- Aristóteles: la matemática como ciencia teorética

Análoga a la metafísica y a la teología, *la matemática expresa aquello que en las cosas hay de universal y común*, sobrepasando el conocimiento sensible que sólo ofrece lo particular de cada cosa. En este sentido, es la ciencia por antonomasia en cuanto que sus axiomas y procedimientos han de informar cualquier saber que pretenda el estudio de la realidad natural en su dimensión universal. Hasta tal punto lleva esta universalización del saber matemático que, en su *Ética Nicomaquea,* establece el concepto de virtud apelando al término medio aritmético y geométrico.

2.6.- Aplicación y difusión científica de la mentalidad matemática

La mentalidad matemática griega produce efectos inmediatos y de gran influencia en astronomía, en física y en el progreso general de las ciencias y de las técnicas, durante el período conocido como Helenismo. Igual que las demás ciencias, *las matemáticas se interpretan como auxiliar de la teología en la Edad Media*, período en que también es cultivada y continuada por los árabes, en cuya cultura se consolida el álgebra y la numeración decimal.

2.7.- Del paradigma aristotélico a la nueva ciencia

En el transcurso del siglo XIII y del XIV se va a producir una verdadera cascada de *críticas y reacciones contra las tesis de Aristóteles y de sus seguidores*. En esta nueva orientación, ostenta merecidamente el carácter de rompedor inicial Alhazén, destacado científico en el área de la astronomía y de la óptica. Este movimiento encuentra fervorosa acogida entre los franciscanos de Oxford, si bien destaca la Universidad de París, en apoyo de las condenas que el Papa de Aviñón, Juan XXI, antes Pedro Hispano, hace del aristotelismo y del averroísmo. Este alejamiento de los planteamientos aristotélicos traen consecuencias muy positivas para el avance de las ciencias experimentales, que libres de la autoridad magisterial del aristotelismo, inicia nuevos derroteros que los encaminan al cultivo de nuevas áreas, cobran nuevos bríos la libertad y la iniciativa privada que impulsarán decisivamente la investigación científica.

2.8.- Conclusiones y/o corolarios pedagógicos del capítulo dos para la enseñanza actual de las matemáticas

Teniendo en cuenta los objetivos pedagógicos de nuestra tesis, el capítulo concluye proponiendo aquellos *corolarios educativos y ciertas concreciones didácticas*,

Universidad Pontificia de Salamanca

que consideramos más relevantes, teniendo en cuenta el proceso por el que discurrió la configuración de la mentalidad matemática griega.

Universidad Pontificia de Salamanca

2.1. LAS MATEMÁTICAS COMO COMPLEJO SISTÉMICO DEDUCTIVO

Antes de abordar las diversas concepciones de la matemática, dos condiciones importantes de este saber resaltan a primera vista y que no corresponden a otros saberes:

1ª) *La autonomía de los procesos matemáticos*, en cuanto que todos ellos se articulan y desarrollan a partir de axiomas racionales de los que se deducen, tanto los procesos puramente formales, que configuran la estructura de la ciencia matemática, cuanto los que tienen utilidad para su aplicación real y verificación empírica.

2ª) *El carácter instrumental de las matemáticas*: las demás ciencias, sobre todo las de base empírica, adquieren rango científico en la medida en que alcancen a presentar sus conclusiones o "verdades", en forma de leyes matemáticamente formuladas. Esto quiere decir que las matemáticas, además de su racionalidad interna, ofrecen capacidad de racionalización a todas las demás ciencias[27].

Nuestro punto de vista en este segundo capítulo es más integrador que disyuntivo, lo que hemos sintetizado adhiriéndonos a la opinión que aquí reiteramos: la matemática se caracteriza por ser un *complejo sistémico deductivo que actúa como paradigma de la cultura griega.* Con tal expresión se quieren enunciar los supuestos intuitivos y sistémicos que tratamos a continuación.

2.1.1.- La deducción y sus supuestos intuitivos

Con el concepto "deductivo", queremos expresar dos matices de la misma convicción.

1º) Señalar que los procesos, operaciones y aplicaciones matemáticas, se remiten a algo "siempre anterior" desde el punto de vista lógico, siendo racionalmente contradictoria una serie infinita de causas, sino *a un principio primitivo o axiomas intuibles por sí mismos*, esto es, comprensibles en virtud de su propia evidencia, aunque no demostrables por cualquier otro tipo de operaciones. Es esta una distinción clara que aparece en la matemática griega: los principios son comprensibles racionalmente pero no demostrables ni empírica ni operativamente.

[27] Por racional y racionalización entendemos aquí los procesos discursivos en los cuales cada uno sus elementos o enunciados es deducido o inducido con necesidad lógico/matemática de otro anterior.

Universidad Pontificia de Salamanca

2º) El matiz consiste en advertir la *universalidad y necesidad de los procesos matemáticos*, de tal modo que lo que sucede una vez sucederá siempre, precisamente porque las variables experimentales no afectan la regularidad de su racionalidad (Dou, 1970: 113 y ss) [28].

Esto es debido a la cualidad puramente inteligible de las entidades matemáticas, como explícitamente ya adelantó Platón al insistir en que el cálculo matemático es una operación puramente intelectiva, encaminada a conocer la verdad de las cosas y no a comerciar con ellas o medirlas, porque a "los números sólo es posible pensarlos, y no se les puede manipular de ningún modo" (*República*, 562 a). Con ello el filósofo se sitúa en la nueva visión de las matemáticas, elevándola a verdadero saber racional apartándola de sus funciones puramente utilitarias que, al parecer, eran las más usuales en su tiempo.

2.1.2.- Significado de "sistémico"

Con el término sistémico, concepto de uso más actual, se pretende expresar la efectividad interna o interferencia mutua que se produce en cualquier sistema racional. Si sistemático expresa la articulación coherente de diversos elementos, *sistémico quiere significar que los diversos elementos no sólo son piezas bien articuladas, sino que todas guardan entre sí dependencias efectivas,* de tal modo que las variables que intervengan o influyan en cualquiera de ellas afectan a todas las demás. Es lo que por nuestra cuenta llamamos "efectividad interna". Tener en cuenta tal propiedad es fundamental para la comprensión y la aplicación de los procesos matemáticos a los que será indispensable aproximar la enseñanza, desde sus niveles elementales: el alumno debe aprender que el más pequeño elemento de un proceso y operación matemática afecta a la totalidad del conjunto y, por tanto, tiene consecuencias en su resultado. En los contextos sistémicos adquieren capital importancia didáctica asuntos en apariencia menores, como la colocación de las cifras, la fijación clara de los signos, el orden escrito de las sucesivas operaciones, la distinción gráfica de los operadores, etc. En fin, el carácter sistémico de la matemática, desde el punto de vista pedagógico, exige transmitir la convicción de que en sus operaciones y procesos nada es indiferente, ni el más pequeño elemento.

---

[28] El carácter intuitivo de la matemática griega, se ve confirmado por las concepciones contemporáneas, tal como se deduce de análisis como los de Alberto Dou.

Universidad Pontificia de Salamanca

2.1.3.- La mentalidad matemática como paradigma cultural en Grecia

Son estos dos conceptos -deductivo y sistémico, tal como los hemos aclarado-, los que justifican el título del presente capítulo y la interpretación que ofrecemos de la mentalidad griega que, con notables disidencias, desde su origen *entendió la matemática como complejo sistémico deductivo*. Ahora bien, un complejo sistémico cargado de consecuencias, porque a partir del orden matemático los griegos[29] interpretaron la Naturaleza, en todos sus ámbitos -Océano, Tierra, Firmamento-, asignaron lugar a los dioses, fijaron cánones estéticos para la arquitectura y la escultura, organizaron la población, trazaron las ciudades, asignaron propiedades a las cosas e incluso fabricaron instrumentos musicales artesanales dotándolos de propiedades armónicas. De hecho, los axiomas y principios matemáticos indujeron en la totalidad de la mentalidad griega los principios de la medida, la proporción, el equilibrio y, trascendiendo al orden ético, el sentido mismo de la prudencia y la justicia. Esta referencia universal, que se hace explícita en los apartados siguientes de este mismo capítulo, es lo que justifica nuestra afirmación de que la matemática fue para la cultura griega el paradigma universal.

La introducción del concepto de paradigma nos obliga a su aclaración, aunque con brevedad, para no desviar el propósito del presente capítulo. Si consultamos el *Diccionario de la RAE,* se ve que la primera acepción de *paradigma* es “Ejemplo o ejemplar” que se aclara con una segunda acepción en la que se le atribuye la siguiente significación: “Cada uno de los esquemas formales a que se ajustan las palabras nominales y verbales para sus respectivas flexiones”. Las dos acepciones, extraídas aquí del ámbito gramatical, asimilan el paradigma a lo ejemplar o modélico y, por tanto, a aquello que debe ser imitado o sirve de referencia para otro tipo de acciones u operaciones. El paradigma es, pues, lo que se ofrece como previo, como marco, perspectiva o canon, con una doble consecuencia.

1ª) A partir del paradigma *se analizan e interpretan las cosas, y éstas adquieren sentido precisamente por su grado de adecuación o inadecuación paradigmática.* Por

---

[29] Esta interpretación es perceptible ya en la Mitología (Hesíodo), en los Presocráticos y se desarrolla en el pensamiento sociopolítico de Platón, en los cánones estéticos y en las ideas urbanísticas y demográficas de Aristóteles.

Universidad Pontificia de Salamanca

ejemplo, se atribuye valor estético a una obra de arte según su grado de acuerdo a desacuerdo con el canon o cánones estéticos fijados como paradigmas. Eso era evidente en la arquitectura y en la escultura griega basadas ambas en proporciones fijas canónicas. Y en la Historia de la de la Ciencia, los hallazgos de Galileo, entre otros, fueron valorados y juzgados a partir del paradigma geocéntrico. A su vez, las certezas universales y necesarias que la ciencia clásica atribuía a sus leyes, basadas en el paradigma matemático, se ven sacudidas por la incertidumbre que introducen las teorías científicas actuales, que tienen como paradigma de referencia la contingencia y la probabilidad.

2ª) Con grandes repercusiones en el progreso de la ciencia, el paradigma es el marco, no sólo para interpretar, sino *para solucionar, resolver problemas y promover prácticas específicas.* El concepto de paradigma ha sido ampliamente divulgado por Thomas Kuhn (1962) que analiza cómo, a lo largo de la historia, la ciencia y la técnica se han desarrollado a partir de marcos conceptuales y perspectivas diversas, esto es, mediante cambios de paradigmas. Tal es el sentido de su libro *The Structure of Scientific Revolutions*, con gran aceptación en la epistemología científica actual, precisamente porque señala cómo en cada época han predominado referencias básicas distintas, que en gran medida condicionan la orientación y los resultados científicos.

Valga como ejemplo la visión del mundo, interpretado hasta el siglo XV bajo el paradigma astronómico aristotélico de los dos mundos, sublunar y supralunar. Este marco de referencia fue una rémora para el progreso de la cosmología y de la ciencia. Pero tan generalizado paradigma cambia a partir del concepto de *fuerza* que sustituye al de *sustancia* introduciendo una nueva visión del universo y del comportamiento humano acorde con ella. A partir de ahora el cosmos se interpreta, no como conjunción de sustancias que se mueven cada una según su naturaleza, sino como un entramado de fuerzas que guardan estrecha relación entre sí y son las responsables de la armonía universal. En el campo de la química se produce un cambio de paradigma a finales del XVIII cuando los fenómenos naturales relacionados con el calor, hasta entonces asociados al mítico “flogisto”, se ven explicados a partir del oxígeno, un nuevo elemento cuyas propiedades Lavoisier acaba precisando, haciendo además ver que este nuevo elemento interviene en las operaciones vitales de los vegetales y los animales.

Estas referencias al sentido de lo paradigmático que acabamos de señalar, según nuestra interpretación, es muy perceptible en la cultura griega en la que la mentalidad

Universidad Pontificia de Salamanca

matemática ha tenido repercusiones en todos los demás ámbitos, desde la vida ordinaria a la educación, a las concepciones sociales y artísticas, etc. Es lo que sintetizamos a continuación, no con intenciones históricas, sino con la pretensión de hacer ver que la mentalidad matemática y, por tanto, *su enseñanza y transmisión escolar debe fundarse en ciertos principios básicos* que, si bien son de carácter intuitivo, *el profesor debe ser capaz de presentar razonadamente para que el alumno, a partir de ellos, pueda hacer más asequible la comprensión de los procesos operativos y sus aplicaciones.*

Según nuestra intención, con estas referencias a los griegos nos proponemos *como objetivo hacer ver que en su inicial matemática se encuentran elementos a partir de cuya comprensión se facilita la integración intelectual de principios útiles para la enseñanza y, por tanto, también para la aplicación de la matemática a la vida real.*

2.1.4.- A modo de síntesis

En este apartado primero del capítulo dos, el análisis se dedica de modo preferente a clarificar los conceptos básicos - deductivo, sistémico y paradigmático - que vertebran el discurso matemático - filosófico de la Grecia Clásica, dando lugar a lo que se denomina en esta tesis como la mentalidad matemática, que constituye el principio axial del presente capitulo.

En cuanto al concepto de deducción, esencial en el desarrollo matemático, evidencia que, al ser contradictorio la serie infinita de causas secundarias, las matemáticas inician su devenir sobre principios comprensibles racionalmente pero no demostrables. Un segundo rasgo que muestran es la universalidad de las matemáticas, en el sentido de que lo que sucede una vez volverá siempre a suceder, puesto que la empírea no afecta la regularidad de su racionalidad.

El concepto de sistémico afecta directamente a la articulación de las partes del proceso en relación con el sentido del mismo proceso. En cambio, el concepto de sistemático afecta a la articulación coherente de los elementos, en cuanto a su orden externo, no al sentido del proceso. El carácter sistémico de las matemáticas impone que en sus operaciones y procesos nada es indiferente ni carece de sentido.

El sentido paradigmático de las matemáticas en la cultura de la Grecia Clásica se muestra en toda una serie de principios, medida, orden, proporción, equilibrio, etc., que son de naturaleza matemática y que informan la cultura de la época de tal modo que justifican la afirmación de que las matemáticas constituyen el verdadero y universal paradigma con el que se analizan e interpretan la realidad física, social y ético-política,

Universidad Pontificia de Salamanca

además de proporcionar el marco de solución de los problemas y de promoción de conductas específicas para la cultura de la Grecia Clásica.

2.2. LA MATEMÁTICA GRIEGA COMO PARADIGMA DE RACIONALIDAD DEDUCTIVA

Afirmar que el modelo matemático actuó como paradigma de racionalidad en Grecia es reconocible desde las primeras tentativas de sistematización cognitiva de la Naturaleza y de la vida social. En ambos procesos la intuición de conceptos puramente matemáticos ha jugado un papel fundamental. Es lo que expondremos brevemente en una progresión que va desde nociones más espaciales, vinculadas a la geometría, hasta nociones más teóricas estrictamente aritméticas y otras asociadas a lo que hoy llamamos álgebra[30].

Nos interesa de modo particular esta mentalidad original griega porque en ella se produce, a nuestro juicio, una notable trasgresión en relación con la herencia que pudiera haber recibido de Egipto, en donde primaba una *mentalidad utilitaria* sustentada por nociones geométricas y aritméticas con fines industriosos -tal como señalamos en la nota-, para desarrollar una mentalidad que quiere encontrar los *principios axiomáticos que justifiquen operaciones teóricas y consecuencias prácticas*. En este sentido las intuiciones de los axiomas matemáticos fueron más un *punto de partida que no de llegada para los griegos*. Tal afirmación la confirmamos con el análisis siguiente.

2.2.1.- El *logos* como principio originario de coherencia

Es bien sabido que los primeros filósofos, agrupados en la llamada *Escuela de Mileto*, tuvo como preocupación fundamental la identificación de un principio u origen

[30] Es generalizada la opinión según la cual Grecia hereda la aritmética y la geometría de Egipto, en donde la mentalidad matemática estaba fundamentalmente relacionada con la necesidad de distribuir tierras, reparto de salarios, valoración del grado nutritivo de los granos, concordancia de medidas, mediciones astrales, construcción y tamaño de las edificaciones, etc. Ahora bien todas estas aplicaciones empíricas muestran la ausencia general de reglas y principios matemáticos, aunque parece que buscaron las propiedades generales del triángulo. Al respecto hemos consultado: Taton, R., (Dir.), (1971:27-64; 247-273); Boyer, C.,(1996); Ernest, P.(1991).

Universidad Pontificia de Salamanca

primordial que pudiese presentarse como responsable único y unificador de la evidente pluralidad de seres naturales, que la experiencia nos muestra cada día. A este principio lo llamaron logos ("λόγος"), esto es, razón o palabra mediante la cual toda la pluralidad era explicable y comprensible a partir de esa realidad única y originaria. El logos es responsable de la ordenación razonable y racional de la realidad. Es también sabido que a los elementos naturales - agua, aire, tierra y fuego -, se les atribuyó esa propiedad de imponer "lógica" a la evidente diversidad de seres y acontecimientos, porque es claro que la piedra no es una planta, ni el árbol es el pájaro que anida en sus ramas, ni el caballo es asimilable a su jinete. Sin embargo, en la Naturaleza vemos que hay "lógica", y esto es debido a que en todos los seres está presente ese principio de unidad y coherencia. Esta propiedad unificadora que en términos actuales podemos llamar *función lógica*, la testifica muy bien Aristóteles cuando escribe en referencia a las opiniones de los filósofos de la Escuela de Mileto:

"Aquello a partir de lo cual existen todas las cosas, lo primero a partir de lo cual se generan y el término en que se corrompen, permaneciendo la sustancia mientras cambian los accidentes, dicen que es el elemento y el principio de las cosas que existen; por eso consideran que nada se genera ni se corrompe, pues tal naturaleza se conserva siempre. Debe de haber, pues, alguna naturaleza única o múltiple a partir de la cual se generan las demás cosas, conservándose ella" (Aristóteles, *Metafísica* I 3, 983b)[31].

Corolario de actualidad pedagógica.- Quedaría fuera de nuestro propósito continuar la discusión en torno al sentido y propiedades que se atribuyen a este principio/logos. Pero de la digresión histórica, deducimos una conclusión matemática de indudable actualidad que enunciamos de este modo: *todo proceso remite a un sistema y éste a un orden primordial que le da sentido.* Para comprender tal convicción, nada más actual y pedagógico que la matemática, porque en la multiplicidad de sus desarrollos ningún elemento tiene sentido aislado, ni procede del azar ni aparece como un *novum*, extraño o novedoso en cualquier momento del proceso. De uno y otro modo, el cálculo y los enunciados matemáticos son la secuencia lógica de principios fundamentales, de

[31] La cita se hace siguiendo la edición Bekker, en la traducción castellana (I=libro; 3=capítulo; 983 b folio/columna b). Todas las restantes obras que se citarán de Aristóteles se toman de la misma Edición Bekker, por sus respectivas traducciones castellanas. Cf. Bibliografía.

Universidad Pontificia de Salamanca

tal modo que lo que sucede una vez, es esperable siempre, porque el principio es siempre el mismo. De este modo las conexiones causales de las formulas y teoremas matemáticos, son el desarrollo lógico de un principio unitario y único, ajeno a las mutaciones exteriores o empíricas. Son producto de la racionalidad pura.

2.2.2. - Concepto de centro, equidistancia y equilibrio

Un paso fundamental en la configuración del paradigma matemático lo encontramos, según nuestro análisis e interpretación de los textos, en el filósofo, astrónomo y matemático, Anaximandro[32], quien, desde nuestros actuales criterios, representa una auténtica mentalidad deductiva que transmite una indudable carga de racionalidad.

Para valorar la importancia de las nociones matemáticas que introduce Anaximandro, se debe tener en cuenta que antes y también después de él, las narraciones míticas eran el soporte de la totalidad de las convicciones intelectuales y morales de los griegos. *Los mitos* [33] (Hirschberger,1979:43) eran narraciones alegóricas fantásticas en las que, sin dar explicaciones lógicas, se contaba cómo había surgido el pueblo griego, cómo se había originado y organizado la naturaleza, lo que significaban los meteoros y fenómenos cósmicos desconocidos según Cappelletti (1986). En fin, los mitos representaban la síntesis de la concepción del mundo, que abarcaba desde los elementos naturales hasta las formas de vida, conducta y formas sociales. Ahora bien, los mitos se articulan sobre una lógica de la ambigüedad: no explicaban ni daban razones, sólo narraban y contaban, sin argumentos lógicos, en cuanto que los elementos naturales, el viento, el rayo o la luz tenían propiedades humanas y actuaban de acuerdo a ellas, mientras que los seres humanos estaban dominados por los poderes naturales, desposeídos de auténtica libertad de elección en las opciones más importantes de su existencia. A su vez, los dioses eran seres pertenecientes a la naturaleza, lo que, a su vez, era considerada divina, teniendo en cuenta que para el griego divino era todo aquello digno de admiración y respeto (Cornford, 1984)

---

[32] Todas las referencias y citas de Anaximandro y demás filósofos presocráticos, incluidos Pitágoras y los pitagóricos, se toman de la edición castellana de Eggers Lan, C., (1986). *Los Filósofos Presocráticos,* Madrid: Gredos.

[33] El mito es "la fe del vulgo que sugiere lo que se ha de pensar al enfrentarse con las grandes cuestiones en torno al mundo y a la vida, a los dioses y a los hombres. Se recibe de la tradición del pueblo irreflexiva, crédula y ciegamente" (Hirschberger, J.,1979. *Historia de la Filosofía*. Barcelona: Herder).

Universidad Pontificia de Salamanca

Si en nuestros días y, tras los inmensos avances de las ciencias, tanto en el mundo subatómico como en el conocimiento de la astronomía y de la astrofísica, no tenemos ni el más ligero conocimiento sobre los límites del universo, no podemos dejar de considerar un acierto el que en los siglos VII y VI a.C., alguien quisiera comprender el universo a partir de la idea de indeterminado e infinito. Ese fue Anaximandro quien dedujo las consecuencias prácticas del desconocimiento de los límites de la Naturaleza.

Es claro que el concepto de infinito griego, desde el punto de vista astronómico, no puede coincidir con el nuestro, ya ilustrado por la astrofísica y ciencias afines. Ni tampoco, desde el punto de vista matemático, puede ser pensado como la concepción actual del infinito, entendido como tendencia y no como determinación. Ahora bien, al seguir los fragmentos que refieren la mentalidad de Anaximandro, no deja de sorprender su concepción del infinito del que señala dos atributos: en primer lugar, tiene carácter de ingenerado; es eterno o sin origen. En segundo lugar, no coincide con ninguno de los llamados elementos (agua, aire, fuego), ni puede ser asimilado a ninguna cosa de las que nos muestra la experiencia sensible. Es, según un fragmento, extraído de Simplicio,

"una naturaleza distinta e infinita a partir de la cual se generan los cielos y los mundos contenidos en estos"(Eggers Lan, C., *Los Filósofos presocráticos,* Frag. 128 (12 A 9)[34].

Con sagacidad, Aristóteles comenta que, si bien todo debe tener un principio, no cabe duda que si a la Naturaleza (Jaeger: 1987) [35] no podemos fijarle límites, su principio lógico, esto es, aquello de donde procede, le da sentido y le hace perdurar, no

[34] Citamos tal como aparece en la presente edición: el primer número corresponde a esta edición de Eggers Lan. La notación siguiente corresponde a la edición original de Diels. Así citaremos en adelante. El concepto griego que maneja Anaximandro es άπειρον, cuyo significado es tanto el de infinito como de ilimitado, inmenso, innumerable. En nuestra moderna mentalidad quizás la mejor traducción es la de "sin límites".

[35] Debe tenerse en cuenta que el concepto Naturaleza para los griegos abarcaba toda la realidad conocida y desconocida, incluidos los dioses y las realidades racionales y que hoy llamamos espirituales. Equivale a nuestro actual concepto de Universo, incluido lo ideal e imaginario. Como dice Jaeger, antes de elucubrar sobre el concepto de Naturaleza, "los griegos consideran ya las cosas del mundo desde una perspectiva tal, que ninguna de ellas les pareció como una parte separada y aislada del resto, sino siempre como un todo ordenado en una conexión viva, en la cual y por la cual cada cosa alcanzaba su posición y sentido".

Universidad Pontificia de Salamanca

puede ser nada finito, esto es, determinado o determinable. Lo expresa con sagacidad el gran filósofo Aristóteles (*Física*, III 4, 203b):

"Cualquier cosa es un principio o procede de un principio. Ahora bien, de lo infinito no hay principio, ya que /ése/ sería un límite. Además, como principio, es ingenerado e indestructible, pues lo engendrado alcanza necesariamente un fin, y hay un término para toda destrucción".

Es claro para el sentido común y sería contradictorio afirmar un infinito con límites, esto es, dependiente de un elemento originario determinado. Aristóteles elucubrará con sutileza sobre el concepto de infinito en doble sentido, con alguna enseñanza para nosotros. En primer lugar, infinito es lo que no puede ser medido, porque no tiene dimensión, en el mismo sentido en que la voz es algo que no puede ser visto. En segundo lugar, infinito es también aquello que, teniendo dimensión, no puede ser recorrido o medido del todo porque no tiene límites, sea por su composición o porque es siempre divisible "hasta el infinito" (Aristóteles, *Física*, III 4, 204-206).

Estas aproximaciones al concepto, adquieren relevancia si se las considera a la luz de la matemática moderna, en la que el infinito es considerado, no como lo inagotable, sea en composición o división, sino en el sentido en que un conjunto es autorrepresentativo de un subconjunto suyo, y este de otro, que a su vez lo es de otro, enlazando una serie inacabable. Así sucede con la serie natural de los números que guarda correspondencia con sus subconjuntos, por ejemplo, con los cuadrados, los números primos, etc.

Para nuestro propósito es particularmente sugerente la introducción del concepto de infinito, que si originalmente tenía que ver con las concepciones astronómicas y teológicas, lo cierto es que tal concepto es sólo comprensible desde una racionalidad pura, esto es, pensable y manejable matemática y lógicamente, pero desprendida de la pretensión de validación empírica. Desde esta perspectiva, Anaximandro hace llegar a la mentalidad matemática la certeza de que sus propias operaciones indican ya, que todo proceso de cálculo se despliega entre un antes indemostrable, que son los axiomas y principios de la razón, y un después que es la posibilidad de la tendencia al infinito implícita en toda operación de cálculo (Gigon, 1980).

Además de estas reflexiones que podemos considerar más teóricas, seguramente Anaximandro fue un personaje muy enterado en conocimientos geográficos y

Universidad Pontificia de Salamanca

astronómicos, añadidas a su atinada previsión metafísica según la cual "a partir de donde hay generación para las cosas, hacia allí también se produce la destrucción, según necesidad" (Eggers Lan, C., *Los filósofos presocráticos,* Frag.134 – (12 A 9) [36]. Los fragmentos y testimonios que conocemos lo vinculan a la determinación de los horarios (Frag.150- 2 A 1), siendo el "primero que descubrió el equinoccio, los solsticios y los relojes" (Frag.151- 12 A 2). También se le atribuye "haber comprendido la oblicuidad del Zodíaco" (Frag.152- A 5), además de muchas otras observaciones sobre el tamaño de los astros, los vientos, la lluvia, las tormentas y demás meteoros, siendo el primero en haber trazado el primer mapa. En todo este panorama de simples anotaciones, es evidente la inexactitud y los errores de sus observaciones, si las juzgamos a la luz de los conocimientos posteriores. Ahora bien, con toda la carga de ingenuidad, sobresale una de las primeras precisiones con peso matemático: son sus observaciones sobre la situación y equilibrio del cosmos.

No cabe duda que Anaximandro participa de toda una mitología de origen oriental, quizás india y babilónica, según la cual la tierra ocupa la cara superior de una columna cilíndrica que se encuentra en el centro del universo, que es de forma esférica. Así lo refieren varios fragmentos. Lo esférico es el universo, no la tierra, cuya esfericidad fue siempre desconocida para los griegos de la escuela de Mileto, tal como el propio Aristóteles recuerda. Ahora bien, en ese universo esférico,

"la tierra está situada en el medio (del universo). Ocupando el punto de un centro, y es de forma esférica" (Frag.154- 12 A 1).

Tras esta localización puramente espacial, Anaximandro introduce una nueva mentalidad matemática porque, alejándose de las narraciones míticas, atribuye explícitamente el equilibro universal a la equidistancia, dando así un paso de gigante a la concepción matemática del universo. Los términos del fragmento que nos refiere Hipólito son los siguientes:

"La tierra está suspendida libremente, sin estar sostenida por nada, y está firme a causa de su distancia semejante respecto de todas las cosas" (Frag.155 – A 11).

[36] Los fragmentos y testimonios de Anaximandro se citan por la edición castellana anteriormente indicada, Eggers Lan, C., *Los filósofos presocráticos* (Frag.134 corresponde a la notación de Eggers Lan, el paréntesis (12 A 9) corresponde a la notación original de Diels-Kranz).

Universidad Pontificia de Salamanca

2.2.3.- Del mito al *logos* y la autonomía de la tierra

En el fragmento que acabamos de citar se introducen *dos nociones* que si para el griego tuvieron importancia, no dejan de tenerla para nosotros.

a) Esta simple expresión supone el paso de la irracionalidad mítica a la racionalidad lógica. En términos ya tópicos, implica el paso *del mito al logos*, esto es, la superación de las elucubraciones fantásticas por razones y argumentos, de tal modo que las narraciones imaginativas de los mitos se sustituyen por una causa o principio cuantificable, de naturaleza matemática, como es la equidistancia y la simetría, ahora invocadas como razón del equilibrio. Aunque para Anaximandro la tierra ocupa la cara superior de un cilindro, su centro de gravedad está en el centro de un espacio infinito. Por eso la equidistancia matemática es la causa eficiente del equilibrio (ἰσοτροπία) natural y de la estabilidad cosmológica. De este modo, los poderes mágicos que se atribuían a los elementos naturales y a las infinitas divinidades que poblaban el olimpo griego, son sustituidos por magnitudes reales comprensibles, sin rastro de magia, para explicar la armonía universal. Se explica así como el universo obedece a una racionalidad análoga a la que rige la vida de los seres humanos: ambos mundos están regulados por las mismas leyes. Posteriormente, la ciencia moderna formulará leyes basadas en la estructura matemática del universo que dan cuenta de los fenómenos cosmológicos en general, tanto cuantitativos como cualitativos. Pero esta legislación científica es válida también para conocer e interpretar el curso ordinario de la vida humana.

b) En el fragmento aparece una expresión nada frecuente en la cosmología griega, es la afirmación de que la tierra "está suspendida libremente, sin estar sostenida por nada". Eso supone afirmar cierta autonomía, lo que equivale a la capacidad de autogestión de la tierra respecto a sí misma. Si dependiese de otra realidad, la tierra no podría estar colocada libremente allí donde está. Ahora bien, por estar en el centro y en virtud de la equidistancia matemática, la tierra tiene autonomía por sí misma - "libremente" dice el fragmento - quedando así exenta del poder de los dioses o de la acción de otros elementos naturales que la sostuviesen. Son, en fin, los atributos del propio cosmos los que gobiernan su funcionamiento. Esta reivindicación de la autonomía cosmológica, deja el mundo entregado a sus propias leyes, de acuerdo a las cuales se producen y suceden todos los fenómenos naturales, como suele afirmarse en la

Universidad Pontificia de Salamanca

actualidad. Dicho de otro modo: las cosas están hechas de tal modo que subsisten y perduran en virtud de su propia estructura y en un contexto de relaciones estrictamente intramundanas[37], con independencia de la acción de los dioses. Tal convicción, en el contexto griego, supuso una actitud que lleva implícita la limitación de la potencia absoluta de sus dioses. Si cambiamos de paradigma y nos situamos en el contexto cristiano, tal mentalidad no supone negar la acción divina, sino reconocer que Dios hizo el universo de tal modo que éste puede funcionar en virtud de los atributos con los que su acción lo creó.

Las intuiciones de Anaximandro implican, en términos actuales, la primera formulación del *principio de razón suficiente* expresado en términos matemáticos, según el cual todo fenómeno exige no sólo una causa, sino una causa adecuada. Anaximandro la fija en la distancia y la simetría, apartándose de las narraciones mitológicas que la atribuían al océano sobre el que bogaba la tierra, tal como sugería Tales de Mileto, o a la resistencia de grandes columnas sobre las que se sustentaba, según otros relatos. Semejantes fantasías son lógicamente contradictorias para la mentalidad matemática deductiva, porque exigirían la existencia de una serie infinita de soportes, de los cuales el océano o las columnas fuesen los más próximos al mundo. Saltando sobre toda mitología, Anaximandro recurre al modelo de racionalidad matemática, puramente teórico, a pesar de que sus conocimientos cosmológicos eran erróneos. Pero sus errores no impidieron que formulase y aplicase un principio racional y matemáticamente adecuado para dar cuenta y explicar fenómenos que, hasta entonces, no habían recibido más que explicaciones totalmente desprovistas de lógica.

Aristóteles, a la par que nos refiere las ideas de Anaximandro, fue muy crítico con la solución basada en el equilibrio matemático. Pero lo hace porque, como él mismo reconoce, contradecía su concepción del movimiento, según la cual los cuerpos tienen una naturaleza específica por la que sus movimientos tienden o buscar su lugar natural. Debido a ello, el humo sube y la piedra cae (Aristóteles, *Del Cielo* II 13, 295 b), en virtud de su naturaleza ligera o pesada. Y, del mismo modo, un hombre rodeado de comida y bebida equidistante a su alrededor, no se queda quieto y en equilibrio -como la

[37] Afirmar la autonomía del mundo y del cosmos, a nuestro entender, no supone ninguna profesión de ateismo. El mundo puede haber sido creado por Dios (por una mezcla divina para los griegos), pero eso en nada contradice que todo lo creado haya sido dotado de la suficiencia necesaria para su autonomía.

Universidad Pontificia de Salamanca

tierra en el centro del universo- sino que, para no morirse de hambre, se desplaza por su propio apetito natural, que le inclina hacia la parte más apetitosa. Es claro que Aristóteles no entendió, quizás no quiso entender, la solución de la equidistancia geométrica de Anaximandro, confirmando así su escasa afición por la matemática aplicada. Pero, a pesar de esa mentalidad refractaria al cálculo, su propia doctrina de la virtud estará muy marcada por connotaciones matemáticas a través del concepto de proporción y de término medio, como veremos más adelante.

Si seguimos sus fragmentos, se confirma la opinión de la adecuada mentalidad matemática de Anaximandro si se atiende a sus preocupaciones científicas, tales como fijar las dimensiones, la distribución y forma de los astros, los movimientos de los cuerpos, el origen y la naturaleza de la luz, así como la causa de los eclipses. Según las fuentes, "fue el primero que dibujó el perímetro de la tierra y del mar y fabricó una esfera" (Eggers Lan, C., *Los filósofos presocráticos*, Frag.67-12 A 1) y también "el primero que se atrevió a dibujar un cuadro de la tierra habitada" (Frag.68 -12 A 6), atribuyéndole así la invención de la cartografía. Sus inquietudes confirman su mentalidad matemática porque todas esas preocupaciones van asociadas a las nociones de distancia, relación y proporción. De todo este recuento de investigaciones y, con independencia de sus equivocadas conclusiones, lo ilustrativo es la mentalidad científico matemática que demuestra, poniendo así las bases de una forma de pensar racional y razonable.

2.2.4.- Extensión social y política de las nociones matemáticas

Que la mentalidad matemática originaria tuvo fuerza paradigmática en la cultura griega, se pone de manifiesto en la extensión de los conceptos geométricos, sobre todo los de centro y simetría, al terreno de la sociedad e incluso de la política. Es esta una ampliación que tuvo ya su origen en la época preclásica con variables posteriores. A esta evolución vamos a referirnos brevemente.

a) Época preclásica

En el período anterior al siglo V a.C., la cultura influida por la mentalidad matemática de Anaximandro, la visión geométrica del mundo y el sentido de la equidistancia, coincide con las ideas que rigieron la vida urbana, social y política de atenienses. Es este un período en el que la mentalidad matemática rige en cosmología y en política, quizás con influencia mutua de una en la otra. En esta época, anterior pero

Universidad Pontificia de Salamanca

muy próxima al siglo V, es la propia mentalidad matemática la que influye en la manera de gobernar la ciudad, en la que están presentes las nociones de *igualdad, simetría y similitud.* A partir de ellas se van articulando las primeras políticas democráticas, sustentadas en el principio de la *isonomía,* (ἰσονομία) o igualdad de derechos, con el reparto de bienes y beneficios siguiendo la norma de la igualdad que regía la cosmología. A partir de ella se van abriendo paso los primeros intentos democráticos atenienses. Entre ellos sobresalen las medidas de Clístenes, gobernante que se esforzó por procurar cierta igualdad ciudadana. Arconte, hacia el 525, es el personaje que pasa por ser el fundador de la democracia ateniense (Aristóteles, *Política,* VI, 4, 1319 b 18.)[38]. Con independencia de si la política influyó más en la cosmología o ésta más en la política, lo cierto es que la mentalidad geométrica de la igualdad y la simetría fue el paradigma que acompañó a los cambios políticos. En analogía con la autonomía del cosmos, que hemos comentado, la ciudad debe gozar de autonomía en su gobierno que, continuando la similitud, debe gobernar procurando la igualdad entre los ciudadanos. Igualdad que debe ser respetada también por el gobernante. En este sentido, el vocabulario matemático/astronómico servirá de referencia a los léxicos de la filosofía y a las preocupaciones políticas. Incluso el urbanismo y la planificación urbana se ven influenciados por el principio de la igualdad, con notable influencia en el trazo de la ciudad y en las construcciones domésticas.

b) Época clásica a partir del siglo V

Avanzando el siglo V el ámbito ciudadano y político se apartan de la reflexión matemática y astronómica. Sintetizando la opinión de otros muchos autores y comentaristas sobre este asunto, J.P. Vernant así expresa la situación intelectual de este siglo:

"Cada tipo de disciplina debe construir su propio modo de reflexión, edificar su vocabulario, elaborar su lógica. De esta forma se consuma entre el espacio de los matemáticos y el de la comunidad política una ruptura que los autores estiman muy profunda. Con el descubrimiento por parte de Hippaso, a mediados del siglo V, de los inconmensurables, con la publicación de los primeros elementos de la geometría de

[38] En este pasaje Aristóteles afirma: "Para una democracia de esta clase son útiles también procedimientos semejantes a los que Clístenes empleó en Atenas cuando quiso aumentar la democracia". Como ya hemos mencionado anteriormente a cita se hace siguiendo la edición Bekker, en la traducción castellana (VI=libro; 4=capítulo; 1319 b folio/columna b, 18 línea)

Universidad Pontificia de Salamanca

Hipócrates de Quíos, el espacio geométrico, enteramente indiferenciado, ya no puede permitir un punto central privilegiado" (Vernant, J. P., 1985:231).

Si seguimos esta opinión, la introducción por los geómetras de un concepto de espacio entendido como realidad indeterminada, inconmensurable o, por lo menos, difícil de acotar, se hace más compleja la noción de centro y, por tanto, las de equidistancia y simetría. Este divorcio entre matemática, política y sociedad condujo a políticas menos basadas en la igualdad que propiciaron la estratificación de los ciudadanos. Esa mentalidad, menos marcada por la igualdad geométrica, llevó a Hipodamo, considerado primer urbanista y primer teórico político de la ciudad, a establecer la distribución ciudadana, no de acuerdo a un centro y con atención a la igualdad o isonomía, sino diferenciando espacios propios de cada clase social, incluso dividiendo a los ciudadanos según sus profesiones, como escribe Aristóteles (*Política,* II, 1267 b8, y ss) [39]. Por vía negativa, la matemática, en especial la geometría, sirve de referencia pero no para igualar sino para dividir socialmente, alejando el plano o trazo de la ciudad de los modelos regidos por simetría y la equidistancia. Ahora bien, tal diferenciación, no impidió que el modelo urbanístico de este celebrado urbanista no se atuviese a medidas estrictas y trazos geométricos muy exigentes: las calles tenían 17 pies de largo, excepto la principal que media 24, y su trazo se establecía según una retícula octogonal. De hecho Hipodamo planificó la ciudad de Pireo, alrededor del puerto, sustituyendo las calles curvas y estrechas por calles rectas perpendiculares entre sí (Aristóteles, *Política,* VII, 1330 b 6)[40].

c) Época clásica durante el siglo IV

Entrando en el siglo IV, los progresos de las matemáticas permiten un nuevo encuentro entre geometría, política, educación y progreso científico. En ese nuevo reencuentro, son las diversas escuelas pitagóricas las que, tras la herencia de las

---

[39] En este pasaje Aristóteles nos lega una imagen pintoresca de este personaje, urbanista y político, muy precisa y curiosa quien, según relato del gran filósofo, introdujo notables novedades regidas por el principio de la diferenciación y no de la igualdad y la simetría, si bien ateniéndose a trazos muy geométricos.

[40] Aristóteles muestra su aprecio por Hipodamo de Mileto, urbanista y político, cuando dice refiriéndose a la disposición de las casas, que la planificación de la ciudad es más agradable "si está bien trazada en sus calles y según el gusto moderno, al modo de Hipodamo". La expresión "gusto moderno" muestra una mentalidad favorable a los cambios.

Universidad Pontificia de Salamanca

doctrinas del mítico Pitágoras, introducen las matemáticas como referencia casi universal, tanto en el ámbito del saber teórico/filosófico, como en su aplicación a la solución de los problemas sociales e económicos. Ahora bien, una nueva noción matemática sustituye a la antigua *isonomía o igualdad* que había inspirado a Clístenes y a la primera democracia. Como veremos, esa noción será sustituida, sobre todo a partir de la matemática pitagórica, por la de *proporción*, tanto con consecuencias metafísicas como políticas. Se generaliza entonces la importancia de la reflexión, la enseñanza y la aplicación de la matemática hasta tal punto que hace decir a Aristóteles, refiriéndose a sus contemporáneos:

"Pero las Matemáticas son la Filosofía para los modernos, aunque digan que deben ser cultivadas en vista de otras cosas" (Aristóteles, *Metafísica*, I, 992 a 35).

Con evidente ironía, Aristóteles llama "modernos", que podría traducirse literalmente por "los de ahora", a los filósofos e intelectuales de su tiempo. Teniendo en cuenta que la Filosofía era el saber supremo por excelencia, Aristóteles deja claro que la Matemática ha pasado a ocupar el lugar de ciencia suprema y omnicomprensiva. Y así había sido, a su pesar, porque el pitagorismo alcanzó a llevar las nociones matemáticas, incluido el concepto de número, a expresión de las verdades que afectaban a la comprensión del cosmos y a la interpretación del ser humano y de todas las demás cosas.

Por tanto, Aristóteles había entendido perfectamente el alcance de la matemática pitagórica como saber universal, equivalente a una metafísica cuyas consecuencias afectaban a la totalidad de la interpretación de la realidad. Y no deja de advertir que así la entendían la mayoría de los ilustrados de su tiempo -"los modernos"-, dice irónico, aunque algunos de estos patrocinadores de la modernidad, queriendo apartarse de la tradición sapiencial antigua, y con la intención de presentarse como prácticos y utilitaristas, dijesen que atendían a las matemáticas porque "valían para otras cosas", como comerciar, cambiar bienes y monedas o para el cálculo de las magnitudes.

2.2.5.- A modo de síntesis.

A pesar de que muchos pretendieran reducir la matemática a un saber o ciencia con finalidades prácticas, la mentalidad matemática entendida como saber universal, en todo el período de la cultura preclásica y clásica griega, desde el siglo VI al IV, a. C. estuvo siempre ligada a dos conceptos que hemos venido apuntado ya y que se van a hacer más explícitos con las referencias al pitagorismo.

Universidad Pontificia de Salamanca

El primer concepto se refiere a la proporción y la medida como estructura del universo pero regulada por un principio único, confirmando la mentalidad deductiva vertebrada por la distribución de cantidades y la relación de proporciones. En el fondo, los seres son lo que son en virtud de la cantidad que les corresponde en sus relaciones con la totalidad. Porque en el universo rige la proporcionalidad, podemos deducir que cada cosa, cada ser, tiene la entidad que le corresponde en el concierto de todo lo existente. Ello quiere decir que los atributos cualitativos son reducibles a relaciones y proporciones cuantitativas. Con aquella mentalidad, diríamos hoy que, por ejemplo, las propiedades de los elementos químicos (peso atómico, valencia) y de los compuestos en general, (conductibilidad, densidad, dureza, etc.), son derivaciones de su composición cuantitativa.

El segundo radica en la interpretación de las ciencias como progreso en el estudio analítico de las cantidades y las relaciones. Por eso la ciencia griega es una progresión que avanza poco a poco, como un proceso basado inicialmente en el "más o menos", para ir elevándose a principios más generales, que irán adquiriendo paulatinamente formulaciones matemáticas. Tal es el caso del principio de Arquímedes, a finales del siglo IV, y de Euclides que se sitúa ya a comienzos del siglo III, aunque sin renunciar a "un principio" único que impone lógica y orden a las cantidades, las proporciones y la relaciones en la naturaleza.

2.3. PARADIGMA PITAGÓRICO: CUALIDAD Y RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

La confirmación de que la matemática es y debe proceder como secuencia de deducciones es claramente perceptible en el Pitagorismo en el que, tan importante como sus formulaciones matemáticas operativas, es lo que se puede llamar "metafísica del número". Las formulaciones operativas dieron un gran avance a la matemática aplicada a través de las nociones de par/impar, el concepto de irracional, de segmentos inconmensurables, de la relación entre la diagonal y el lado del triángulo rectángulo isósceles, la que existe entre los cuadrados de los catetos y la hipotenusa, asÍ como amplias aplicaciones de las razones y proporciones. Si todo eso supuso un progreso para la dimensión operativa de la matemática, a nuestro juicio, es la llamada "metafísica del número", lo que, a pesar de su orientación más teórica, supuso el avance de una

Universidad Pontificia de Salamanca

mentalidad matemática como ciencia deductiva. Señalamos a continuación sus ideas fundamentales al respecto.

2.3.1.- El número Uno y la Totalidad

Su principio fundamental es la afirmación de que la totalidad de lo que para el griego era la Naturaleza, equivalente a lo que hoy entendemos por universo, es una unidad perfecta fuera de la cual nada existe, porque nada queda fuera de tal unidad (inmanentismo). Esta unidad perfecta se representa simbólicamente por el pitagorismo a través del Uno, unidad expresada numéricamente a que, en el pensamiento pitagórico, es reducible cualquier otra magnitud. El uno, por una parte, no es un concepto abstracto sino el símbolo de que nada puede ser entendido como realidad aislada, individualizada porque todo cuanto existe en la realidad, no existe por sí mismo, en virtud de su propia entidad singular, sino como partícula integrante de una totalidad. Por tanto, cada ser es lo que, no por sí mismo, sino por su participación en la unidad, en el uno. El Uno no expresa, pues, el primer momento de la serie numérica idealmente tendente al infinito, sino el infinito mismo. El uno es símbolo de la totalidad de lo existente, significa la totalidad de todo lo físicamente real y de todo lo que puede ser pensado, aunque sea físicamente irreal. En este sentido es expresión simbólica, tanto de la totalidad de la Naturaleza, cuanto de la articulación universal de los seres: todos pertenecen y desempeñan un papel dentro de la unidad. Así parece entenderlo y confirmarlo Porfirio en la *Vida de Pitágoras;* una de las obras antiguas que ha transmitido la mentalidad matemática pitagórica con más fidelidad:

"Han denominado "uno" *(hen)* al concepto significativo de la unidad, de la identidad y de la igualdad y a la causa del acuerdo conjunto y de la simpatía del universo y de la conservación de lo que mantiene también inmutablemente la identidad" (Porfirio, *Vida de Pitágoras,* parágrafo 49).

El uno no es, por tanto, expresión de magnitud que puede ser tomada aditivamente como principio de cantidades o números sucesivos, sino, como dice Porfirio, como "concepto significativo de la unidad" a partir de la cual todos los seres pueden ser valorados como idénticos e iguales si desempeñan el mismo lugar ontológico en esa unidad, y como diferentes y desiguales si su papel no es el mismo. Así pues, el uno es la trama real y auténtica a partir del cual se pueden evaluar los seres, atribuirles cualidades y funciones, distinguirlos, diferenciarlos y relacionarlos, tomando siempre como referencia su forma de estar articulados, y el papel que desempeñan en

Universidad Pontificia de Salamanca

esa unidad mística expresada por el uno. De aquí se derivan importantes consecuencias para nuestro propósito.

a) El Uno como principio de todas las cosas

La primera es la afirmación de que el uno es “el principio de todas las cosas”, según la expresión de Filolao, que nos transmite Jámblico (Fil. 44, b 8. Trad. cast. *Los filósofos presocráticos*, o.c. III, p.135). Para el griego “principio” tiene significado análogo al que nosotros le atribuimos, esto es, expresa aquello de donde algo comienza o en que algo se funda[41]. Ahora bien, los principios pueden ser de muchas clases: ontológicos, lógicos, psicológicos, sociales, etc., según el punto de vista, aspecto, faceta, etc., a partir del cual se analice o investigue cualquier realidad. Con esta precisa acepción, de la afirmación del Uno como principio, en el contexto de la mentalidad pitagórica, actúa como principio en varios órdenes.

1º) El uno se eleva a principio ontológico de la realidad, esto es, la Naturaleza tiene “estructura numérica”, en cuanto que cada cosa viene a ser una “variante” o “modificación”, imperfecta y limitada, de la perfección de Uno. Dicho de otro modo, el uno es valor cualitativo absoluto de referencia, y los seres son otras tantas manifestaciones reales e imperfectas, que vienen a ser significadas por todas los demás números, tanto racionales como irracionales. Dicho de otro modo: así como el uno número es referencia límite de las magnitudes positivas o negativas, fraccionarias, del mismo modo las cosas son y significan cualidades diferenciadas, siempre imperfectas, en virtud de su relación con esa perfección cualitativa del uno. En este sentido “la naturaleza está llena de números”, en cuanto que cada cosa es lo que es por el papel que desempeña respecto al uno, del mismo modo que el 2, el 95, el 3015, etc. o los irracionales ½ o 2/213, así como cualquier otra magnitud, se dotan de valor en virtud de su referencia al número 1.

Esta interpretación viene bien avalada por Aristóteles cuando en *Metafísica* (I, 5, 985 b 23) dice que las cosas son *“como semejanzas”* (ομοιώματα) o *“modificaciones”* (αριθμών πάθος) de los números, precisamente porque ellas expresan la infinidad de magnitudes cualitativas en el orden cósmico regido por la perfección del uno, porque

[41] El *Diccionario de la RAE* ofrece una larga serie de acepciones, de las que nos interesan las cuatro primeras que se formulan como sigue. “Principio. Primer instante del ser de una cosa. 2. Punto de que se considera como primero en una extensión o cosa. 3. Base, fundamento, origen, razón fundamental sobre la cual se procede discurriendo en cualquier materia. 4. Causa primitiva o primera de una cosa, o aquello de que otros cosa procede de cualquier modo”.

Universidad Pontificia de Salamanca

éste, el uno, "es la sustancia de los seres" (Aristóteles, *Metafísica*, I, 5, 987 b 21). Teniendo en cuenta que la sustancia es en Aristóteles el substrato de los seres en el cual se inscriben todas las propiedades posibles de un ser, la afirmación de que el número es sustancia equivale a afirmar que la proporción, la relación y la medida son la estructura básica a partir de la cual se explican las propiedades de la naturaleza en su conjunto y de las cosas individuales. En consecuencia el orden natural no es casual, aleatorio o imprevisible porque, análogo a las estructuras y procesos matemáticos, él no está constituido por un conjunto de relaciones cuantitativas o cualitativas variables según circunstancias, sino un complejo regido por la necesidad armónica, con previsiones y predicciones invariables, del mismo modo que en matemáticas sus procesos son procedimientos sometidos a la necesidad lógica deductiva.

2º) Como consecuencia de la estructura numérica de la naturaleza, el número se convierte en el principio *cognoscitivo (γνωμικα)* y principio *rector (ηγεμονικά)* de la propia naturaleza. Esto quiere decir que, en virtud de su estructuración numérica, la naturaleza se hace comprensible, esto es, sobre ella se puede alcanzar, no sólo un conocimiento aproximado, sino ciencia exacta basada en la necesidad a la que están sometidas las secuencias numéricas. Dicho de otro modo: porque la naturaleza del cosmos está "regida" por los números, en terminología aristotélica, por eso podemos dar cuenta de ella con exactitud. Estas concepciones, enunciadas en lenguaje elemental y mistificante, adelantan la concepción matemática del universo que la ciencia moderna renacentista invocará como justificación para reconocer la universalidad y la necesidad de las leyes científicas. Por esta razón, se pude afirmar que el orden y la armonía no son algo exterior a los seres, ajenos a la estructura de las cosas, sino que son intrínsecos a su naturaleza, a su exigencia interior, esencial y necesaria. Por eso el gran pitagórico y matemático Filolao, reconoce en un célebre fragmento referido por Estobeo:

" Y todas las cosas que se conocen contienen un número, pues sin él nada sería pensado ni conocido" (*Los Filósofos presocráticos,* o.c, vol, III, Frag. 175, Fil., 44 b 4).

2.3.2.- Significado de los restantes números

Estas convicciones llevan a la certeza de que cada uno de los números distintos del uno, identifican y distinguen a cada cosa, no desde el punto de vista de su magnitud o medida, sino determinando su sustantividad, esto es, su modo de ser relativa al uno. Por eso las diversas clases de números -pares, impares y sus divisiones- son expresión,

Universidad Pontificia de Salamanca

no de magnitudes o medidas, sino del modo en el que la perfección del uno se especifica o participa en cada cosa. Eso quiere decir que la escala numérica expresa, no solo una magnitud matemática, sino una proporción ontológica, esto es, un modo de ser específico de cada ser diferenciándolo de los demás y asignándole su lugar en el conjunto. De este modo, la inteligibilidad de la realidad se expresa por medio de múltiples analogías, incontables, como incontables son los seres individuales dentro del universo. Por esa razón nos parece acertada la opinión siguiente:

"To Pythagoras number was the principle of a divine order in the Universe. The study of number and its laws therefore was the immediate contemplation of the divine Law by whish everything is held together and to which the objects of nature owe their being and their being and their essence, and to which man in his thought and life is likewise subjected" [42] (De Vogel, 1966:196).

.

El pitagorismo, por tanto, parte de una intuición místico/especulativa, la perfección divina de la Naturaleza, que tiene como consecuencia la afirmación de que las cosas singulares son imperfectas, pero no concluye en una actitud de rechazo místico de lo imperfecto, del mundo sensible, sino que recurre a la matemática y luego a la astronomía, como intentos cognitivos por los cuales, sin necesidad de tener delante las cosas, se hace posible aproximarse a la perfección ideal de la unidad a la par que se comprende la imperfección del mundo sensible. Por tanto, las matemáticas son, en consecuencia, la única mediación que puede aproximar a la comprensión de la perfección absoluta, ilimitada, de la naturaleza, participada en la imperfección limitada de los seres, de modo análogo a como intuiciones sólo existentes en la mente del matemático, como puedan ser la de círculo perfecto, la recta perfecta o algunos axiomas de Euclides, tienen verificación real, aunque imperfecta, en su aplicación y operatividad empírica.

Para el pitagórico, por tanto, es posible alcanzar conocimiento por medio del pensamiento puro basado en la intuición de axiomas de los cuales se deducen teoremas. Si los axiomas son verdaderos, lo serán los teoremas y deducciones. El papel del

[42] "Para Pitágoras el número era el principio del orden divino del Universo. El estudio del número y sus leyes eran, por tanto, la contemplación de la Ley divina, por la cual todo se mantiene junto y a la cual los objetos de la naturaleza deben su ser y su esencia y para lo cual el hombre en su pensamiento y en su vida está sujeto de la misma manera" (Traducción propia).

Universidad Pontificia de Salamanca

matemático, no es confrontarlos con la realidad, sino demostrar su racionalidad lógica, su aceptabilidad y deducir sus consecuencias que, de ser contradictorias, llevarían a la negación del axioma del que se había partido. No hay, pues, conocimientos inconexos puesto que todos los teoremas y ecuaciones se formulan en virtud de deducciones coherentes. Ahora bien, el único medio para comprobar o, en lenguaje actual, para testar la veracidad del axioma no puede ser otro que empírico. Por eso el pitagorismo concluyó en una matemática aplicada y en el desarrollo de los teoremas geométricos, algunos tan conocidos como el llamado teorema de Pitágoras, aunque su formulación sea anterior, porque lo "conocieron incluso los babilonios, en cuya matemática tenía una función fundamental" (Taton, 971:232).

Esta forma de entender la matemática confirma, para nuestro propósito, que el razonamiento deductivo tiene su origen en la mentalidad pitagórica. Deducir equivale a ampliar y extraer nuevos conocimientos a partir afirmaciones anteriores admitidas como verdaderas. Y si bien algunos autores sitúan el origen del conocimiento deductivo en Tales de Mileto y en el desarrollo posterior de la retórica (Boyer,1996:111), es en el pitagorismo donde realmente se practicó, como más tarde lo confirmará el mismo Platón, aplicado no sólo a la aritmética, sino y sobre todo la geometría. Este impulso ha sido decisivo para el desarrollo de la matemática desde Euclides a nuestros días, como explícitamente reconoce Hull (1961: 97):

"El gran sistema lógico de la geometría ofrecido más tarde al mundo por Euclides era una versión revisada y ampliada del sistema pitagórico, pero idéntica con éste en espíritu. No hay duda de que en la geometría pitagórica había imperfecciones lógicas, como las hay también en la de Euclides; pero el sistema de los pitagóricos fue una creación de enorme importancia e influencia".

La opinión que acabamos de citar es una buena síntesis de lo que hemos venido diciendo con las referencias directas de los pitagóricos y del propio Aristóteles, y autoriza a decir que esta concepción del número, aun siendo una derivada de la concepción mística y religiosa del cosmos, se ha llevado a cabo precisamente con mentalidad deductiva expresada por su concepción básica: como el uno expresa la perfección, todos los demás números son expresión de los seres imperfectos. De ahí sus convicciones sobre el carácter sagrado de la Tetraktis, puesto que en ella, tomando como base la unidad, se alcanza a formar el diez, número perfecto por esencia, puesto

Universidad Pontificia de Salamanca

que incluye todos los números a partir de los cuales se pueden formar las infinitas series numéricas: 1+2+3+4= 10. 1+3=4; 4+3=7; 7+3=10. No es, por tanto, casual que la tradición transmitiese la noticia de que los pitagóricos "juraban por la Tetraktis", que tenía carácter sagrado, no por ocurrencias mágicas, sino porque en las infinitas combinaciones de los diez primeros números se sitúa la estructura básica de toda la matemática.

2.3.3.- A modo de síntesis

No se trata pues, de abstractos razonamientos sin fundamento en la realidad, sino de poner en evidencia que hay una profunda analogía entre la estructura de la realidad y la estructura racional de la matemática. No es, pues, extraña la opinión de un gran matemático de nuestro siglo cuando afirma, a nuestro juicio con toda razón:

"A veinticinco siglos de distancia tenemos la convicción de que algunos resultados de Pitágoras o de su escuela no fueron charlatanería, sino profundos análisis de una trascendencia que entonces no podían ni remotamente sospechar; de aquellos primeros balbuceos geométricos desciende en línea directa toda la moderna técnica" (Dou,1970:14) .

"En pleno siglo XXI hemos encontrado una utilidad incontestable al desarrollo decimal de π: cuando se desea testar el funcionamiento de un superordenador se le impone como tarea algo arduo de calcular, pero, a la vez, cuyo resultado se conozca bien; los dígitos de π son la solución ideal" (Navarro, 2011: 11).

1) En conclusión, para nuestro punto de vista no se trata tanto de reconocer los aciertos y desaciertos concretos de la aritmética y de la geometría pitagórica, sino de atender a su gran mentalidad deductiva que sintetizamos en *las siguientes direcciones, referidas a nuestra tesis cuya finalidad es esencialmente educativa*.

a) La afirmación de que el *uno / perfección*, convierte en real y hace comprensible la diversidad y la multiplicidad. El uno no es realidad sensiblemente demostrable sino aceptado como intuición axiomática que hace razonable un mundo de seres diferentes pero, expresados por los demás números, como sucede en cualquier formulación matemática.

b) El pitagorismo invita a *estudiar la realidad por medio de relaciones y proporciones*, que no serán debidamente interpretadas si se estudian aisladas e individualizadas, porque la realidad tiene estructura vertebrada por vinculaciones, antecedentes y consecuentes.

Universidad Pontificia de Salamanca

c) El pitagorismo llevó sus convicciones hasta mucho más allá de sus comunidades, puesto que éstas no se quedaron en reductos místicos de vida ascética, sino en auténticos centros de enseñanza, los primeros grandes núcleos de reflexión. El pitagórico *era un maestro de la exactitud y la medida*. Por eso un gran conocedor de la cultura griega escribe:

"Con la matemática entra en la educación griega un elemento esencialmente nuevo. Se desarrollan primero con independencia sus ramas particulares. Pronto fue reconocida la fecundidad educadora de cada una de ella. Las tradiciones legendarias posteriores acentuaron de modo prominente la importancia de Pitágoras como educador. De ellas sacó indudablemente su modelo Platón" (Jaeger, 1957:162).

2) La mentalidad de *la exactitud y la coherencia no sólo supuso un progreso para la ciencia, sino para la educación en general*, a través de la vinculación de tiempo y sonido, que constituye la música como arte y, en parte, como ciencia. El pitagorismo fue un gran promotor de la música, según nos cuenta Jámblico (1991:52), quien atribuye a Pitágoras una cuidada educación musical que unida a las matemáticas hace decir a Jaëger, a quien volvemos a citar:

"La conexión de la música con la matemática establecida por Pitágoras fue, desde aquel momento, una adquisición definitiva del espíritu griego (…) La nueva concepción de la estructura de la música constituye un momento decisivo de aquella evolución. Sólo el conocimiento de la esencia de la armonía y del ritmo que surge de ella será bastante para asegurar a los griegos la inmortalidad en la historia de la educación humana" (Jaeger, 1957:163)[43].

Por último, la mentalidad matemática pitagórica, que procede a partir de intuiciones axiomáticas fundamentales, continúa con la exigencia de deducir con coherencia teoremas y aplicaciones, lo que *sugiere a la mentalidad educativa la convicción de que no hay saberes inconexos ni acciones caprichosas*, sino que la vida

[43] El instrumento preferido por los pitagóricos era la lira, cuyo sonido se deriva, no de la aleatoriedad del intérprete solamente, sino de su manejo de cuerdas de diferente longitud y calibre. La matemática interviene en la propia construcción del instrumento. Y es en el pitagorismo donde surgen las teorías sobre la armonía a partir de la consonancia de la escala musical y la media de los tiempos. En las comunidades educativas pitagóricas se recurría a la lira combinada con textos y representaciones dramáticas, que resume Jámblico en textos primorosos.

Universidad Pontificia de Salamanca

teórica y práctica debe proceder a partir de puntos de partida, de principios o razones que las justifiquen. Y, para tal propósito, la enseñanza de la matemática es fundamental.

2.4. PLATÓN: LA MATEMÁTICA Y EL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO

Del desarrollo de la mentalidad griega en la configuración del paradigma matemático, podemos hoy extraer conclusiones válidas para nuestras preocupaciones educativas. Platón representa el hito quizás más importante, no tanto por sus formulaciones matemáticas concretas, sino por las afortunadas exigencias que trasmitió en cuanto a la formación de la auténtica mentalidad matemático/científica. Aunque no introduce innovaciones respecto al pitagorismo en cuanto a la formulación específica de procesos o teoremas concretos, sin embargo hizo de la matemática el pivote sobre el que bascula todo su proceso educativo, encaminado al conocimiento verdadero de lo que son las cosas. Trataremos de aproximarnos a este planteamiento, a través de algunos textos significativos que, a nuestro juicio, no han perdido nada de su valor en la actualidad.

2.4.1.- Génesis del conocimiento

El primer gran texto paradigmático de la mentalidad matemática del platonismo es el de las últimas páginas del libro VI del diálogo *República,* en donde Platón propone el proceso modélico de todo conocimiento verdadero, que no es reducible a un momento o estado, sino a un itinerario ascendente. Se puede comprender gráficamente si se lo compara con una línea, AB, dividida en dos grandes fragmentos desiguales: AC y CB, subdivididos cada uno en otros dos.

- AC, representa el conocimiento sensible. Se divide, a su vez, en AD = conocimiento por imágenes, símbolos, o representaciones. Y en DC= conocimiento mediante la percepción directa y sensible de los objetos.

- CB que representa el conocimiento intelectual Se divide en CE= conocimiento matemático, o razonamiento científico. Y EB= conocimiento intuitivo, no alcanzable sino mediante intuiciones superiores al propio razonamiento discursivo, facultad de escasísimos espíritus privilegiados.

Universidad Pontificia de Salamanca

I____conocimiento sensible ______I ______ conocimiento inteligible___ _____ I

A -----------D-------------------- C----------------------------------E--------B

εἰκασία πίστις διάνοια νόησις

imágenes confianza en lo real ciencia/razonamiento intuición

Estableciendo proporciones resultan las siguientes: AD:DC::CE:EB.

El conocimiento verdadero debe recorrer todo ese itinerario que va de las imágenes a los objetos reales y de éstos a su percepción intelectiva o científica, para culminar, en escasísimos casos de sabios perfectos e iluminados y en el momento de la muerte, en el conocimiento intuitivo que supone una previsión de lo que algo podría ser si no estuviese limitado por su materialidad física. Con un ejemplo: el conocimiento de una circunferencia no es el que nos facilita su dibujo en la pizarra, ni ver un aro o una rueda, puesto que esos dos momentos no son sino el paso al conocimiento intelectual, el que tenemos cuando alcanzamos a conocer y comprender las relaciones que se dan entre el radio y la longitud de la circunferencia ($2 \pi r$) y la superficie del círculo (π r.r). Y con estos alcances puramente intelectivos, que ya no necesitan ni imágenes ni cosas físicas redondas, se abren paso todas las derivaciones geométricas y trigonométricas que se pueden deducir de un triángulo rectángulo inscrito en uno de sus cuadrantes delimitado por dos de sus radios. El último grado de conocimiento sería el de quien, una vez alcanzado ese conocimiento matemático, fuese capaz de intuir o prever, sin necesidad de razonamientos, todas las posibles implicaciones y derivaciones de tales conocimientos matemáticos. Platón, por tanto, confía que el razonamiento intelectual que actúa a nivel científico, deja todavía un margen de realidad que puede ser pensada como previsible pero no como cognoscible mediante razonamiento. Por eso atribuye este conocimiento al alma, esto es, al entendimiento pero en el momento de la muerte, cuando no está ya constreñido por condiciones materiales, esto es, por nuestras limitaciones cerebrales, podemos decir hoy.

Lo importante para nuestro propósito radica en que es en el fragmento CE en donde, después de ver imágenes u objetos reales, se produce el conocimiento científico que equivale a una concepción matemático/racional de la realidad. Dicho de otro modo: no hay ciencia hasta que no se conocen, mediante el aprendizaje, los principios matemáticos que rigen a los objetos reales. El conocimiento por la percepción sensible

Universidad Pontificia de Salamanca

de imágenes o cosas reales, no son más que pasos preparatorios que deben ser superados para alcanzar el verdadero conocimiento.

Ahora bien, esos conocimientos matemáticos, si bien deben ser aprendidos, sus principios fundamentales son intuitivos, tal como expresa en un célebre pasaje:

"Creo que sabes que los que se ocupan de geometría y de cálculo suponen lo impar y lo par, las figuras y tres clases de ángulos y cosas afines, según lo que investigan en cada caso. Como si las conocieran, las adoptan como supuestos, y de ahí en adelante no estiman que deban dar cuenta de ellas ni a sí mismo ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien, partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en aquello que proponían a examen" (Platón, *República,* VI,510 c). De la cita podemos deducir dos conclusiones que nos parecen particularmente significativas para nuestros propósitos educativos.

a) Los principios matemáticos

La primera es el carácter intuitivo de los principios matemáticos, que no admiten demostración, a partir de los cuales el matemático establece procesos deductivos hacia teoremas y conclusiones aplicadas, si bien éstas deben apoyarse en representaciones materiales, esto es, deben tener correspondencia en la realidad. Por tanto, el carácter intuitivo de los principios y axiomas actúa a modo de hipótesis, en su sentido originario, que significa fundamento o punto de partida que está en la base del razonamiento por el que se desciende hasta las conclusiones[44]. Este explícito reconocimiento de Platón, a nuestro parecer, debe ser bien entendido porque no supone ninguna huída hacia "otro mundo", sino que confirma la convicción de que el entendimiento humano, el alma dice él[45], está dotado de atribuciones innatas que se van activando por la experiencia, pero que actúan en virtud de su propia fuerza intelectiva. Esto convierte en muy importante el cultivo de la propia inteligencia, del entendimiento como entendimiento, mediante ejercicios que fomenten la atención a sí mismo, a la propia interioridad y a la propia capacidad reflexiva, antes de entrar en las matemáticas como sistema operacional.

[44] En el griego original ὕπόθεσις (hipótesis) significa base, principio, fundamento. No coincide, pues, con el sentido actual.

[45] El concepto platónico de alma es sinónimo de lo que nosotros expresamos con los de razón o entendimiento.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) La verdadera ciencia

La segunda conclusión viene sugerida por lo que ya hemos adelantado: no hay auténtica ciencia hasta que se pueda prescindir de la realidad física de los seres, de su descripción y de sus imágenes, como innecesarias para dar cuenta de la totalidad de lo que son y de todas sus funciones. Por tanto, las ciencias y el conocimiento, incluso los de naturaleza más empírica, no alcanzan la categoría de científicos mientras no sean demostrables racional y razonadamente, sin el recurso a la experiencia, en donde pueda haber tenido su origen el proceso hacia su conocimiento verdadero. La ciencia es siempre para Patón, episteme, esto es, inteligencia y conocimiento asentado en razones o, en nuestro caso, en razonamientos regidos por la necesidad deductiva. Pero, por eso mismo, admite la posibilidad de que la ciencia, incluso la matemática, no alcance la plenitud de toda la realidad, en cuanto que ésta está dotada de posibilidades que la propia razón humana no puede sospechar que, sin embargo, vienen presagiadas o se hacen presumibles a través de la ciencia matemática. Y así es porque la matemática actúa a partir de verdades eternas, de axiomas intuidos en el espíritu que, sin embargo no son obra del razonamiento científico humano, porque pertenecen al orden supremo que rige la naturaleza.

2.4.2.- Elaboración del conocimiento matemático

Este modo de interpretar la matemática no es ningún trasnochado idealismo como quedan bien claro si nos preguntamos, por ejemplo, en donde radica el principio de no contradicción, o la razón de por qué la superficie del círculo es una variable dependiente del cuadrado del radio multiplicado por π. Ciertamente la realidad lo confirma, pero el matemático trabaja con tales intuiciones como evidencias racionales anteriores a cualquier experiencia. De este modo, el matemático no puede ser asimilado a un "aficionado" que usa de los números para comprar y vender, porque él es quien percibe "por medio de la inteligencia" que en ellos se expresa la "verdad y la esencia" de las cosas (Platón, *República, VII,* 525 c.). Por eso si la primera de la enseñanzas, tras las preliminares de la gimnasia, seguidas por la música y las artes, la primera de las ciencias teoréticas que debe ser enseñada es la aritmética, que ha de conducir a la intelección de la realidad de las cosas. Y la segunda debe ser la geometría que, con más proximidad a la realidad física, es imprescindible porque ella se cultiva

"... apuntando al conocimiento de lo que es siempre, no de algo que en algún momento nace y en algún momento perece (…) pues la geometría es el conocimiento de

Universidad Pontificia de Salamanca

lo que siempre es (…) Se trata entonces de algo que atrae al alma hacia la verdad y que produce que el pensamiento del filósofo dirija hacia arriba lo que en el presente dirige hacia abajo ya que bien sabemos que hay una enorme diferencia entre quien ha estudiado geometría y quien no" (Platón, *República, VII,* 527 b.).

Como es perceptible por las palabras que acabamos de citar, la matemática abre dos caminos. Uno hacia el propio modo de ser del espíritu humano en el que sitúa los axiomas fundamentales del que se derivan los teoremas y demás aplicaciones matemáticas. Otro hacia el verdadero conocimiento de lo que son las cosas en cuanto que su conocimiento especializado, "no de aficionados", no se detiene en lo que de ellas nos dan los sentidos, el conocimiento sensible, sino que alcanza a entrever su "verdad y su esencia". Lo que nos lleva a la conclusión pedagógica de que, sin la comprensión matemática de la realidad, no se alcanza más que un saber fraccionado y parcial. No se trata tanto de aprender teoremas concretos y diseñar aplicaciones específicas, sino de llevar al ánimo del educando que todo en la naturaleza está regido por el orden, la proporción, la medida, las relaciones. O lo que es lo mismo: *adelantar didácticamente que la naturaleza está articulada en virtud de principios matemáticos y no regida por el azar, el destino o el capricho*.

Con ello Platón ha sabido hacer de la matemática mucho más que una ciencia operativa, para elevarla a forma previa de intelección que debe presidir cualquier otra ciencia, todo tipo o grado de conocimiento. Así lo expresa también en una obra de su ancianidad, la conocida como *Carta VII* (342 b) dirigida a los Siracusanos, en la que vuelve sobre las cinco formas en que se nos pueden presentar las cosas: tres de naturaleza sensible que son el nombre, la definición y la imagen; dos de naturaleza inteligible: la ciencia razonada, y la inteligibilidad pura o arquetípica, esto es, la intuición de que más allá de la ciencia queda la intuición de que cualquier realidad puede ser todavía más de lo que no facilita el razonamiento. El ejemplo que pone Platón en este pasaje que comentamos es el del círculo porque es en los objetos matemáticos donde se ve con más claridad que ni el nombre, ni la definición usual, ni su imagen, ni siquiera la geometría del círculo, abarcan todo lo que puede deducirse de su realidad circular.

Aunque parezca en apariencia menos significativo, el matematicismo de Platón influyó profundamente en las aplicaciones operacionales de la matemática y en las derivaciones hacia la física incipiente y hacia la astronomía. Muchos supuestos

Universidad Pontificia de Salamanca

puramente imaginativos, no justificados científicamente, sin embargo influyeron en el desarrollo realmente científico. Tal es su imaginaria teoría expuesta en su diálogo dedicado a la conformación del mundo, el *Timeo*, en donde propone que la forma última y básica del universo es el triángulo abriendo así paso a varias convicciones, quizás de las más importantes de la geometría griega : la de la triangulación, mediante la cual es representable, esto es, puede ser conocida cualquier superficie, plana o sólida. Quizás sea ésta una de las nociones más fructíferas de la geometría antigua que, a su vez, abre paso a la trigonometría ya que, auque el triángulo se presente bajo formas irregulares, todo triángulo es descomponible en triángulos rectángulos. Y sabemos que las funciones trigonométricas, como hoy las usamos, se sustentan sobre las relaciones entre los dos catetos entre sí, o de ellos con la hipotenusa. Y de los triángulos equiláteros se derivan que las demás figuras, como el pentágono, fundamental en la geometría euclidiana por su relación con la "sección áurea" [46], así como los sólidos, el cubo, el tetraedro, el octaedro y el dodecaedro.

Nos interesa señalar que esta concepción geométrica del universo, con su indudable carga de ingenuidad mitológica, nos lega una lección que la ciencia renacentista no tendrá ya más que desarrollar: la concepción de la armonía cósmica como resultante de articulaciones geométricas y de mensurabilidades aritméticas. Nada extraño pues, que se tomasen las proporciones matemáticas como referencia para valorar tanto los seres naturales como los artificiales, los artefactos, esto es, los producidos mediante la actividad humana, entre los que destacan las obras de arte, a las que se reconocerá tal categoría precisamente por la armonía de sus proporciones.

2.4.3.- A modo de síntesis

De esta concepción, más intelectualista que empírica de la matemática, se derivan las pertinentes previsiones pedagógicas puesto que se da por sentado que no es fácil transmitir tal mentalidad.

1) Casi como previsión de nuestra actualidad, Platón parece tomar todas las cautelas necesarias para transmitir con éxito la mentalidad matemática desde la infancia,

---

[46] De gran influencia en el arte, la arquitectura, la urbanística, etc. el concepto de "sección aurea" está asociada al despuntar de la geometría. La "sección Áurea" es la operación por la cual se divide un segmento entre dos partes, de la cual la mayor es media proporcional entre la menor y la longitud del segmento. En términos aritméticos: a:b = b: (a+b).

En términos algebraicos: b: ½ (√5-1) c. Numéricamente: Φ= ½ (√5-1) -≈ 1,618.

Universidad Pontificia de Salamanca

aconsejando que no se enseñe la geometría ni las demás ciencias, por la fuerza, ni de forma compulsiva, puesto que

"…en el alma no permanece nada que se aprenda coercitivamente (…) Entonces, no obligues por la fuerza a los niños en su aprendizaje, sino edúcalos jugando, para que también seas más capaz de divisar aquello para lo que cada uno es naturalmente apto" (*República,* VII, 537 a.).

Como síntesis final concerniente a los objetivos de nuestra tesis, nos parecen fundamentales *dos conclusiones de gran actualidad*, deducidas del platonismo.

a) La certeza de que las ciencias no alcanzan el valor de conocimiento verdadero hasta que *superen el umbral de la observación y la experimentación*, mediante formulaciones, demostraciones, principios, leyes, conclusiones, etc. con valor universal. Esto supone pasar al nivel de la episteme, como pide Platón, o sea al razonamiento lógicamente articulado para poder ser compartido, lo que se alcanza cuando tales conclusiones pueden ser objetivamente y matemáticamente.

b) La diligencia platónica hacia la inteligencia, por la cual insiste en que el conocimiento científico y matemático, aún basándose en intuiciones, *debe ser cultivado, más aún, enseñado mediante la práctica desde la infancia*. No hay pues, ciencia infusa, ni siquiera de aquellos principios que se reconocen como previos o fundamentales para ser aplicados en la realidad. La evidencia de los principios, pues, no se alcanza más que con el recorrido pedagógico de una enseñanza que debe comenzar con lo más sensible y comprensible. La enseñanza de las matemáticas, por tanto, debe someterse a una didáctica que, sin reducirla a sus aplicaciones, empiece por éstas para llevar a la compresión de los procesos deductivos.

Esta opinión viene confirmada por el propio Platón cuando insiste en que todo proceso de conocimiento es un proceso dialéctico, entendiendo por tal el camino que se inicia en lo más conocido y se eleva paulatinamente hacia lo menos conocido. Lo hemos vito de modo general cuando ejemplifica este proceso con la división de la línea que empieza por las sombras e imágenes y acaba en la intuición de lo que realmente es la verdad de las cosas, inaccesible al razonamiento. Así debe procederse, no sólo en las ciencias teoréticas como la matemáticas, sino también en entidades más sensibles, como es la de la belleza, cuya realidad verdadera no se alcanza de inmediato, sino pasando de la belleza de un cuerpo a la de varios cuerpos, de ésta a la belleza de un acto bueno, luego a la de un razonamiento y a la belleza de las ciencias. Proceso que describe Platón

Universidad Pontificia de Salamanca

con lenguaje muy inteligible en su célebre diálogo que lleva el título *Banquete* (210a – 211b). Y su diálogo *Fedro* (248 b y ss), está articulado sobre las bellas imágenes del ascenso hacia la cumbre de la verdad mediante un proceso de superación de etapas sucesivas que van desde las más próximas, inmediatas y concretas a las más abstractas. Por eso nos parece acertada la opinión de de C.B. Boyer (1996: 126) cuando escribe:

"Platón parece haber sido el primero en señalar que a veces es conveniente *desde un punto de vista pedagógico invertir el proceso*, sobre todo cuando la cadena de razonamiento de las premisas a la conclusión no es en principio natural y obvia. Uno podría comenzar así por la proposición que hay que demostrar y deducir de ella una conclusión que se sabe se verifica. Si podemos entonces invertir las etapas de esta cadena de razonamiento, el resultado será una legítima demostración de la proposición dada".

2) Quizás sea este el mérito más destacado de Platón que, si bien no introdujo especiales adelantos operativos en la matemática, sí supo valorarla como ejemplo de todo conocimiento verdadero siguiendo un proceso analítico de doble dirección. La primera, esencialmente deductiva, parte de la dotación intelectual del científico, de intuiciones como son los axiomas matemáticos, para poder formular conclusiones, definiciones y aplicaciones precisas. La segunda, más inductiva, parte de lo más conocido, como son las imágenes, lo que sabemos por experiencia de las cosas, para ir ascendiendo hasta el conocimiento de su esencia, de los principios que rigen esa parcela de realidad que observamos. Buen ejemplo de esta mentalidad platónica en que se entrelazan e ilustran mutuamente la deducción y la inducción es su diálogo titulado *Sofista* (240a y ss.). El razonamiento platónico siembra así el germen de una mentalidad científica basada en el razonamiento lógico que, como el propio Popper propone en la actualidad, no es exclusivamente inductivo ni puede ser plenamente deductivo (Popper, 1962:27-56).

La mentalidad pitagórico - platónica supuso un notable avance en los procedimientos prácticos y aplicados de las matemáticas y, con acuerdo entre los historiadores, si no implicó innovaciones concretas, sí introdujo toda una mentalidad, como la de su discípulo Aristóteles y más concretamente la que abre el paso a los axiomas de la geometría de Euclides, a las que nos referiremos más adelante. No en vano uno de los más importantes matemáticos de la Academia platónica, Teeteto, es

Universidad Pontificia de Salamanca

considerado como el inspirador de la mayor parte del libro XIII de los *Elementos* de Euclides.

2.5. ARISTÓTELES: LA MATEMÁTICA COMO CIENCIA TEORÉTICA

Aristóteles no propone novedades operativas ni hace adelantar la matemática como sistema aplicado. Sin embargo, la reflexión matemática acompaña su metafísica, su ética y su cosmología. Sintetizando su mentalidad de él retenemos, de acuerdo a nuestros objetivos pedagógicos, los siguientes asuntos.

2.5.1.- La matemática en la construcción del sistema científico aristotélico

En primer lugar, la matemática ocupa en el sistema aristotélico de las ciencias un lugar destacado porque se le reconoce valor de ciencia teorética en cuanto que no trata de los seres desde el punto de vista de su materialidad, ni tampoco se aplica a una clase concreta de seres, sino de principios universales válidos para todos los seres pertenecientes a la Naturaleza (Aristóteles, *Metafísica* VI, 1025 b 5- 1026 a 30)[47], como son la numeración, la figura, las proporciones y los movimientos. Todo esto está relacionado con la materialidad de las cosas, pero se puede considerar y analizar con independencia de su radicación física. En este sentido la matemática pura se distingue de la física e incluso de la geometría, necesarias para conocer cierto tipo de naturalezas o de modos de ser, mientras que "la matemática universal es común a todas las naturalezas" (Ibid., 1026 a 28), lo que equivale a otorgarle la misión de especular sobre los principios universales de la realidad. Esto quiere decir que la matemática atiende a los fundamentos mismos que rigen el mundo de las cosas, tanto en el orden microcósmico como en el macrocósmico. Ahora bien esos principios matemáticos no se hacen presentes al conocimiento sensible, de la vista, el tacto o el oído, sino que es el entendimiento quien realmente los descubre porque en cierto modo están en él mismo, en su capacidad de interpretar la realidad física. En este sentido, la matemática es

[47] Aristóteles en la *Metafísica* divide las ciencias en: a) Poéticas (poiéticas) de las que el arte, sobre todo literario, es la más importante. b) Prácticas que tratan sobre la conducta y la actividad humana, como es la ética. c) Teoréticas que tratan de los principios universales que rigen la realidad en su totalidad. Son la Matemática, la Física y la Teología que cubren diversos grados o niveles de la que califica como Filosofía.

Universidad Pontificia de Salamanca

análoga a la filosofía que se interroga sobre los principios del ser, de forma igualmente universal, en paralelo a la matemática, aunque ésta lo hace de forma más precisa y realista porque tiene en cuenta los principios generales desde los que se entiende la figura y la magnitud de las cosas.

Es muy sugerente, para nuestro propósito, la distinción que acabamos de apuntar con Aristóteles. En efecto, la mentalidad matemática introduce la idea de que el número, lo par, lo impar, lo curvo o lo recto, la línea, la figura, en fin, todas las nociones matemáticas básicas, pueden ser concebidas y estudiadas con independencia de los objetos y de las conexiones con la materia, aunque luego sus concreciones vengan dadas por su incardinación material. El ejemplo aristotélico es muy ilustrativo: la concavidad y lo curvo, por ejemplo, puede ser concebido y definido con independencia de los objetos sensibles, mientras que chato sólo puede ser tomado o dicho en relación con una materia determinada: "pues lo chato es una nariz cóncava", ejemplifica Aristóteles (*Metafísica*, 1025 b 30)[48]. Eso es así porque los "objetos matemáticos", como lo cóncavo, proceden de la abstracción de la materia de las cosas, mientras que lo chato se deriva de la adición de la entidad matemática (cóncavo) a cosa sensible (la nariz). Con sus palabras,

"El matemático realiza su investigación en torno a los productos de la abstracción; investiga, en efecto, eliminando previamente todas las cualidades sensibles, como el peso y la levedad y sólo deja la cantidad y la continuidad, de unas cosas en una dimensión, de otras en dos y de otras en tres, y considera las afecciones de estas cosas en su calidad de cuantas y continuas y de unas cosas considera las posiciones recíprocas y de otras la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad, de otras las relaciones proporcionales" (*Metafísica*, 1061 a 28 – 1061 b 4).

Por tanto, en el pensamiento aristotélico la aritmética que trata de la cantidad discreta no hace referencia a extensión concreta alguna. Y la geometría que versa sobre la cantidad continua y extensa, la toma como pura entidad inteligible, no como dimensión concreta, lo que sucede también cuando el matemático cuando trata del movimiento y las demás cuantificaciones. En todos los casos está abstrayendo de la materia sensible de los objetos. Lo que, para nuestro propósito pedagógico, invita a

[48] En *Acerca del cielo* 299 a 15 y ss, Aristóteles repite el ejemplo de la "nariz chata" (194 a 30).

Universidad Pontificia de Salamanca

insistir en la capacitación de competencias lógico intelectivas, antes de proceder a enseñar las aplicaciones y operaciones concretas.

Esta condición de inteligibilidad de la matemática, que Aristóteles hereda del pitagorismo y del platonismo, tendrá en su sistema una gran repercusión porque será la base de su metafísica y de su lógica. Desde el punto de vista metafísico, la matemática le lleva a vertebrar todo su razonamiento estableciendo un proceso que va de causa en causa, para preguntarse por la causa primera de los seres y de la Naturaleza. Proceso análogo a la matemática cuyo ámbito operativo remite a axiomas o intuiciones primeras, inteligibles e indemostrables. En segundo lugar, sirve de base a su lógica, en la doble dirección, deductiva e inductiva. Los procesos lógicos deductivos, deben de proceder como la matemática, a partir de premisas o principios intuitivos evidentes, para articular el razonamiento, cuyo principal instrumento es el silogismo. Y, a su vez, la observación y la experimentación que tanto practicó Aristóteles, deben ser el inicio de una cadena inductiva que no se quede en la descripción de los seres, sino que lleve a formular o encontrar los principios generales inteligibles que rigen su estructura y funcionamiento.

2.5.2.- La matemática en la ética

En segundo lugar, la matemática se postula como referencia fundamental para la ética aristotélica a través del concepto de virtud entendida como término medio entre el exceso y el defecto. Tal concepto impregna las orientaciones éticas de Aristóteles, e incluso su mentalidad política porque más allá de su enunciado en términos generales, sus referencias seguirán dominadas por los conceptos de proporción y medida adecuada, no sólo en la conducta individual, sino en las condiciones para reconocer cargos o bienes a los ciudadanos. Se trata, por tanto, de una mentalidad matemática genérica que debe ser puesta en práctica en cada caso, considerando qué es lo que se compara y en virtud de qué principio debe hacerse el término medio. Se percibe este impulso matematicista en sus propias palabras:

“En todo lo continuo y divisible es posible tomar una cantidad mayor, o menor, o igual, y esto, o bien con relación a las cosas mismas o a nosotros; y lo igual es un término medio entre el exceso y el defecto. Llamo término medio de una cosa al que dista lo mismo de ambos extremos, y éste es uno y el mismo para todos; y en relación con nosotros, al que ni excede ni se queda corto, y éste no es ni uno ni el mismo para todos” (Aristóteles, *Etica Nicomáquea,* 1106 a 25-30).

Universidad Pontificia de Salamanca

La idea del "término medio", como es evidente por la cita que acabamos de incluir, está aquí tomado en sentido genérico, pero es ilustrativa de su mentalidad matemática la distinción que se sugiere distinguiendo el término medio "en cuanto a la cosa" y "en cuanto a nosotros". En el primer sentido es claro que el término medio es una magnitud exacta, como el 6 que es término medio entre el 10 y el 2. Pero en el segundo sentido, el término medio requiere el ejercicio de la recta razón y la ponderación de todos los factores, circunstancias y situaciones que intervienen en una conducta, para poder optar por un "termino medio" razonable. Así, sucede por ejemplo, con el alimento que necesita un atleta que tiene que hacer mucho ejercicio y otro principiante. Si al primero le asignamos 10 libras de alimento, al segundo le tocarían mucho menos del término medio 6, para guardar la proporción entre el gran esfuerzo del primero y el exiguo del principiante. Eso supone rectificar la proporción matemática con la ponderación reflexiva de las situaciones. Sin embargo tal circunstancia en nada merma el valor del término medio como referencia de la perfección en todos los campos de la acción y en la propia naturaleza, tal como confirman sus propias palabras:

"… si toda ciencia cumple bien su función mirando al término medio y dirigiendo hacia éste sus obras , de ahí procede lo que suele decirse de las obras excelentes, que no se les puede quitar ni añadir nada, porque tanto el exceso como el defecto destruyen la perfección, mientras que el término medio la conserva, y los buenos artistas trabajan con los ojos puestos en él y, si por otra parte la virtud, como la naturaleza, es más exacta y mejor que todo arte, tendrá que tender al término medio" (*Ibíd.*, 1106 b 8-15).

Por tanto, la noción matemática de "termino medio" no tiene en Aristóteles una importancia accidental, puesto que es tomado como referencia de la perfección, tanto en el arte, que en tiempo de Aristóteles había dado ya sus frutos más logrados, sobre todo en escultura y en arquitectura basadas en la proporción; sino también en los seres naturales en los cuales la perfección radica en el término medio que la propia naturaleza acierta a asignarles. Según la profesora Salamone, "la μεσότης (término medio) de la Justicia Distributiva de Aristóteles se identifica con la *Proporción Aurea*, es decir, con una igualdad proporcional entre los tres criterios de repartición: la virtud, la libertad y la riqueza" (Salamone, 2007:9). La mentalidad matemática viene así a sustentar la armonía

Universidad Pontificia de Salamanca

y perfección del universo, alcanzadas porque las cosas y su articulación cósmica, obedecen a principios matemáticos de medida, orden, proporción y relaciones equilibradas.

2.5.3.- A modo de síntesis

1) Con Aristóteles la matemática no solo informa el edificio de su sistema científico sobre la naturaleza, como ya era usual en los Pitagóricos y en Platón, sino que con el Estagirita la matemática pasa a constituirse en la materia básica de la metafísica, pero sobre todo encarna el fundamento para establecer el criterio moral del término medio que determina la acción justa. Ese término medio (μεσότης geométrico) en Aristóteles significa tanto la superación de los extremos cuanto la virtud, que identifica no con el equilibrio inestable o la mediocridad, sino con la proporcionalidad y la perfección de la naturaleza y que en el caso de la ética remite a la afirmación de la razón al sobre lo irracional.

2) En otras palabras se puede afirmar que "la decisión aristotélica de aplicar la proporción geométrica al ámbito ético refleja el esfuerzo titánico, y aparentemente inalcanzable, de querer calcular racionalmente un valor prácticamente inconmensurable desde el punto de vista científico: la bondad o fuerza moral del individuo" (Salamone, 2007). Desde esta perspectiva *el profesor puede buscar y elegir los correspondientes ejemplos de acción humana para establecer ese término medio geométrico* que constituye el comportamiento virtuoso frente a los excesos y defectos de la vida moral, poniendo en evidencia la función matemática dentro del orden moral.

2.6. APLICACIÓN Y EXTENSIÓN CIENTÍFICA DE LA MENTALIDAD MATEMÁTICA GRIEGA

Todavía en plena cultura ateniense, hacia el 370 a. C., debe recordarse que Eudoxo introduce nociones sobre las proporciones, la continuidad y sobre el llamado método de exhausción equivalente a procedimientos de reducción al absurdo. Pero la mentalidad matemática seguirá presente en los siglos siguientes, con una notable fisura epistemológica, que brevemente aclaramos en los dos apartados siguientes.

Durante el período conocido como Helenismo, que va desde la muerte de Alejandro Magno, en el año 323 a.C., hasta los primeros años de nuestra era, la

Universidad Pontificia de Salamanca

matemática griega servirá de estímulo e instrumento al progreso de las ciencias y de las técnicas.

Con la difusión de la cultura cristiana se produce un extraordinario cambio de paradigma, porque para el cristiano no es la ciencia ni la técnica el ideal de vida, sino la salvación eterna. Se produce así, durante toda la Edad Media, un eclipse del interés científico en el que las concepciones matemáticas quedan supeditadas a las concepciones cosmológicas, a su vez subsidiarias de las verdades teológicas.

2.6.1.- La mentalidad matemática como estímulo e instrumento de la ciencia helenística

Como todos los demás aspectos de la cultura griega, entre ellas el arte y la filosofía, la mentalidad matemática experimenta una gran transformación con su extensión por los grandes centros helenísticos [49], dispersos por todo el Mediterráneo, entre los que nos interesa destacar, por lo que a las matemáticas se refieren, Alejandría y Siracusa, dentro de otros centros importantes, de los que Roma será cronológicamente el último.

Euclides se encuentra en el Museo de Alejandría como profesor de matemáticas. Su obra más importante para la posteridad son *Elementos*[50] (1991), dividida en trece libros: del I al IV de dedican a la geometría plana; la geometría del espacio la trata en los libros XI, XII y XIII; la teoría generalizada de la proporción se trata en el V y el VI; de la teoría aritmética se ocupan los libros VII, VIII y IX. El libro X ofrece una clasificación prolija de las variedades de rectas irracionales. Su contenido no quiere ser un compendio exhaustivo del saber matemático hasta su tiempo, sino una exposición de los fundamentos lógicos de la matemática, esto es, recapitula la que por nuestra cuenta

---

[49] El Helenismo es el período en el que, tras la muerte de Alejandro Magno en el 323 a.C., la cultura griega se divulga por las costas del Mediterráneo, hasta la conquista romana en el siglo I. Sin embargo, la cultura helenística alcanza hasta el siglo II de nuestra era. En particular, para la matemática, fue capital la fundación en Alejandría del llamado Museo, en el que Ptolomeo I, uno de los generales que recibe la parte egipcia del imperio de Alejandro Magno, funda el llamado Museo, el centro científico más importante de la antigüedad, en donde enseña Euclides, hacia principios del siglo tercero.

[50] "*Elementos* fue una de las primeras obras que se imprimieron después del descubrimiento de la imprenta y ha formado parte, durante siglos de los *currícula* universitarios. Desde su primera impresión en 1482 se han publicado más de mil ediciones. Es posible que Euclides no fuera el primero en demostrar varios de los resultados de *Elementos*, pero su estilo y la simplicidad de su ordenación convirtieron la obra en un trabajo de importancia duradera" (Pickover, C. A., 2012: 56).

Universidad Pontificia de Salamanca

hemos llamado *mentalidad matemática griega* [51]. En la Introducción que Luis Vega hace, luego de exponer una serie de aspectos que avalan la obra de Euclides, escribe lo siguiente:

"A la luz de esto podemos apreciar la excelencia del tratado de Euclides, sobre los demás tratados, anteriores o posteriores, de este género. Contamos con razones de dos tipos para acreditarla: unas parecen ser más bien de carácter disciplinar o didáctico, hacen referencia a las virtudes expositivas e instructivas de la composición euclidea; las otras son más bien de carácter metodológico y guardan relación con la sistematización deductiva de las teorías o cuerpos de conocimiento que contiene" (*Elementos*, 1991: 23).

Su doctrina básica se formula en una serie de Postulados que vienen a coincidir con lo que, en el contexto platónico y aristotélico, podrían denominarse axiomas o ideas comunes aceptables por su evidencia[52]. Por lo que aquí nos interesa, Euclides sigue manteniendo la naturaleza intuitiva de verdades fundamentales de las que se deducen los procesos matemáticos aplicados, si bien sistematizando el que hoy se denomina método deductivo, tan apreciado por el propio Newton. Siguiéndolo, se admiten algunas, muy pocas, proposiciones indemostradas de las que dependen las operaciones posteriores. Con independencia de sus aplicaciones, interesa resaltar la condición intuitiva de sus principios axiomáticos que confirman la naturaleza deductiva de los procesos matemáticos. En este contexto deductivo, lo verdadero y lo falso significan que algo está o no está de acuerdo a los axiomas admitidos como indemostrables. No en vano Einstein reconocía que "es maravilloso que un hombre sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza haciendo uso exclusivo de su pensamiento" (Durán, 2000: 47).

---

[51] Sobre esta traducción de *Elementos* que ofrece Gredos, quien se responsabiliza de esta edición y es el autor de la Introducción a la obra, Luis Vega, deja constancia de haber seguido el texto griego, fijado por Heiberg, en la edición J.L. Heiberg y H. Menge, *Euridis Opera Omnia*, vol. I – IV, ed. Leipzig 1983-1986.

[52] En el desarrollo posterior de los concepto lógico/matemáticos, por *axioma* se entiende la verdad intuida y convincente por sí misma; por *postulado* se entiende lo que se deriva necesariamente de algo anteriormente evidente. Sin embargo, en la mentalidad griega, muy marcada en Euclides, *axioma* y *postulado* no se diferencian, en cuanto que los dos conceptos expresan que algo intuitivamente evidente por sí mismo.

Universidad Pontificia de Salamanca

Si la mentalidad de Euclides es la de alguien que hoy calificamos como lógico/matemático, tanto por el carácter intuitivo que concede a los axiomas, como por la forma lógica de solucionar los problemas aritméticos, pronto la matemática se abre paso hacia la actividad científica experimental, como es evidente en el caso de Aristarco de Samos y de Arquímedes[53]. Aristarco nunca vivió en Alejandría pero siendo un astrónomo de ascendencia aristotélica, introdujo la mentalidad matemática en la concepción del cosmos, llamando la atención sobre las proporciones geométricas, comparando las dimensiones de la Tierra, la Luna y el Sol y las distancias entre los tres, con la previsión de que el Sol era inmóvil y la Tierra se movía circularmente a su alrededor. Por su parte Arquímedes [54] (Heiberg, J.L.,1972) es un ejemplo grandioso de la explicación matemática de los fenómenos físicos. Conocido sobre todo por la demostración matemática del célebre principio de flotación, también aplicó la matemática al cálculo de la densidad de los metales, la naturaleza de los fluidos y el equilibrio de los cuerpos flotantes, haciendo de la matemática el soporte metodológico de la hidrostática. Al respecto, su obra más interesante para esta tesis es la que lleva por título *El Método* o también *Sobre el método relativo a los teoremas mecánicos,* sobre el que Torija H., R., (1999:78) dice lo siguiente: "*El Método* constituye un documento histórico de gran interés, porque el él Arquímedes sed propone dar a conocer la vía de investigación utilizada para encontrar la solución de ciertos problemas. *El Método* muestra un modelo de argumentación aplicable a problemas geométricos, no todos conocidos, en la matemática del siglo III a.C. La obra no es un relato de descubrimientos sino una memoria metodológica destinada a justificar sus trabajos. El método de Arquímedes puede considerarse como la síntesis entre una cierta base teórica conocida previamente y una demostración geométrica basada, casi siempre, en el método de exhaución, a través de reducciones al absurdo" [55].

---

[53] Aristarco de Samos, nace hacia el 310 a.C. Arquímedes de Siracusa nace en el 287 a.C. y muere en 212 a.C., en el asedio de su ciudad, a la que había contribuido a defender con sus ingenios militares, por los romanos.

[54] "De hecho, a menudo se considera que Arquímedes , el geómetra griego, es el matemático y científico más importante de la antigüedad y uno de los cuatro grandes matemáticos que han habitado el planeta, junto a I. Newton, F. Gauss y L. Euler" (Pickover, C. A., 2012: 58).

[55] El mismo Arquímedes ratifica la peculiaridad de su método en la carta a Eratóstenes, donde expone su forma de resolvder los problemas: "…será posible captar ciertas cuestiones matemáticas por medios mecánicos, lo cual, estoy convencido, será útil también para demostrar los mismos teoremas". Texto tomado de Torija, H., R., (1999:79).

Universidad Pontificia de Salamanca

De los restantes libros que legó Arquímedes, son todos de naturaleza matemática[56]. Es de señalar la mentalidad científica de este sabio que adelanta el modo de pensar de la ciencia moderna y contemporánea, al establecer la mutua interacción entre teoría y práctica, como el mismo Arquímedes ratifica esta peculiaridad de su método en la carta a Eratóstenes (está incorporada en la obra *El método*) donde expone su forma de resolver los problemas:

"Reconociendo, como digo, tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía, amén de que sabes apreciar, llegado el caso, la investigación de cuestiones matemáticas, he creído oportuno confiarte por escrito, y explicarte en este mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que, por lo demás, estoy convencido, será útil también para demostrar los mismos teoremas. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por la geometría, habida cuenta de que la investigación por este método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto" (Arquímedes, (1986: 35)

Fue quizás el primer sabio de estilo moderno porque, por una parte, buscó la demostración matemática de las observaciones y de los fenómenos empíricos en el campo de la hidráulica, la mecánica estática y dinámica y, por otra parte, aguzó sus métodos y conocimientos matemáticos para proponer demostraciones, nuevas técnicas e incluso la construcción de aparatos en esos mismos campos.

Esta mentalidad que busca la vinculación e interacción entre la matemática intuitiva y sus aplicaciones prácticas tiene otros muchos representantes entre los alejandrinos. Entre ellos Apolonio de Perga (c. 260-200 a.C) que obtiene extraordinarios resultados sobre las secciones cónicas, líneas máximas y mínimas, coordinadas y métodos próximos a los de la geometría analítica posterior, aunque

[56]Esta es la relación de los temas de sus diez libros: 1 y 3.- Del equilibrio de los planos. 2.- Cuadratura de la parábola. 4.- De la esfera y del cilindro. 5.- De las espirales. 6.- Sobre los conoides y los esferoides. 7.- Sobre los cuerpos flotantes. 8.- Medida del círculo. 9.- El Arenario. 10.- El método . Este listado de las obras de Arquímedes es propuesta por el gran estudios y editor de Arquímedes, HEIBERG, J. L., (Ed.) (1972). *Archimedes. Opera omnia.* 3 vol. Leipzip: Stutgardine Aedibus B. G. Tevbneri. (Editio Stereotypa Editionis Anni 1910)

Universidad Pontificia de Salamanca

siempre con una mentalidad dirigida a la experimentación[57]. En este mismo ambiente, Hiparco, (c. 140 a.C.) gran observador que llegó a medir la inclinación de la eclíptica, a partir de la observación del firmamento determinó que el eje terrestre cambia lentamente en el espacio (Taton, 1971: 391-396). Su aporte más importante a la mentalidad matemática quizás sea la de establecer la relación entre las medidas angulares con las distancias, que sienta las bases de la trigonometría, desarrollada más tarde por Ptolomeo (c.150 d.C.) en su célebre *Almagesto* o Sistema de Ptolomeo, con aplicaciones a la Geodesia y a la Optica (Real Academia de Ciencias, 1999: 781 y 875).

En el avance de la mentalidad matemática es notable la figura de Diofanto [58] (c. 250 d.C.) considerado el primer algebrista que, en sus inicios, se dedicó especialmente a solucionar ecuaciones, en sentido inverso a la aritmética. Si la aritmética busca un resultado a partir de números dados o conocidos, el álgebra, por el contrario, parte del resultado de una serie de operaciones sobre un número desconocido. El álgebra supuso un notable adelanto en la mentalidad matemática en cuanto que expresa con claridad y sencillez las relaciones entre cantidades y números que pueden ser apreciadas con toda claridad a través de las ecuaciones (Boyer,1996:297)[59]. Esta sencillez se vio todavía

[57] "De atenerse al testimonio del astrónomo Ptolomeo, Apolonio no solo fue un gran matemático sino también un gran astrónomo, ya que le atribuye proposiciones de índole astronómica en las que Apolonio utiliza la teoría de los epiciclos y de las excéntricas, de la cual sería el inventor, que en manos de Hiparco y de Ptolomeo se convertirían en las bases de la astronomía antigua" (Rey Pastor, J. y Babini, J., 1985. *Historia de la matemática*, Barcelona: Gedisa, 114-115, vol.1).

[58] Diofanto fue el "autor de *Arithmética*, una serie de textos matemáticos que han influido en las matemáticas durante siglos. *Arithmética*, el trabajo más célebre sobre álgebra de toda la matemática griega (…) En palabras de J.D. Swift Diofanto fue el primero que introdujo una notación algebraica sistemática y coherente, un hecho que representó una mejora significativa respecto del estilo puramente verbal de sus predecesores. El descubrimiento de *Arithmética*, con la mediación de fuentes bizantinas, fue una ayuda enorme para el renacimie to de las matemáticas en la Europa occidental y estimuló a muchos matemáticos, de entre los que el más grande fue Fermat" (Pickover, C. A., 2012: 72).

[59] Generalmente el sistema de numeración decimal se atribuye a los indios y babilonios, que fueron penetrando paulatinamente en occidente a través de la numeración romana y la asimilación musulmana de las culturas orientales. En particular se atribuye la árabe Al-Khwarizmi, en torno al año 850, el progreso del álgebra, vocablo derivado de la primera palabra de su libro *Al-jabr wa'l muqabalah* (= Complementación, yuxtaposición, reducción). El término algoritmo se deriva igualmente del nombre de dicho autor. Los griegos indicaban los números mediante las letras del alfabeto y los árabes, antes del siglo IX, indicaban los números mediante palabras, siendo el citado autor el primero del que se conoce

Universidad Pontificia de Salamanca

entorpecida por los sistemas de notación matemáticos griegos, en los que se desconocía todavía el uso del sistema decimal, puesto que anotaban los números a través de las letras del alfabeto. Diofanto introdujo nuevos símbolos especiales para expresar la igualdad, el cuadrado, el cubo, etc., dando mayor compresión a las expresiones matemáticas y algebraicas. Tanto sus avances como las limitaciones de su álgebra demuestran hasta qué punto han sido fundamentales los sistemas de notación y los complejos de signos y símbolos para el progreso de la propia matemática (Taton, 1971: 380 – 383).

2.6.2.- Ciencia y matemática auxiliares de la creencia

En el contexto histórico de los primeros siglos de nuestra era, el Cristianismo introdujo un profundo sentido humanista mediante la proclamación de una nueva religión: el Cristianismo. A partir de las creencias cristiana, las conductas deben fundarse en prácticas profundamente respetuosas con la vida y la libertad de los seres humanos, reconocidos como hermanos, en cuanto hijos del mismo Dios y Padre. La nueva forma de entender la humanidad supuso un auténtico cambio de paradigma, no sólo espiritual y moral, sino también científico, por la siguiente razón. Para el cristiano, el valor paradigmático de referencia no es el éxito histórico ni la trasformación de la naturaleza, sino el ejercicio de las virtudes: la fe, la esperanza y, sobre todo, la caridad ejercida por amor a Dios, cuya práctica es garantía de la bienaventuranza eterna.

Esta mentalidad animada por la creencia, fue animando paulatinamente la cultura occidental, heredera del clasicismo greco-latino, renovando las formas de vida individual y colectiva. Individualmente, el cristiano tiene como misión ajustar su vida a sus creencias. En el mismo horizonte de fe, desde los inicios de la Edad Media, los monasterios y más tarde las universidades, no se orientaron al desarrollo de la ciencia positiva y de la técnica, sino que subsistieron como centros de interpretación y estudio del saber tradicional puesto al servicio de la teología y de la vida cristiana. Aunque monasterios y universidades fueron, de hecho, núcleos de progreso cultural, económico y social, sin embargo, el paradigma de referencia que animó su actividad no era el éxito mundano o tecnológico, sino los valores que contribuyesen a la vida cristiana.

---

que expresaba mediante figuras los números del 1 al 9, con el "círculo pequeño" que simbolizaba el cero. (Boyer, 1966: 297; Taton, 1971:509, 516).

Universidad Pontificia de Salamanca

En esta nueva forma de pensar y actuar, la mentalidad matemática, aunque conocida y practicada en monasterios, universidades y por grandes sabios como Alberto Magno o Tomás de Aquino, no adquiere más relevancia epistemológica que la heredada de Grecia y del helenismo, sin preocupación por sus aplicaciones y concreciones tecnológicas. Habremos de esperar al siglo XIII cuando encontramos un notable interés por la experimentación y la matematización. En este ambiente son conocidos los llamados "Calculadores" del Merton College, de Oxford. Allí sobresalen Roberto Grosseteste (1175-1253), maestro de Roger Bacon (1214-1294) y Thomas Bradwardine (1290-1253), que se mencionan en el apartado siguiente (2.7). Más ajeno a tales elucubraciones, R. Bacon será un adelantado de la aplicación de la matemática al progreso técnico, con la previsión de artefactos e instrumentos que hoy son realidad, como los motores para navegar y volar, palancas mecánicas, ingenios marítimos, etc. Las matemáticas serían el instrumento teórico para su construcción. Ya en el siglo XIV, Guillermo de Ockham promueve la renovación de la metodología científica con la insistencia en la lógica articulada por el método inductivo/deductivo, favoreciendo el experimentalismo, con una notable mutación en las concepciones del mundo. Aunque sin significación científica específica, (Rey Pastor y Baabini, 1985: vol.1, p.189-202) Ockham supuso un importantísimo estímulo para mentalidad científica posterior y para la aplicación de la matemática a la mecánica celeste, característica de la nueva ciencia iniciada por Copérnico, Kepel y Galileo.

2.6.3.- Cultura árabe y sus fuentes

En contemporaneidad con la cristiana, a partir del siglo VIII se desarrolló la cultura árabe, fundamentalmente islámica, desplegada por oriente medio y la vertiente mediterránea. Será el califa Al Manum (809-833) quien funda en Bagdad la *Casa de la Sabiduría*, en donde se traducen al árabe los *Elementos* de Euclides y el *Almagesto* de Ptolomeo, entre otras muchas obras. Allí trabajó el matemático Al-Khowarizmi, al que ya hemos aludido en una nota, y a quien podría dársele, con más propiedad que a otros, el nombre de *padre del álgebra* por su exposición sistemática de las ecuaciones lineales y cuadráticas con base positiva, adoptando la notación y sistemas gráficos hindúes y babilónicos. La trigonometría pasa también a Europa a través de Al-Battani (c. 850-929), latinizado como Albategnius, con aplicaciones matemáticas a la óptica y la astronomía.

Universidad Pontificia de Salamanca

En paralelo con tales inquietudes científicas, los árabes tuvieron gran afición a la alquimia, en la que reconocen su inspiración en los griegos y en los judíos alejandrinos, orientada con dos propósitos: convertir en oro cualquier metal y encontrar un elíxir de vida, o medicina universal para todas las enfermedades. Esta mentalidad mágica, contraria a la mentalidad matemática, no fue exclusiva del mundo árabe, sino que tuvo influencia en los medios cristianos. Aunque con intenciones plenamente anticientíficas, sin embargo la alquimia favoreció la construcción de artefactos de laboratorio como destiladores, serpentinas, matraces, calefactores, licuadoras, etc., y supuso un notable impulso a la experimentación, que llevó a descubrimientos en el campo de los alcoholes, de los ácidos minerales y productos diversos que, si no eran los que ellos buscaban, sí favorecieron el conocimiento de substancias más tarde identificadas por la química.

Después de aludir a estos últimos datos históricos, que hemos seguido por Boyer (1996:299 y ss.) y Taton (1971:510 – 517; 540 - 551) lejanos en el tiempo de la Grecia clásica, parece evidente su proximidad conceptual y epistemológica. La mentalidad matemática griega perdura con el doble impulso de su origen: la afirmación de la naturaleza intuitiva de principios y axiomas, seguida de la epistemología deductiva de sus procesos, aplicados discursivamente a partir de esos principios axiomáticos indemostrables.

2.6.4.- A modo de síntesis

1) La mentalidad matemática griega se difunde por el mediterráneo primero en su forma teórica siguiendo básicamente los postulados de Euclides, al mismo tiempo que avanzaba en el método esencialmente deductivo, se fortalecía la vía de la argumentación racional, como el procedimiento adecuado para alcanzar la certeza de los conocimientos matemáticos. La astronomía florece en Alejandría mediante las enseñanzas de Aristarco que, siguiendo la cultura griega, aplica las matemáticas al estudio del cosmos y de los movimientos astrales. Con esta orientación matemática se introduce la investigación empírica de los fenómenos físicos. Conocido sobre todo por la demostración matemática del célebre principio de flotación, Arquímedes también aplicó la matemática al cálculo de la densidad de los metales, la naturaleza de los fluidos y el equilibrio de los cuerpos flotantes, haciendo de la matemática el soporte metodológico de la hidrostática. La mentalidad científica de este sabio provoca el

Universidad Pontificia de Salamanca

progreso científico de la época aproximándolo a los modos de la ciencia moderna, estableciendo la mutua interacción entre teoría y práctica.

2) La irrupción del Cristianismo en la realidad histórica introduce una nueva forma de entender la humanidad, que supuso un cambio de paradigma, no sólo espiritual y moral, sino también científico. Para el cristiano, el valor paradigmático de referencia no es el conocimiento del cosmos ni la trasformación de la naturaleza, sino el ejercicio de las virtudes, cuya práctica es garantía de la bienaventuranza eterna. Esta mentalidad fue configurando la nueva cultura occidental, renovando las formas de vida individual y colectiva. Desde los inicios de la Edad Media, los monasterios y más tarde las universidades, no se orientaron al desarrollo de la ciencia positiva y de la técnica, sino que subsistieron como centros de interpretación y estudio del saber tradicional puesto al servicio de la teología y de la vida cristiana. La mentalidad matemática, aunque conocida y practicada en monasterios, universidades y por grandes sabios como Alberto Magno o Tomás de Aquino, no adquiere otra relevancia epistemológica que la heredada de Grecia y del helenismo,

3) La mentalidad matemática griega pasa a la cultura árabe por la vía de la traducción de algunas de las importantes obras matemáticas de autores griegos y se desarrolla con intensidad con finalidades sustancialmente económicas y de organización social. En la cultura árabe sin embargo se desarrolló con notable ímpetu la alquimia, que si bien no les sirvió a sus cultivadores para transformar el metal en oro o descubrir el elixir de la eterna juventud, sin embargo prestó un notable servicio al desarrollo de las ciencias experimentales, diseñando procedimientos de fundición y fabricando instrumentos para sus experimentos. El desarrollo de la química se sirvió luego de algunos de estos procedimientos y de muchos de los instrumentos de la alquimia árabe.

2.7. DEL PARADIGMA ARISTOTÉLICO A LA NUEVA CIENCIA

En el transcurso del siglo XIII comienzan a ponerse en entredicho las concepciones aristotélicas. Una primera fuente crítica puede situarse en el filósofo islámico Avicena (980-1037), cuyas primeras traducciones en Toledo se difunden a partir de 1150, con influencias que llegan a Oxford (Grosseteste, Escoto, Bacon) y a Paris, donde alcanzan a san Alberto Magno y santo Tomas, que lo cita aproximadamente 300 veces. No menos influencia tuvieron los comentarios del gran filósofo islámico cordobés Averroes (1126-1198), admirador de Aristóteles, cuyas

Universidad Pontificia de Salamanca

opiniones no fueron bien recibidas por la escolástica de Paris. Especialmente influyente en las nuevas concepciones en astronomía y en óptica, fue la obra de Alhazén (965-1039), *Resumen de Astronomía*, cuya traducción latina aparece el 1267.

En ese antiaristotelismo casi generalizado, interviene el hispano/portugués Pedro Hispano (1220-1277), maestro indiscutible de la dialéctica, quien, una vez nombrado Papa en Aviñón con el nombre de Juan XXI, influye para que sean condenadas numerosas proposiciones del averroísmo y del aristotelismo. Esa condena explícita se produce en 1277 por decreto del obispo de Paris, Etienne Tempier, que declaran heterodoxas numerosas tesis de Averroes y de Aristóteles, cuyas consecuencias salpican al propio santo Tomás. A este ambiente antiaristotélico continental, se añaden las críticas que proceden de Oxford, en particular de Roger Bacon y otros formados en aquel ambiente.

La condena de París, a la que acabamos de aludir, tendrá consecuencias muy positivas para las ciencias experimentales porque, libres de los prejuicios aristotélicos, iniciaron nuevos derroteros. El resultado fue que las investigaciones científicas continuarán con más libertad e iniciativa, sobre todo en torno a la física, la cosmología y la astronomía, que eran las parcelas científicas más cultivadas desde los griegos. Ese movimiento hacia nuevos horizontes científicos se va fraguando y tomando forma en los dos mismos centros que habían encabezado las críticas al aristotelismo: Oxford y París.

2.7.1.- Oxford: Los 'Calculadores' del Merton College

Desde el siglo XIII, Roberto Grosseteste (1175-1253), figura muy notable por su mentalidad matemática y sus conocimientos científicos, había puesto las bases de un nuevo ambiente en la Universidad de Oxford. Autor de inspiración agustiniana, paradójicamente recibida de Avicena, pretende explicar los fenómenos naturales mediante comparaciones y analogías con figuras geométricas, líneas, ángulos, polígonos y poliedros. Su más destacado discípulo es Roger Bacon, y la mentalidad de ambos será continuada por Ockham. Los tres son franciscanos, con evidente mentalidad experimental, que tendrá importantes sucesores, no ya franciscanos sino agustinos (Huizinga, 1996).

Thomas Brawardine (1290-1349), contemporáneo de Ochkam, es la figura intelectual más notable en el *Merton College*, fundado por Walter de Merton, el más

Universidad Pontificia de Salamanca

antiguo College de la universidad de Oxford. Este notable matemático, adelanta nuevos métodos de cálculo y, corrigiendo formulaciones anteriores, entre ellas las de Averroes, da una fórmula matemática para calcular la caída de los graves, incluyendo la influencia de las variables de fuerza y resistencia. Para el gran historiador de las matemáticas Colette (1985:240), Bradwardine "fue probablemente el más eminente matemático inglés del siglo XIV. Denominado también *Doctor profundus* por su erudición, fue procurador del Colegio Merton antes de ser nombrado arzobispo de Canterbury, puesto que ocupó hasta su muerte en 1349"

El ambiente *"calculador"* (Rey Pastor y Babini, 1985: 189-197) tuvo notable importancia en el campo de las matemáticas y de las ciencias naturales en orden a cuantificar el movimiento, calcular fuerzas y resistencias, medir la intensidad de la luz según los medios de su difusión, expresar los fenómenos de rarefacción y condensación.

El afán de calcularlo todo llevó a extremas sutilezas verbales, favorables a la mentalidad matemática, pero que tuvieron como resultado alejar del espíritu experimental para perderse, por ejemplo, en calcular numéricamente el aumento o disminución de las cualidades de las cosas, o calcular matemáticamente los cambios y variaciones de los objetos. Llegan al colmo de la extravagancia cuando hacen extensivos los cálculos al terreno de la psicología, queriendo "calcular" sentimientos. Y al de la teología, con la pretensión de "calcular" cuanto aumenta la gracia de Dios según nuestras acciones, o "calcular" la diferencia entre un pecado y otro, o entre una acción buena y una mala. Para ejercitar el cálculo, se dedicaban a ejercicios mentales mediante los cuales proponían la solución de proposiciones falsas o enunciados equívocos, que llamaban *sofismas* (*sophismata).* Con ellos se ejercitaban para descubrir fallos en las deducciones o identificar principios falsos.

Se ocuparon de estas cuestiones en Inglaterra los maestros del Colegio de Merton, entre los que destaca por su excelencia, Richard Swineshead, quien escribe el libro *Liber calculationum*, publicado antes de 1350, por el que se le apodó como "*calculator"*. En este tratado como en otros semejantes, "se demuestra en forma retórica, comparando movimientos uniformes y uniformemente variados, la siguiente regla que algunos autores ingleses denominan actualmente como la regla de Merton: el espacio recorrido en un movimiento uniformemente variado es igual al espacio recorrido en el mismo tiempo por un movimiento uniforme, cuya velocidad es la velocidad media entre las velocidades inicial y final del movimiento variado" (Rey Pastor y Babini, 1985: 191)

Universidad Pontificia de Salamanca

2.7.2. Físicos y matemáticos en la universidad de París

La universidad de Paris había sido el lugar más destacado del saber durante toda la Edad Media. Las ideas de Ockham y la mentalidad más empirista de Oxford, serán cada vez más influyentes en Paris, suscitando numerosas contiendas y polémicas. Entre muchos otros, según Geymonat (1984) sobresalen tres grandes representantes de la física auxiliada por la matemática en París.

a) Juan Buridano (¿?- 1358 aprox.), hombre plurifacético, por muchos años Rector de la Universidad de París. "Rompe con el predominio de la física aristotélica y reduce el movimiento a un *ímpetu* en vez de a una tendencia hacia su lugar natural, la concepción antigua" (Hirschberger, J., 1979: 448).

a.1) En el campo de la ciencia, es notable su contribución a la explicación del movimiento, conocida como *teoría del ímpetu*, que se comprende mejor comparándola con la aristotélica. Siguiendo las ideas comunes en la ciencia griega, Aristóteles entendía que la acción del motor acompañaba al móvil en la totalidad de su trayectoria. Eso supone que si cesa la acción del motor, cesa el movimiento, del mismo modo que un carro se para si se detiene el caballo. En la flecha o en cualquier otro proyectil, el medio en que se desplaza desempeña la función del motor: el motor traspasa su fuerza cinética al aire que está en contacto con la flecha y es el aire el que ejerce de motor hasta el paulatino debilitamiento de la fuerza. Esa era la explicación procedente de Aristóteles.

Ockham había criticado ya esta concepción del movimiento y propuso que el móvil, flecha o proyectil, se mueven en virtud del impulso recibido del motor, adelantando así el principio de inercia, fundamento de la mecánica moderna. Buridano continúa la tesis de Ockham y mantiene que el motor transmite directamente al móvil, a la flecha, la fuerza impulsora o motriz, esto es, el *ímpetu*, que lo acompaña hasta su debilitamiento. A mayor materia y velocidad, corresponde mayor *ímpetu* o fuerza impresa en el móvil, que es inversamente proporcional a la resistencia del medido en que el móvil se desplaza (Koiré, 1961).

a.2) Buridano aplica la teoría del *ímpetu* a los proyectiles, a la caída libre de los cuerpos, al ascenso de los menos densos, pero también a la explicación de la armonía celeste, con notables consecuencias. El movimiento constante y armónico del universo se debería al *ímpetu impreso por* Dios en las esferas celestes, que se mueven con movimiento uniforme, produciendo el equilibrio físico de que hablan los clásicos

Universidad Pontificia de Salamanca

griegos.
Este planteamiento da lugar a una paradoja o problema que se conoce en la historia de la cultura como la paradoja del *Asno de Buridáno,* aunque mejor que asno sería decir perro de *Buridano* puesto que Aristóteles (De coelo) lo ejemplifica en un perro y él lo toma de Aristóteles. La paradoja fue formulada para mostrar la dificultad del problema del libre albedrío, sin embargo en el contexto griego tiene un significado cosmológico que se "refiere al problema del equilibrio o del supuesto equilibrio físico de la tierra entre elementos iguales" y en la época actual la paradoja de Buridiano se está analizando principalmente "en estrecha relación con la cuestión de la distribución azarosa y por tanto, en conexión con cuestiones suscitadas por la probabilidad en el contexto de la investigación" (Ferrater M., J., 1994: Tomo I, p.255)

b) Alberto de Sajonia (1330-1390), discípulo de Buridan, es el primer rector de la Universidad de Viena (1365). Fue figura destacada en ciencias naturales, lógica y astronomía, a la que aplica la teoría del *ímpetu* de Buridiano, "en particular la denominada *doctrina de los pesos*, lo que condujo a una importante investigación del problema de la gravedad, distinguiendo ya entre el centro de magnitud de la tierra y su centro de gravedad" (Ferrater M., J. 1994: Tomo I p. 89) En consecuencia, confirma el rechazo de las teorías aristotélicas sobre la divinidad del mundo supralunar, que lo considera sometido a las mismas leyes del mundo infralunar.

c) Nicolás de Oresme (1320-1362), también vinculado a los físicos de la llamada escuela de París por su insistencia en la descripción matemática de los procesos físicos y la representación gráfica de las "intensidades de las cualidades", que introduce en su *Tractatus de latitudinibus* (Rey Pastor y Babini, 1985: vol.1, p.191). Es considerado asimismo como verdadero precursor del *uomo universale* renacentista a causa de la amplitud de sus intereses intelectuales y de Copérnico, ya que adelanta teorías sobre los movimientos de la tierra y de otros planetas. Como físico-matemático muchos recibieron su influencia en cuanto usaron su famoso *método gráfico*, que "consiste esencialmente en el uso de figuras bidimensionales con el fin de representar variaciones en cualidades y en los movimientos de los cuerpos. Para la representación de los movimientos usó una línea para representar el tiempo y otra para representar las llamadas velocidades instantáneas" (Ferrater M., J., 1994: Tomo III, p. 2552). Así como Bradwardine quiso expresar los fenómenos físicos en términos matemáticos, él quiere representar gráficamente las cualidades, movimientos, medidas, cualidades y formas de

Universidad Pontificia de Salamanca

las cosas, recurriendo a figuras geométricas. Introduce las coordenadas geométricas, llamadas más tarde cartesianas, esto es, la representación espacial de las magnitudes.

En su *Tratado del Cielo y del Mundo* (1377), se exponen numerosos argumentos para demostrar los movimientos de la tierra, asunto ampliamente discutido en Paris. Según él, no tenemos argumentos experimentales para demostrar que la tierra esté fija, porque eso es un efecto debido a la relatividad del movimiento. Y pone un ejemplo: si nos desplazamos lentamente en un barco A, frente a otro quieto B, tendríamos la sensación errónea de estar nosotros en reposo y el barco B en movimiento. Del mismo modo percibimos quieta a la tierra y en movimiento al sol y las estrellas.

2.7.3.- A modo de síntesis

En el precedente apartado se describe con breves trazos y significativas referencias la función de aproximación, de gestión y de dirección, que las matemáticas van desarrollando mediante originales adaptaciones e innovaciones de nuevas fórmulas para el tratamiento de la compleja realidad, el progresivo protagonismo de la ciencia desde el mundo antiguo a un mundo moderno que se está instalando en las diversas dimensiones de la realidad económica, política, social y cultural emergente.

1) La liquidación de las concepciones físicas de Aristóteles es el primer paso para despegar la ciencia de ciertas concepciones obsoletas, que se sostenían no por la racionalidad interna de las propuestas, meramente formales, ni por la acumulación de datos observados, de los que carecían, cuanto por el apoyo externo de un argumento de autoridad, como hasta la alta edad media difunde el discurso aristotélico. Este despegue del argumento de autoridad que se produjo en el ámbito científico, por la aplicación del rigor matemático a las elucubraciones de la realidad física, fue un acicate importante en la aceleración del progreso que la ciencia va a emprender a partir del siglo XVI. A ello contribuyeron asimismo otros factores como el nacimiento de la perspectiva que alumbran los artistas o las necesidades de los comerciantes, contadores y calculistas, a la par de las exigencias de los astrónomos. Tanto el rechazo del discurso aristotélico como estos factores, que acabamos de mencionar y otros, de muy variado contenido, que podrían traerse a colación, produjeron señalados progresos de las matemáticas en este siglo, "como deben considerarse, entre otros, los números decimales, los logaritmos y las fracciones continuas" (Rey Pastor y Babini, 1985:vol.2, p. 10).

2) En la universidad de Oxford y mas en concreto, en el *Merton College*, se produce un movimiento revisionista de tipo científico-cultural que además de iniciar el

Universidad Pontificia de Salamanca

despegue de los planteamientos aristotélicos, impulsa un estilo matemático de hacer ciencia. Todavía no hay una clara filosofía de que la ciencia se fundamenta en las matemáticas o no es ciencia, pero en la práctica este *afán de calcularlo todo* – el movimiento, las fuerzas y resistencias, la intensidad de la luz, la condensación, hasta los sentimientos - confluye hacia el objetivo no solo de aproximación del saber científico al discurso matemático sino a una verdadera asunción de los procedimientos y las fórmulas matemáticas, como condición y formato organizativo de la ciencia.

3) El nuevo espíritu científico llega a la Universidad de París, suscitando numerosas y acaloradas contiendas y polémicas, que generan actitudes variadas de antiaristotelismo, que luego se canalizan hacia el gran desarrollo de la ciencia física en los siglos siguientes. Sobresalen a este respecto los estudios sobre el movimiento desde la perspectiva del ímpetu, los progresos en la representación gráfica de las magnitudes y cualidades e importantes investigaciones de problemas suscitados en torno a la gravedad, distinguiendo ya entre el centro de magnitud de la tierra y su centro de gravedad. Se producen incursiones desde las matemáticas hacia ámbitos específicos de de la ética, como es el uso del libre albedrío, que derivan hacia la siempre presente cuestión de la distribución azarosa y por tanto, en conexión con cuestiones suscitadas actualmente como la probabilidad en el contexto de la investigación.

2.8. COROLARIOS PEDAGÓGICOS PARA LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS

Como hemos adelantado, los objetivos de nuestra tesis no son históricos, ni pretenden clarificar la cronología de los progresos matemáticos, sino poner en claro aquellos supuestos y formas operativas que a partir de los griegos han contribuido a la enseñanza actual de la matemática. Por eso la orientación general de este capítulo se dirigió, de modo primordial, hacia una aproximación a la mentalidad matemática, más que a sus aplicaciones. A partir de este supuesto nos parece fundamental concluir el capítulo con una síntesis de lo tratado, señalando sus corolarios más notables para nuestro propósito educativo, en la convicción de que la enseñanza escolar de la matemática debe ir acompañada de una serie de convicciones previas, una especie de previsiones mentales del profesor, que deben actuar como fermento o catalizador de los contenidos que escolarmente está obligado a transmitir. El profesor, a partir de sus conocimientos sobre la materia a explicar, es el único capacitado para hacer llegar al alumno el sentido y la función que las matemáticas juegan en el contexto de su

Universidad Pontificia de Salamanca

articulación intelectual. Esto exige profundizar y reinterpretar personalmente su propia enseñanza para poder transmitir la importancia capital de la mentalidad matemática para el conocimiento de la realidad en su totalidad, para el desarrollo de la técnica y el progreso social, con la contribución a la coherencia y al sentido de la propia vida de cada uno de los seres humanos. El alumno comprenderá mejor las matemáticas que debe estudiar si, con anterioridad a la explicación de las formas operativas, se alcanza a hacerle comprender que, como para los griegos, la matemática está presente en los objetos naturales y en todas y cada una de las actividades humanas.

2.8.1.- Clarificación conceptual

Volver la mirada a los albores de los conceptos matemáticos – deducción, sistematicidad y paradigma - que hemos evocado desde Anaximandro, implica llevar al ánimo del educando la convicción de que toda realidad gira y se organiza a partir de algún ser, elemento, dato, supuesto o convicción que le sirve de origen, centro y fundamento, a partir del cual adquiere cohesión y organización. La importancia del origen enfrenta a las matemáticas con una primera realidad de orden racional y fundante, aunque no demostrable y la noción de centro geométrico se hace más comprensible al relacionarla con el de centro de gravedad, a partir del cual se estabilizan los seres y sus interacciones. A su vez, el concepto matemático de centro es didáctica y pedagógicamente extensible a la comprensión de la realidad teniendo en cuenta la medida, la ponderación, la magnitud, el peso, etc., que no tendrían sentido sin un centro de referencia.

Por eso la enseñanza de las matemáticas no puede ser entendida como una materia más, sino como la vía de acceso o como un modelo que aproxima a la naturaleza de las cosas, naturales, humanas o artificiales. Y así es porque lo mismo que la naturaleza y las cosas perderían su modo de ser y de actuar sin una referencia centralizadora, del mismo modo la vida individual solicita la racionalización centrada, orientada y sometida a la medida y a la proporción. La matemática no es, pues, un capricho o una obligación sino una contribución a la construcción ordenada de cada biografía.

Esta observación deberá conducir a la cautela didáctica de prevenir los malentendidos en torno al carácter teórico y abstracto de la matemática, más allá de sus utilidades. El profesor, por tanto, deberá adelantar una labor reflexiva previa que vaya más allá de su habilidad y claridad expositiva. La mentalidad matemática, si seguimos a

Universidad Pontificia de Salamanca

los griegos comentados, es una derivación o, si se prefiere, una conclusión inducida a partir de la necesidad y de la conveniencia del orden y de la proporción entre los seres.

2.8.2.- Las matemáticas como paradigma de racionalidad

Los procesos matemáticos, tal como los inició la cultura griega a partir de los pitagóricos, han supuesto el progreso más importante para las competencias en el razonamiento lógicamente organizado y comprensible, a partir de principios o axiomas intuidos y aceptados como evidentes. Ningún razonamiento tendrá coherencia si no procede a partir de supuestos, axiomas o principios evidentes o aceptados como ciertos. La argumentación no es sino la forma de organizar y expresar las modalidades del razonamiento. En ese sentido la matemática es la condición más eficaz para ir forjando la mentalidad organizada y coherente porque, con preferencia sobre la lógica conceptual, los procesos de razonamiento matemático pueden ser ordenados, seguidos y controlados con exactitud en cada uno de sus pasos. Lo que supone la más valiosa contribución a la configuración del lenguaje con sentido, en todos sus niveles: privado, público, científico, ordinario. Las matemáticas son palestra que facilita y contribuye a la ordenación discursiva, rigurosa y controlable a través del seguimiento de la ordenación lógica de cualquier secuencia de razones.

Esta capacitación viene dada por la naturaleza misma de los procesos matemáticos en los que la competencia deductiva va acompañada por la notación gráfica, que supone la contribución al perfeccionamiento de los procesos mentales. Las matemáticas tienen la singular peculiaridad pedagógica de ir haciendo, gráfica y físicamente, lo que se va pensando, intelectual o verbalmente. De ahí que la verdadera práctica matemática consiste en la resolución de los problemas que, a su vez, constituye el avance en la verdadera comprensión de las matemáticas y de la realidad. Pero, al tiempo, lo que se va haciendo, esto es, las operaciones matemáticas, van perfeccionando las capacidades intuitivas y discursivas de la inteligencia.

Es ésta la razón por la que las metodologías pedagógicas actuales, inspiradas en la epistemología genética, van asociadas al constructivismo, un aprendizaje en el que las operaciones mentales y el progreso de la inteligencia, se entienden como el final de una amplia construcción asociada a la *acción y a la práctica*. Acción y práctica indisociables de la enseñanza de las matemáticas, cuya analogía más próxima es la práctica y el

Universidad Pontificia de Salamanca

cultivo del lenguaje que, como la matemática, no puede ser disociado de su ejercicio, tanto en su modalidad de comprensión lectora cuanto como competencia para escribir[60].

En esta convicción se sustenta la estrategia didáctica que consideramos fundamental desde el punto de vista escolar que, además, hemos podido comprobar por nuestra propia experiencia: la importancia de las notaciones matemáticas claras, gráficamente diáfanas, sin la menor ambigüedad en signos y cifras, ya que la comprensión mental de la secuencias deductivas e inductivas quedan muy pendientes de la visión clara de la unidad gráfica del proceso. La exigencia didáctica debe ser practicada por el profesor en las explicaciones en la pizarra o en las presentaciones informáticas, y debe ser exigible a los alumnos en cuadernos de prácticas, exámenes y ejercicios diarios.

2.8.3.- Las relaciones entre totalidad e individualidad

La mentalidad matemática originaria de los griegos es inseparable de su concepción de la unidad esencial de la naturaleza, en la que cada cosa ocupa su lugar y desempeña su función, esto es, tiene número, cifra y magnitud determinada. En este sentido, podemos decir que la matemática griega transmite la lección pedagógica del realismo y de la fidelidad a las cosas: nada hay al azar ni nada es por casualidad, todo tiene su lugar y su función. En este sentido su preocupación operativa y los progresos que supuso, del pitagorismo a los alejandrinos, es una constante invitación al conocimiento de la realidad y a la solución de problemas reales. Para nuestro punto de vista no se trata tanto del reconocimiento de los aciertos o desaciertos concretos de las matemáticas pitagóricas, cuanto de atender a su gran mentalidad deductiva y al realismo radical de querer dar cuenta de las cosas y de los fenómenos naturales. Con esta orientación sintetizamos las direcciones pitagóricas, referidas a la finalidad pedagógica de la tesis, que es esencialmente educativa.

Desde este punto de vista, las matemáticas juegan el papel pedagógico que supone considerar las cosas como depositarias de una inteligibilidad que los sentidos no perciben. El conocimiento matemático, por tanto, desvela aquella parte o participación de lo perfecto y universal que hay en cada cosa individual. La matemáticas, pues,

[60] Por esta razón nos parece acertado que el conocido como Informe Pisa vaya particularmente orientado a evaluar la calidad educativa y el nivel intelectual del alumnado a partir de dos factores fundamentales: la comprensión lectora y las competencias para el cálculo matemático.

Universidad Pontificia de Salamanca

expresan la participación de cada cosa en la perfección ideal que sólo puede ser intuida y pensada, pero no realizada en ningún ser natural. En este sentido la mentalidad matemática pitagórica se distancia de las concepciones matemáticas modernas y actuales, menos realistas, aunque parezca paradójico, en cuanto que en nuestros días predominan tendencias idealistas intuicionistas, según las cuales la matemática es un ámbito consistente a partir de sus propios postulados, poco o nada motivados por la realidad (Dou,1970:113).

Apreciando el notable realismo de los griegos, el profesor de matemáticas, en los niveles que interesan a nuestra tesis, deberá hacer presente los elementos realistas que encierran y representan las operaciones matemáticas. Ellas no hacen sino sacar luz, buscar y poner de relieve el vínculo que hay entre la concreción de cada uno de los temas y problemas concretos que el alumno debe aprender, con el sentido general de las cosas y del mundo. El profesor sabrá motivarse por la convicción de que cualquier operación, de la más simple suma a la ecuación algebraica o de la geometría analítica, no son un capricho teórico, sino una vía más para completar el conocimiento del mundo real. Nos parece por eso acertada la siguiente opinión:

"Hacer matemáticas significa vivir experiencias matemáticas. Y para tener experiencias matemáticas hacen falta deseos de comprender y explicar las cosas de cierto modo, según el enfoque matemático, que pasa por un cuestionamiento bastante objetivo sobre aspectos del mundo en base a la cuantificación. Plantearse cuestiones matemáticas tiene como objeto aprehender la realidad y el entorno (social, cultural, tecnológico) en el que se desarrollan nuestra vidas" (Alberti, 2011:40).

Un realismo análogo al que expresa esta cita, subyace a la mentalidad matemática griega, de modo muy particular en los pitagóricos, que procede de las intuiciones axiomáticas fundamentales, continúa con la exigencia de deducir con coherencia teoremas y aplicaciones, lo que sugiere a la mentalidad educativa la convicción de que no hay saberes inconexos, ni acciones caprichosas, sino que la vida teórica y práctica debe proceder de principios o razones que las justifican. Su empeño es similar al de Platón que consiste en enfrentar la realidad de las cosas con su interpretación ideal, cuyo instrumento fundamental es la matemática. Por eso, según la tradición, no quería que entrase en su Academia nadie "que no supiese geometría". Pero teniendo en cuenta que toda la ambición pedagógica de Platón, dominada por la enseñanza de las matemáticas, no tuvo otra finalidad que hacer todo lo que estaba en su mano para que "el más sabio y el mejor gobierne el estado". Esa fue la ambición del

Universidad Pontificia de Salamanca

realismo de los pitagóricos y de Platón: aprender matemáticas no para salir del mundo, sino para ordenarlo y gobernarlo del mejor modo.

2.8.4.- La ciencia: interpretación racional de la experiencia

Quizás el mejor ejemplo de lo que queremos decir en este apartado sea el que podemos aducir recordando la concepción platónica del conocimiento verdadero, ejemplificado con sus propias referencias. Frente a un aro o una rueda nuestro conocimiento sensible no va más allá de constatar su cualidad de redondos y no cuadrados, quizás también a comprobar que su centro equidista de la línea que lo circunscribe. Eso lo sabe también el artesano que hace un aro o construye una rueda, sin saber geometría, ajustando las piezas para obtener y mantener la forma circular de los objetos. Ahora bien, el verdadero conocimiento del aro o de la rueda será el de quien, sin necesidad de verlos ni dedicarse a su construcción, conoce intelectivamente las relaciones que existen entre su radio, la longitud de la circunferencia y la superficie del círculo, además de las relaciones que puedan derivarse de sus polígonos inscritos o circunscritos. A esa conclusión llegó Platón, como hemos comentado más arriba, dejando claro que no hay conocimiento verdadero de la estructura y del funcionamiento de las cosas hasta que se tenga de ellas una representación racional, esto es, un saber elaborado por la propia razón, auque la experiencia y las impresiones sensibles hayan sido su impulso inicial. A esta representación intelectual de las cosas y del mundo le llamamos hoy conocimiento científico, esto es, saber verdadero sintetizado a través de principios o leyes con valor universal y necesario, aplicables sin límites de tiempo y espacio.

En ese proceso, como el propio Platón ejemplificó, la mentalidad matemática es la que ha ido impulsando de modo determinante la racionalización de la experiencia mediante el conocimiento científico. Incluso en nuestra actual diversificación, la base común de la epistemología científica radica en la posible formulación matemática de sus fenómenos y resultados. Sea o no excesiva tal pretensión, no es desacertado afirmar que la verdad científica es aquella que puede ser expresada matemáticamente o en una terminología análoga, como puedan ser las formulaciones físico - químicas, en todas sus ramificaciones, lo que también sucede en las ciencias biológicas y sociales. Las matemáticas son, y así sucedió desde los griegos, el paradigma para la interpretación científica de la realidad.

Universidad Pontificia de Salamanca

Con estos supuestos, el profesor debe ser capaz de trasmitir al alumno la esencial función de la matemática en cualquier proceso de conocimiento que aspire a ser valorado como verdadero. La exactitud, la deducción no infecciosa mediante la introducción indebida de datos injustificados, la inducción coherente, en fin, todo proceso de conocimiento legítimo, debe ser formulado con precisión matemática. Es cierto que los griegos se movían todavía en la conjetura, dentro de una cierta mentalidad de tanteo, en el mundo "del más o menos", recordamos más arriba, pero su mentalidad matemática originaria es la clara iniciación de un proceso hacia la exactitud y la precisión. Y si en la vida cotidiana y en el razonamiento usual no científico, así como en la comunicación entre personas, no tiene cabida el rigorismo matemático, sin embargo la mentalidad calculadora de los griegos es buen ejemplo del uso del sentido común, de la medida razonada y de la "debida proporción" para regular todo tipo de relaciones e intercambios. Incluso en el orden ético, la justicia venía expresada en términos racionales asociados a la proporción, la medida, reconociendo a cada uno lo suyo, lo mismo que la virtud se expresaba por el valor racional del "término medio".

2.8.5.- Las matemáticas como lógica y coherencia compartida

A nuestro juicio, de la mentalidad matemática originaria de los griegos se deriva la convicción de que los entes matemáticos y, por tanto, sus operaciones y aplicaciones, se fundan en la lógica común y elemental compartida por todos los humanos. Las matemáticas no pueden ser entendidas como algo propio de mentes privilegiadas, constituyen la materia básica de la metafísica, forman una estructura que sigue unas reglas deductivas fijas que conducen a la verdad, si se aplican sin errores y que encarnan el fundamento para establecer el criterio moral del término medio que determina la acción justa.. La atención, por tanto, debe dirigirse a los posibles errores, a poner al descubierto donde se introdujo un elemento infeccioso que, una vez introducido, envenena todo el proceso.

Esto sugiere la exigencia pedagógica del profesor que debe poner en claro, y solicita que así haga el alumno, el punto de partida, el dato o datos iniciales, el principio que se da por evidente para que, mediante la actitud psicológica atenta, se pueda avanzar con acierto en cada uno de los momentos del proceso deductivo. No cabe duda que en matemáticas se eleva a primer plano *la importancia de la atención*, entendiendo que ella se dirige, no a parcelas inconexas, sino a un sistema o complejo sistémico en el que cada parte tiene efectos sobre la totalidad. Por eso la enseñanza de las matemáticas

Universidad Pontificia de Salamanca

es quizás la medición más adecuada para cultivar y satisfacer “la tendencia más profunda de la naturaleza intelectual” de los seres humanos, que consiste en “amor al sistema”, en la ambición por la coherencia interna, decía el científico y filósofo Bertrand Russell, (2001:98) quien confirma sus convicciones con estas palabras: “Uno de los fines fundamentales a cuyo servicio están las matemáticas, cuando se enseñan correctamente, es despertar la fe del estudiante en la razón, su confianza en la verdad de lo que se ha demostrado y en el valor de la demostración” (*Ibíd.* p.92).

En la tendencia del “amor al sistema”, que aúna las preocupaciones teóricas y prácticas de todos los seres humanos, la desorientación es la principal fuente de inquietudes: no saber donde se está o no tener claro el camino que se debe emprender. Es aquí donde la enseñanza de la matemática, con la lección de realismo que comentamos en el corolario anterior, debe inducir la mentalidad cuantificadora de la experiencia vivida para encontrar las mediaciones intelectuales y prácticas que contribuyan a clarificar la coherencia o incoherencia de lo que los propios alumnos deben afrontar. Coherencia e incoherencia que discurren de la familia a las contradicciones sociales y culturales que les toca vivir. Plantear cuestiones matemáticas supone aprender a cuantificar y preguntarse por lo que vale más o menos, por lo que tiene mayor o menor importancia, por la densidad intelectual, psicológica, social, etc. de todo lo que nos afecta, aplicando a la vida real la competencia para solucionar problemas prácticos y cotidianos.

2.8.6.- Pluralismo de escenarios y de paradigmas matemáticos

Un nuevo período histórico se ofrece a la recreación y nuevas orientaciones matemáticas emergen por doquier. La situación se hace plural. Diferentes paradigmas adquieren carta de ciudadanía, compitiendo en el mismo escenario. Inicialmente la situación es confusa, como suele suceder cuando comienzan a ejercer su fuerza transformadora los factores de cambio, las instituciones se perciben obsoletas y se intuyen horizontes más favorables y esperanzadores. En esta situación la realidad no es distinta de la que se produce en otros procesos de cambio: un paradigma sólido y bien afianzado, con una larga trayectoria de éxitos amplía las fronteras de su escenario, que se hace más amplio y a la vez más plural, permitiendo la competencia y facilitando la emergencia de otros paradigmas. En mi parecer esta es la nueva situación que se produce en los centros de cultura más florecientes de los países ribereños del Mediterráneo y de Europa occidental. El profesor haría bien en destacar ante sus

Universidad Pontificia de Salamanca

alumnos que el pluralismo de ideas, teorías, modelos y paradigmas constituyen no solo ocasión propicia de progresos sino que en si mismos se transforman en verdaderos factores de cambio y avance científico.

Los países ribereños del Mediterráneo, los nuevos escenarios para la cultura matemática de la Grecia Clásica, están acogiendo cambios radicales muy significativos: un pequeño pueblo de la península itálica se había convertido en la principal potencia de Italia. Atenas ha perdido su importancia política y ve amenazada su supremacía cultural y en el mundo griego de Oriente surgen nuevos focos de cultura, entre los que sobresale Alejandría, donde se instala Euclides, que con su obra los *Elementos*, brilla con luz propia, que le permite disponer del tiempo y de los materiales necesarios para la producción científica y la organización de un sistema de conocimientos matemáticos sujeto a una estructura unitaria, al tiempo que la matemática se abre paso hacia la actividad científica experimental, como es evidente en el caso de Arquímedes. Con esta orientación matemática se introduce la investigación empírica de los fenómenos físicos. Conocido sobre todo por la demostración matemática del célebre principio de flotación, Arquímedes también aplicó la matemática al cálculo de la densidad de los metales, la naturaleza de los fluidos y el equilibrio de los cuerpos flotantes, haciendo de la matemática el soporte metodológico de la hidrostática. La mentalidad científica de este sabio provoca un progreso científico de indudable importancia en la época, estableciendo la mutua interacción entre teoría y práctica. (Rey Pastor y Babini, 1985: 124 – 130)

Un segundo escenario no tanto territorial cuanto cultural se produce con la irrupción del Cristianismo en la realidad humana, social, política y cultural, que implica un nuevo paradigma que recorre un largo camino desde el enfrentamiento con los planteamientos culturales griegos hasta producir ciertas aproximaciones parciales, como sucede con la naciente cultura monástica y más tarde las universidades, que en todo caso no se orientaron al desarrollo de la ciencia positiva y de la técnica sino que subsistieron como centros de interpretación y estudio del saber tradicional puesto al servicio de la teología y de la vida cristiana. La mentalidad matemática, aunque conocida y practicada en monasterios, universidades y por grandes sabios como Alberto Magno o Tomás de Aquino, no adquiere otra relevancia epistemológica que la heredada de Grecia y del helenismo.

La mentalidad matemática griega pasa a la cultura árabe por la vía de la traducción de algunas de las importantes obras matemáticas de autores griegos, este

Universidad Pontificia de Salamanca

paradigma se aproxima así a la cultura matemática indú, asimilando algunas de sus aportaciones como son los números y se desarrolla con intensidad con *finalidades sustancialmente económicas y de organización social*. En la cultura árabe se desarrolló con notable ímpetu la alquimia que favoreció la invención de instrumentos y materiales que luego prestarían un notable servicio al desarrollo de las ciencias experimentales, como ejemplo se pueden citar procedimientos de fundición y fabricación de morteros, alambiques y otros instrumentos útiles para sus experimentos.

2.8.7.- Los cambios que preconizan la nueva era científica

Del camino recorrido por el paradigma matemático de la cultura griega durante los siglos XIII y XIV que hemos analizado en el apartado (2.7.) que lleva por título *del paradigma aristotélico a la nueva ciencia,* quisiera recoger aquí los aspectos siguientes:

a) El *objetivo perseguido* por los matemáticos y filósofos de la época, para seguir respondiendo con eficacia desde las matemáticas a las nuevas dimensiones de la plural realidad social, económica y cultural emergente, mediante complejas adaptaciones y originales invenciones de nuevas fórmulas matemáticas, constantemente sometidas a las exigentes demostraciones lógicas y diariamente verificadas en la investigación empírica, que inevitablemente conducen al rechazo de los planteamientos físicos aristotélicos y en consecuencia arriban al cuestionamiento de su autoridad en el ámbito de la ciencia.

b) El *cuestionamiento aristotélico supone el rechazo del argumento de autoridad en los ámbitos científicos*, que hasta esa época había constituido un verdadero obstáculo al progreso de la ciencia, tanto respecto de los ámbitos de la investigación como respecto de sus procedimientos. Este despegue del argumento de autoridad en el ámbito de la ciencia se arguye desde la rigurosa aplicación de los procedimientos matemáticos a las elucubraciones de la realidad física, convirtiéndose de este modo en un poderoso estímulo de progreso que la ciencia va a emprender en los siglos siguientes incorporando elementos como la perspectiva que alumbran los artistas y las necesidades de los comerciantes, contadores y calculistas y las exigencias de los astrónomos. Según prestigiosos autores, son progresos matemáticos evidentes los decimales, los logaritmos y las fracciones continuas.

c) El *nuevo espíritu científico* emergente reconoce dos centros axiales indiscutibles: el Merton Colege de la universidad de Oxford, donde se inicia un

Universidad Pontificia de Salamanca

movimiento revisionista de tipo científico-cultural que impulsa un *afán de calcularlo todo*, imponiendo un estilo matemático de hacer ciencia, que no solo aproxima el saber científico al discurso matemático, sino a una verdadera exaltación de los procedimientos y las fórmulas matemáticas, como condición y formato organizativo de la ciencia. El segundo centro de incuestionable relevancia cultural de la época se ubica en la universidad de París que, además de su manifiesto antiaristotelismo, destaca por dos líneas de investigación: los estudios sobre el movimiento desde la perspectiva del ímpetu, que les lleva a progresivos conocimientos sobre la gravedad y sobre la representación gráfica de las magnitudes y cualidades. Se producen asimismo incursiones desde las matemáticas hacia ámbitos específicos de de la ética, el *uso del libre albedrío*, que derivan hacia la siempre presente cuestión de la *distribución azarosa* y en conexión con cuestiones suscitadas actualmente como la probabilidad en el contexto de la investigación.

2.9.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERTÍ, M., (2011). *La creatividad en matemáticas.* Barcelona: RBA Libros.

ARISTÓTELES, *Metafísica,* I 3, 983 b. (Trad.cast., Madrid: Gredos, 1970, vol. I y II).

ARISTÓTELES, *Metafísica* VI, 1025 b 5- 1026 a 30. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1970, vol. I, p. 308).

ARISTÓTELES, *Física*, III 4, 203b.(Trad. cast., Madrid: Gredos, 1998, p. 204-206)

ARISTÓTELES, *Acerca del Cielo* II 13, 295b. (Trad.cast., Madrid: Gredos, 1998)

ARISTÓTELES, *Política,* VI, 1319 b, 18. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1988, p. 380).

ARISTÓTELES, *Etica Nicomáquea,* 1106 a 25-30. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1985).

ARQUÍMEDES, (1986). *El método.* Madrid: Alianza.

BOYER, C. B., (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

CAPPELLETTI, J., (1986). *Mitología y Filosofía: los filósofos presocráticos*. Madrid: Cincel.

COLETTE, J.P., (1985). *Historia de las matemáticas,* I. Madrid: Siglo XXI.

CORNFORD, F. M., (1984). *De la religión a la Filosofía*, Ariel, Barcelona, 1984.

DOU, A., (1970). *Fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor.

DURÁN, A., (2000). *El legado de las Matemáticas,* Sevilla: Univ. Sevilla/SEM Thales.

EGGERS Lan, (Editor), (1986). *Los Filósofos presocráticos.* (Trad. Cast. Madrid: Gredos, 1986, I y III p. 105)

Universidad Pontificia de Salamanca

ERNEST, P., (1991). *The Phylosophy of Mathematics Education*. London: Flamer.

EUCLIDES, (1991). *Elementos*. Madrid: Gredos.

FERRATER, J., (1994). *Diccionario.* Barcelona: Ariel.

GEYMONAT, L., (1984). *Historia del pensamiento filosófico y científico.* Vol.I, Ariel, Barcelona.

GIGON, O., (1980). *Los orígenes de la Filosofía griega*, Gredos, Madrid.

HEIBERG, J. L., (Ed.) (1972). *Archimedes. Opera omnia.* 3 vol. Leipzip: Stutgardine Aedibus B. G. Tevbneri. (Editio Stereotypa Editionis Anni 1910)

HIRSCHBERGER, J., (1979). *Historia de la Filosofía*. Barcelona: Herder.

HUIZINGA, J., (1996). *El otoño de la Edad Media.* Madrid: Alianza.

HULL, W. H., (1961). *Historia y filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel.

JAEGER, W., (1987). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. México: FCE.

JÁMBLICO, (1991). *Vida pitagórica,* Madrid: Etnos, CV, 64, p. 52.

KOYRÉ, A., (1961). *Estudios de historia del pensamiento científico*.Madrid:Siglo XXI.

KUHN, T., (1962). *The Structure of Scientific Revolution,* Chicago/London: Univ. Press, (Trad. cast., México: FCE, 1975).

NAVARRO, J., (2011). *Los secretos del número* π*.* Navarra: RBA Coleccionables.

PLATÓN, *República,* VI, 510 c. (Trad. Cast., Madrid: Gredos,1988, 369)

PLATÓN, *República, VII,* 525 c. (Trad. cast., Madrid: Gredos1988, p. 355).

PLATÓN, *Carta VII*, 342 b. (Trad. cast. Madrid: Gredos, 1998)

PLATÓN, *Banquete*, 210 a - 211b. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1986, p.262-263 y ss).

PLATÓN, *Fedro*, 250 a y ss. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1986, pp. 373 y ss).

PLATÓN, *Sofista,* 240 a y ss. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1988, pp. 392 y ss.)

POPPER, K., (1962). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos, (Cf. Introducción a la lógica de la ciencia, pp. 27 56)

PORFIRIO, (1987). *Vida de protágoras.* Madrid: Gredos.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS, (1999). *Diccionario esencial de las ciencias*. Madrid: Espasa.

REY P., J. y BABINI, J., (1985).*Historia de las matemáticas.* 2 vol. Barcelona: Gedisa.

RUSSELL, B., (2001). M*isticismo y lógica*. Barcelona: Edhasa.

SALAMONE, Mª. A., (2007). *La Ética y la Política de Aristóteles.* Milano: Lampi di stampa.

TATON, R. y otros, (1971). *La Ciencia Antigua y Medieval.* Barcelona: Destino, vol. I.

TORIJA H., R., (1999). *Arquímedes. Alrededor del círculo*. Madrid: Nivola.

Universidad Pontificia de Salamanca

VERNANT, J. P., (1985). *Mito y pensamiento en la Grecia Antigua*. Barcelona: Ariel
VOGEL, C. J. de, (1966). *Pythagoras and early Pythagoreanism.* Assen: ed.Royal van Gorcum.

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 3

LA MATEMATIZACIÓN DE LA CIENCIA

C O N T E N I D O **PÁGS.**

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 3.- LA MATEMATIZACIÓN DE LA CIENCIA

Como se ha mencionado en el capítulo precedente, hasta finales de la Edad Media se siguieron las teorías cosmológicas y astronómicas de Aristóteles, en particular sobre la interpretación del espacio, el movimiento de los planetas y la estructura del sistema solar. Desde el punto de vista matemático, esto supuso el mantenimiento de un único centro del cosmos, a la par que la distinción entre un mundo supralunar, al que reconocía naturaleza "divina", y un mundo sublunar, ambos regidos por leyes distintas. A su vez, se siguieron las teorías mecánicas aristotélicas sobre el movimiento y el desplazamiento de los seres, sustentadas por concepciones muy acordes con el sentido común, pero científicamente falsas porque, además del equivocado esquema sobre el sistema solar, desconocían, entre otras, la ley de la inercia. Si para el saber vulgar, todo movimiento exige la actuación permanente de una fuerza, por la ley de la inercia sabemos que todo cuerpo permanece en estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo, a no ser que actúe sobre él una fuerza externa. Esta que hoy conocemos como primera ley de Newton, base de la nueva mecánica, no es ciertamente una convicción vulgar porque, de acuerdo al conocimiento ordinario, lo usual es pensar en contra de la ley de la inercia, que no será esbozada hasta finales del siglo XIV.

Frente a los seculares prejuicios del aristotelismo, se abre un nuevo horizonte fundamentalmente caracterizado por las aplicaciones matemáticas a los fenómenos físicos y astronómicos, se alumbra un nuevo procedimiento para la elaboración del conocimiento científico y un nuevo proceso de de racionalización que se desplegará a lo largo de la edad moderna, llegando hasta los actuales procedimientos cuasi-industriales de producir ciencia y tecnología sobre el soporte del paradigma matemático, que se denominan Investigación científica más Desarrollo más Innovación tecnológica y se expresa en el conocido acrónimo I+D+I.

La especificación del contenido que se desarrolla en el presente capítulo se indica en los apartados siguientes:

Universidad Pontificia de Salamanca

3.1.- El espíritu científico moderno

Este apartado se dedica prioritariamente a dos aspectos: presentar la exigencia de una nueva concepción científica de los fenómenos naturales y exponer el nuevo procedimiento científico a seguir, que imbrica dos dimensiones: *la matematización del conocimiento* como procedimiento de referencia y *los factores contextuales*, elementos esenciales y rasgos *que configuran originales modos del quehacer científico*.

3.2.- La revolución científico-matemática del siglo XVII

El segundo apartado se refiere al *nuevo escenario* de la racionalidad moderna y las exigencias de conocimiento matemático, se identifican los *rasgos que definen la racionalidad moderna* en el diseño y elaboración de la nueva *metodología capaz de explicar los nuevos problemas*, puesto que a nuevos problemas, nuevos métodos.

3.3.- Innovadores y creadores de la nueva ciencia

Bajo este epígrafe, se muestran a los grandes iniciadores de la Revolución Científica del XVII, que asumieron la tarea de elaborar un nuevo paradigma científico, lo pusieron en práctica e introdujeron a la Humanidad en la edad moderna. Desde el supuesto de que las distintas perspectivas de que parten estos creadores son esencialmente complementarias, se han situado en el *escenario geométrico las aportaciones y la obra de Copernico y Kepler*. En el ámbito de las *motivaciones mecánicas ubicamos a Galileo y a Newton*. La extensión del paradigma matemático a todo *conocimiento verdadero penetra la obra de Descartes y Leibniz.*

3.4.- Éxitos de la primera revolución científica

Se pretende dar a conocer algunos de los más importantes logros que nos legó esta gran revolución científica. No aspiramos a ser exhaustivos, sino acentuar algunos de los grandes éxitos que más se relacionan con el proceso educativo de las matemáticas que es el propósito de la tesis. Sobresalen las importantes *teorías y leyes científicas* descubiertas, las aportaciones al *nuevo método científico*, las *instituciones científicas* que promovieron, las Academias y las Sociedades de Científicos. La matematización de los saberes consolidados y emergentes se acopló al nuevo esquema metodológico, constituyendo un impulso eficaz al progreso científico de los siglos dieciocho y diecinueve. No cabe duda que este espíritu científico, sus métodos y muchas de sus teorías constituyeron un inestimable bagaje para la expansión científica del siglo XX.

Universidad Pontificia de Salamanca

3.5.- Las matemáticas y la ciencia en la actualidad

Se tratan algunos de los importantes avatares que afectan a las matemáticas a lo largo del siglo XX hasta el presente: *los cambios y tendencias de las matemáticas modernas*, la enorme *producción de conocimientos científicos*, que se argumenta sobre el testimonio de expertos, de publicaciones científicas y del crecimiento espectacular de la educación superior. Se muestran también algunas de las exigencias de comunicación mediática demandadas por *el nuevo rol de los científicos* en la sociedad actual.

3.6.- La democratización actual de la ciencia

Se analizan en este apartado algunos aspectos problemáticos que presenta la ciencia en la actualidad y que afectan a los ciudadanos: primero *la ciencia básica se transforma en ciencia aplicada y ésta se operativiza en la producción de bienes y servicios*, en intervalos de tiempo tan cortos que apenas se pueden verificar las conclusiones. Las inquietudes sociales provienen de los efectos perversos que, a veces, tienen la operativización de las conclusiones no suficientemente verificadas. Ha habido grandes catástrofes humanitarias y ecológicas que han animado la conciencia ciudadana y sensibilizado la opinión pública al respecto. Como por otra parte la investigación actual está necesitando grandes recursos económicos que facilita el Estado, los ciudadanos se muestran exigentes para que la ciencia y los científicos acepten unas *normas de verificación de las conclusiones que se puedan hacer por evaluadores externos* a los propios equipos de investigación. Se está iniciando un proceso de *participación ciudadana en el diseño y seguimiento de las políticas científicas*, que se denomina la democratización de las matemáticas y de la ciencia.

3.7.- Innovación científica y políticas de I+D+I

En este último apartado del capítulo tres de la tesis se contemplan dos asuntos: en el primero se describen las diversas *dimensiones del VI Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica,* más conocido por el acrónimo I+D+I y en el segundo se muestran algunos datos sobre los resultados de las políticas científicas de I+D+I.

3.8.- Corolarios pedagógicos para la enseñanza actual de las matemáticas

Universidad Pontificia de Salamanca

3.1. EL ESPÍRITU CIENTÍFICO MODERNO

Perfeccionar la expresión matemática de los fenómenos naturales, así como rectificar la teoría del ímpetu, los conocimientos astronómicos y articular la nueva física, será el gran avance de la ciencia moderna, cuya novedad es apreciable, en relación con la del siglo XIV, desde varios puntos de vista.

a) El paso de la naturaleza a la fuerza

La diferencia fundamental entre el espíritu científico del siglo XIV y el de la Ciencia Moderna del siguiente, se puede juzgar por la fisura epistemológica producida por el paso del concepto de naturaleza al concepto de fuerza. Esta expresión quiere decir que los científicos y filósofos del XIV, siguiendo a Aristóteles, continúan todavía atribuyendo a la naturaleza individual, esto es, a la manera de ser o estructura propia de cada cosa, las razones de sus propiedades y de comportamiento. Así sucede de modo universal, se trate de astros, del ser humano y de todos los demás seres. Por el contrario, los nuevos científicos fijarán las razones del comportamiento de los seres en relaciones de fuerza, inercia, masa y aceleración, susceptibles de ser medidas y cuantificadas. Son estas relaciones las que garantizan la armonía celeste y el orden cósmico en general. Se abre así paso a la mecánica moderna, desde una concepción del cosmos ordenado en virtud de individualidades, a otra que entiende el universo como un ámbito regulado por las interacciones entre los seres.

b) La mecánica celeste

La Ciencia Moderna, en consecuencia, no se reduce ya a una teoría general del universo basada en principios metafísicos centrada en el conocimiento de la naturaleza de los seres, como hacían los aristotélicos, sino que debe convertirse en una "mecánica celeste", esto es, en una explicación de las fuerzas que intervienen en la armonía y funcionamiento del cosmos, cuyos factores básicos son fuerza (F), masa (m) y aceleración (a). Su interacción, está sometida a la ley básica de la mecánica moderna: **F=m×a.**

Donde estas relaciones e interacciones se aprecian de modo privilegiado es en el sistema solar y en los movimientos planetarios, cuyas órbitas son resultantes de interacciones de fuerzas. No en vano los nuevos científicos son astrónomos: Copérnico,

Universidad Pontificia de Salamanca

Kepler y Galileo. Ahora bien, las mismas leyes rigen en la totalidad del Universo, dejando de tener sentido la distinción entre el mundo supralunar y el mundo sublunar. Y, a su vez, ellas son aplicables en todos los casos y a cualquier tipo de seres. Esta reformulación supuso, de hecho, una revolución científica porque representa el abandono definitivo del *mundo del más o menos*, para confirmar que el nuestro es un *universo de precisión,* regulado por sus propias fuerzas, en el que rige el rigor de la exactitud matemática.

Con independencia de sus logros científicos concretos, el desarrollo de la mentalidad matemática supuso una extraordinaria novedad para la ciencia y para las teorías del conocimiento en general. La novedad científica reside en que se propone el método matemático en el estudio de los fenómenos físicos y cosmológicos. Eso quiere decir que el conocimiento legítimo es el expresado mediante la exactitud de las matemáticas. Se trata, por tanto, de sustituir los enunciados generales y teóricos por fórmulas matemáticas que los expresen con exactitud. Se promueve así la exigencia de precisión, que es la característica más destacada de la ciencia moderna, en la que sólo las leyes enunciadas en términos matemáticos serán consideradas como expresión única del conocimiento verdadero. Galileo dirá que la Naturaleza está escrita en lenguaje matemático, y sólo por él se puede expresar la regularidad de sus fenómenos.

c) Concordancia entre la acción de Dios y la estructura del Universo

Copérnico, Kepler y Galileo, tienen claro que Dios es el artífice de este funcionamiento tan bien construido y articulado, porque su acción creó el Universo con tales cualidades y propiedades. Las autoridades científicas y eclesiásticas de aquellos años entendieron erróneamente que reconocer la estructura autónoma del Universo, regido por la exactitud matemática, suponía negar la acción divina. Esta es la razón por la que fueron condenadas como heterodoxas, tanto desde el punto de vista científico como teológico, las innovaciones más trascendentales alumbradas por Galileo, en el área de la física moderna. Sin embargo, los renacentistas lo tenían claro: no hay contradicción entre la fe y la ciencia, por eso Roger Bacon, "por la gracia de Dios" había inventado la lupa. Y, en estrecha analogía posterior, la fuerza es igual a la masa por la aceleración "por la gracia de Dios", pensaba Galieo y más tarde Newton. Esa convicción mencionada en el capítulo anterior, estimuló las inquietudes del siglo XIV, obra de frailes franciscanos y agustinos y pervivirá en los orígenes de la mentalidad científica moderna.

Universidad Pontificia de Salamanca

3.1.1.- La matematización del conocimiento como paradigma de referencia

En el capítulo dos hemos aclarado que entendemos por paradigma todo sistema de ideas o conceptos básicos sobre los que se articula un ámbito de conocimiento. En ese sentido decíamos que ciertos conceptos matemáticos actuaron como paradigma de referencia a la cultura griega en general, aunque manteniendo ésta su carácter enunciativo y descriptivo, todavía ajena al concepto de ley científica. Si se tiene en cuenta la novedad introducida por la nueva mentalidad en la que va concluyendo el siglo XIV, que acabamos de evocar, atendiendo a los propósitos educativos de la tesis, en este tercer capítulo nos proponemos esclarecer la nueva mentalidad científica con la que comienza la Edad Moderna y llaga hasta el siglo XXI: los conceptos matemáticos no son sólo referencias analógicas culturales, sino que sólo será admitido como científico aquello que pueda ser refrendado por una formulación o por una ley enunciada matemáticamente. Como señala el propio Kung (1962), no estamos ante un momento más de la historia de la ciencia y del papel de las matemáticas, sino ante un giro realmente copernicano en cuanto que la veracidad de las concepciones científicas se hacen dependientes de su expresión matemática.

Como en los dos capítulos anteriores, también en éste nos guiarán criterios más conceptuales que históricos, buscando aquellos supuestos con mayor influencia y más eficaces para la enseñanza actual de las matemáticas. Dentro de ese paradigma nuevo regulado por la exigencia de matematización de los fenómenos cósmicos, son apreciables tres grandes orientaciones: geométrica, mecánica y metodológica, si bien existe una estrecha interrelación entre ellas.

Geométrica: representada por Copérnico, Ticho Brahe y Kepler, quienes recurrirán a la geometría y las relaciones poligonales, como referencia para explicar los movimientos de los cuerpos celestes.

Mecánica: en esta segunda fase, la mentalidad geométrica anima e ilumina la mentalidad experimentalista de Galileo abriendo paso a Newton, y a la mecánica moderna, con leyes aplicables tanto al mundo sublunar como al supralunar aristotélico, esquema cosmológico desechado definitivamente.

Metodológica: las orientaciones anteriores sugieren a Descartes y Leibniz la extensión de los métodos matemáticos a ámbitos no experimentales. Los dos representan una universalización del valor de las matemáticas para articular todo conocimiento, incluso en el campo de la antropología, la moral, lo social, etc.

Universidad Pontificia de Salamanca

3.1.2.- Factores y motivaciones de la nueva ciencia

Con los antecedentes a los que nos venimos refiriendo, que van de Bacon y Ockham a los calculadores oxonienses y a los físicos parisinos, la Nueva Ciencia debe encuadrarse en las siguientes coordenadas histórico/conceptuales.

a) Siglo XVI: Renacimiento tardío

Durante el siglo XVI (Renacimiento tardío) se producen las condiciones sociales y culturales para el "giro copernicano" de la ciencia: se inicia el abandono de la idea de un universo como un conjunto de sustancias, con sus propiedades y poderes, que progresivamente se sustituye por la concepción del universo como un flujo de acontecimientos o fenómenos. Se inicia, también, un resurgimiento del espíritu científico y un creciente interés hacia la exploración del mundo natural, que se ve favorecida por el interés que despiertan las nuevas tierras descubiertas y la renovada atención que se presta a la observación como instrumento para el conocimiento de la realidad natural.

1) En 1543 los turcos toman la ciudad de Constantinopla, poniendo fin a un debilitado Imperio bizantino, fecha que nos permite datar el comienzo de la Edad Moderna con un poderoso movimiento cultural que arraiga en las costas del Mediterráneo, de modo especial en Italia y que se denominó el Renacimiento. Diez años antes Johann Gutenberg había inventado la imprenta. Casi cuarenta años después tiene lugar el descubrimiento de América. El año 1543 se publica la obra de Nicolás Copérnico (1473 – 1543) *Sobre las revoluciones de los orbes celestes* (*De revolutionibus orbium coelestium*). Desde la obra de Copérnico hasta 1638, fecha de los *Discorsi* de Galileo cristalizará un nuevo método, que se aplicará, con creciente interés a la observación y exploración del mundo natural: "En este umbral de la nueva ciencia, como lo denomina Dijsterhuis, cristaliza un nuevo método científico, una nueva forma de considerar qué requisitos tiene que cumplir una explicación que pretenda llamarse científica" (Mardones, 1991: 24)

2) Desde el siglo XVII se desarrolla un cambio espectacular en la ciencia moderna: es el siglo de la primera y gran revolución científica, que pone en marcha los nuevos procedimientos, que han de cumplir las explicaciones, a fin de que puedan considerarse plenamente como científicas. Esto convergerá en la creciente utilización y

Universidad Pontificia de Salamanca

desarrollo de las matemáticas, hasta consumarse, en fechas posteriores, una verdadera matematización de la ciencia.

3) Gradualmente se impone la investigación de las causas eficientes a las finales, el control de la naturaleza será un claro objetivo de la nueva ciencia, finalidad netamente utilitaria, que contrasta con la concepción teórica y especulativa de la ciencia en el mundo antiguo y medieval.

b) Factores culturales y sociales que facilitan el surgimiento de la ciencia moderna

1) La recuperación de la *tradición pitagórica* por los humanistas, para quienes el libro real de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático. Urge pues, buscar las leyes matemáticas, que descubren la estructura real del mundo físico. Esta idea halla un apoyo exterior, pero muy sólido que le fortalece, en la concepción cristiana de una creación del universo, inteligente, con sentido y ordenada, como se manifiesta en el relato bíblico. “Galileo será un típico representante de la nueva mentalidad que cambia las explicaciones físicas cualitativas de Aristóteles por las formulaciones matemáticas de Arquímedes” (Mardones, 1991:25).

2) El *capitalismo incipiente* de las ciudades italianas, mediante el comercio con Oriente, crea una fuerte acumulación de capital y se produce el fortalecimiento de una nueva clase social, la burguesía, cuyos gustos se orientan más hacia lo secular, lo positivo, el orden, los hechos concretos, lo útil y lo pragmático. La nueva ciencia es sensible a este interés pragmático en coincidencia con el intento de dominio y explotación de la naturaleza, apuntando así a una actitud tecnológica de la nueva ciencia y de sus aplicaciones.

“Pero el aspecto mas importante recibido de la tradición por el genio de Galileo, fue el énfasis en el valor de la abstracción e idealización de la ciencia. El éxito de Galileo y del posterior desarrollo de esta tradición radica en su habilidad para arrinconar diversas complicaciones empíricas, para trabajar con conceptos ideales, como ‘el péndulo ideal’, etc. Es decir, que, junto a las fuerzas sociales indicadas, hay que poner a los hombres: los artistas ingenieros del Renacimiento, hombres geniales como Leonardo da Vinci, que inician la vinculación del saber académico con la empiria artesanal” (Mardones, 1991: 24 – 25).

Universidad Pontificia de Salamanca

c) El triunfo de la nueva ciencia en la Modernidad

Con el "desarrollo del saber experimental y la insistencia en el método inductivo, el concepto de ciencia ha quedado reservado para el conocimiento teórico, inductivo y sistemático sobre la realidad, derivado de la observación y experimentación metodológicas" (Sierra, 1991:17) La nueva ciencia, que reemplaza a la aristotélica, va a considerar como explicación científica de un hecho, aquella que venga formulada en términos de leyes que relacionan fenómenos determinados numéricamente, es decir, matemáticamente. Tales explicaciones tomarán forma de hipótesis causales, causal en este contexto tendrá connotaciones funcionales, mecanicistas. El valor de tales hipótesis vendrá determinado por el análisis experimental: Galileo, según Kant, elabora su física sobre el supuesto de que las cosas giran en torno al entendimiento, que se denomina "la revolución copernicana de la ciencia".

3.1.3.- Rasgos que configuran la nueva ciencia

En sentido estricto se definiría la ciencia como un conjunto sistematizado de conocimientos sobre la realidad observable, obtenidos mediante un procedimiento específico, el método hipotético – deductivo, contrastando sus hipótesis, "mediante la falsación de las mismas, que han sido hechos públicos y posteriormente sometidos a consenso por la comunidad científica" (Fernández, 2010: 18). Etimológicamente, *ciencia* viene del latín *scientia,* derivado del verbo latino *scire* que significa saber. Este verbo trae su origen del griego ισεμι (isemi) que significa conocer, estar informado, tener noticia de algo. Ya desde muy antiguo, la ciencia no aludía tanto al conocimiento concreto, alcanzado por los sentidos, cuanto a *formas más elevadas de conocimiento* y distintas del conocimiento vulgar.

a) Evolución histórica del concepto de ciencia

En sus orígenes clásicos, tomando a Platón como referencia, la ciencia comienza en la interpretación racional (matemática) de la realidad para culminar en la intuición de la idea de las cosas, momento alcanzable en esta vida sólo por seres privilegiados. Para Aristóteles la ciencia es un *proceso de abstracción*, para llegar a la *formación de conceptos universales y necesarios,* puesto que la ciencia es de lo universal, no de los particulares. La concepción aristotélica se difunde durante la antigüedad y el medioevo, con dos orientaciones metodológicas que perduran más allá del propio aristotelismo y llegan a nuestros días: 1ª) Inducción: observación de los fenómenos como punto de

Universidad Pontificia de Salamanca

partida para formular principios universales. 2ª) Deducción: de principios, o causas evidentes, se deducen conclusiones y aplicaciones, mediante el silogismo. La ciencia aristotélica es teleológica, fundada en la naturaleza y en la causa final de los seres.

La ciencia moderna, sin embargo, es esencialmente mecanicista en cuanto que, si bien atiende a la naturaleza individual, se articula sobre las interacciones entre los seres, sus acciones y movimientos compartidos y expresados matemáticamente. Orientación que aclaramos en este capítulo, con referencia a sus más notables representantes.

En el contexto de la epistemología actual se distinguen las orientaciones de la ciencia como opinión fundada, destreza y pericia racional, que ya expresaba el griego επιστήμη (episteme): 1ª) Conocimiento sintético, expresado por el alemán *Wissenschaft*. 2ª) Conocimiento analítico de la realidad, al estilo inglés y francés. 3ª) Conocimiento crítico, aplicable también a ámbitos antropológicos, sociales, etc. (Bergmann,1961).

Desde estas perspectivas, según Ferrater Mora, podemos definir la ciencia actual en los siguientes términos: *"*Es un modo de conocimiento, que aspira a formular, mediante lenguajes rigurosos y apropiados, en lo posible, con el auxilio del lenguaje matemático, leyes, por medio de las cuales se rigen los fenómenos. Estas leyes son de diversos órdenes. Todas tienen, empero, varios elementos en común: ser capaces de describir series de fenómenos; ser comprobables por medio de la observación de los hechos y de la experimentación; ser capaces de predecir - ya sea mediante predicción completa, ya mediante predicción estadística - acontecimientos futuros" (Ferrater, 1994: Tomo1, Ciencia, p.545).

b) Elementos esenciales

Una especificación de los elementos esenciales de la definición de ciencia obliga a hacer referencia al contenido, al ámbito de actuación y al procedimiento:

1) *El contenido de la ciencia* es el conjunto de conocimientos sobre la realidad, en forma de términos, conceptos, hipótesis, leyes, teorías. La ciencia no está formada por hechos sino por ideas. Las ideas interrelacionadas entre sí forman una teoría.

2) *El campo de actuación de la ciencia es la realidad observable:* lo trascendente y lo no empírico no cae en el campo de la ciencia, por consiguiente, no es objeto de aplicación de los procedimientos de la ciencia. Sobre lo trascendente o no empírico la ciencia no se pronuncia, sobre su verdad o falsedad;

Universidad Pontificia de Salamanca

3) *El procedimiento de actuación:* la ciencia tiene una forma típica de actuación en la formación del conjunto de conocimientos, que se denomina método científico. Este tipo de procedimientos distingue a la ciencia de cualquier otro tipo de conocimientos. "El conocimiento científico es, por definición, el resultado de la investigación realizada con el método y el objetivo de la ciencia" (Bunge, 1972: 189).

Como resumen especificaría tres dimensiones significativas: 1ª) La ciencia es un conjunto de conocimientos, obtenidos por la aplicación de un procedimiento específico hipotético-deductivo, que se denomina método científico. Por consiguiente, la ciencia es el resultado del método. 2ª) Científico, por tanto, será quien conoce y sabe utilizar correcta y eficazmente el método científico y las técnicas características de un determinado campo del saber. 3ª) Al cultivo y desarrollo del método científico es atribuible con preferencia el extraordinario desarrollo que las ciencias han alcanzado en los dos últimos siglos.

c) Objetivos y fines de la ciencia

Los objetivos fundamentales del conocimiento científico son analizar, explicar, prever y actuar.

1) *Analizar es saber cómo es esa realidad*, qué elementos la forman y cuales son sus características. Trae su origen del verbo griego **αναλιο**, (analío) que significa desligar, examinar con detalle. Es un término usado ya desde Euclides en Matemáticas, con el sentido de separación de un todo complejo en las partes que lo integran. Descartes introduce el término en la filosofía.

2) *Explicar*: "después de conocer cómo es la realidad, el segundo objetivo de la ciencia es explicarla, llegar a establecer cómo se relacionan sus distintas partes o elementos, por qué es como es la realidad" (Sierra, 1991: 19). La etimología latina de explicar *(explicare)* significa desplegar un amplio desarrollo para mostrar el significado y razón de un suceso, del 'por qué' del mismo*"*.

Analizar y explicar constituyen los objetivos básicos de la ciencia y también el fin próximo de la misma, que no es otro que conocer, con la mayor exactitud posible la realidad, es decir, el descubrimiento de la verdad. La investigación de la verdad es tarea fundamental de la ciencia.

3) *Prever o predecir* adquiere el significado de mostrar cómo se comportará dicha realidad o qué acontecimientos sucederán en esa realidad. El carácter predictivo de la ciencia constituye en la actualidad un elemento decisivo de prestigio en la ciencia.

Universidad Pontificia de Salamanca

4) *Actuar:* el conocimiento de cómo es una realidad y por qué es así esa realidad, faculta la actuación, da poder para actuar sobre la realidad, para controlarla, transformarla y dominarla.

Los objetivos de predecir y actuar son consecuencia de los anteriores - analizar y explicar - y constituyen lo que, en otra terminología, se denominarían fines intermedios de la ciencia. Los seres humanos buscan con la ciencia no sólo el aumento del puro conocimiento de lo que las cosas son en realidad, sino simultáneamente, pretenden establecer el dominio sobre esa realidad y hacerla útil al hombre. A este fin de "satisfacer las exigencias justas de la vida y vencer los males y limitaciones que afectan a los hombres se orientan el poder predecir y actuar sobre la realidad" (Sierra, 1997:26)

d) Objetivos subsidiarios de la ciencia

1) *Ciencia y poder:* esta concepción de la ciencia, como poder que el hombre tiene de transformar, actuar, influir y modificar la realidad está de máxima actualidad. Es insoslayable constatar que en el presente los avances técnicos y la progresiva investigación está depositando en manos del hombre un inmenso poder, lo cual puede ser peligroso. La memoria histórica, individual y colectiva, atestigua, con gran acumulación de datos, que el hombre dotado de poder, con excesiva frecuencia no lo usa solo para la búsqueda del bien.

2) *Hacia la sabiduría:* en consecuencia, se hace necesario orientar y subordinar estos objetivos, a horizontes de humanidad y sabiduría. Como escribió Russel, "para que la civilización científica sea una buena civilización, es necesario que el aumento de conocimiento vaya acompañado de sabiduría. Entiendo por sabiduría una concepción justa de los fines de la vida. Esto es algo que la ciencia por sí misma no proporciona". (Russel, 1969: 219)

3) *La realidad verdadera:* puede afirmarse, además, que el fin último de la ciencia no ha de quedarse sólo en la realidad de las cosas, en la verdad, *"en la realidad verdadera"* (Zubiri:1982). La ciencia ha de tensionarse hacia la sabiduría, es decir, hacia un marco de justicia, que posibilite y favorezca el despliegue del hombre completo, de la humanidad global, como sujeto de derechos y deberes, que en la actualidad se concretan en lo que se denominan los derechos humanos [61].

---

[61] Juan Pablo II en el Discurso 10/11/ 1979 decía a los científicos: *"En una palabra, vuestra ciencia debe expandirse en sabiduría, es decir, convertirse en crecimiento del hombre y del hombre entero; abrid*

Universidad Pontificia de Salamanca

4) *Cambio de dirección.* En los últimos veinte o treinta años, parece observarse un cierto cambio en la concepción instrumental de la ciencia y de su desarrollo tecnológico. Cada vez se percibe con mayor claridad que en esa marcha triunfal hacia el dominio de la naturaleza, el hombre está produciendo tales deterioros y trastornos en la misma, que la ponen en peligro. Desde aquí parece abrirse a la esperanza una cierta participación ciudadana en las políticas científicas y a una distinta consideración de la naturaleza como un gran bien a cuidar, guardar, conservar y no destruir o deteriorar de manera irreversible.

3.1.4.- A modo de síntesis

La síntesis de los más importantes asuntos, que fueron objeto de tratamiento en este apartado, quedaría recopilada en los párrafos que siguen.

La matematización del conocimiento se impone desde el momento en que el concepto griego de naturaleza y sustancia se sustituye por un conjunto de fenómenos que son observables, cuantificables y medibles. Esta nueva concepción de la naturaleza abre espacio para el uso de las matemáticas en el tratamiento, descripción y explicación, de la regularidad, la intensidad, la frecuencia y otros rasgos cuantificables de la naturaleza. Representa una verdadera revolución científica el abandonado definitivo del *mundo del más o menos*, para confirmar que el nuestro es un *universo de precisión,* regulado por sus propias fuerzas y regulado por el rigor de la exactitud matemática. Esta perspectiva supuso una extraordinaria novedad para la ciencia, que se propone como método la matematización de los fenómenos físicos y para las teorías del conocimiento la novedad está en que de aquí en adelante el conocimiento legítimo es el expresado mediante la exactitud de las matemáticas. Mediante la aplicación de las matemáticas se persigue la exactitud y la precisión como las características destacadas de la ciencia moderna. Las leyes enunciadas en términos matemáticos serán consideradas como la expresión única del conocimiento científico.

Un nuevo concepto de ciencia emerge en los comienzos de la edad moderna y es el segundo asunto a tratar, que comprende dos aspectos. El primero atiende directamente a los factores culturales y sociales, entre los que destacan la recuperación

---

ampliamente vuestras mentes y vuestros corazones a los imperativos del mundo de hoy, que aspira a la justicia y a la dignidad fundadas sobre la verdad. Y vosotros mismos estad disponibles para la búsqueda de todo lo verdadero, convencidos de que las realidades del espíritu forman parte de lo real y de la verdad integral".

Universidad Pontificia de Salamanca

de la *tradición pitagórica* por los humanistas, para quienes el libro real de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático. Esta idea se refuerza con la concepción cristiana de una creación del universo, inteligente, con sentido y ordenada. Urge pues, buscar las leyes matemáticas, que descubren la estructura real del mundo físico. En cuanto a los motivos se constata la emergencia de una nueva clase social, ubicada en las grandes ciudades del Mediterráneo, que practica un capitalismo incipiente que, mediante el comercio con Oriente, crea una fuerte acumulación de capital, fortaleciéndose como nueva clase social, la burguesía, cuyos gustos se orientan más hacia lo secular, lo positivo, lo útil y lo pragmático. La nueva ciencia es sensible a estos intereses en coincidencia con el intento de dominio y explotación de la naturaleza, apuntando así a una actitud tecnológica de la nueva ciencia y de sus aplicaciones.

L*os rasgos que definen esta nueva ciencia* se han sintetizado en sus elementos esenciales: el *contenido* - el conjunto de conocimientos sobre la realidad – *el campo de la ciencia es la realidad observable*, quedando excluido por consiguiente el tratamiento científico del ámbito de lo trascendente, sobre lo que la nueva ciencia no se manifiesta. Se define también la ciencia por *el procedimiento que es la forma típica de actuación* en la formación del conjunto de conocimientos, que se denomina método hipotético – deductivo, contrastando sus hipótesis mediante la falsación de las mismas. La ciencia nueva se define asimismo por unos *objetivos específicos que son el analizar* o describir, *explicar* o el dar razón del por qué de las cosas, *predecir* que cobra una manifiesta importancia en el nuevo contexto de la aplicación metodológica de las matemáticas y el *actuar*, que deviene como consecuencia de los anteriores objetivos y que hace al hombre poderoso frente a esa realidad a desentrañar.

3.2. RACIONALIDAD MODERNA Y RENOVACIÓN METODOLÓGICA

La situación que vive Europa en el siglo XVII se caracteriza por una crisis generalizada de insurrecciones y guerras locales o regionales, son tiempos de cierta inestabilidad que algunos autores califican de *días de conmoción* y que la *conmoción es universal*, refiriéndose a las revueltas del Palatinado, Bohemia, Germania, Cataluña, Portugal Inglaterra y otros lugares de Europa. Con la revolución científica del siglo XVII y XVIII, la necesidad de estudiar y aprender matemáticas se ha hecho más necesaria que en cualquier otra época pasada, sin que ello suponga, por parte nuestra la

Universidad Pontificia de Salamanca

búsqueda de atajos, que siempre pudieran ser más dañinos que beneficiosos. La poderosa emergencia de los estudios y avances matemáticos y científicos de esta brillante etapa histórica marca las nuevas relaciones de la matemática con las nuevas ciencias, o mejor, con la ciencia en cuanto tal. Tanto en su significado cultural como en su uso práctico, "las matemáticas están conectadas a las otras ciencias y las otras ciencias están conectadas a las matemáticas, que son su lenguaje y su instrumento esencial. Las matemáticas separadas de las otras ciencias pierden una de sus más importantes fuentes de interés y motivación" (Piaget, J. y otros 1978: 330-331). Tres asuntos presentamos a continuación: las coordenadas de la racionalidad moderna; los rasgos comunes que se asignan a dicha racionalidad y los estrenados modos de investigar los nuevos problemas en el marco de la ciencia moderna.

3.2.1.- Ámbito de la racionalidad moderna

La primera Revolución Científica afectó el conocimiento científico en su conjunto, alcanzó a elaborar un nuevo paradigma científico, creó, desarrolló y puso en práctica nuevos procedimientos para el análisis de la realidad y configuró el escenario de la metodología dando origen al dinamismo de la racionalidad moderna. La racionalidad medieval se apoyaba en Dios y en esta etapa que comienza el centro de la racionalidad y los procesos de racionalización se orientan y culminan en el hombre.

El ámbito de la nueva racionalidad científica, escribe el profesor Rábade (1994: 70), "viene determinado por unas coordenadas que lo delimitan y lo configuran e, incluso podemos decir que lo regulan (…) situándose en las antípodas de cualquier anarquía racional".

El método es la coordenada fundamental de la racionalidad moderna, hasta el punto de que a veces a la razón moderna se le ha denominado la razón metódica. Las posibilidades de desviación, que pudiera asumir la razón, estuvieron presentes en el ánimo de los grandes científicos y filósofos del inicio de la edad moderna y sometieron a la razón a estrictos controles, "corsés inflexibles", como los matemáticos.

La certeza como aspiración y como motor, hasta bien entrada la Ilustración. La reiterada apelación al número y a la cantidad en las investigaciones de los pioneros de la nueva ciencia, la obsesión por acumular observaciones sobre los fenómenos, la invención de aparatos para recoger información y reforzar los sentidos humanos para tener seguridad de los hechos concretos, apuntan en la dirección de la certeza absoluta, puesto que todavía eran desconocidas las certezas estadísticas del presente.

Universidad Pontificia de Salamanca

La retracción básica del dinamismo del saber hacia la conciencia constituye una coordenada importante de la ciencia nueva, al menos en los escenarios del racionalismo, por cuanto hay un cierto cuestionamiento del conocimiento sensible y de la conversión del mundo exterior en meros fenómenos.

Una coordenada incuestionable es el matematicismo. La matemática se convierte en el saber modélico, no-histórico, racional y riguroso. Por otra parte es el saber que ha adquirido en la antigüedad con la cultura griega y en el medievo de la mano de la cultura árabe ha alcanzado como ciencia su madurez y por ello los demás saberes y los primeros emergentes, la física y la astronomía, demandan el apoyo de su fundamento y desarrollo en la matemática. Descartes (1959: 34) afirma la solidez de los argumentos matemáticos [62] y Pascal ofrece un testimonio de similar contundencia [63] (Pascal, 1963: 358).

La aceptación y vigencia del límite como coordenada delata que el ámbito de la racionalidad en la modernidad está circunscrito por límites. Obviamente no se refieren a la inteligencia finita de los mortales sino a los límites gnoseológicos, en virtud de los cuales la inteligencia va a aceptar gradualmente que no todas las cosas son susceptibles de conocimiento para el hombre. La nueva ciencia al ponerse límites y centrar su atención e interés en los fenómenos, en cómo funcionaban las cosas y dejar al margen la naturaleza y las esencias de las cosas, consiguió abrir un camino seguro que favoreció el avance científico experimentado hasta la actualidad (Rábade, 1994: 70-73).

3.2.2.- Rasgos de la racionalidad moderna

El segundo aspecto de interés que nos permitirá entender esta razón moderna con mayor concreción, se refiere a los rasgos comunes que suelen asignarse a la racionalidad moderna en los variados enfoques de los distintos autores:

1º) En la modernidad no cabe entender la razón como una facultad, al modo como se definía en la escolástica, sino que la razón ha de entenderse como un nivel o

[62] Nota: "A mi me gustaban sobre todo las matemáticas, a causa de la certidumbre y evidencia de sus razones; mas no advertía aún su verdadero uso y, pensando que solo servían para las artes mecánicas, me asombraba de que, siendo tan sólidos y firmes sus fundamentos, no se hubieran edificado sobre ellas algo más elevado".

[63] Texto de Pascal (*De l´esprit géometrique*): "El método de no incurrir en error es buscado por todo el mundo. Los lógicos hacen profesión de conducirnos a él, pero los geómetras son los únicos que lo consiguen, y fuera de su ciencia y de lo que la limita, no hay en absoluto demostraciones"

Universidad Pontificia de Salamanca

forma de conocimiento o acaso mejor como el conjunto de todos los dinamismos superiores de conocimiento. Según el profesor Rábade, este esbozo nocional contará con las excepciones de Espinosa en el racionalismo y de Hume dentro del empirismo.

2º) La razón, al igual que sucedió con el *logos* griego, es el escenario donde se lleva a cabo la revelación cognoscitiva de las diversas realidades, pero no se trata de una revelación confiada, sino precavida y crítica, ni se trata tampoco de que esa revelación de lo otro sea la tarea primaria de la razón, ésta tiene también que revelarse a si misma, autoaclararse y hacerse autotransparente.

3º) La razón moderna va a luchar por la autonomía de la razón, primero frente a Dios. No se discute que haya sido creada por Dios, sino que se entiende que una vez creada ella está dotada de todas las condiciones para su funcionamiento y posee todo aquello que necesita para su propio desarrollo. La autonomía significa también para la razón racionalista, la autonomía frente a la experiencia senso-perceptual, a fin de alcanzar esa razón pura kantiana que le permita operar sin contaminaciones de confusión y oscuridad (Rábade, 1994: 72-73).

3.2.3.- Nuevos problema y nuevos métodos

a) El movimiento y sus leyes

El tema más novedoso y al que prestan atención obsesiva los intelectuales (filósofos y matemáticos) de la época es el movimiento y las leyes del movimiento, no tanto como abstracciones matemáticas puras, sino en la búsqueda de las leyes, que rigen los procesos y sucesos del mundo físico, que ofrece la experiencia. Si bien los intelectuales de los siglos XIV y XV estudiaron ya el movimiento y sus formas, sin embargo jamás sometieron sus resultados a la prueba de la experiencia,

"En cambio, Galileo abordó estos principios, no como abstracciones matemáticas puras sino como leyes que rigen los procesos y sucesos físicos reales en el mundo de la experiencia. Incluso puso a prueba y confirmó la ley de la caída libre de los cuerpos mediante su célebre experimento del plano inclinado, descrito en Dos Nuevas Ciencias. La elaboración galileana de esas no era menos matemática que la de sus antecesores del siglo XIV, pro él concebía su matemática en un contexto físico y la sometía a la prueba experimental" (Bernard, 1989: 84).

Universidad Pontificia de Salamanca

b) La experimentación como fundamento de la ciencia

Tradicionalmente el conocimiento se había fundado en la revelación, la tradición, la intuición y la razón; en cambio, la nueva ciencia estableció la experiencia *(experimentación y observación crítica)* como el procedimiento adecuado para el conocimiento de la naturaleza. "Lo novedoso y revolucionario fue descubrir los principios mediante la experimentación combinada con el análisis matemático, situar las leyes de la ciencia en el contexto de la experiencia y someter la validez del conocimiento a la prueba experimental" (Bernard, 1989: 84).

De estos presupuestos se derivan dos consecuencias de importancia: 1ª) bases nuevas para el conocimiento, que implican la posibilidad de cuestionar la palabra de las autoridades eminentes y de la tradición, puesto que esas conclusiones se podían someter a la prueba de la experiencia controlada y 2ª) lo importante en la nueva ciencia no estaba en la autoridad del informante cuanto en la honesta información, en la comprensión de los procedimientos y en su habilidad como experimentador.

"El conocimiento adquirió así un carácter democrático, más que jerárquico, ya no dependía de la intuición de un puñado de elegidos sino de la aplicación de un método correcto, accesible a cualquiera, que tuviese talento suficiente para aprehender los nuevos principios de la observación y de la experimentación" (Bernard, 1989: 84).

De ahí, la especial atención que se prestó a los codificadores del método y a los escritos de los investigadores explicando con minuciosidad cómo desarrollar las investigaciones científicas y los diferentes procedimientos a seguir.

c) Realismo y fascinación

Los científicos de finales del siglo XVI y los de los siglos diecisiete y dieciocho eran conscientes de la novedad del enfoque, el recurso a la naturaleza era absolutamente novedoso. El realismo se afirma explícitamente en las ilustraciones de sus experimentos, donde recogen ejemplares vivos (plantas y animales) para sus experiencias. Todo esto constituía un indicador de la enorme fascinación que los descubrimientos ejercían sobre los hombres de la época: actitudes sobre los nuevos mundos de América y África, sobre los animales y sobre las plantas de esos lugares, etc..

"En la primera década del siglo XVII se produjo una conmoción mundial cuando el telescopio de Galileo reveló por primera vez, la verdadera configuración de los cielos. Marjorie Nicholson ha descrito la avidez de los europeos para conocer cada nueva

Universidad Pontificia de Salamanca

revelación del telescopio de Galileo y cómo sus descubrimientos eran aprovechados rápidamente por los poetas" (Bernard:1989: 85*).*

3.2.4.- A modo de síntesis

El ámbito de la racionalidad moderna, sus rasgos específicos y la renovación de los procedimientos construyen los asuntos tratados en este apartado. En cuanto al ámbito de la racionalidad moderna se configura por el método como la coordenada fundamental, hasta el punto de denominar a la razón moderna la razón metódica; la certeza como aspiración y motor de la ciencia y de la investigación que se afana por acumular observaciones sobre los fenómenos; la matematización, es decir, la matemática se convierte en el saber modélico, a-histórico, racional y riguroso, en el que los nuevos saberes han de fundarse y configurarse a su imagen.

La racionalidad moderna se define por una serie de rasgos entre los que sobresalen el nuevo modo de entender la razón, no ya como una facultad sino como una forma de conocimiento o como el conjunto de los dinamismos superiores de conocimiento; a semejanza del logos en la cultura griega, la razón en la modernidad es el escenario donde se lleva a cabo la revelación cognoscitiva de las diversas realidades que conocemos, pero no es una revelación confiada sino crítica y en tercer lugar la razón moderna va a luchar por su autonomía, primero frente a Dios y luego frente a la experiencia senso-perceptual, a fin de alcanzar esa razón pura kantiana, que le permite obrar sin contaminaciones de confusión y oscuridad.

En la modernidad se ofrecen nuevas realidades plurales y desconocidas, que es necesario investigar. A nuevos problemas nuevos procedimientos y así se comportan los protagonistas de la nueva situación: la observación y el experimento pasan a ocupar el primer lugar como procedimientos con los que aproximarse al estudio de las nuevas realidades y al descubrimiento de las leyes y regularidades que rigen las los fenómenos naturales.

3.3. INNOVADORES Y CREADORES DE LA NUEVA CIENCIA

Este es el marco racional de la actuación científica, en donde fueron protagonistas indiscutibles del cambio drástico de la ciencia algunos de los científicos

Universidad Pontificia de Salamanca

más importantes en la historia de la ciencia. El orden en que los presentamos a continuación responde al principio paradigmático que los ha guiado, que hemos adelantado al inicio del capítulo: la geometría en Copérnico y Kepler; la mecánica en Galileo y Newton, y a la extensión metodológica del método matemático en Descartes y Leibniz. Esta ordenación, en consecuencia, selecciona la cronología de los científicos a partir del principio general que ha guiado su aporte científico, si bien existe entre ellos una vinculación muy estrecha, no sólo de mutuas interrelaciones, sino por el recurso a la matemática como sustrato común de sus teorías.

3.3.1.- La geometría como motivación en Copérnico y Kepler

Como hemos advertido en el capítulo anterior, Platón introduce una concepción del mundo natural y celeste como una gran arquitectura plasmada según modelos y figuras geométricas. A nosotros, ya en posesión de las nuevas ciencias actuales, no puede extrañarnos tal interpretación teniendo en cuenta que vivimos y nos movemos sometidos a la especialidad que nos circunscribe y en la que estamos obligados a orientarnos a cada paso. La geometría es la representación, gráfica matematizada, de esa experiencia elemental y, al tiempo, ineludible. Por eso los primeros grandes astrónomos, con repercusiones en toda la cosmología y la física, recurrieron a la representación geométrica y sus figuras, para explicar la revolución diaria de los cuerpos celestes y el movimiento del sol a través del Zodíaco, así como las estaciones y regresiones de los planetas, con consecuencias en las estaciones del año. Copérnico y Kepler son los grandes representantes de estas motivaciones geométricas (Butterfield, H., 1958).

Copérnico, Nicolás. En el año 1543 se publica la obra *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*[64] de Nicolás Copérnico (1473 – 1543), nacido en la ciudad polaca de Thorn y uno de los mayores astrónomos de todos los tiempos. El hecho de que su publicación no se produjera con anterioridad a su muerte puede interpretarse como un deseo del autor de evitar agrias polémicas, aunque había redactado un breve opúsculo divulgativo y sin pretensiones científicas, que circuló con reservas entre los amigos del autor e interesados en el asunto, que es conocido como el *Commentariolus*, posiblemente redactado en la década de 1530 según afirman Rioja y Ordoñez, (1999: 107-109). En su obra Copérnico va a establecer y probar su tesis de que no es la tierra el

[64] La obra fue escrita originalmente en latín y se tituló *De revolutionibus orbium coelestium*

Universidad Pontificia de Salamanca

centro en torno a la cual se producen los movimientos de los astros y del sol sino que ese centro lo ocupa el sol, en torno al que giran la tierra y el resto de los planetas:

"Copérnico busca el sistema de círculos que sea, no más acorde con las observaciones, sino más racional. Es decir no solo se trata de dar cuenta de los movimientos aparentes de los planetas, sino de hacerlo de modo que ponga al descubierto el orden inteligible, que subyace en el cosmos. Por ello entiende que han de establecerse siete postulados, en los que se renuncia nada menos que al reposo de la Tierra y a su posición central. Concretamente afirma que no hay un único centro de rotación de todas las esferas celestes; así, el centro de la esfera lunar es el centro de la Tierra, pero el centro de todas las demás, incluida la esfera de la Tierra, es el Sol" (Rioja y Ordoñez, 1999: 112).

Kepler, Johannes, (1571-1630) fue un astrónomo y matemático alemán, nacido en Veil_der-Stadt, en el ducado de Württemberg, en el seno de una familia protestante de muy escasos recursos económicos, por lo que Kepler estudiará becado en el seminario teológico de Adelberg, ingresando luego en la universidad de Tubinga, donde adquirió su formación en matemáticas, astronomía y filosofía natural, con el profesor Mästlin, que le descubrió el planteamiento copernicano, que ya nunca le abandonó. En Graz, de 1594 a 1600, ejerce de profesor de matemáticas y astronomía, publicando el *Misterium Cosmograficum* (El secreto del universo, 1596), enviando un ejemplar a Galileo y otro a Tycho Brahe, que disfrutaba del cargo de matemático imperial en la corte del Emperador Rodolfo II, en Praga. Brahe le contrata como ayudante, con el encargo de estudiar la órbita del planeta Marte para elaborar unas nuevas tablas astronómicas.

Muerto Brahe en 1601, Kepler es nombrado matemático imperial, produciendo en este tiempo la gran obra de *Astronomia Nova,* con el subtítulo de *Physica Coelestis,* terminada en 1606 y publicada en 1609. Sobresalen otro títulos importantes como De Stella Nova (1606); *Ad Vitellionem, quibus astronomiae pars optima traditur* (1604) en la que trata la teoría de la visión; un *Tratado sobre cometas*, en que estudia la refracción de la luz. Entre 1612 y 1626 desempeña en la ciudad de Linz el cargo de matemático provincial, donde publica dos importantes obras: *La armonía del mundo en 5 libros*, (1619) en la que aparece su tercera ley y un *Compendio de astronomía copernicana*, estructurada en siete libros y en 1627 publica su última gran obra las *Tablas Rodolfinas*, que sustituirán a las anteriores tablas astronómicas. (Rioja y Ordóñez, 1999: 185-189)

Universidad Pontificia de Salamanca

Kepler es un astrónomo y matemático que contribuyó más eficazmente a la consolidación de la teoría heliocéntrica de Copérnico. Su descubrimiento importante fue la elaboración de las leyes del movimiento planetario que llevan su nombre. Propuso las dos primeras en 1609 y la tercera apareció diez años después en su obra *La armonía del mundo en cinco libros:*

1ª) Los planetas se mueven siguiendo órbitas elípticas que tienen al Sol como uno de sus focos.

2ª) El vector de posición de cada planeta con respecto al Sol barre áreas iguales en idénticos períodos de tiempo.

3ª) El cuadrado del período del movimiento de cada planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

El conocimiento de estas leyes, de manera especial de la segunda, fue crucial para la formulación por Newton de su *ley de la gravitación universal* en 1684 – 85 (Claphan, 1998: 205).

Dos asuntos más de considerable interés, en la obra de Kepler se refieren al método. El uno se refiere al concepto de inercia que no es idéntico al que elabora Galileo, que luego precisa Descartes, ni tampoco es el que desarrolla Newton, aunque esté más próximo a él. Para Kepler las órbitas y los movimientos orbitales se correlacionan con las fuerzas que los producen. "El hecho significativo no es que Kepler haya equivocado la función fuerza (una fuerza inversamente proporcional a la distancia en lugar de inversamente proporcional al cuadrado de la distancia), sino que fuera capaz de concebir una fuerza celeste y que ésta fuera de alguna manera una función inversa a la distancia" (Bernard, 1989: 127).

El segundo aspecto de envergadura se refiere al carácter científico de la investigación empírica que practica el autor. Kepler necesita acumular información para comprobar sus asertos científicos, pero es consciente de que la sola acumulación de datos no da más respuesta que la descripción de los fenómenos y la ciencia deberá dar razón de por qué son como son los hechos, es decir, Kepler busca la explicación de los problemas. Siempre con la inestimable ayuda de las matemáticas, el autor se interroga por la cantidad, la simetría, las regularidades y hasta las armonías de los fenómenos naturales y sus movimientos, centrando la mirada "en las relaciones invariantes que subyacen a los puros datos de observación, relaciones que se expresan en el lenguaje de los números y de las figuras, esto es, en el de las matemáticas". Para ello el autor se ubica en una perspectiva platónica, "salvar las apariencias celestes será construir un

Universidad Pontificia de Salamanca

esquema teórico, de carácter astronómico-geométrico, capaz de dar cuenta del orden que en realidad está contenido bajo los aparentemente confusos movimientos planetarios". Evidentemente este punto de vista se distancia del sentido utilitario y meramente predictivo de la investigación empírica y se aproxima a la cuestión de "la verdad de la teoría, si se concibe la tarea del astrónomo como el desvelamiento de lo real tras lo aparente, a fin de hallar las leyes estructurales del cosmos" (Rioja y Ordóñez, 1999: 190).

3.3.2.- Las motivaciones mecánicas: Galileo y Newton

Si Copérnico y Kepler se ven impulsados por motivaciones geométricas de colocación y situación para aclarar los movimientos de los cuerpos celestes, esta preocupación llevó por sí misma a ampliar la investigación hasta las causas de todos los fenómenos y relaciones que puedan darse entre los móviles. No sólo entre las órbitas de los cuerpos celestes, sino de todos los cuerpos en movimiento, también de aquellos que pertenecen a la naturaleza en la que nos movemos. Se introduce así una mentalidad preocupada por los problemas mecánicos que suponen la introducción de una auténtica mecánica celeste y de la nueva física terrestre, que Galileo y Newton van a consolidar.

Galilei Galileo, (1564-1642). Matemático, físico y astrónomo italiano tuvo una actuación metodológica destacada en el sentido de introducir en el escenario de la investigación científica el método experimental en combinación con las teorías matemáticas. Construyó un telescopio para su propia observación astronómica y cuyos resultados publicó en 1610 en *El mensajero de los Astros* (Sidereus Nuncius): entre otros, las irregularidades de la superficie lunar, los satélites de Júpiter y los anillos de Saturno. Esta obra suscitó una notable polémica en la época, pues suscitaba dos problemas: ponerse de acuerdo sobre lo que se veía con aquel rústico telescopio y, en segundo término, cómo valorar las nuevas observaciones en cuanto prueba del sistema copernicano. En los comienzos de su actividad académica, como profesor de la universidad de Pisa, publica la obra "*De Motu"*, que comprende una serie de escritos sobre el movimiento. Ya desde esta obra Galileo da muestras de su ubicación científica en el sentido de que considera las matemáticas como la ciencia por excelencia llamada a resolver los *problemas del movimiento*, tanto el *desplazamiento de móviles*, la *caída libre de los cuerpos* o a lo largo de planos con diferentes grados de inclinación. La

Universidad Pontificia de Salamanca

relevancia, que atribuye a *las matemáticas* le aproximan, en todo caso, más a Arquímedes que a Aristóteles.

Desde su interés por los asuntos terrestres en esta época, sobre todo del movimiento, alcanza al descubrimiento y formulación matemática de las leyes cuantitativas del movimiento que quedarán recogidas en la gran obra de Galileo (1976) *Dos nuevas ciencias* [65]. Posteriormente decidió recoger en una nueva obra su observaciones astronómicas que respaldaban la tesis de Copernico y que constituye su libro más importante *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del Mundo, ptolemaico y copernicano*[66]. Con respecto al heliocentrismo, Galileo estima poseer la prueba definitiva con las fases de Venus: "Las diferencias de iluminación y de tamaño que se observan solo son posibles si este cuerpo celeste brilla con luz reflejada y se mueve en torno al Sol de quien recibe dicha luz. En efecto, cuando Venus se halla en su posición más alejada de la Tierra, se muestra redondo y pequeño; en cambio, cuando la distancia se acorta, crece de tamaño y su figura se asemeja a una hoz. Si la órbita de este planeta estuviera contenida dentro del sol, como creía Ptolomeo, entonces Venus se mostraría siempre menor de medio círculo" (Rioja y Ordóñez, 1999: 245).

Los datos que Galileo manejaba, obtenidos mediante sus observaciones telescópicas, según autores de la época, eran favorables a la tesis copernicana, sin embargo, también podía tener otras explicaciones y así autores partidarios de la concepción geocéntrica se escindieron entre partidarios de la concepción copernicana y los matemáticos y astrónomos jesuitas se orientaron por el sistema tichónico, capaz de conjugar el movimiento de los planetas alrededor del Sol con el reposo de la Tierra. En todo caso un cambio fundamental se había producido como consecuencia de las observaciones y explicaciones de Galileo y aunque él en el Diálogo afirme que la argumentación en favor de la teoría copernicana es una hipótesis matemática, la realidad supera los artificios procedimentales y sería difícil seguir admitiendo sin una progresiva polémica que la teoría heliocéntrica tenía un mero carácter instrumental desprovisto de implicaciones físicas y cosmológicas. De lo expuesto se infiere algo pertinente a esta tesis y que es del mayor interés: en la obra de Galileo las demostraciones matemáticas

[65] La obra originalmente fue escrita en italiano con este título: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nove scienze attenanti alla mecanica ed i movimente locali*. 1638.

[66] Esta obra publicada también en italiano, en Florencia, con la correspondiente licencia civil y eclesiástica, en 1632, con el título *Dialogo sopra i due massimi sistema del mondo, ptolemaico e copernicano*.

Universidad Pontificia de Salamanca

sustituyen a los argumentos escolásticos de tipo filosófico en la elaboración de las teorías científicas.

Newton, Isaac, (1642-1727). Físico, matemático y astrónomo británico. Newton es uno de los genios más grandes de la humanidad. Para Gauss y Einstein es el matemático más grande de todos los tiempos. A fin de proceder con un cierto orden, se muestran primero sus principales obras, luego las aportaciones matemáticas, físicas, astronómicas y ópticas, para concluir afirmando la fascinación que suscitó en sus contemporáneos.

1) Sus obras más importantes son los *Principios matemáticos de la filosofía natural* o *Principia,* cuyo título original es *Philosophiae naturalis principia mathemática*, (1687); *De análisis per aequationes numero terminorum infinitas*, publicado en 1671; un tratado de óptica *Method of fluxions and infinite series*, escrita en latín en 1671, traducida al inglés por John Colson y publicada en 1736.

2) En cuanto a las aportaciones científicas, según Mamiani (1990) se ha de considerar que Newton es una personalidad extraordinaria por sus muchas aportaciones a las distintas disciplinas: los fundamentos del cálculo infinitesimal (compartido con Leibniz), la aplicación de las matemáticas a la física y a la astronomía. La ley de la gravitación universal y las leyes fundamentales de la mecánica clásica. Fundándose en la teoría de la gravitación universal, elabora la teoría del movimiento planetario, la serie binomial que lleva su nombre, el método que lleva su nombre en análisis numérico y muchos resultados importantes en ecuaciones diferenciales. Definió el principal concepto de la ciencia física (masa). En óptica está la teoría del calor y de la luz. La unidad de fuerza del SI se denomina *newton* en su honor [67]. Leyes de Newton del movimiento; ley de Newton del rozamiento; ley de Newton de la viscosidad, etc. etc. No cabe duda que Newton contó con que muchas de estas teorías estaban ya apuntadas o en fragmentos y estas ideas estaban en las obras de Galileo, Kepler, Hooke, Huygens, Leibniz, y tantos otros científicos de menor nombre, pero sería más temerario todavía afirmar que la obra de Newton no es más que una amalgama de las ideas elaboradas por

[67]SI es la unidad de fuerza en el Sistema Internacional, que se denomina newton y consiste en "la fuerza necesaria para imprimir a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo al cuadrado (m.kg.s2)" (Clapham, C. 1998:248)

Universidad Pontificia de Salamanca

otros cuando muchas de ellas, recogidas en los Principios, son criticadas y rechazadas como erróneas.

La publicación de la obra importante de Newton, los *Principios matemáticos de la filosofía natural,* ha marcado época en la historia del pensamiento científico. Ha sido el punto de partida de todo físico y el libro de estudio y de meditación de muchos científicos y estudiantes. *Su influencia en los siglos posteriores fue enorme* y solo comparable a la de Aristóteles en la Edad Media. Sin embargo cuando su obra apareció ya Aristóteles estaba en decadencia por influencia de Descartes y de los cartesianos. Newton ofrecía otra senda, pero así como en las cosas naturales la inercia funciona, también hay una inercia cultural que afecta a la inteligencia y hace que la gente sea reacia a los cambios. Sin embargo, a pesar de la inercia y de las críticas de los cartesianos, Newton aparece a la mayor parte de sus contemporáneos como un verdadero modelo de la modernidad: le alaban los ilustrados, lo estudian y siguen los científicos, lo admiran hasta los filósofos. Sus obras se traducen al francés y al alemán, se vulgarizan y se hacen ediciones especialmente adaptadas a los iletrados y para las mujeres. Voltaire refiere la anécdota de que entre varios amigos discutían un día sobre cuál era el hombre más grande en la historia de la humanidad y unos que Cesar, otros que Alejandro otros que diversos personajes y uno comentó que para él Newton era el más grande y Voltaire apostilla "este hombre tenía razón". A mi modo de ver, la influencia mayor de Newton se da en el campo del método y en la aplicación de las matemáticas a las diversas ciencias.

Con Newton la matematización de la ciencia se hace irreversible. Para los ilustrados, la investidura de Newton como el indiscutible maestro del saber de ese período se debe también que como dice Rábade en la obra citada, Newton es el sacerdote que ofició como el gran descubridor de los misterios de la naturaleza y los asuntos concernientes a la naturaleza constituían el centro de atención de los ilustrados por eso en la Enciclopedia Francesa se dice del científico inglés que levantó el velo que ocultaba los más *grandes misterios de la naturaleza*. Después de muerto, "el reconocimiento de su figura fue tan grande que se convirtió no solo en el ideal del buen científico y en corriente de pensamiento, sino también en bandera del progreso y de la ciencia moderna, acercándose al peligroso terreno de convertirse en una institución dogmática" (García J., 1991: 9).

Universidad Pontificia de Salamanca

3.3.3.- El método matemático: paradigma del conocimiento científico

Si la astronomía y la mecánica fueron preocupaciones fundamentales de los anteriores pioneros de la Ciencia Moderna, articulada sobre el sustrato de las matemáticas como mediación para formular las leyes científicas, Descartes, además de gran geómetra, tiene preocupaciones metafísicas y morales, y pretende que tales saberes de naturaleza humanística tomen a las matemáticas como modelo de sus argumentaciones. Leibniz, a su vez, llevará su preocupación metafísica al campo de las matemáticas, estableciendo la analogía entre ambos territorios. Por una parte introduce un infinito metafísico, la mónada, substrato último de la realidad, que viene a ser análogo al de infinito matemático.

Descartes y Leibniz se aproximan en cuanto que para ambos la metodología matemática es la que ofrece garantías de veracidad en todos los ámbitos que pretendan presentarse como conocimientos verdaderos.

Descartes, René, (1596-1650). Filósofo y matemático francés, es conocido en el *área de las matemáticas* por la aplicación de los métodos algebraicos a la geometría, dando lugar a la Geometría Analítica. Utilizó el sistema de coordenadas que llevan su nombre, *coordenadas cartesianas.* Las denominó así G.W. Leibniz y con ese nombre pasaron a la historia matemática. Es rectangular, las dos rectas consideradas han de ser perpendiculares. Descartes consideraba que la verdadera física era una rama de las matemáticas y sólo a través de ellas se puede adquirir el conocimiento de la verdadera física. En su obra los *Principios de Filosofía* sostuvo también que la ciencia se basa en las matemáticas: La física no requiere otros principios que los empleados en *Geometría o Matemática Abstracta*, ni tampoco serían de desear por cuanto explican todos los fenómenos naturales. En una carta dirigida a Mersenne, en diciembre de 1637, le informa que la Dióptrica y la Meteorología, presentadas por él, en 1637, como ensayos del nuevo método, convencerían a la mayoría de la gente de que su método era "superior al común" y se enorgullecía de "haberlo ya demostrado en mi Geometría" (Bernard, 1989: 143-149). En cuanto a sus obras importantes destacan *Meditaciones de prima philosophia,* publicada en 1637; los *Principia Philosophiae, publicada* en 1644 y la obra más importante de tipo filosófico es el *Discurso del Método,* publicado en 1637 (Gilson, E.,1962).

El mensaje esencial que Descartes quería aportar a su siglo e instalarse con el en la historia no era la resolución de problemas concretos, con los que estaban enredados la

Universidad Pontificia de Salamanca

mayor parte de los hombres letrados de su época, sino la edificación de un sistema completo, que según pensaba llegaría a sustituir a la doctrina de la Escuela y de cuyo sistema "estaban desterradas las cualidades y formas sustanciales en beneficio de un mecanismo universal que explicaba todos los fenómenos de este mundo visible sólo con ayuda de tres conceptos: extensión, figura y movimiento. En esta reducción del número de conceptos reside a la vez la originalidad profunda del sistema de Descartes, su justificación y su verdadera utilidad" (Taton, 1988: 287).

En la senda de Bacon, Descartes en el *Discurso del Método* atribuye a la ciencia un carácter utilitarista muy acusado y desarrolla un sentido pragmático sobre la naturaleza y sobre la explotación de los recursos, que hoy se valoraría como depredador. Sin embargo, afirma que la ciencia justa ha de asumir el objetivo de empeñar nuestra capacidad en procura del bien general para todos los hombres y más en concreto sostiene que el conocimiento será de gran utilidad en esta vida y la aplicación correcta de la ciencia "nos convertirá en amos y dueños de la naturaleza que nos permita gozar de los frutos de la agricultura y de toda la riqueza de la tierra sin trabajar". Destaca en particular la utilidad de la ciencia para la salud de todos los hombres y el avance de la medicina: "me limitaré a decir que he resuelto no emplear el tiempo que me queda por vivir, en otra cosa que en tratar de adquirir de la naturaleza algún conocimiento tal que se puedan deducir de él reglas para la medicina, más seguras de las que se tienen hasta ahora" (Descartes, 1959: 118).

Leibniz, Gottfried Wilhelm, (1646-1716). Matemático, físico y filósofo alemán, escritor de amplia variedad de temas, es fundador del cálculo diferencial que publicó en 1684, tres años antes que Newton y sin conocer que este estaba trabajando ya en ello. Poco después volvió sobre el cálculo integral incluyendo el teorema que lleva su nombre, *Teorema Fundamental del Cálculo*. "Se ocupó asimismo de otras ramas de las matemáticas, realizando significativas contribuciones al desarrollo de la lógica simbólica, un campo en el que no se llevaron a cabo avances sustanciales hasta finales del siglo XIX" (Claphan, 1998:211). En el campo de la física identificó la energía cinética como el producto de la masa por el cuadrado de la velocidad; describió la ley de la conservación de la energía mecánica. Se considera precursor de la teoría de la probabilidad pues definió, antes que Pierre S. de Laplace, la probabilidad como número de casos favorables partido por número de casos posibles y estableció asimismo el principio del criterio de indiferencia (R. Academia de Ciencias, 1999: 549).

Universidad Pontificia de Salamanca

Tres aspectos quisiéramos destacar de la obra de Leibniz, además de la envergadura de sus aportaciones a las matemáticas y a la física. También resulta de interés algunas aportaciones a la ciencia en general, como es la necesidad de partir de la verdad, la constante atención al método de las ciencias, llegando a la elaboración de una pluralidad metodológica notable y por último se hace mención de sus nociones de cambio y progreso (Holz, 1970).

La teoría de la verdad de Leibniz ha suscitado notables discrepancias entre los autores y para algunos, es razonable aceptar que Leibniz se coloca en una posición contraria a la delimitación del problema de la verdad en las coordenadas de la subjetividad, representando una dirección distinta de la Ilustración. En todo caso, este es el punto de partida de su filosofía: la definición de la verdad. En el breve tratado de Leibniz, *De natura veritatis*, se lee lo siguiente: “Para establecer los Elementos de la ciencia humana es de desear un punto en el que podamos apoyarnos con seguridad y desde el que nos sea posible avanzar con confianza. Este principio juzgo que ha de ser buscado en la naturaleza general de las verdades” (Racionero, 1994: 257 – 258).

En cuanto a los modos en que puede ser explicado una proposición o una conclusión pueden encontrarse muy variadas formas como comenta Nicolás (1994: 233) que llega a establecer hasta seis estrategias de fundamentación científica: el modelo deductivo que es sin duda el más desarrollado y usado por el autor, hasta el punto que se ha pretendido hacer de la obra leibniziana un sistema deductivo; el método teleológico de aplicación prioritaria en la física; el modelo coherente que usa el autor para fundamentar la percepción de los fenómenos; el modelo intuitivo lo aplica con las experiencias internas y los axiomas idénticos; el modelo reflexivo se emplea solo en la relación con Dios; por último el modelo trascendental que usa Leibniz para fundamentar la justificación del principio de razón suficiente.

Leibniz elabora una filosofía moral del progreso que, según Aguado (1994) va a entender al modo de los intelectuales ilustrados, como unos sucesivos cambios direccionales hacia metas de mejora. Su idea de progreso se nutre del cambio, que desvela la mutabilidad de las cosas y de la permanencia a fin de no cabalgar sobre el cambio sin dirección. Lo importante en esta idea no es que se produzca el hecho del progreso, sino que el “núcleo de su pensamiento, su forma de pensar, sintetiza admirablemente identidad y diferencia. Es en las raíces del pensamiento leibniziano donde encontramos los fundamentos de la idea de progreso. Leibniz estima que el “progreso se produce de manera gradual, siguiendo la Ley de la Continuidad afirma que

Universidad Pontificia de Salamanca

ningún cambio se hace mediante saltos nada se hace de golpe y una de mis máximas fundamentales y más confirmadas es que la naturaleza nunca da saltos" (Aguado, 1994: 395-396). Entre sus muchas obras importantes de Leibniz se pueden citar *Nova Métodus* (1684); *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Acta eruditorum, 1686).

Según proclama Bernard: "en muchos sentidos la Revolución Científica fue mas extrema e innovadora, que las revoluciones políticas del siglo y sus consecuencias han resultado más profundas y prolongadas (…) Para evaluar la profundidad y envergadura de la revolución Científica no hay mejor manera que comparar la ciencia que fructificó en el siglo XVII con su equivalente más cercano de la Edad Media tardía" (Bernard, 1989: 83)

En aras del orden y de la claridad, se especifican en el apartado dedicado a los *éxitos de la primera revolución científica*, algunos de los aspectos que se consideran más principales y que avalan la tesis del cambio profundo que se produjo en la ciencia, con notable participación de los que hemos considerado protagonistas importantes de la revolución científica del siglo XVII y XVIII: novedades temáticas y metodológicas; instituciones creadas para el progreso científico y algunos logros de más éxito.

3.3.4.-A modo de síntesis

Se presentaron los grandes iniciadores y creadores de la nueva ciencia desde una triple perspectiva que nos parece adecuada, teniendo en cuenta su personalidad científica e innovadora y en armonía con su producción científica, si bien somos conscientes que la categoría intelectual y científica de estos genios rebasa cualquier modelo. Sin embargo, con el sentido pedagógico que se pretende dar a la tesis, parece aconsejable y a modo indicativo, enmarcarlos desde *una triple perspectiva*.

La *primera perspectiva* corresponde a la *geometría*, como representación gráfica matematizada de la experiencia elemental y, al tiempo, ineludible de toda realidad material y extensa. Los primeros grandes astrónomos, con repercusiones en toda la cosmología y la física, recurrieron a la representación geométrica y sus figuras, para explicar la revolución diaria de los cuerpos celestes y el movimiento del sol a través del Zodíaco, así como las estaciones y regresiones de los planetas, con consecuencias en las estaciones del año. Consideramos que Copérnico y Kepler son los grandes representantes de este enfoque geométrico.

Universidad Pontificia de Salamanca

Galileo y Newton introducen una mentalidad preocupada por los problemas mecánicos que demanda una auténtica *mecánica celeste* y de la nueva física terrestre, que ellos van a consolidar. Para aclarar los movimientos de los cuerpos celestes, ampliaron la investigación hasta las causas de todos los fenómenos y relaciones que puedan darse entre los móviles. No sólo entre las órbitas de los cuerpos celestes, sino de todos los cuerpos en movimiento, sin excluir aquellos que pertenecen a la naturaleza en la que nos movemos.

Descartes y Leibniz se aproximan en sus inquietudes metodológicas en el sentido de que para ambos la *metodología científica por excelencia son las matemáticas*, porque ella ofrece garantías de veracidad en todos los ámbitos que pretendan presentarse como conocimientos verdaderos. Descartes, desde sus preocupaciones metafísicas y morales, pretende que los saberes humanísticos tomen a las matemáticas como modelo de sus argumentaciones y Leibniz, mediante la introducción de la mónada, algo análogo al infinito matemático, establece la analogía entre la metafísica y las matemáticas, facilitando la metodología matemática para el universo de los saberes.

3.4. ÉXITOS DE LA PRIMERA REVOLUCIÓN CIENTÍFICA

La nueva ciencia se concibe como búsqueda incesante de la verdad, y el período que va de 1620 a 1640 se podría describir como milagroso: "la física de las cualidades se sustituyó por la física cuantitativa; el Cosmos jerarquizado por un Universo indefinido, constituido por fenómenos equivalentes y, a menudo, sin finalidad, y el mundo sentido de la percepción inmediata, por el mundo pensado del matemático, prolongado gracias al microscopio en un más allá de la percepción. Nada de esto ha caducado aún (…) el mérito indiscutible del siglo XVII no consiste pues, en que mira más o menos correctamente más cosas que sus predecesores, sino en haber mirado el mundo con ojos nuevos con ayuda de principios que se mantendrán sólidamente adquiridos" (Taton, 1988:214).

En la nueva ciencia se destaca siempre el sentido práctico de la misma. La nueva ciencia generaba expectativas fundadas, de que los avances científicos redundarían en inventos prácticos y en la mejora de otros campos del saber, igualmente beneficiosos

Universidad Pontificia de Salamanca

para la Humanidad. En el *Discurso del método* Descartes escribe que, si contara con la ayuda financiera de algún hombre rico, podría lograr importantes mejoras en la agricultura, la medicina y la sanidad. La misma idea aparece en Bacon: las aplicaciones prácticas son *anticipos y garantías de la verdad* como medios para una vida más cómoda.

3.4.1.- Logros teóricos de la primera revolución científica

Entre los éxitos científicos más importantes logrados por estos eximios genios de las matemáticas, de la física, de la astronomía y otros saberes importantes, deben citarse al menos los que siguen a continuación, teniendo bien en cuenta que muchos otros ámbitos científicos guardan perpetua deuda con los grandes científicos del siglo XVII – XVIII que hemos nombrado.

1) *Las leyes galileanas* de la caída libre de los cuerpos, que reemplazarán a las leyes abstractas del movimiento.

2) *La ciencia del magnetismo* tuvo también su origen en este siglo.

3) Las *tres leyes* que Kepler formuló para la interpretación del movimiento planetario, que llevan su nombre y que ya se han mencionado anteriormente. Elaboró el moderno sistema heliocéntrico, que muchos llaman copernicano.

4) Newton inició la *ciencia del calor y de la luz, dando lugar a la nueva ciencia de la óptica*. Elaboró el cálculo infinitesimal, consumó la aplicación de las matemáticas a la física y a la astronomía. Descubrió la ley de la gravitación universal y las leyes fundamentales de la mecánica clásica. En la elaboración de la teoría del movimiento planetario, la serie binomial lleva su nombre,

5) Leibniz lega a la posteridad el *Teorema fundamental del cálculo*, el desarrollo de variadas estrategias del método científico y la necesidad de construir la ciencia sobre la verdad objetiva.

6) En Biología, el descubrimiento de la *circulación de la sangre* efectuado por Harvey, revolucionó la fisiología.

3.4.2.- Conclusiones de orden metodológico

En cuanto a las aportaciones de orden metodológico, podría afirmarse sin caer en la exageración que la revolución científica del siglo XVII instaló una metodología

Universidad Pontificia de Salamanca

específica en el escenario de la investigación que ha causado en gran medida el progreso científico que llega con ritmo acelerado hasta la actualidad.

1º) *Se altera drásticamente la investigación científica vigente,* al dar preeminencia a la experimentación y a la observación, por la vía de disolver la antigua naturaleza, organización de sustancias, formas y cualidades, y emerger la nueva concepción de la naturaleza como conjunto ordenado de fenómenos cuantitativos.

2º) En coherencia con el precedente supuesto, *la idea de que la Naturaleza está diseñada en formas matemáticas a descubrir, común a todos los sabios del siglo XVII y XVIII, constituye las matemáticas en el ideal de la nueva ciencia*. Por consiguiente el objeto científico deja de ser la cualidad percibida para convertirse en la cantidad medida (Taton, 1988: 222).

3º) Se subraya la importancia de la *predicción científica,* que se va a configurar como un rasgo sobresaliente de la ciencia moderna y que se asienta racionalmente en el presupuesto asumido y demostrado de variadas maneras por los genios mencionados del siglo XVII y XVIII, de que el universo natural sigue en sus movimientos unas leyes fijas y universales, que permiten la predicción científica.

4º) Por doquier se anuncian las *aplicaciones prácticas de la ciencia*, que afectarán al ser humano y al dominio de las fuerzas de la naturaleza, poniendo éstas al servicio de las necesidades y limitaciones del ser humano.

Como resumen es perfectamente válido el pensamiento de Fontenelle que recoge Bernard, (1989: 92) en referencia al cálculo matemático inventado por Newton y Leibniz, que es considerado desde todo punto de vista como la hazaña intelectual más auténticamente revolucionaria del siglo XVII. El carácter extraordinario de esa matemática otorgaba a los científicos, poderes muy superiores a los que cabría esperar. Esta creencia estaba divulgada no solo entre masas populares, sino también entre muchos ilustrados de la época.

3.4.3.- Nuevas instituciones para la ciencia

Una sucinta elucidación sobre algunos matices hará más comprensible la visión cultural del siglo XVII que se prolonga y se hace presente en el siglo XVIII, aunque las temáticas científicas y filosóficas se prorrogan y pasan del siglo XVII al XVIII sin sustanciales variaciones. Sin embargo, se pueden mencionar ciertas diferencias de acento o énfasis en algunos aspectos que indican claramente el cambio, lento y gradual, pero seguro que va a consolidarse en los siglos siguientes. En el siglo XVII se produce

Universidad Pontificia de Salamanca

la confianza en la razón escasamente estructurada y, como señala Kant, en el siglo XVIII esta razón ha crecido, *se ha hecho mayor de edad*, para caminar por sí sola. Pasa de un siglo a otro sin desgaste de su influencia, más bien ennoblecido el ideal de las matemáticas como modelo científico a seguir por los saberes emergentes, que recaban el estatuto científico. Desde luego que es herencia viva del siglo precedente la *exigencia y valoración del método* en el siglo XVIII. Sin menoscabo de las aportaciones científicas, filosóficas y culturales que el siglo XVII traspasa al nuevo, el siglo XVIII potenciará y desplegará todo el potencial de la racionalidad de los fenómenos, al margen de las esencias y de las verdades eternas. También hallamos que la racionalidad de los principios se ve sustituida por la racionalidad de las leyes científicas que pretenden mostrar la regularidad de los fenómenos y su explicación mediante las mismas. Por último es patente el olvido de los grandes relatos y el rechazo a la metafísica. "En el siglo XVIII se impone la filosofía naturalista, moral, humanista y socio-política, sin renunciar a la organización sistemática del discurso, pero no pretendiendo elaborar completos sistemas totalizantes" (Rábade, 1999: 103).

Este nuevo clima es perceptible por varios motivos: de modo especial se trabaja para la formalización e institucionalización de estos avances y a ello contribuye especialmente la emergencia de nuevos asuntos a investigar y al perfeccionamiento de los procedimientos para estudiarlos. En este marco de inquietud científica *se crean nuevas instituciones, para el progreso, registro y difusión de los descubrimientos*. Surgen las *Academias*[68] que se constituyen en centros de investigación, reunión y reflexión para realizar experimentos en conjunto, reproducir experiencias efectuadas en otras partes, escuchar informes sobre trabajos realizados por los miembros y enterarse de las novedades provenientes de otros grupos y países. El surgimiento de una comunidad científica es una de las características destacadas de esta revolución (Lekourt, D., 2010: 11-14).

[68] En cuanto a la fundación de las academias el siglo XVII es fecundo: hacia 1660 aparecen las Academia Royal Society de Londres; y luego la Académie des Sciences de París, 1665, cuyo primer secretario fue Christiaan Huygens, cuya obra matemática muestra su conexión con Newton y Galileo. En Roma, bajo la protección del Príncipe Federico Cesi en 1603 se crea la primera académica científica, la Accademia dei Lincei, de la que será miembro Galileo. En Florencia, el Duque de Toscana, Fernando II, crea su Accademia dei Cimento o Academia de la Experiencia.

Universidad Pontificia de Salamanca

El ejemplo clásico de estas sesiones científicas de las academias es en la que Newton, en 1671, mediante su antecesor en la Cátedra de Lucasiana, Isaac Barrow, presentó su telescopio reflector ante la Royal Society en Londres. El invento fue recibido con grandes aplausos y le facilitó la entrada en la Sociedad a Newton poco después. Encantado por la acogida dispensada a su invento, Newton escribió a la Sociedad para ofrecerse a ir personalmente para informar a sus miembros sobre sus experimentos con la luz y el calor, cuya novedad tenía varios significados: "la primera obra científica que publicó; el primer trabajo sobre la física del calor, fundador de esta disciplina; el primer gran descubrimiento científico que aparece como artículo en una revista especializada. Y otro rasgo destacable es que describe los experimentos y las conclusiones teóricas, sin exponer un sistema cosmológico ni una doctrina teológica; es ciencia lisa y llana" (Bernard, 1989:86). Las academias asumen algunas competencias que resultan de notable interés para los científicos y para la ciencia:

1ª) *La creación de una red formal de comunicaciones*, que se llevan a cabo mediante viajes, cartas, pero principalmente a través del intercambio de publicaciones e informes enviados o demandados. Por ejemplo, la Royal Society de Londres por medio de su primer secretario, Henri Oldenburg, en 1668 escribe a Huygens, que residía en París, pidiéndole que les comunique *lo que había descubierto sobre el tema del movimiento* aun en el caso de que *todavía no estuviera en condiciones de publicarse*. Huygens [69] accedió al pedido señalando que *no dudaba de que esa sociedad le acordaría el honor del descubrimiento, asentándolo en su registro con su nombre*. Se alentó la publicación de obras importantes no sólo en el latín, idioma oficial de las academias y universidades sino también en los idiomas propios de los países.

2ª*)* El otro cometido se refiere precisamente a la *consignación de los descubrimientos, teorías y conclusiones científicas a que llegan:* las sociedades y academias llevaban un libro de registro, donde se consignaba la autoría de los descubrimientos e invenciones. La revolución científica del siglo XVII es la primera revolución en la historia de la humanidad, que no tiene un objetivo final, último y decisivo, sino que es entendida como un proceso continuo de descubrimiento, de hallazgo y de búsqueda inacabable. Esto la diferencia de todas otras revoluciones

[69] Huygens, C. "además de su labor como físico y astrónomo, realizó diversas investigaciones matemáticas, algunas en conexión con sus trabajos físicos, otras independientes" (Rey Pastor y Babini, 1985: 69, vol.2).

Universidad Pontificia de Salamanca

políticas, sociales, etc., que buscan un objetivo y hallado éste termina el proceso (Bernard, 1989:87 – 88).

3.4.4.- Progreso en la matematización de la ciencia

Bernard, siguiendo a Kuhn y otros autores, estima que, con posterioridad a la primera revolución científica, por antonomasia es la del siglo XVII, se han producido otros momentos de consolidación de la nueva orientación científica que, siendo muy estimables sus logros, sin embargo aquella sigue siendo considerada universalmente como la verdadera Revolución Científica y *"*difiere de otras revoluciones analizadas en esta obra y en la mayoría de los libros de historia de la ciencia, en el sentido de que aquella afectó al conocimiento científico en su conjunto" (Bernard, 1989:94), mientras que otros cambios son más parciales o sectoriales. A lo largo de los siglos siguientes las matemáticas se va configurando como la materia científica instrumental que configura los métodos de los nuevos saberes emergentes y es reconocida como la materia más importante en el panorama científico por su capacidad para "efectuar aportaciones fundamentales a otras ciencias y técnicas, como la astronomía, la química, la ingeniería en sus varias especializaciones, la física con todas sus ramas, de la mecánica a la electricidad y, hasta a la reciente electrónica, de la cual han nacido teorías y aplicaciones audaces y elevadas que han tenido – y tienen - reflejos e influencias sobre nuestra organización civil, tanto social como privada. Desde este punto de vista, la matemática es considerada preferentemente como una prodigiosa técnica, destinada a facilitar instrumentos de indagación y medios de descubrimiento" (Campedelli, 1970: 10).

A comienzos del siglo XIX tiene lugar una extraordinaria proliferación de científicos y organizaciones especializadas, que desbordan el espacio de las antiguas academias, así como las de reciente creación, incapaces ya de dar cabida al creciente número de científicos, a su interés por las nuevas explicaciones del universo y a sus múltiples actividades de difusión científica.

a) Nuevos impulsos al avance científico

En Inglaterra surge la *"Asociación Británica para el Progreso de la Ciencia"*, creada en 1832. Por motivos semejantes surgen otras organizaciones hermanas en distintos países, que fomentan la organización de grupos locales de científicos y de reuniones científicas en ciudades y pueblos grandes, a fin de que toda la nación participe en el movimiento científico. Se había difundido por doquier la idea de que las

Universidad Pontificia de Salamanca

estrategias metodológicas no presentaban insuperables dificultades, se trataba de actividades de observación que estaban al alcance de las personas normales con mucho interés, notable responsabilidad y alguna preparación técnica para recoger los datos observados y consignarlos fielmente. Se entendía que el progreso científico obtendría unos logros más ricos a medida que más gentes se incorporaran a la tarea de la observación e interiorizaran los procedimientos de la nueva ciencia.

En Francia Saint-Simón, mientras se afana en la construcción de una nueva ciencia sobre la sociedad, que alcance a mostrarse como un estudio rigurosamente científico, defiende que la ciencia es evolutiva: se caracteriza por el tránsito desde una etapa conjetural - conocimiento de pocos hechos, escasa observación y limitado campo de experiencias - a otra positiva, en la que el pensamiento ha de estar bien fundado en hechos, observaciones y experiencias correctamente establecidas, es decir, la nueva ciencia ha de operar sobre una base amplia de observaciones seguras. Para alcanzar una tal acumulación hechos, observaciones y experiencias científicamente válidas era necesaria la incorporación del pueblo a la excelsa tarea de hacer ciencia (Saint_Simón, 1975: Prefacio, 3-11).

b) Sesiones académicas de trabajo

Las asociaciones y sociedades de científicos organizan sesiones de trabajo, estudio e investigación, de manera semejante a las Academias, invitando a veces a científicos de otros territorios con producción científica reconocida, que dictaba alguna conferencia de alto nivel. Las discusiones entre los científicos locales se realizaban en sesiones públicas. Algunas de las cuales despertaron un interés inusitado y quedaron consignadas en los anales de la historia de la ciencia como modelos de sesiones científicas. Una célebre discusión científica, que tuvo lugar en Oxford, en la *Asociación Británica para el Progreso de la Ciencia* (BASS), en 1860, fue la discusión sobre la *teoría de la evolución de Darwin*. Intervinieron el Obispo Anglicano Samuel Wilberforce, que atacó duramente la idea de la evolución, publicando luego un comentario en el que afirmaba reiteradamente que el principio de la selección natural es absolutamente incompatible con la palabra de Dios y un intento de destronar a Dios, pues si fuere cierto el Génesis sería una mentira y la Revelación un engaño y una trampa. En defensa de la teoría de la evolución intervino Thomas Henry Huxley (1825-

Universidad Pontificia de Salamanca

1895) [70]. Pertenecía también a la Sociedad Científica un clérigo llamado Frederick Temple, que pronunció el sermón oficial, afirmando que el dedo de Dios está más en las leyes de la naturaleza, que en los límites del conocimiento científico, dejando así el hueco para la evolución en una concepción religiosa y bíblica del mundo (Bernard, 1989: 261-265).

c) Rasgos más característicos

T. S. Kuhn llama la atención sobre "un importante cambio en el carácter de la investigación en muchas de las ciencias de la naturaleza", que se produjo entre 1800 y 1850, sobre todo "en ese conjunto de áreas de investigación denominado física" (Kuhn, 1962: 288). El cambio más sobresaliente y que estaba produciendo éxitos palpables, al que se refieren Kuhn y otros autores, es la matematización de la ciencia física baconiana, que se considera como el más notable rasgo específico de los nuevos progresos científicos. Un segundo rasgo, aunque no tan visible, es el gran incremento en la envergadura del trabajo científico y la reconstrucción de la educación científica, cuyos cambios afectaban a todas las ciencias.

d) Nuevo paradigma científico

Según Jan Hacking (1983) cada revolución científica ha de ir acompañada de un cambio institucional, modelo o paradigma, a modo de un *nuevo tipo de institución como resumen de las nuevas directivas.* En el siglo XVIII se producen notables avances del modelo matemático en los procedimientos metodológicos de las nuevas ciencias y también la aparición de un nuevo paradigma en la historia de las ciencias de la naturaleza, con la nueva teoría evolucionista de Charles Darwin, que consolida la emergencia de una nueva Biología, que pretenderá explicar la mayor parte de la condición humana, como consecuencia natural del fenómeno biológico, "interpretando

[70] T.H. Huxley fue abuelo del también biólogo Julian Huxley, (primer Director General de la UNESCO) y abuelo de Aldous Huxley, autor de una novela y utopía famosa, *Un mundo feliz,* que se recuerda en la actualidad con motivo de la oveja clónica, Dolly. Huxley defendió acaloradamente a Charles Darwin. La asistencia aquel día fue masiva, con momentos de gran tensión entre los asistentes y los intervenientes. En un momento de acaloramiento, el Obispo le preguntó a Huxley, con el fin evidente de molestarle, si prefería descender del mono por parte de su abuela o de su abuelo. Huxley le respondió con viveza que no sería peor descender de un mono que descender de un obispo.

Universidad Pontificia de Salamanca

la naturaleza humana únicamente en términos de la evolución darvinista, expresión génica, realidad hormonal y otros procesos semejantes puramente biológicos" (Lewontin,1982:1). "La biología darwinista produjo innovaciones institucionales e intelectuales. Se basaba fuertemente en la información reunida por legos con fines no científicos, principalmente los archivos y las experiencias de agricultores y ganaderos, y su producto fue una ciencia esencialmente newtoniana. Fue la primera teoría científica de los tiempos modernos, causal pero no predictiva" (Bernard, 1989: 97).

3.4.5.- El progreso científico de los siglos posteriores.

Durante el siglo XVIII los matemáticos trabajaron con gran intensidad [71] y dedicación para enriquecer el análisis matemático con numerosas aportaciones e interesantes descubrimientos [72]. En el siglo XIX, la preocupación por el rigor científico se manifiesta de modo generalizado y se suceden los cambios que afectan a las condiciones del trabajo científico [73]. La Revolución francesa y luego el Imperio crearon condiciones muy favorables al desarrollo de *las matemáticas* y la reforma de la enseñanza superior despierta el interés por la educación científica y técnica. La profesionalización de "la actividad del matemático constituye el factor decisivo en el desarrollo de las *diferentes ramas de las matemáticas* en el siglo XX. De ello resultará directamente un aumento considerable del número de investigadores y se asistirá a una verdadera explosión del número de publicaciones científicas. En las universidades y

[71] "En los últimos años del siglo XVIII, por obra de Monge, la geometría adquiere nueva vida, en esa misma época y por obra de otro científico francés, Joseph Fourier, nace una nueva rama de la ciencia natural íntimamente vinculada con la matemática: la llamada física matemática, en la que siguiendo las huellas de Lagrange y de Laplace se estudian los problemas físicos mediante los recursos del análisis infinitesimal con el mínimo indispensable de hipótesis físicas" (Rey Pastor y Babini, 1985: 136, vol.2).

[72] "Con el desarrollo de la mecánica y con el fin de servirla, el siglo XVIII fue también el siglo del algoritmo. (…) La figura representativa del período algorítmico es Leonard Euler, que además de las matemáticas cultivó otras disciplinas, entre ellas la física matemática, ciencia que comparte con los matemáticos franceses que sobresalen en ella en el período comprendido entre Euler y Gauss" (Ibid. p.110-111)

[73] "Al compás del gran desarrollo científico y tecnológico del siglo, preludio de la explosión del siglo actual, la matemática, como las demás ciencias, muestra una fecundidad asombrosa que se revela en el gran incremento del número de científicos y de trabajos, en la creación de sociedades y revistas especializadas, en la celebración de reuniones nacionales e internacionales" (Rey Pastor y Babini, 1985: 141).

Universidad Pontificia de Salamanca

escuelas superiores, se reserva *a las matemáticas* un lugar mucho más importante que en el pasado. Los estudiantes reciben así una enseñanza que les permite adquirir una base sólida sobre la que podrán edificar a continuación. (…) La reforma de la enseñanza ha favorecido la eclosión de vocaciones mucho más numerosas, poniendo la enseñanza en contacto con la investigación y abriéndola a clases más amplias de la renovada sociedad" (Collette, 1985: 275-283). En este apartado, que comprende los avances científicos del siglo XIX y comienzos del XX, vamos a referirnos a los dos indicadores más significativos del progreso científico de esta etapa: la dimensión institucional y los aspectos conceptuales.

a) Nuevas dimensiones institucionales de la ciencia

Entre los aspectos institucionales, que se diseñan y crean, entre otros, merecen destacarse los siguientes (Bernard, 1989: 94-101).

1) Las universidades se convierten en centros de investigación, siguiendo los nuevos procedimientos matemáticos para la metodología científica.

2) Se establecen nuevos estudios intermedios y de postgrado, como licenciaturas y doctorado.

3) Los científicos autodidactas, de la generación anterior son reemplazados por profesionales de gran preparación técnica.

4) Se fundan universidades nuevas, dedicadas únicamente a la investigación y a estudios de postgrado como la de Johns Hopkins.

5) Las viejas universidades crean institutos de investigación con las nuevas metodologías. Merecen especial mención los laboratorios de Cavendish, de Cambridge, de Chicago y el Museo de Zoología Comparada de Harvard.

6) Se crean institutos de investigación, no vinculados a las universidades. Destacan como ejemplos muy positivos para la ciencia los institutos Pasteur, Rockefeller, el instituto alemán de la Kaiser Wilhem Gesellschaft donde trabajaron Planck y Einstein.

7) Al margen de las universidades y con el apoyo de empresas y entidades civiles, surgen los laboratorios industriales, que emplean la investigación para la invención de productos nuevos, mejoras en la fabricación de los existentes y fijación de pautas de calidad.

8) Se amplían y crean departamentos e instituciones científicas gubernamentales, que van a constituir el signo diferencial de los nuevos rumbos que va a tomar el

Universidad Pontificia de Salamanca

progreso científico en la segunda mitad del siglo XX, donde se diseña la producción científica a semejanza de la producción industrial.

b) Aspectos conceptuales

Por lo que respecta a los cambios intelectuales, más representativos de los modos exclusivos de hacer ciencia desde el siglo XVIII hasta comienzos del XX, parece obligado mencionar al menos los siguientes:

Primero, las grandes revoluciones de la física: la de la relatividad y la de la mecánica cuántica. El fundador de la teoría electromagnética y uno de los más grandes físico-matemáticos fue Maxwell que elaboró la teoría de los campos, pero "como la teoría de Newton, la de Maxwel resultó difícil de excluir y cuando alcanzó el status de paradigma, cambió la actitud de la comunidad científica hacia ella" (Kuhn, 1962: 171).

En segundo término, se producen importantes mutaciones en la química y la biología que cuenta con el nuevo paradigma de la evolución de las especies. Se comienza a desarrollar la genética (Ziman, 1986: 121-124).

Es importante reseñar también la introducción de la probabilidad, que afecta a muchas disciplinas que fundamentan sus explicaciones, más en la probabilidad que en la causalidad: "la Primera Revolución Científica fue dominada por la causalidad simple o newtoniana - la relación uno a uno entre causa y efecto -, mientras que en el siglo XIX se introdujo en muchas disciplinas (en las ciencias sociales y en la sociología, en la psicología y la antropología cultural, en la etnografía y etnología) un conjunto de teorías, explicaciones y metodologías basadas en la teoría de la probabilidad en lugar de la causalidad simple" (Bernard, 1989: 97).

3.4.6.- A modo de síntesis

No es mi pretensión resumir en unas pocas líneas los éxitos de las revoluciones científicas de la edad moderna, tan solo intento presentar de modo ordenado algunos de los muchos éxitos que los mencionados creadores, innovadores y primeros continuadores de la nueva ciencia aportaron al progreso de la ciencia.

De los logros teórico-científicos destacaría los siguientes: las leyes galileanas de la caída libre de los cuerpos; la ciencia del magnetismo; las tres leyes que Kepler formuló para la interpretación del movimiento planetario; Newton inició la ciencia del calor y de la luz, dando lugar a la nueva ciencia de la óptica, al tiempo que elaboró el

Universidad Pontificia de Salamanca

cálculo infinitesimal, consumó la aplicación de la matemática a la física; Leibniz lega a la posteridad el Teorema fundamental del cálculo.

En cuanto a las aportaciones de orden metodológico más relevantes, se altera drásticamente la ciencia vigente, al dar preeminencia a la experimentación y a la observación; la idea de que la Naturaleza está diseñada en formas matemáticas a descubrir es común a todos los sabios del siglo XVII y en consecuencia las matemáticas se constituyen en el ideal de la nueva ciencia; se subraya la importancia de la predicción científica, que se va a configurar como un rasgo sobresaliente de la ciencia moderna; las aplicaciones prácticas de la ciencia, que afectarán al ser humano y al dominio de las fuerzas de la naturaleza.

Se crean instituciones, para el progreso de la ciencia, entre las que sobresalen las Academias y Sociedades o Asociaciones de Científicos que se constituyen en centros de reunión para realizar experimentos en conjunto, reproducir experiencias efectuadas en otras partes, escuchar informes sobre trabajos realizados por los miembros y enterarse de las novedades provenientes de otros grupos y países. Asumen dos cometidos de importancia: la creación de una red formal de comunicaciones, que se llevan a cabo mediante viajes, cartas, pero principalmente a través del intercambio de publicaciones e informes enviados o demandados. El segundo cometido se refiere precisamente al registro y consignación de los descubrimientos, teorías y conclusiones científicas a que llegan. Las sociedades y academias llevaban un libro de registro, donde se consignaba la autoría de los descubrimientos e invenciones.

A lo largo de los dos siglos siguientes las matemáticas se van configurando como la materia científica instrumental que conforma los métodos de los nuevos saberes emergentes, es reconocida como la materia más importante en el panorama científico, por su capacidad para efectuar aportaciones fundamentales a otras ciencias y técnicas, como la astronomía, la química, la ingeniería, la física con todas sus ramas, de la mecánica a la electricidad y, hasta a la reciente electrónica. Desde este punto de vista, las matemáticas son consideradas preferentemente como una prodigiosa técnica, destinada a facilitar instrumentos de indagación y medios de descubrimiento. A la convergencia de este cúmulo de circunstancias suele denominarse la matematización de la ciencia.

El progreso científico y la preocupación por el rigor científico se manifiesta en los siglos siguientes de modo generalizado y se suceden los cambios que afectan a las condiciones del trabajo científico: las universidades se convierten en centros de

Universidad Pontificia de Salamanca

investigación, siguiendo los nuevos procedimientos matemáticos, se establecen nuevos estudios como licenciaturas y doctorado, se fundan universidades y se crean laboratorios dedicados a la investigación, como los de Cavendish, de Cambridge, de Chicago y el Museo de Zoología Comparada de Harvard y se crean instituos de investigación, como el Pasteur, Rockefeller, el instituto alemán de la Kaiser Wilhem Gesellschaft donde trabajaron Planck y Einstein.

En cuanto a los aspectos conceptuales el siglo XIX sobresalen las grandes revoluciones de la física: la de la relatividad, la de la mecánica cuántica y la teoría de los campos de Maxwell. Cambios importantes tienen lugar en la química y la biología que cuenta con el nuevo paradigma de la evolución de las especies. Es importante reseñar también la introducción de la probabilidad y estadística, que afecta a muchas disciplinas que fundamentan sus explicaciones, más en la probabilidad que en la causalidad.

En el siglo XX la profesionalización de la actividad del matemático constituye el factor decisivo en el desarrollo de las diferentes ramas de las matemáticas en particular y de las ciencias en general. De ello resultará directamente un aumento considerable del número de investigadores y se asistirá a una verdadera explosión del número de publicaciones científicas. En las universidades y escuelas superiores, se reserva a las matemáticas un lugar mucho más importante que en el pasado. Los estudiantes reciben así una enseñanza que les permite adquirir una base sólida sobre la que podrá progresar el edificio de las ciencias.

3.5. LAS MATEMÁTICAS Y LA CIENCIA EN LA ACTUALIDAD

Con el título *Las matemáticas y la ciencia en la actualidad* se hace referencia a algunas de las importantes vicisitudes que afectaron a las matemáticas a lo largo del siglo XX, de modo especial en el período que se inició con ocasión de la segunda guerra mundial, se desarrollaron en las décadas posteriores, llegando sus efectos ya a la segunda década del siglo XXI.

La producción del conocimiento científico, elaborado sobre unos principios matemáticos y configurado dentro de un modelo matemático, ha sido un asunto medular desde la revolución científico-matemática del s. XVII y XVIII. A partir de la Revolución Industrial adquiere mayor relevancia, si cabe, urgida a tomar el camino de la prisa: los problemas se acumulan en los centros de producción y la situación adquiere

Universidad Pontificia de Salamanca

perfiles de verdadera emergencia para los industriales y científicos. La naturaleza y sus enormes recursos atesorados, están disponibles para la estrategia científico-técnica de su explotación. En la actualidad nos hallamos en el centro del torbellino de la sociedad del conocimiento, que emerge en medio de la cascada de cambios convergentes a finales del siglo veinte, situados con preferencia en los países más desarrollados, que coinciden también con los más afectados actualmente por una crisis financiera profunda. En esta sociedad, el conocimiento ha asumido la condición de recurso estratégico para el desarrollo y, en consecuencia, nuevas situaciones se presentan con la urgencia acostumbrada. Desde el siglo XVIII *las matemáticas* configuraron el formato metodológico de las nuevas ciencias en orden a su reconocimiento científico y al disfrute de un estatuto de ciencia de validez universal. En la actualidad somos testigos de la producción cuantitativa de conocimientos científicos, sin parangón en las etapas históricas precedentes, que no solo se elabora siguiendo el formato metodológico de las matemáticas, sino que su misma presentación se hace siguiendo procedimientos estadísticos. La producción científica no se muestra en propuestas de validez universal sino que se cuantifica en la producción de documentos, de citas, de documentos y citas de aplicación tecnológica al servicio de la expansión económica. La producción científica así cuantificada, se organiza en rankings regionales y globales para mostrar los progresos de la ciencia, el producto elaborado de los científicos. Esta producción así cuantificada y organizada se relaciona estadísticamente con los recursos económicos cuantificados, presupuestados y diferenciados según las fuentes originarias de los mismos y según el número de documentos elaborados, para mostrar en términos cuantitativos, mediante los correspondientes gráficos, los distintos niveles de la productividad científica. En síntesis, en los comienzos del siglo XXI, quien se interese por conocer la ciencia, la producción científica, los científicos y el puesto en los rankings que ocupa, por ejemplo, la ciencia española, habrá de equiparse de conocimientos estadísticos de un elevado nivel para percibir, interpretar y valorar con cierta aproximación el estado actual de la ciencia española. Para comprobar la generalidad de este principio, basta con asomarse a la literatura producida en España, en torno al Plan Nacional de I+D, editada en gran parte por la *Fundación española para la ciencia y la tecnología* (FECYT), que resulta imprescindible para conocer la producción científica española, ofreciendo otro argumento irrebatible de la matematización de la ciencia en la actualidad.

Universidad Pontificia de Salamanca

En este apartado, se tratan tres asuntos de notable significación para la tesis: los cambios que acompañan el desarrollo de las matemáticas contemporáneas y las tendencias más significativas en las que se decanta este saber en la segunda mitad del siglo XX; el incremento de los conocimientos, argumentado desde las alegaciones de los expertos e indicadores del crecimiento científico y, por último, el progresivo rol mediático de los científicos.

3.5.1.- Las matemáticas modernas: cambios y tendencias

El desarrollo actual de *las matemáticas* y uno de los rasgos de la popularidad que alcanzó este saber durante la edad moderna y en la actualidad es la diversificación de los estudios matemáticos que aparecen en esta época: la geometría, el álgebra el análisis matemático, la probabilidad y la estadística, la investigación operativa, etc.. Los cambios en este contexto matemático se acompañan de la diversidad de tendencias que se observan en la evolución de las matemáticas y que los autores suelen sintetizar en la teoría de conjuntos, el logicismo, el formalismo y el constructivismo. *La modernización de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas tiene un innegable sabor tecnológico en sus comienzos*, que se vincula con la admiración y asombro, con que recibieron los norteamericanos la noticia del primer vuelo espacial, realizado por el astronauta soviético Gagarín en abril de 1961. Cuando los expertos e intelectuales americanos visitaron Rusia en la búsqueda de una explicación plausible para el salto tecnológico de tan significativa dimensión cualitativa, que les había dejado, a la vista de toda la humanidad, como más atrasados que la Unión Soviética, al menos en la tecnología espacial, llegaron a la conclusión de que "la superioridad de la URSS radicaba en la diferente y mejor enseñanza científico-matemática impartida en las escuelas soviéticas, desde los primeros cursos de la enseñanza elemental, cuyos orígenes se encontraban en los niveles de la enseñanza preescolar" (López, 1997:38). Poco después en 1963, en la Conferencia de Cambridge, Estados Unidos de América del Norte, se decide adoptar en la enseñanza de las matemáticas, a partir del 7º grado, la noción de grupo y la preparación matemática de los niños en torno a este concepto desde las primeras clases.

Estos cambios se establecieron en la sociedad americana, desde el convencimiento de que la educación matemática en la enseñanza primaria y secundaria de USA estaba retrasada con respecto a los requerimientos de la situación actual y necesitaba mejoras esenciales. Ésta opinión era compartida casi universalmente por la opinión pública norteamericana. Sin embargo, según algunos autores, debería

Universidad Pontificia de Salamanca

examinarse cuidadosamente la extendida opinión de que los temas explicados en las escuelas secundarias habían quedado obsoletos y se carecía de la unanimidad deseable para aceptar en todas sus partes la propuesta alternativa.

"*El álgebra elemental*, la geometría plana y de sólidos, la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal son aun fundamentales, como lo fueron hace cincuenta o cien años: *los futuros usuarios de las matemáticas deben aprender todos estos temas* si se están preparando para ser matemáticos, físicos, científicos sociales o ingenieros, y todos estos temas pueden ofrecer valores culturales a los estudiantes en general. El plan tradicional de enseñanza secundaria incluía en alguna medida todos estos temas, excepto el cálculo infinitesimal; quitar alguno de ellos sería desastroso" (Piaget, J. y otros, 1978: 331-332).

La razón de este desfase para los profesores americanos de la época no estaba tanto en los temas incluidos en los currículos de la época cuanto en la desconexión de las matemáticas con otros saberes, especialmente la física y con los asuntos de la vida cotidiana, además de una enseñanza excesivamente memorística, que convertía *la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en algo inútil* y aburrido.

A fin de subsanar esta desconexión interna y externa en los currículos de matemáticas Piaget y otros autores (1978: 332) advirtieron que en el nuevo plan curricular de las matemáticas modernas se deberían introducir conceptos generales unificadores. "Pensamos también que el uso juicioso de los conjuntos y del lenguaje y de los conceptos del álgebra abstracta pueden dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria. Sin embargo, el espíritu de la matemática moderna no se aprende repitiendo simplemente su terminología. De acuerdo con nuestros principios, querríamos que la introducción de los nuevos términos y conceptos fuera precedida de una suficiente preparación concreta y seguida de aplicaciones reales estimulantes y no de cuestiones superficiales y sin sentido: es preciso justificar la introducción de nuevos conceptos y mostrar sus aplicaciones si se quiere convencer a un chico inteligente de que estos conceptos merecen atención".

En Europa también se percibían semejantes preocupaciones por la actualización de los estudios de las matemáticas. Francia asume la iniciativa de la necesaria modernización de estos estudios, que luego servirá de modelo a otros países europeos y a España que se adhiere, mediante la Ley General de Educación de 1970 y decretos que le acompañan, a este movimiento renovador de la enseñanza de las matemáticas, enfatizando los conceptos de conjunto, de relación, de función y de grupo. Los

Universidad Pontificia de Salamanca

contenidos de las matemáticas modernas se inspiraron en sus comienzos en la teoría de conjuntos de Cantor y se convirtieron en la base de toda la docencia de las matemáticas tanto en la enseñanza primaria como secundaria, que llega hasta la LOE (2/2006).

a) Los cambios en las matemáticas

Los cambios en las matemáticas alcanzaron principalmente a la geometría, el álgebra, al análisis y a la probabilidad. Dos rasgos caracterizan esta nueva geometría: el *concepto de espacio* adquiere un sentido más amplio y a la vez más específico y "los métodos de la geometría se hacen más ricos y variados y suministran a su vez unos medios más completos para comprender el mundo que nos rodea, mundo del que fue abstraída la geometría en su forma original" (López, 1997:32). Como segundo rasgo, se han de mencionar los *progresos en la geometría euclídea*, distinguiendo distintos tipos de propiedades que podían estudiarse por separado y esta misma abstracción dentro de la geometría dio lugar a otras ramas específicas que, con el paso del tiempo y de la investigación matemática, se van convirtiendo en geometrías independientes, identificándose nuevos espacios con sus particulares geometrías (López, 1997:32). En el álgebra moderna se consideran magnitudes de naturaleza más general y sobre éstas el álgebra estudia operaciones, que formalmente son semejantes a las operaciones ordinarias de la aritmética: suma, resta, multiplicación y división. Los nuevos conceptos del álgebra encuentran aplicaciones varias en la física, en el análisis y en la geometría.

En cuanto al análisis se han originado profundos cambios en el desarrollo y precisión de los "conceptos clásicos de variable, función, límite, integral y derivada, surgiendo una nueva rama del análisis que es la teoría de funciones de variable real. Deben mencionarse asimismo la teoría de las funciones de variable compleja, la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales de aplicación en la mecánica, la física y la tecnología" (López, 1997:33). Sobre estos cambios, emerge una nueva sección de las matemáticas, denominada *análisis funcional*, cuyo papel es importante en las matemáticas modernas, en cuya creación participaron muchos matemáticos, destacando Hilbert. El contenido de esta nueva rama de las matemáticas se podría resumir, en un lenguaje asequible, en los términos siguientes: "mientras en el análisis clásico la variable es una magnitud o número, en el análisis funcional se considera como variable la función misma. Las propiedades de una función particular se determinan, no como tales propiedades, sino en relación con otras funciones. Lo que se estudia no es una función aislada sino toda una colección de funciones caracterizadas por una u otra

Universidad Pontificia de Salamanca

propiedad, por ejemplo, la colección de todas las funciones continuas" (López, 1997: 33).

La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII asociada a los trabajos de Christiaan Huygens (1629-1665), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre Fermat (1601-1665) y Jacob Bernoulli (1654-1705). Durante el siglo XVIII y XIX, debido a la popularidad de los juegos de azar, el cálculo de probabilidades tuvo un notable desarrollo destacando Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Pierre-Simon Laplace (1749-1827) con su "Théorie analytique des probabilités" en el que expone un análisis matemático sobre los juegos de azar. Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de las matemáticas fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemáticas. A principios del siglo XX el matemático ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987) la definió de forma axiomática y estableció las bases para la moderna teoría de la probabilidad, que alcanza hasta la actualidad.

b) Tendencias en las matemáticas modernas

Como ya se ha mencionado con anterioridad cuatro son las tendencias mas relevantes que canalizan el currículo de las *matemáticas para su enseñanza* en los últimos cuarenta años.

b.1) La moderna teoría de conjuntos se debe con prioridad temporal al matemático alemán Georg Cantor (1845 – 1918). La idea de conjunto es tan básica que surge en casi todas partes dentro de las matemáticas y de sus aplicaciones. Cantor define el conjunto como "la agrupación en un todo de objetivos bien diferenciados de nuestra intuición o de nuestra mente" (Bourbaki, 1976: 44), es decir, el conjunto se refiere a cualquier colección, considerada como un todo, de objetos bien definidos de nuestro pensamiento o de nuestra intuición. La idea de conjunto es tan básica que propiamente no admite definición, en el sentido de que no puede definirse a partir de otros entes matemáticos más básicos. Implica las ideas de elementos y de pertenencia y de relación u operaciones entre conjuntos. El desarrollo de esta "teoría y el intento de utilizarla para fundamentar la matemática han revelado muchas dificultades lógicas, que no son meramente aparentes a partir de la idea intuitiva de conjunto" (Hortalá y otros, 1998: 73). Desde la evidencia de estas dificultades, esta teoría parecía avocada a su

Universidad Pontificia de Salamanca

desaparición hasta que encontró en Hilbert al admirador y gran defensor de sus trabajos como introductorios a un paraíso matemático que no debía perderse.

b.2) El logicismo es una corriente de pensamiento matemático que pretende hallar en la lógica los materiales para las demostraciones matemáticas, teniendo en cuenta que la lógica estudia las leyes de la inferencia en los razonamientos. Para descubrir estas leyes "la lógica necesita servirse de lenguajes artificiales llamados lenguajes formales, con el fin de evitar las ambigüedades e imprecisiones de las lenguas naturales y poner de manifiesto más claramente los razonamientos lógicamente válidos" (Hortalá y otros, 1998:327). A finales del siglo XIX se produce una aproximación de la lógica a las matemáticas al servirse de los métodos matemáticos (Boole, G.,1815 – 1864) y pretender servir de fundamento a las matemáticas (G. Frege, 1848-1925) Esta forma de la lógica tiene un precursor importante en la historia de la filosofía, Leibnitz, y su desarrollo actual fue muy intenso durante la primera mitad del siglo XX, especialmente entre los años treinta y sesenta. Se vincula asimismo con la obra *Principia Matemática* de Bertrand Russell escrita en colaboración con Whitehead. Los extensos trabajos prácticos permitió resolver importantes problemas de fundamentación de las matemáticas, clarificar las relaciones entre la lógica y las matemáticas, avanzar en la formulación rigurosa de la lógica que ha permitido utilizarla como herramienta para las matemáticas y, más recientemente para la informática (Hortalá y otros, 1998: 327-437).

b.3) El formalismo. Hilbert David (1862-1943) matemático alemán, es considerado como un iniciador de la matemática pura del siglo XX. Contribuyó sustancialmente a establecer los fundamentos del enfoque formalista predominante en este siglo hasta el punto que, para algunos autores, es el primer formalista importante, "que intentó colocar el conjunto de las matemáticas sobre una firme base lógica tratándolo efectivamente como un juego sin significado que se juega con símbolos. (…) Filosóficamente el formalismo murió cuando Kart Gödel demostró, para irritación inicial de Hilbert, que ninguna teoría formal puede abarcar la totalidad de la aritmética y ser lógicamente consistente. Siempre habrá enunciados matemáticos que permanecen fuera del juego de Hilbert: no son ni demostrables ni refutables. Cualquier enunciado semejante puede añadirse a los axiomas de la aritmética sin crear ninguna incongruencia. La negación de un enunciado semejante tiene la misma característica"(Stewart, 2006: 30-31). Gödel demostró, mediante argumentos matemáticos sólidos, que la aritmética formalizada es esencialmente incompleta y el

Universidad Pontificia de Salamanca

teorema de consistencia o de contradicción queda reducido a lo siguiente: si el sistema de la aritmética formal es consistente entonces es imposible dar una demostración de ello, con los reflejos formales del propio sistema. A pesar de esta consistente crítica que del formalismo hizo Gödel, éste sigue presente en la base de toda matemática actual, en la que se formaron los matemáticos del siglo XX y que se enseña actualmente en las escuelas (López, 1997: 37). Según Garbayo una teoría matemática formalizada consta de tres elementos:1) Una colección de signos o lenguaje y con la yuxtaposición de un número finito de estos se construyen cadenas de símbolos. 2) Unas reglas llamadas de formación que muestran si las cadenas de símbolos son admisibles o no. Las reglas son combinatorias de signos, sin atender a significados que en todo caso no tienen. 3) Unas reglas denominadas de inferencia o deducción permiten escribir cadenas admisibles o construirlas a partir de éstas (Garbayo, 1978: 203).

b.4) El constructivismo matemático fue iniciado por Brouwer hacia 1910 y se denominó con el término intuicionismo, aunque fue perdiendo vigencia frente a la terminología más generalizada de constructivismo. Lo mas significativo de este planteamiento podría resumirse en las siguientes propuestas:

1ª) El *aprendizaje de las matemáticas* ha de entenderse como un proceso de *construcción individual* que se produce mediante la interacción individual y grupal de una tríada de constructos que incluyen el contenido matemático, el profesorado de matemáticas y el alumnado de matemáticas (Bishop, 2000: 36-37). *El contenido matemático* se refiere tanto al espacio de conocimiento como al entorno en que los profesores y alumnos intercambian sus ideas. Comprende asimismo el currículo intencional de las matemáticas que relaciona la historia y la cultura de las matemáticas con temas actuales ligados a la tecnología de la información y las matemáticas. *El constructo profesores de matemáticas* se refiere a la didáctica, tanto en la formación inicial como continua de los profesores, cuanto al contexto social en que estos operan y ejercen su rol. *El grupo alumnos de matemáticas* se refiere tanto al alumnado como al aprendizaje y, teniendo en cuenta que el aprendizaje se ha trasladado a todos los alumnos, ha aparecido una especial preocupación por los alumnos de riesgo. Los tres grupos se interrelacionan y se constituyen en el foco de investigación de la educación matemática. “Los tres son importantes, los tres interaccionan y todos ellos existen y funcionan dentro de un contexto lingüístico, cultural, histórico y social concreto. No obstante, lo que puede ser apropiado en el contexto de un país puede que no lo sea en otro” (Bishop, 2000: 37).

Universidad Pontificia de Salamanca

2ª) La construcción individual del *aprendizaje de las matemáticas* ha de respetar los diversos ritmos y maneras de construir los diferentes contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos y actitudes) y las diferencias en las maneras de aprender de los propios alumnos, teniendo en cuenta que la interiorización, que se produce en el proceso de aprendizaje, está condicionada por las nociones previas que posee el alumno y por la calidad del proceso de aprendizaje, de tal modo que es imprescindible la "comprensión y la actividad mental en el proceso matemático" (Gregorio, 2002: 114).

El constructivismo implica que determinadas actitudes hacia las matemáticas, tanto por parte de los profesores, de los alumnos como del centro escolar constituyen un elemento básico para el aprendizaje matemático. En la búsqueda de esta favorable actitud ante las matemáticas se ha de avanzar en la valoración positiva de las matemáticas y para ello fomentar la reflexión y discusión sobre las matemáticas, en cuanto referentes de la autonomía personal y funcional, para la correcta integración social en el medio en que quiere vivir. Por tanto se ha de considerar "el aprendizaje cooperativo como el centro de la actividad y contexto de aprendizaje matemático" (Gregorio, 2002: 115). Desde este punto de vista se ha de producir un cambio radical en la concepción del papel de profesor en el aula que deja de ser instructor que transmite al alumno conocimientos que este no posee para pasar a ocupar el rol de mediador en el proceso de cooperación, en que se inserta el alumno con el que ha de dialogar para facilitar su aprendizaje.

3ª) Para la profesora Gavilán[74] según las investigaciones llevadas a cabo por ella misma y de las consultas efectuadas a las de otros autores consultados, concluye en la conveniencia de emplear métodos cooperativos, basándose en tres tipos de argumentaciones: "En primer lugar el aprendizaje de las matemáticas se mejora cuando los estudiantes se encuentran en un nivel de madurez apropiado para los contenidos que van a aprender y tienen experiencias que les permiten crear y recrear, construir conceptos y relaciones que establecen entre ellos, teniendo la oportunidad de interactuar con otros (…) En segundo lugar, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas el intercambio intelectual desempeña un importante papel y los grupos cooperativos son un espacio ideal para que se produzca. Las oportunidades de verbalizar razonamientos

[74] La profesora Paloma Gavilán Bouzas es Catedrática de Matemáticas de Instituto de Educación Secundaria y Doctora en Ciencias de la educación, con un brillante prestigio y reconocido bagaje de experiencias en la formación del profesorado de matemáticas en esta metodología.

Universidad Pontificia de Salamanca

posibilitan que puedan explicar y clarificar lo que piensan. (…) En tercer lugar, el aprendizaje cooperativo contribuye a que los estudiantes aumenten la confianza en sus habilidades y adquieran autodisciplina; promueve actitudes más favorables hacia la asignatura y hace que le guste más la materia y sientan menos rechazo, lo que incrementa la motivación para aprender, disminuyendo los problemas de de disciplina" (Gavilán, 2004: 44).

4ª) Según el profesor Bermejo (2010: 241) "resulta prioritario que los alumnos desarrollen ideas personales sobre las matemáticas y utilicen sus propios métodos para resolver los problemas planteados". Esta perspectiva coincide básicamente son otro interesante aspecto al que Alan Bishop (2000:40-45) ha dedicado muchas horas en su diario quehacer investigador y publicado muchas páginas. Me refiero al concepto de *alfabetización numérica*, que elabora para este procedimiento educativo. Parte del supuesto de que es imposible una verdadera educación matemática si no se tienen en cuenta las prenociones matemáticas que los alumnos han asumido de la cultura de su medio social de pertenencia, que constituyen para Bishop verdaderas prácticas matemáticas, auque no se les atribuya esa específica denominación, ni siquiera se reconozcan sus dimensiones matemáticas. Estas prenociones, sin embargo, constituyen el marco en el que insertar el currículo matemático objeto de aprendizaje. A fin de facilitar este ensamblaje al profesor, el autor categoriza esas prácticas matemáticas, obviamente no reconocidas, en seis categorías: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar, que pueden identificarse fácilmente en todas las sociedades, alcanzando diferentes niveles, pero juntas forman una base para la cobertura del campo de los conocimientos matemáticos y sirven como punto de partida para la alfabetización matemática. Dentro de las matemáticas, explicar significa demostrar teoremas, sin embargo es evidente que "la explicación matemática es mucho más importante para la alfabetización numérica, en el sentido de que es capaz de explicar los fenómenos que ocurren dentro de la sociedad. Las matemáticas ponen de manifiesto las estructuras y los conceptos subyacentes de muchos aspectos científicos y tecnológicos de la sociedad. Por ello la alfabetización científica y tecnológica requiere de ideas matemáticas que pongan de manifiesto las estructuras de conocimiento existentes tras los aspectos científicos y tecnológicos de las sociedades industriales modernas" (Bishop, 2000: 43).

Universidad Pontificia de Salamanca

3.5.2.- La producción científico - matemática

La expresión *producción científico-matemática* alude de manera prioritaria a la innovación, incremento y progresiva aceleración en la producción de los conocimientos matemáticos y científicos y, de manera indirecta, al relevante dinamismo social de la ciencia. El papel destacado de la ciencia en general y de las matemáticas de manera especial en la comprensión y búsqueda de soluciones a las dificultades teóricas y prácticas que importaban las actividades productivas estuvo presente desde los comienzos de la edad moderna en sus grandes pensadores, en las sesiones abiertas y públicas de las academias donde empresarios y científicos intercambiaban opiniones sobre los problemas comunes. Se intensifica la demanda científico-matemática con la Revolución Industrial, en que se multiplican las dificultades, crecen las peticiones de solución desde el sector industrial a los científicos y se consolidan ampliándose a otras áreas los procedimientos de producción científico-matemática. En el siglo XX se muestra como más evidente la relevancia del papel social de las matemáticas y la ciencia a medida que nos adentramos en el siglo XXI: las investigaciones sobre la exploración espacial, la necesidad de progresar en las comunicaciones y en los instrumentos de la comunicación, las exploraciones del subsuelo terrestre y marítimo en la búsqueda de fuentes de energía y la investigación en las áreas de la salud y de la producción de alimentos ponen de manifiesto el relevante papel de las matemáticas y de la ciencia. Como testimonios del dinamismo social de la ciencia y de la producción acelerada de los conocimientos se señalan las alegaciones de destacados expertos, las publicaciones científicas, el crecimiento o expansión de la enseñanza universitaria y el importantísimo rol mediático que ejercen los científicos en la sociedad actual.

a) Testimonio de autores destacados

El profesor de economía de la Universidad de Harvard y ex Decano de la Facultad de Artes y Ciencias de la misma universidad, Henry Rosovsky, escribía que “el volumen real de conocimientos e información disponibles crece a un ritmo sin precedentes históricos, y es muy probable que continúe haciéndolo. En otras palabras, vivimos inmersos en una revolución del conocimiento” (Rosovsky,1996: 8). Al final de la década de los noventa del siglo pasado (1999) se estimaba que el caudal *de conocimientos se duplicaba cada 15 años*. Más allá de las probabilidades y en el ámbito de las certezas se puede afirmar que el ritmo de producción de conocimientos científicos

Universidad Pontificia de Salamanca

cobra una energía desconocida en épocas precedentes. Las actuales estimaciones apuntan hacia la aceleración del ritmo de la producción científica. En la obra *La democracia del conocimiento*, se plantea el problema del exceso de información dentro de la complejidad propia del asunto y ofrece el dato del acelerado crecimiento de conocimientos: “La especialización y fragmentación del conocimiento ha producido un incremento de información que va acompañado de un avance muy modesto en lo que se refiere a nuestra comprensión del mundo. El saber de la humanidad se duplica cada cinco años. En relación con el saber disponible, cada vez somos menos sabios” (Daniel Innerarity, 2011:19).

El sociólogo Daniel Bell toma, como indicadores fiables del progresivo y extraordinario aumento de la producción científica en la actualidad, tres áreas de indiscutible relevancia: en las sociedades más desarrolladas los fondos bibliográficos de las bibliotecas se duplican cada vez con mayor rapidez; proliferan nuevos campos de investigación y de conocimiento y la incidencia de este desarrollo, obvia en muchas áreas de la vida social, tiene una presencia indudable en el ámbito de la economía, donde se incrementan las empresas de base científica y la organización de la producción sigue pautas nuevas y propias de la investigación científica. Para el autor, la sociedad postindustrial "se organiza en torno al conocimiento, para lograr el control social y la dirección de la innovación y el cambio y esto, a su vez, da lugar a nuevas relaciones sociales y nuevas estructuras, que tienen que ser dirigidas políticamente" (Bell, 1996:7).

Lamo de Espinosa defiende avances significativos en la organización industrial de la producción del conocimiento y ya en la última década del siglo XX escribía lo siguiente: “estamos pues, en las fases iniciales de la gran explosión de los conocimientos. Hasta ahora se ha investigado artesanalmente; hoy se investiga industrialmente; la más importante industria en USA y Japón es la de los conocimientos, la del I+D” (Lamo, 1994:39).

b) Las publicaciones científicas

Las publicaciones científicas están adquiriendo en las primeras décadas del siglo XXI una importancia decisiva en la creación de la ciencia y en el avance científico, al modo de los boletines informativos que crearon las academias en sus comienzos y mediante sus folletos comunicaban a los científicos de otros países las teorías y aportaciones científicas de los iniciadores de la nueva ciencia como la teoría del calor de Newton, la segunda ley de Kepler o los resultados obtenidos por el artesanal telescopio

Universidad Pontificia de Salamanca

de Galileo. En la actualidad, mediante las publicaciones se producen los obligados contactos entre los científicos y la progresiva inserción de los que se inician en la ciencia, con los miembros de la denominada comunidad científica, comunicando mediante la publicación de lo investigado, lo que se estima útil para el conocimiento de los científicos y la publicación resulta imprescindible para el reconocimiento de la calidad científica de las investigaciones. Escribe el profesor Fernández a este propósito lo siguiente: "Cuando el científico consigue someter sus hipótesis a contrastación, sea esta positiva o negativa en cuanto a su falsación, obtiene un resultado o un conjunto de ellos. En ese momento si quiere que éste tenga un reconocimiento debe apresurarse para publicarlo. Lo que se hace público es lo único que tiene valor en ciencia. Lo que no se publica es como si no existiera. (…) Pero al publicar se establece contacto, primero con los garantes de que su actividad está bien hecha y es formalmente correcta y, una vez salidos a la luz pública sus resultados, se somete al juicio, a veces despiadado, de los restantes miembros de la comunidad científica" (Fernandez, 2010:30-31).

La conciencia de estos cometidos que cumplen las publicaciones científicas, es responsable en gran parte de la acumulación de manuscritos que esperan el informe favorable de los muchos expertos, consultores externos, que asesoran a las revistas sobre la calidad de los manuscritos enviados y que tan difícil hacen la publicación a los que inician el camino. Desde estos supuestos, se comprende que la multiplicación de las publicaciones científicas suele también aducirse como criterio fiable de producción científica. La primera publicación científica se editó en 1665 y en 1780 existían cien publicaciones de este tipo; en 1850, se editaban mil publicaciones científicas; en 1900, diez mil y en la actualidad parece haber cierta coincidencia de que son más cien mil las publicaciones científicas (Rosovsky, 1996: 11).

c) La expansión de las enseñanzas universitarias

La segunda parte del siglo XX ha sido el período de mayor expansión de la educación superior: de 13 millones de universitarios en 1960 se ha llegado a los 82 millones en 1995. En 2005 se calculaba en 102 millones el número de estudiantes cursando estudios universitarios. En 2010 el Director General de la UNESCO (2010), Koichiro Matsuura, calificó de 'auténtica revolución' el avance que ha logrado la educación superior en todo el mundo: hay unos 153 millones de estudiantes matriculados en la enseñanza superior, es decir, 51 millones más que hace nueve años y

Universidad Pontificia de Salamanca

cinco veces más que hace cuarenta [75]. Desde 2003, a nivel mundial, el número de mujeres matriculadas en la enseñanza superior sobrepasa al de los hombres, si bien en algunas regiones como Asia Meridional, Occidental y África Subsahariana predominan todavía los hombres entre los matriculados: por cada 100 hombres matriculados hay 66 mujeres en la misma condición. En la inauguración de la Conferencia Mundial sobre la Educación Superior, París 2010, y a la que asistieron más de mil especialistas procedentes de 148 países, el Director ofreció los mencionados datos.

Otros testimonios[76], aunque parciales, pueden ser indicativos del dinamismo que afecta a la situación: "En julio de 2005 la Sociedad Americana de Matemáticas (American Mathematical Society) publicó los resultados de su Annual Survey of the Mathematical Sciences de 2004. Desde principios de los años noventa, las mujeres han obtenido en torno al 45 por ciento de todos los grados en matemáticas. Las mujeres obtuvieron, casi un tercio del total de los doctorados de Estados Unidos en ciencias matemáticas, en el año académico 2003 – 2004, y una cuarta parte de los concedidos en los cuarenta y ocho principales departamentos de matemáticas. En total, 333 mujeres se doctoraron en matemáticas en ese año, el mayor número nunca registrado" (Stewart, 2006: 141).

En cuanto a la elección de disciplinas, las ciencias sociales, economía y derecho siguen siendo las favoritas de los alumnos. Le siguen las ciencias de la educación, la ingeniería, ciencias (biología, física, matemáticas y estadística). En quinto lugar figuran las carreras de salud y bienestar social y en último reglón la agricultura. Otra tendencia muy generalizada, en cuanto a la movilidad estudiantil: los Estados Unidos sigue siendo el destino favorito. Cada año el país del norte recibe 600.000 alumnos extranjeros, 21% del total mundial. Australia, Canadá, Francia, Italia, Japón y Sudáfrica aparecen como

[75] El director de la UNESCO destacó el impacto que ha tenido el sector privado en este crecimiento, al acoger a más del 30% de los estudiantes, así como el rol de las tecnologías de la información y la comunicación. Se prevé que la demanda de enseñanza superior seguirá aumentando. El número de estudiantes en este nivel de enseñanza pasará a más de 262 millones en 2025.

[76] En un área muy limitada, como la República Dominicana, de 3.600 estudiantes matriculados en la Educación Superior, en 1961, se ha pasado a 360.000 en 2007. En ún área más extensa como América Latina de una matrícula, en Enseñanza Superior, cercana a los 270.000 alumnos en 1950, se ha pasado a una cifra superior a los 10 millones en el año 2007. (Mejía, 2009:69-70)

Universidad Pontificia de Salamanca

alternativas fuertes a la hora de migrar por razones de estudio. En 2007, dos de cada cien estudiantes fueron a cursar estudios fuera de sus países de origen. Los jóvenes que cursan estudios en países extranjeros suman actualmente más de 2,8 millones y se estima que alcanzarán la cifra de 8 millones de aquí a 2020. El Secretario General de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), Ángel Gurría, llamó la atención sobre un problema que crece a la par con el incremento en la matrícula y es el desempleo profesional de los nuevos titulados. Según Gurría, "los que tienen el privilegio de estudiar están sufriendo una frustración enorme porque no pueden conseguir empleo en consonancia con su preparación" (UNESCO, 2012).

3.5.3.-Los roles de los científicos en la actualidad

Del 80 al 90 por cien de todos los científicos que han existido a lo largo de la historia están vivos en la actualidad. Los científicos, para la producción de conocimientos, en la actualidad se agrupan en equipos, que manifiestan una gran variedad de tamaño, de organización, de asentamiento y de recursos disponibles. Se investiga en equipo o grupo. Han pasado los tiempos del investigador solitario. La mayor parte de la investigación científica se realiza en grandes equipos, cada vez más numerosos, diversificados y complejos. Ya no están localizados en un espacio reducido y concreto. Los equipos se hallan diseminados dentro de un país o ubicados en diferentes países. Un buen ejemplo al respecto lo constituyen los equipos que investigan el genoma humano, que están ubicados en las diferentes regiones del planeta, aunque siempre bien comunicados entre ellos.

Este tipo de organización para la investigación se origina en la segunda guerra mundial, cuando fueron necesarias grandes inversiones en recursos materiales y humanos, con el fin de producir el armamento pertinente y de mayor contundencia que el empleado por el enemigo. Los equipos eran muy numerosos, con la finalidad de vencer las múltiples dificultades, en el menor tiempo posible. Los equipos investigadores alcanzan cotas altas de eficiencia investigadora y se conectan, mediante redes de comunicación e intercambio informativo, con otros equipos de científicos.

En la actualidad los científicos han logrado un reconocimiento social indudable, lo que adquiere varios significados: contribuyen a obtener recursos progresivamente crecientes para la investigación; estimulan las vocaciones científicas; ayudan a disponer favorablemente a la opinión pública respecto de la ciencia, los avances científicos y los procedimientos de la ciencia; afianzan el ejercicio de la razón en los escenarios de la

Universidad Pontificia de Salamanca

vida cotidiana de los seres humanos favoreciendo actuaciones ejemplares razonables y racionales. Sin embargo también esta complejidad en los roles del científico trae anejas dificultades puesto que los científicos más conocidos, casi siempre coinciden con los más eficientes, han de invertir gran parte de su tiempo y esfuerzo individual, no tanto en investigar, cuanto en asuntos de organización de los equipos: preparar informes, evaluaciones de trabajos, preparación de subsidios, asistencias a comités, coloquios en los Medios de Comunicación, mesas redondas, conferencias, viajes, etc.. A pesar de las consabidas molestias que estas circunstancias puedan comportar, son necesarias.

En lo que llevamos del siglo XXI, se ha potenciado enormemente la comunicación y los seres humanos de los países desarrollados y obviamente los científicos disponen de nuevas y potentes formas de comunicación que les hacen posible y frecuente la comunicación entre ellos y con otros equipos de investigación favoreciendo, en todo caso, el espectacular avance científico de la actualidad: fotocopias, fax, e-mail, móviles, videoconferencias, Internet, etc. que facilitan la tarea de actualización de los científicos, que conocen, en todo momento, qué están haciendo sus colegas, en donde y quienes están haciendo tal o cual investigación y cuales son los problemas a que se están enfrentando. Esta eficiente red de comunicaciones entre los investigadores, que trabajan en temas semejantes o afines, se le denomina a veces como la *Universidad invisible*. Todo ello requiere que los científicos se muestran con relativa frecuencia en los Medios de Comunicación de masas, no tanto por afán de vedetismo, sino mas bien con el propósito de dar a conocer las aplicaciones de los avances científicos, sensibilizar a los ciudadanos frente a la ciencia, mantener atenta a la opinión pública y afianzar la valoración social de la ciencia y de los conocimientos (Méndez, 2009: 179 – 182).

3.5.4.- A modo de síntesis

En Europa surgen serias preocupaciones por la actualización de los estudios de las matemáticas en la segunda mitad del siglo XX y el Estado francés asume la iniciativa de la necesaria modernización de estos estudios, que luego servirá de modelo a otros países europeos y a España que se adhiere a la nueva política educativa, mediante la Ley General de Educación de 1970 y decretos que le acompañan. En el área de álgebra se consideran magnitudes de naturaleza más general y sobre estas se realizan estudios semejantes a las operaciones ordinarias de la aritmética. En el análisis se producen cambios profundos en el desarrollo y precisión de los conceptos de variable,

Universidad Pontificia de Salamanca

función, límite, integral y derivada, surgiendo una nueva teoría del análisis que es la teoría de las funciones de variable real. En cuanto a las tendencias más relevantes que canalizan el currículo de las matemáticas en los últimos cuarenta años son la moderna teoría de conjuntos (Cantor), el logicismo (Boole), el formalismo (Hilbert) y el constructivismo matemático (Brouwer).

Con la expresión la producción científico-matemática se alude de manera prioritaria a la innovación, incremento y progresiva aceleración en la producción de los conocimientos matemáticos y científicos y, de manera indirecta, al relevante dinamismo social de la ciencia. La argumentación a favor de esta tesis viene del testimonio de expertos en estas materias que llegan a afirmar que el 90 % de los científicos que han existido en la historia de la humanidad viven en la actualidad. La multiplicación de las bibliotecas y de sus dotaciones, de las publicaciones científicas y el extraordinario crecimiento de estudiantes matriculados en la Educación Superior constituyen otros tantos argumentos razonables.

El indudable reconocimiento social de los científicos en la sociedad actual responde, como ya se ha indicado con anterioridad, a una cúmulo de acontecimientos vinculados directamente con los progresos de la investigación científica. Es asimismo destacable el dinámico rol social y mediático que actualmente desempeñan los científicos, no tanto por voluntario afán de vedetismo cuanto para suscitar vocaciones científicas y recabar apoyos y recursos sociales, económicos y políticos para la producción científica.

3.6. LA DEMOCRATIZACIÓN DE LA CIENCIA

Hasta tiempos muy recientes, menos de un siglo, las ciencias se han formado al margen de la sociedad. Constituían un espacio propio, limitado y en el que imperaban unas reglas de obligado cumplimiento, una jerarquía de status científico que ejercía y mantenía el espacio propio, se disponía de un específico lenguaje y constituían un grupo que se denominaba con términos como científicos, expertos u otros semejantes y que eran distintos y diferentes de los otros miembros de la sociedad que no eran científicos. Entre ellos había una sólida distancia y distinción. A lo largo del último tercio del siglo XX se produjo una pluralidad de cambios sociales, económicos, políticos, culturales y de todo orden, que afectaron a la realidad social y cultural y también a la ciencia. Progresivamente suenan voces que reprochan a los científicos algunos de sus inventos

Universidad Pontificia de Salamanca

por los efectos no pretendidos pero que se producen y causan daños inmediatos a la naturaleza, deteriorando la calidad de vida de los ciudadanos. En otros casos, se propaga la imagen de científicos integrados en los complejos tecnológicos tratando de convencer a la sociedad civil de la seguridad de sus proyectos e inventos, mientras la realidad deja al descubierto que la seguridad total que los científicos se empeñaron en vender no existía o estaba muy distante de niveles aceptables para el ser humano. Desde la constatación de esta contundente realidad, aumentan los grupos en la sociedad civil demandando cambios en los espacios de la ciencia y en el estatuto social de los científicos.

Para algunos autores la respuesta a esta demanda de cambio apuntaría que "ha tenido lugar un complejo proceso en virtud del cual se ha producido una 'desdiferenciación' de la ciencia y una cierta reintegración de la ciencia en la sociedad, fundamentalmente en el seno de las responsabilidades sociales y políticas que le corresponden. (…) El incremento de la relevancia social de la ciencia ha venido acompañado por una creciente intervención de la sociedad en la ciencia, algo que exige revisar la idea tradicional de la autorregulación. La ciencia es una empresa social, que influye en su contexto social, pero que también depende de él. Como organización, necesita que se le asignen recursos, en tanto que institución social requiere legitimación"(Innerarity, 2011:121). Desde que el Estado, en nombre de la sociedad asume el papel de mecenas de la ciencia, muchas de las investigaciones obtienen su financiación mediante los recursos públicos. Ahora bien, los ciudadanos como propietarios de esos recursos tienen derecho a exigir y de hecho exigen que haya control sobre el uso que de los mismos están haciendo los científicos. Esta circunstancia significa que la sociedad ha de arbitrar procedimientos públicos de control sobre un grupo de la sociedad, los investigadores, que recibe financiación para una actividad cuyos éxitos, muchas veces son invisibles, pero cuya cualidad no justifica restringir su valoración a la que ellos mismos determinen. La ciencia, queriendo juzgarse ella a si misma, se aproximaría al mito de la autorregulación, pretendido en otros tiempos por el sistema económico, que no deja de ser un escándalo para la sociedad democrática. Todo esto anuncia el final de un cierto *establishment científico* y el avance en lo que suele denominarse con cierto eufemismo la democratización de la ciencia. Hacia un horizonte de control de la ciencia, han colaborado de manera muy positiva los debates sobre los riesgos ecológicos, sociales y humanos (Beck, 2006) y, en tiempos más recientes se han agregado también los debates sobre la progresiva extensión de las incertidumbres que

Universidad Pontificia de Salamanca

envuelven al hombre actual (Bauman, 2007). Apasionados fueron los debates en foros mediáticos y académicos y violentas las manifestaciones callejeras sobre algunas consecuencias de la globalización, cuya legitimidad ha defendido el Foro Internacional sobre Globalización (2003).

Corresponde prestar atención a tres asuntos muy relacionados: circunstancias en torno al paso de la investigación básica a la aplicada y a los retos tecnológicos de la producción; el segundo asunto se centra en las argumentaciones de justificación y crítica respecto de la seguridad de algunos productos de la ciencia. También se harán algunas consideraciones sobre la participación ciudadana en la política científica.

3.6.1.- De la investigación básica a la ciencia aplicada

En la actualidad la investigación básica de la ciencia se transforma en ciencia aplicada y ésta en tecnología con progresiva urgencia, causando una inmediata incidencia de la ciencia en la sociedad. Este proceso o paso desde la investigación básica a la aplicación tecnológica implica, con harta frecuencia, la reducción de los plazos adecuados para la verificación de conclusiones. Analizaremos, a continuación, el hecho de la consolidación de esta tendencia, argumentos positivos que se esgrimen a favor y se muestran las pertinentes argumentaciones críticas del fenómeno. El problema hoy tiende a complicarse pues la tendencia a la prisa en la investigación parece insertarse en la misma naturaleza de los procesos de la investigación actual, tendiendo a afianzarse.

a) La tendencia a justificarse

El asunto presenta, además de las exigencias actuales de la prisa, ciertos aspectos que complican la situación, que parecen avalar la tendencia y por ello sus peligrosas consecuencias. "La separación entre la investigación básica y la aplicación técnica ya no es válida. Hoy en día el saber es crecientemente producido en contextos de aplicación. La distancia entre nuestros conocimientos teóricos y sus posibles aplicaciones prácticas disminuye, y aumentan las consecuencias inciertas de las posibilidades que se nos plantean. Cuanto más breve es el intervalo de tiempo entre la innovación teórica y su aplicación técnica – y en algunos ámbitos esta distancia tiende a cero – tanto más estrecha es la relación de la investigación con la praxis, de modo que se ve obligada a anticipar las condiciones de aplicación. La ciencia está bajo una mayor presión de justificación debido a que la determinación de los riesgos sólo puede

Universidad Pontificia de Salamanca

ser probada en la práctica (…) Nuestras inquietudes proceden de la complicación que supone el hecho de que el laboratorio actual sea todo el planeta" (Innerarity, 2011:117).

En el texto precedente se constata la tendencia y su proyección a afianzarse pues apenas parece posible que haya plazos o espacio para la verificación de la teoría. Los plazos tienden a reducirse a cero y la investigación básica de la ciencia se transforma en ciencia aplicada y ésta en tecnología con mucha prisa y mayor urgencia, de modo que la incidencia de la ciencia en la sociedad es cada vez más inmediata. Desde la experiencia se suele ejemplificar la tendencia, mostrando como en los dos últimos dos siglos disminuye el tiempo transcurrido desde que algo se inventa hasta que llega a su uso al público: el teléfono necesitó 56 años desde su invención (1820) hasta su desarrollo práctico (1876); la radio sólo 35 años; el radar 15 años; la televisión 12 años; el transistor sólo 5 años (Habsburgo, O., 1986:76). No tenemos datos sobre cuanto tiempo transcurrió en probar la última vacuna para la gripe A del año 2010 o cuántos años necesitó el teléfono móvil, si es que necesitó alguno, para expandirse con fuerza incontenible por todos los rincones del planeta.

b) Interpretación plausible de la tendencia

Se está configurando un poderoso sistema formado por la ciencia, la tecnología y la industria, afianzado metodológicamente sobre el incuestionable soporte de los procedimientos matemáticos, que encumbra a la ciencia a una posición muy relevante en el sistema productivo. En principio, esta relevancia de la ciencia es positiva, por cuanto asegura que las fronteras de lo desconocido se alejan y las sombras de la ignorancia se disipan ofreciendo mayor seguridad al ser humano. Si lo valoramos con los criterios, que se aplican en el sistema clásico de la producción industrial, cuanto más pronto el producto esté al alcance del consumidor, más rentabilidad ofrece el producto, más rápida es la respuesta a las necesidades y siempre una victoria sobre el competidor. Todo ello significa, de una parte, "la emergencia de un verdadero sistema de ciencia-tecnología-industria cada vez más poderoso y más autónomo frente a otros sistemas (el político, el cultural, incluso el económico). Pero, de otra, supone una considerable inversión en recursos humanos para alimentar el sistema. Con ello, la ciencia se ha transformado en el principal factor de producción; lo importante no es ya el trabajo ni el capital, ni siquiera las materias primas (incluida la energía), sino los conocimientos"

Universidad Pontificia de Salamanca

(Lamo, 1994: 39). Reconociendo los aspectos positivos que animan el progreso científico, sin embargo, las voces críticas ofrecen un aprovechable contenido a valorar.

c) Argumentaciones críticas

La posición crítica no es nueva, aunque muy actual**.** Se instala en el escenario de la *cultura de la prisa*, que aplicada al ámbito científico, entraña legítimas reservas y críticas respecto del complejo científico – tecnológico - industrial resultante, que puede constituirse a sí mismo en un inequívoco factor de riesgo por diversas circunstancias [77]. En aras de la brevedad señalaré tres argumentaciones amén de otras razones peculiares:

1ª) El argumento de la experiencia padecida muestra las funestas consecuencias que ya ha sufrido el ser humano en distintos momentos, como efectos no buscados de las limitadas pruebas efectuadas. Al reducir el tiempo necesario para que la investigación básica se operativice en aplicaciones tecnológicas, se elevan los niveles de inseguridad para la vida, la salud, los recursos alimentarios y la calidad de la vida de los ciudadanos que, como de todos es conocido, producen dolor y destrucción[78]. Commoner, B. (1990) en su obra *En paz con el planeta,* denunció estas prisas y la carencia de bases sólidas para tanto optimismo tecnológico, obteniendo una amplia y positiva aprobación de la opinión pública[79].

---

[77] García Morente, M. sintetizó hace ochenta años una acertada máxima de general aplicación a la ciencia actual: *"El fenómeno moderno en donde acaso se condensa más visiblemente esa subversión de los valores es en el ritmo trepidante y vertiginoso que va tomando la vida de hoy; es la prisa, la insaciable, la devoradora prisa, que nos acucia y nos oprime y que, al fin y al cabo, puede hacer encallar la cultura en un marasmo de puros estremecimientos superficiales"* en *Ensayos sobre el progreso*. Madrid: editorial Dorcas, 1980, p. 89.

[78] Abundan los ejemplos: muerte en Chernobil y Bhopal, inseguridad y rechazo a la vacuna contra el virus H1N1 de la gripe A, los japoneses desplazados por la radiación que despedían las centrales nucleares, etc.

[79] Nota: Desde la década de los años sesenta, Barry Commoner era conocido en los EE.UU. de Norteamérica por un interesante ensayo titulado *Ciencia y supervivencia (Science and survival.* 1966), en el que llamaba la atención sobre los riesgos implicados en el complejo tecno-científico contemporáneo y denunciaba la orientación cada vez más biocida de la civilización industrial bajo el capitalismo. El ensayo que partía del análisis de un hecho memorable - el célebre apagón que dejó sin luz a una parte considerable del territorio norteamericano y de Canadá, en noviembre de 1965 - constituyó un aviso de notable impacto en la opinión pública americana. Se denunciaban tres asuntos principalmente: el carácter infundado del optimismo tecnológico de los nuevos aprendices de brujo (científicos, técnicos, estadistas); la progresiva reducción del tiempo necesario para pasar de la investigación pura a las aplicaciones tecnológicas que aumenta considerablemente el riesgo de éstas para las poblaciones. Por último, el autor

Universidad Pontificia de Salamanca

2ª) Otra argumentación se refiere a la incertidumbre (Bauman, 2007) que proviene de crear expectativas infundadas en la opinión pública que, al verse frustradas, podría alentar la búsqueda de respuestas alternativas en ámbitos no racionales, con las consecuencias sociales de retraso científico, desconfianza respecto de las propuestas de la ciencia y pérdida del prestigio de los científicos con la consiguiente infravaloración hacia la investigación y el progreso científico. Desde la perspectiva de la incertidumbre, se reflexiona sobre las estructuras e instituciones de la sociedad desarrollada, en la que se están creando una serie de novedades, no exentas de consecuencias, que constituyen "un escenario nuevo y sin precedentes para las elecciones individuales y que presentan una serie de retos antes nunca vistos" (Bauman, 2007: 7)

3ª) Una argumentación tan específica como las precedentes se refiere al aumento de los riesgos civilizatorios [80], los efectos no deseados, es decir, los peligros producidos por el funcionamiento de las estructuras y entidades más específicas de la civilización actual, las industrias químicas, farmacéuticas y energéticas, tratamiento de los productos alimenticios de los animales y de los seres humanos, etc., que no son susceptibles de limitarse ni en el espacio ni en el tiempo y que por doquier extienden su acción criminal sobre los indefensos ciudadanos ubicados en cualquier lugar.

3.6.2.- Otras perspectivas y un código ético

Hay también otros *pretextos, en todo caso cuestionables*, que favorecen la progresiva aceleración en las circunstancias actuales. Se han de tener en cuenta dos supuestos con los que trabaja en la actualidad el científico y que estimulan una verdadera carrera de competición, promoviendo la acelerada aparición de productos en el mercado, sin la suficiente comprobación: 1) La carrera profesional, social y de prestigio de los investigadores, como individuos y grupos, se vincula con los nuevos

llamaba la atención sobre la ingenua creencia de que todo está bajo el control humano, como explicación de la magnitud y gravedad de las catástrofes tecnocientíficas.

[80] Ulrich Beck ha escrito excelentes ensayos sociológicos sobre los riesgos que afectan a la sociedad moderna y a sus habitantes, acuñando la expresión 'la sociedad del riesgo'. Al respecto destacan dos libros especialmente: *La sociedad del riesgo: hacia una nueva modernidad* (Paidós, Barcelona 1998) y el que lleva por título *La sociedad del riesgo global* (Siglo XXI, Madrid 2006). En éste libro, en la p. 29 escribe: "La sociedad del riesgo, pensada hasta sus últimas consecuencias, quiere decir sociedad del riesgo global. pues su principio axial, sus retos, son los peligros producidos por la civilización que no pueden delimitarse socialmente ni en el espacio ni en el tiempo"

Universidad Pontificia de Salamanca

hallazgos de las investigaciones, de ahí la prisa para salir con el producto el autor, autores o los equipos de investigación, en la actualidad lo más frecuente, pero donde casualmente la responsabilidad está más diluida. 2) En la sociedad actual, tan abierta y donde los instrumentos de comunicación se han hecho tan abundantes y sofisticados, los equipos de investigación están en permanente comunicación con otros de distintos lugares y que trabajan en áreas próximas de investigación, resulta difícil y muy problemático mantener en secreto los hallazgos, las hipótesis o las provisionales conclusiones sin que los competidores se enteren y no se adelanten con sus resultados. Es obvio que estas circunstancias operan a favor de la prisa si no se toman las medidas adecuadas para impedirlo. 3) Otra razón de tipo económico que coadyuva a la precipitación que a veces embarga a los equipos de investigadores que trabajan en un nuevo producto.

Del análisis de los costes actuales de un producto se concluye que el coste de producción disminuye, mientras suben los costes de investigación, estudios de las posibilidades del mercado, identificación de los destinatarios, publicidad del producto, desarrollo de los soportes informáticos, redes de distribución, beneficios y márgenes comerciales. Algunos o todos estos gastos se ponen en marcha desde el momento en que la idea del nuevo producto se consolida y se percibe como viable. Por consiguiente, la entidad productora que subvenciona la investigación exige resultados, pero también que los resultados estén disponibles con la mayor rapidez. Esta exigencia de tipo económico puede tener sus razones pero no tiene razón si se impone sobre las comprobaciones necesarias para la seguridad de los destinatarios (Maceiras, 2006).

Podría aceptarse que, en casos puntuales, hayan de minorarse los plazos convenientes, pero en modo alguno ha de acortarse el tiempo necesario de las pruebas y experimentaciones de los productos, si ello puede afectar la seguridad ciudadana. Puede tener razón Innerarity cuando afirma que "los actuales diagnósticos acerca de la sociedad del conocimiento decepcionan la expectativa de que la ciencia proporcione un saber fiable, mayores certezas y una mayor seguridad. Estamos más bien, ante un cierto retorno de la inseguridad, la incertidumbre y la ambigüedad" (Innerarity, 2011:114). Sin embargo, aceptar como principio este planteamiento contradice el fin último de la ciencia que, en todo caso, se orienta a desvelar los misterios naturales, resolver enigmas, proyectar luz sobre el área oscura de lo desconocido, no para convertirse en generador de incertidumbre, sino para aumentar la seguridad del ser humano. Se ha de afirmar con toda contundencia que este retorno a la inseguridad e incertidumbre no es consecuencia

Universidad Pontificia de Salamanca

de un fenómeno natural, es fruto de decisiones humanas que, en consecuencia pueden y deben cambiarse. La raíz del entusiasmo de los ilustrados de la época por la obra de Newton se fundaba en que el genio de las matemáticas y de la ciencia física descorrió el velo de los secretos de la naturaleza, facilitando a todos los seres humanos *entrar con pie seguro* en los vericuetos de la naturaleza para poseer sus tesoros. Para Beck está claro que no debemos confiar en los científicos en este aspecto, pues "en cuestión de peligros nadie es un experto (…) y sobre todo no lo son los expertos (…) Son los éxitos de la ciencia lo que ponen de manifiesto las dudas respecto a sus predicciones de riesgos" (Beck, 2006: 92).

En mi parecer, se hace conveniente y necesario disponer de un código ético de la investigación, aprobado por la sociedad, por la opinión pública y por la comunidad científica, de aplicación a los investigadores, que lo asuman y cumplan estrictamente los grupos o equipos de investigación. Se ha de tomar muy en consideración que la investigación científica actual tiene instalado sus campamentos de trabajo en las áreas más sensibles a la salud humana y del planeta - contaminación, clima, conservación de los recursos naturales, seguridad alimentaria, etc. - y los científicos están actuando en las zonas más próximas a los núcleos de la vida como la investigación del genoma humano, trasplantes, injertos, clonaciones, fecundación, etc.. Atendiendo a este progresivo poder que la ciencia pone en manos del hombre, estimo la urgencia y concreción de un código ético que asegure la transparencia de la acción científica, normalice los procedimientos, se elaboren y publiquen los protocolos rigurosos a cumplir por los científicos, así como cualesquiera otras circunstancias de la investigación que puedan *afectar a la seguridad ciudadana*, que siempre ha de ser el objetivo superior desde el que valorar los restantes objetivos particulares.

3.6.3.- Participación ciudadana en el quehacer científico

Identificados algunos de los núcleos de mayor preocupación ciudadana en relación con el binomio seguridad – inseguridad que acompaña el devenir actual de la investigación científica, del que son plenamente conscientes los científicos y que ha llegado al ciudadano medio, alimentando la conciencia individual y sensibilizando una opinión pública cada vez más alertada por el doble efecto, positivo y perverso, de los resultados de algunas investigaciones, podemos hacer algunas consideraciones sobre el contenido del título de este apartado. Al asunto de los peligros e inseguridad que puede producir la ciencia ha de responderse extendiendo la democracia a aquellos ámbitos

Universidad Pontificia de Salamanca

donde, hasta el presente no ha acampado, como sucede en el ámbito científico: “Vivimos en una era de fatalismo tecnológico, una ‘edad media industrial’ que debe superarse con más democracia: demandando más responsabilidades, redistribuyendo la carga de la prueba, estableciendo una separación de poderes entre los productores y los evaluadores de los peligros, entablando disputas públicas sobre las alternativas tecnológicas” (Beck, 2006: 110). Para desvelar cual sea el sentido atribuido al término ‘democratización’ en este contexto se procederá, en primer término, a señalar el significado incorrecto que pueda atribuirse a la expresión ‘democratización de la ciencia’ y ‘democratización de la matemática’, si lo hubiere, para luego exponer la significación más correcta y consensuada que adoptan las mencionadas expresiones en el contexto científico - social.

a) Significado de la democratización de la ciencia

No es una conclusión racional y razonable inferir, desde los supuestos precedentes, que de aquí en adelante los ciudadanos legos en la ciencia, se hayan de integrar en los equipos científicos, para discutir con los expertos las conclusiones que se derivan de los rigurosos y complicados procedimientos metodológicos que guían la acción investigadora, como si de comisarios políticos en un sistema totalitario se tratara. Por otra parte, se ha de tener en cuenta que los fallos detectados no se corresponden con los procedimientos metodológicos, en general fundados sobre fórmulas matemáticas, desarrollados y practicados cada vez con mayor rigor. La prueba de la carrera de aciertos más evidente es el avance científico que se ha alcanzado hasta el presente en el conocimiento de la realidad, detectar problemas, resolverlos y dar respuesta a las necesidades humanas más perentorias. Es en este sentido donde la investigación ha saboreado el éxito y obtenido el reconocimiento del público y no hay argumentos razonables y fundados para cambiar la metodología matemática en que se apoya la ciencia. El problema está en las interpretaciones que los científicos pueden hacer de los conocimientos adquiridos, de la inmediata operativización de esas conclusiones, de la rotundidad con que afirman carecer de riesgos conclusiones que, con demasiada frecuencia, la experiencia es testigo, tienen efectos perversos no deseados, afectando gravemente la vida de los individuos, los ciudadanos, que subvencionan sus actividades.

Para algunos autores, “la democratización de la ciencia no significa, evidentemente, que todas las cuestiones científicas hayan de ser decididas por votación sino algo más sutil y diferenciado, que tiene que ver con un conjunto de exigencias de legitimación en

Universidad Pontificia de Salamanca

decisiones que nos afectan a todos, la asignación de recursos o la regulación del hecho de que haya cada vez más autores y más fuerzas que intervienen en asuntos que ya no pueden considerarse como una competencia exclusiva de los expertos" (Innerarity, 2011:114.

La ciencia, los grupos de investigación han de aceptar con la mejor disposición una inmersión democrática, de tal modo que no sean ellos quienes decidan sobre todas las circunstancias que definen la adecuación de su producto a las necesidades de la sociedad de su tiempo. Se ha de entender de modo restrictivo la necesaria asesoría que en las circunstancias actuales demanda el político de parte del científico que, en la práctica, resulta imprescindible dada la progresiva complejidad de los asuntos y la interdependencia que estos guardan con los de otras latitudes o regiones, con los que han de acompasarse, y por las consecuencias humanas y sociales que tiene siempre la acción del gobierno. El término, restrictivo, tiene el significado siguiente: el científico ha de exponer los aspectos positivos y negativos de los productos o asuntos sometidos a consulta, pero es el político el que gobierna y debe seguir tomando las decisiones convenientes y necesarias. El político es quien asume la representatividad ciudadana y puede expedir tarjetas de legitimación a la actuación científica. El científico para suplantar al político y atribuirse la legitimidad social no puede escudarse en cuestionables dificultades "para trazar los límites entre la producción metódica controlada del conocimiento científico y su aplicación en contextos sociales y ecológicos abiertos" (Innerarity, 2011: 117).

En todo caso las sociedades, mediante las administraciones públicas, están organizando sistemas, dictando normas generales, erigiendo estructuras sociales para fomentar la investigación y creando instituciones que publican los aspectos problemáticos de orden social hacia los que se canalicen las preferencias investigadoras, ofrezcan los recursos necesarios para realizar las investigaciones precisas, haciendo seguimiento de los objetivos propuestos y del uso de los recursos recibidos por los investigadores. Estas actividades han de acomodarse a la normativa establecida, en que se contemplen los instrumentos y los procedimientos democráticos y transparentes que deberán acompañar el devenir de la investigación. Las normativas que rigen el proceso y las organizaciones que velan por su cumplimiento ofrecen el necesario respaldo democrático al científico, a la ciencia en general y a las ciencias en particular, tanto por su origen – elaboradas por las instituciones democráticas y publicadas por los órganos competentes – como en su funcionamiento –gestionadas por personal competente

Universidad Pontificia de Salamanca

adscrito mediante las normativas públicas vigentes – como en la evaluación a hacer de la creación científica, que siempre ha de ser publicada y fundada en sólidos y contrastables argumentos, producidos por evaluadores externos a los equipos que presentan las conclusiones científicas a valorar.

b) El significado de la democratización de las matemáticas

Aunque parezca extraño también se ha de prestar atención a este asunto. Las matemáticas tienen fama de que son unas ciencias difíciles y que por consiguiente la carrera de matemáticas exige excepcionales condiciones, que luego parecen privilegiar el camino de acceso a posiciones sociales más deseables. No parece que este presupuesto, en la actualidad y en España, esté confirmado por la experiencia. También ha influido en esta tendencia hacia la democratización de las matemáticas el gran fracaso y abandono que los alumnos suelen experimentar cuando cursan los estudios de matemáticas [81]. La profesora de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, Nuria Gorgorió escribe al respecto sobre la necesidad de democratizar la educación de las matemáticas lo siguiente: “La necesidad de democratizar la educación matemática está presente, de forma más o menos explicita, en las contribuciones de varios autores de este libro (*Matemáticas y educación*) y fue tema de discusión a lo largo de las reuniones y seminarios celebrados durante el TIEM (Trimestre Intensiu en Educació Matemática). Por otra parte en el año 2000, declarado Año Mundial de las Matemáticas por la UNESCO, a propuesta de UMI (Unión Matemática Internacional) gran parte de la comunidad de educación matemática, se plantea si la educación matemática, que las instituciones educativas ofrecen hoy por hoy responde a las necesidades de la sociedad a cuyos jóvenes se dirige” (Gorgorió y Bishop, 2000:189).

[81] Con la expresión “la democratización de las matemáticas” no me refiero a la dimensión política de la educación matemática, como si ésta tuviera especial potencialidad de contribuir a los procesos de democratización de las sociedades y de formación de una ciudadanía con competencia crítica y democrática. Como dice Valero, P. (2012: 196) “la intención de conectar educación matemática y democracia es problemática”, exigiría una exploración teórica y práctica muy amplia, que rebasaría los objetivos propuestos en la elaboración de esta tesis doctoral. Una breve síntesis sobre la dimensión política de la educación matemática, así como sus tendencias mas significativas en el ámbito de la investigación, a comienzos del siglo XXI puede verse en Valero, P. (2012: 187 – 201)

Universidad Pontificia de Salamanca

La UNESCO está sensibilizada al respecto y ha patrocinado la reflexión sobre este asunto en varias de las Conferencias Internacionales sobre educación Matemática en 1984 en el ICME V (International Conference on Mathematics Education), se desarrolló un importante grupo de trabajo que, con el nombre *Matemáticas para Todos*, dio lugar a una publicación útil e interesante (Damerow y otros, 1984). Hacer que la educación matemática sea más accesible a los jóvenes estudiantes ha sido uno de los objetivos de la UNESCO y así en el ICME VI (International Conference on Mathematics Education), en 1988 se dedicó un día entero al análisis, reflexión y discusión sobre el asunto de la educación matemática (*Matemáticas, educación y sociedad),* concluyendo el seminario con nuevas perspectivas sobre la democratización de las matemáticas (Gorgorió y Bishop, 2000:190).

En una publicación de la UNESCO (Bishop y otros, 1993), en la misma perspectiva, se analizan las influencias significativas en el aprendizaje matemático de los alumnos. "Un último ejemplo de las publicaciones de la UNESCO en esta línea es la excelente publicación de Clements y Ellerton (1996), en la que se analiza la situación desde una perspectiva no eurocentrista. En todos estos trabajos aparece como fondo común el objetivo de la democratización de la educación matemática" (Gorgorió y Bishop, 2000:189-190).

3.6.4.- A modo de síntesis

La democratización de la ciencia plantea la negativa a que los grupos de investigación pretendan juzgarse a si mismos en la valoración de sus productos. Mas bien la participación ciudadana está reclamando la necesidad de arbitrar unos códigos y unas normativas rigurosas y transparentes que animen a los científicos a realizar unas verificaciones rigurosas de las conclusiones a que llegan para evitar los efectos perversos que acompañan a conclusiones científicas.

El problema se suscita porque en la actualidad la investigación básica de la ciencia se transforma en ciencia aplicada y ésta en tecnología con progresiva urgencia, causando una inmediata incidencia de la ciencia en la sociedad. Este proceso o paso desde la investigación básica a la aplicación tecnológica implica, con harta frecuencia, la reducción de los plazos adecuados para la verificación de conclusiones. En el sistema industrial de hacer ciencia que se está imponiendo se cae con facilidad en la situación de evaluar las conclusiones científicas con los criterios que evaluamos la salida al mercado de una nueva marca de coches o de zapatillas.

Universidad Pontificia de Salamanca

Los riesgos para el ser humano directamente, mediante productos alimenticios o vinculados con la salud son muchos y graves y los que afectan directamente al los recursos naturales pero también a la calidad de vida humana se multiplican por doquier. Los testimonios de la experiencia animan la demanda de la participación ciudadana en el diseño y seguimiento de la política científica e investigadora a llevar a cabo en la sociedad, a fin de que el ciudadano que es el propietario de la mayor parte de los recursos que financian las investigaciones sea atendido en sus justas y legítimas reivindicaciones.

3.7. INNOVACIÓN CIENTÍFICA Y POLÍTICAS DE I+D+I

A finales del siglo XX y comienzos del XXI los cambios que afectaron directamente a la investigación y a la ciencia se identificaron con la terminología de *Innovación y Desarrollo*. La ciencia sigue los procedimientos habituales en sus procesos de creación científica, es decir, sigue construyéndose sobre la base metodológica de las matemáticas. Sin embargo un cierto enfeudamiento de la ciencia por parte de la moderna economía, - la economía de servicios necesita del conocimiento más que de cualquier otro recurso -, establece una relación supeditada de la ciencia respecto de la economía, que en la actualidad se denomina desarrollo. No cabe duda que la ciencia siempre es innovadora, por consiguiente nada nuevo añadiría innovación a ciencia. No obstante, en este caso el acento no está tanto en la innovación cuanto en el término tecnología, es decir, se pretende trasladar una imagen de la mayor tecnificación que impregna la ciencia en la actualidad, orientándola en su despliegue global, al mayor aprovechamiento de la tecnología existente en los procesos de investigación. Con estas matizaciones se comprende que la ciencia desde los comienzos de este siglo se denomina *Investigación Científica más Desarrollo más Innovación Tecnológica*, que se representa por el acrónimo de todos conocido I+D+I.

La investigación científica, el desarrollo y la innovación tecnológica se han convertido en uno de los factores claves para el crecimiento económico a largo plazo y para el bienestar de la ciudadanía. La Unión Europea ha situado la política científica en uno de sus ejes centrales, como una de las piezas esenciales de la renovada Estrategia de Lisboa. En 2002 (15 y 16 de marzo), la presidencia del Consejo Europeo, reunida en Barcelona estableció como objetivos: incrementar el gasto global en I+D e innovación en la Unión Europea; mejorar la integración de la innovación en el Espacio Europeo del

Universidad Pontificia de Salamanca

Conocimiento, con el objetivo de optimizar la utilización de los derechos de propiedad intelectual en toda Europa y desarrollar las inversiones privadas; por último reafirmar la importancia de la patente comunitaria, que ha de ser instrumento eficaz y flexible, que las empresas puedan obtener a un coste asequible. En su conclusión 47 se dice textualmente: "Para acortar las distancias entre la Unión Europea y sus principales competidores, se debe mejorar de modo significativo el esfuerzo general en I+D e innovación en la Unión, haciendo especial hincapié en las tecnologías de vanguardia" (Presidencia del Consejo Europeo, 2002: Conclusión 47).

En el presente apartado se tratan dos asuntos: 1º) se describe el instrumento que España pone a disposición de los investigadores para enmarcar las investigaciones, orientar la investigación española y ofrecer los necesarios recursos a los investigadores. El *Plan Nacional de I+D* es el instrumento de programación con que cuenta el Sistema Español de Ciencia y Tecnología, en el que se establecen los objetivos y prioridades significativas de la política científica. En las páginas que siguen se describe de modo escueto la organización de estas nuevas políticas de hacer ciencia denominadas I+D+I. Este VI Plan Nacional de I+D+I, corresponde al período 2008 – 2011 [82]. 2º) El otro asunto que se muestra se refiere a unos pocos resultados, pero significativos de la investigación española o relacionados con la misma. En este momento no disponemos de datos más novedosos. En todo caso este asunto no es significativo en nuestro proyecto de tesis.

3.7.1.- El VI Plan Nacional de I+D+I

En la actualidad este ejercicio de planificación científica se inscribe en el marco de la Estrategia Nacional de Ciencia y Tecnología, cuyo escenario, a 2015, presenta los principios básicos que han de guiar las actuaciones de I+D+I financiadas al amparo del Plan Nacional. El VI Plan Nacional de I+D+I (Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología, 2007) se define por parte de la Comisión Interministerial como "el instrumento para el fomento y coordinación general de la investigación científica y

[82] El Consejo de Ministros, celebrado el 7 de octubre de 2011, aprobó prorrogar el VI Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica, correspondiente al periodo 2008-2011, hasta que se apruebe el futuro Plan Estatal de Investigación Científica y Técnica. El actual plan seguirá en vigor, como mínimo, hasta 2012.

Universidad Pontificia de Salamanca

técnica, el desarrollo y la innovación tecnológica y en el que se establecen los objetivos y prioridades de la política de ciencia y tecnología a medio plazo" [83] (CICYT, 2007b:1).

a) Estructura y desarrollo del VI Plan Nacional

1) Los *principios fundamentales* del VI Plan Nacional son los siguientes: a) poner las actividades de investigación, desarrollo e innovación al servicio de la ciudadanía, del bienestar social y de un desarrollo sostenible, con plena e igual incorporación de la mujer; b) contribuir a la mejora de la competitividad empresarial y c) ser un elemento esencial para la generación de nuevos conocimientos.

2) En cuanto a la *estructura* del VI Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica para el período 2008 – 2011 presenta una estructura basada en cuatro áreas directamente relacionadas con los objetivos generales y ligadas a programas instrumentales que persiguen objetivos concretos: área de generación de conocimientos y capacidades; área de fomento de la cooperación en I+D; área de desarrollo e innovación tecnológica sectorial y área de acciones estratégicas.

3) En cuanto a los dispositivos para dar cumplimiento a los objetivos del Plan y en función de las cuatro áreas, se contemplan seis *líneas instrumentales de actuación*: a) Recursos Humanos; b) Proyectos de I+D+I; c) Fortalecimiento institucional; d) Infraestructuras científicas y tecnológicas; e) Utilización del conocimiento y transferencia tecnológica; f) Articulación e internacionalización del sistema.

4) Al socaire del VI Plan Nacional, las líneas de actuación se desarrollan mediante *programas nacionales*, que son trece y comprenden los temas mas variados: la formación y movilidad de recursos humanos; contratación e incorporación de recursos humanos; proyectos de investigación fundamental y aplicada; proyectos de desarrollo experimental y de innovación; fortalecimiento institucional; infraestructuras científico – tecnológicas; transferencia de tecnología, valorización y promoción de empresas de base tecnológica; redes; cooperación público – privada e internacionalización de la I+D+I. Los programas están directamente relacionados con las Líneas Instrumentales de Actuación y responden a los objetivos trazados en cada una de las Áreas del Plan Nacional.

---

[83] El responsable de este plan es la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología, que se citará siempre por CICYT.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) Objetivos estratégicos del Plan Nacional (CICYT, 2007b: 2-3):

1) *Situar a España en la vanguardia del conocimiento*, mediante el incremento de los niveles de conocimiento, y la aplicación de criterios de excelencia científica y oportunidad para las actividades de I+D+I orientadas a la demanda.

2) *Promover un tejido empresarial altamente competitivo*, elevando la capacidad de los centros tecnológicos, de las asociaciones de investigación, de los parques tecnológicos y de las plataformas tecnológicas. Profundizar en la difusión y transferencia de los resultados de las actuaciones de I+D+I, de las ayudas a la industrialización y valorando los resultados y la creación de empresas de base tecnológica. Adecuar las actividades de I+D+I a las demandas del sector productivo. Potenciar la disponibilidad de infraestructuras de uso interdisciplinar y de uso compartido por los distintos agentes del sistema.

3) *Desarrollar una política integral de ciencia, tecnología e innovación y la imbricación de los ámbitos regionales en el Sistema de Ciencia y Tecnología*. Para la consecución de este objetivo se impone: a) la mejora de la administración general del Estado y de las Comunidades Autónomas en el intercambio de información de las actuaciones de planificación y programación de I+D+I. b) Incrementar la armonización de los sistemas de seguimiento y evaluación. c) Potenciar la participación conjunta de la Administración General del estado y las comunidades autónomas en las convocatorias de ayudas a la I+D+I.

4) *Avanzar en la dimensión internacional* como base para el salto cualitativo del sistema, para lo que se proponen las siguientes medidas: a) Promover la internacionalización de las actuaciones de I+D+I, mediante la participación de los grupos de investigación en programas y organismos internacionales. b) Incrementar la participación española en las instalaciones, organismos y programas internacionales. c) Potenciar la coordinación de los agentes ejecutores de actividades I+D+I de distintos países, mediante las ERANET. d) Favorecer la apertura de los programas nacionales a los miembros de la U. E. e) Incentivar la participación de grupos españoles en el VII Programa Marco.

5) *Conseguir un entorno favorable a la inversión en I+D+I*, para lo que se propone: a) Potenciar la coordinación de los agentes financiadores y los ejecutores de actividades I+D+I. b) Incrementar la transparencia y homologación de los sistemas de evaluación y seguimiento. c) Desarrollar formulas organizativas para prestar servicios

Universidad Pontificia de Salamanca

de alta calidad, mediante la delegación de competencias. d) Mejorar la formación de los gestores de ayudas a la I+D+I.

6) *Fomentar la cultura científica y tecnológica de la sociedad*: a) Aprovechando los nuevos formatos de la comunicación para trasladar a la sociedad los avances científico-tecnológicos. b) Desarrollar estructuras generadoras de cultura científica para incrementar la opinión cualificada de la ciudadanía. c) Instalar nodos en red de comunicación científica en los agentes generadores de conocimiento para la comunicación social de la ciencia.

c) Organización y funcionamiento del Sistema español de Ciencia y Tecnología

La organización del sistema español de la ciencia se configura a partir de la Ley de la Ciencia, Ley 13/1986, de 14 de abril, de *Fomento y Coordinación General de la Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico*. En virtud de esta ley se establecen los Planes Nacionales de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico que sucesivamente se elaboran para cobijar y orientar la investigación científica española.

1) El *órgano de planificación, coordinación y seguimiento* del Plan Nacional, sigue siendo hasta el presente la *Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología* (CICYT).

2*) La organización y funcionamiento* de la CICYT en los distintos niveles se lleva a cabo mediante comisiones: a la *Comisión Plenaria* o Pleno compete la estrategia de la política científica española. La *Comisión permanente* coordina las actividades de I+D+I financiadas con recursos presupuestarios. El *Comité de apoyo y seguimient*o gestiona implementar las mejoras a corto plazo de la gestión política del I+D+I.

3) *Órganos de asesoramiento* de la CICYT: El primero es el *Consejo General de Ciencia y Tecnología*, responsable de la coordinación con las Comunidades Autónomas. El segundo, el *Consejo Asesor para la Ciencia y la Tecnología* cuya función es promover la participación de la comunidad científica y de los agentes sociales y económicos en la elaboración, seguimiento y evaluación del Plan Nacional. Tanto el Presidente de estos órganos como el secretario son personas adscritas al Ministerio de Educación, Ciencia y Cultura.

4) *Estructuras de actuación* de la CICYT. El sistema español de ciencia y tecnología comprende cuatro estructuras de acción: a) Sistema público de I+D+I. b) Organizadores de soporte al I+D+I. c) Las empresas. d) La sociedad.

Universidad Pontificia de Salamanca

d) Recursos materiales

Una breve referencia a los recursos nos permite establecer las siguientes dimensiones para hacer este tipo de ciencia. Las grandes inversiones de recursos materiales por parte de los gobiernos, en este caso de España, - no es un país de los más generosos en la financiación de la investigación - en cuanto a los recursos presupuestarios para la financiación del Plan Nacional de I+D+I, 2008 – 2011, se supone que para el último año de su vigencia, habría de alcanzar el porcentaje del 2.2 % del Producto Interior Bruto. Se tuvo en cuenta que la financiación empresarial alcanzará, para esas mismas fechas, unas cifras próximas al 55 % de lo presupuestado por el Estado. En cifras absolutas la inversión española en I+D+I en 2008, alcanzó la respetable cifra de 8.124 millones de euros de presupuesto público. (CICYT, 2007a: 9-26) y (2007a: 164)

En otros ámbitos territoriales, además de los recursos directos, se están poniendo en marcha nuevas iniciativas, los incentivos fiscales en varios países de la OCDE, interesantes para la promoción de la investigación, rebajando los costes laborales y sociales. Con esta orientación, en Francia mediante el programa *Compañía Joven Innovadora* (YIC) se permite que el personal investigador de las PYMes esté exento de costes sociales, dedicando hasta el 50 % de su tiempo a proyectos de I+D. En Bélgica se permite una exención de 11.500 euros, para los miembros del personal que lleven a cabo actividades de investigación científica y de 23.590 euros para el personal altamente cualificado, con más de 10 años de experiencia investigadora y poseer el título de doctor. En los Países Bajos, el sistema establecido con la *Ley para la Promoción de la Investigación y el Desarrollo*, para el fomento de la I+D se reduce los costes fiscales de los salarios y de las contribuciones a la Seguridad Social de las empresas con personal dedicado a I+D.

Los datos disponibles sobre los recursos económicos gastados en España en la producción científica de I+D+I no aparecen con posterioridad a 2006 por lo que pondré una sola figura para los años 2001 al 2006, referida a los gastos internos totales tanto del Estado, las Universidades, las empresas y las IPSFL que es el acrónimo de *Las instituciones privada, sin fin lucrativo*, que están fuera del mercado, al servicio de los hogares que, si facturan, lo hacen a precios que no se corresponden a los precios de mercado o gratuitamente.

Tabla 3.1.: Gastos internos totales en actividades de I+D+I por sector

Universidad Pontificia de Salamanca

de ejecución, 2001 – 2006 (en miles de euros)

Años	Adm.Pública	Ens.Superior	Empresas	IPSFL *	Total-Euros
2001	989.011.1	1.925.357.0	3.261.030.6	51.758.4	6.227.157.1
2002	1.107.815.0	2.141.949.0	3.926.338.0	17.435.0	7.193.538.0
2003	1.261.762.8	2.491.958.8	4.443.438.0	15.876.0	8.213.035.6
2004	1.427.503.6	2.641.653.2	4.864.930.2	11.673.7	8.945.760.7
2005	1.738.052.9	2.959.927.7	5.485.033.5	13.856.9	10.196.871.0
2006	1.970.823.5	3.265.738.5	6.557.529.0	21.127.0	11.815.217.9

FUENTE: Ministerio de Ciencia e Innovación (2008: 18).

La distribución del gasto total por sectores se ha mantenido prácticamente constante desde 1998, siendo lo más destacable el peso del sector empresarial y el de la enseñanza superior frente al sector público.

3.7.2.- Resultados de las políticas de I+D+I

La información complementaria del Sistema Español de Ciencia y Tecnología que se ofrece a continuación viene expresada por los datos estadísticos relacionados con las políticas científicas de I+D+I, en cuestiones como las publicaciones, el lugar que ocupa España en el ranking de publicaciones, número de patentes solicitadas por la vía europea y la participación en programas europeos de I+D+I.

a) Publicaciones

Número de publicaciones en las que figura algún investigador residente en nuestro país y el porcentaje de las publicaciones españolas en relación con las publicaciones a nivel mundial nos lo ofrece la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología, (CICYT/ 2007a: 37).

Tabla 3.2.: Producción científica 2001 – 2006

2001	26.349	2.7 % Mundial
2002	28.521	2.8 % “
2003	29.945	2.8 % “
2004	32.772	2.9 % “
2005	35.191	2.9 % “
2006	36.840	3.1 % “

FUENTE: CICYT, 2007a: 37

Universidad Pontificia de Salamanca

La evolución de la producción científica medida en términos de publicaciones refleja un aumento continuado, superando en 2004 los 30.000 publicaciones y en 2006 el número de publicaciones científicas ascendió a 36.840 unidades. Sin embargo si comparamos el número de publicaciones con el de investigadores, muestra un claro retroceso a partir del año 2000, lo cual indica que el aumento de publicaciones se debió principalmente al incremento de investigadores de los últimos años. Más significativo del esfuerzo de nuestros investigadores es el porcentaje con relación a la producción científica mundial: en el cuadro precedente se percibe la tendencia firme al alza, alcanzando el 3.1 % en el año 2006. Se complementa esta información con la presentación del ranking mundial WoS, con relación a los documentos, citas y citas por documentos.

b) Ranking de producción científica

En cuanto a los indicadores generales de producción científica, en el contexto internacional se superaron los 41 mil documentos, siendo su aportación porcentual al total mundial del 3 %. Estas cifras le mantienen en el décimo puesto en el ranking mundial de producción, según datos de Thomson Scientific para el período de 1996 – 2006, (noviembre 2006). A nivel mundial, para este período recibe una media de citas por documento de 7.57, lo que la sitúa en el puesto 36, ocho puestos por encima de lo que representaba para el período 1994 – 2004. España ocupa el décimo puesto en el ranking mundial WoS, frente al noveno puesto que se le asigna en el ranking Scopus, superando a Rusia. Ofrecemos a continuación los datos del ranking WoS.

Tabla 3.3.: Ranking de los 20 Países Top en todos los campos - Wos

Orden	Pais	Documentos	Citas	Citas por documento
1	USA	2.831.004	37.822.213	13.36
2	JAPON	771.573	6.298.466	8.16
3	ALEMANIA	723.435	7.497.007	10.36
4	INGLATERRA	643.557	7.565.163	11.76
5	FRANCIA	522.015	5.171.849	9.91

Universidad Pontificia de Salamanca

6	R.P. CHINA	400.917	1.480.743	3.69
7	CANADÁ	383.199	4.194.095	10.94
8	ITALIA	358.452	3.363.216	9.38
9	RUSIA	280.480	1.019.009	3.63
10	**ESPAÑA**	**254.808**	**2.041.705**	**8.01**
11	AUSTRALIA	240.738	2.272.955	9.44
12	HOLANDA	215.050	2.664.587	12.39
13	INDIA	203.989	788.852	3.97
14	COREA SUR	173.050	840.487	4.86
15	SUIZA	165.862	1.960.099	11.82
16	SUECIA	154.291	2.168.127	14.05
17	BRASIL	125.132	627.441	5.01
18	TAIWAN	120.447	608.561	5.05
19	POLONIA	115.535	597.312	5.17
20	BELGICA	114.172	1.206.208	10.0

FUENTE: Moya, F. de, (2008: 63)

Entre los veinte principales países productores, que no en el ranking mundial, España mantiene el puesto décimo tercero en citas por documento. Esta es la posición de España en las bases de datos de Thomson Scientific. Ahora bien, si se comparan los indicadores importantes - documentos, citas y citas por documento - en las fuentes de información consultadas, se presentan algunas diferencias significativas (Moya, F.de, 2008: 57).

c) Patentes solicitadas

Solicitudes de patentes que se han tramitado durante los años 2001 – 2006, siguiendo las tres vías de solicitud existentes y que han designado a España como objetivo de mercado: Vía PCT[84] comprende las solicitudes presentadas directamente mediante el Tratado de Cooperación en materia de Patentes. La vía europea comprende aquellas solicitudes presentadas en la Oficina Europea de Patentes y la vía española comprende las patentes presentadas en la Oficina Española de Patentes.

[84] PCT es el acrónimo de Patent Cooperation Treaty, que es la expresión inglesa de Tratado de Cooperación sobre Patentes.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 3.4.:Patentes con efectos en España 2001 - 2006

Años	Vía PCT	Vía Europa	Vía España
2001	100.774	55.377	2.904
2002	110.979	52.175	3.055
2003	111.115	52.818	3.081
2004	122.711	55.524	3.100
2005	136.652	58.921	3.252
2006	145.375	58.500	3.352

FUENTE: Oficina Española de Patentes y Marcas (2007), en (CICYT, 2007a: 38)

Los datos son elocuentes y coincidentes con la información de la Oficina Española de Patentes y Marcas al afirmar que la tendencia a solicitar patentes que tengan efectos en España es creciente. Las solicitudes de patentes por la vía nacional constituyen el grupo menor, lo que refleja las preferencias por la tramitación no nacional, que parecen estancadas durante los años 2002, 2003 y 2004, pero en cambio en los dos últimos años parece más animado este importante sector nacional (CICYT, 2008: 28-29).

d) Programa EUREKA

La participación española en los programas EUREKA[85] ha sido muy activa, tanto en número de proyectos presentados como por el apoyo económico recibido (las cifras se establecen en millones de euros).

Tabla 3.5.: Participación española en el proyecto EUREKA

Años	Proyectos	Inversión en euros

[85] EUREKA y Programa MARCO son dos iniciativas europeas de cooperación tecnológica, abiertas a la participación de los investigadores de los Estados miembros de la U.E..

Universidad Pontificia de Salamanca

2001	53	68.1
2002	41	45.8
2003	40	37.3
2004	43	55.3
2005	50	45.5

FUENTE: (CICYT, 2007a: 44)

Con los resultados expuestos, España se sitúa en primer lugar por proyectos participados y en segundo lugar por proyectos liderados, seguida de Francia, puesto que el último año, de 212 proyectos aprobados, 50 tenían participación española, que equivale al 27,2 % del total.

e) Programa Marco

La participación española en el Programa Marco de la Unión Europea se ha convertido en un referente de la intervención y contribución de los distintos países en el desarrollo de la competitividad europea. Los resultados globales de la aportación nacional y de las subvenciones captadas por los grupos de investigación españoles en los sucesivos Programas Marco de la Unión Europea se ofrecen en el cuadro siguiente.

Tabla 3.6.: Participación en los programas MARCO

Años	Programa	Contribución	Retorno
1987 / 90	II PM.	7.3 millones	5.5 millones
1990 / 94	III PM.	8.5 "	6.3 "
1994 / 98	IV PM	6.5 "	6.3 "
1998 / 02	V PM	7.4 "	6.4 "
2002 / 06	VI PM	8.2 "	5.8 "

FUENTE: Estadísticas Generales. CDTI (2007). En CICYT, (2007a: 43).

Estos son algunos de los datos más esenciales sobre nuestra producción científica según las políticas actuales de hacer ciencia y que responden a la Investigación científica, al Desarrollo y a la Innovación Tecnológica (I+D+I), que constituye el sistema actual de producción científica. Hasta se han trasplantado

Universidad Pontificia de Salamanca

términos, conceptos y expresiones del escenario económico de producción industrial al área de la producción científica actual.

Para concluir, sería interesante la reproducción de las palabras finales y el texto con que termina la obra *Biografías de grandes matemáticos* de Wussing & Arnold, (1989) en donde se explicita que las matemáticas constituyen una ciencia extensa, ramificada y cultivada con éxito en todo el planeta y que se encuentra relacionada con todas las esferas de la vida social. En una recopilación soviética sobre matemáticas, publicada en 1967, se describía el proceso actual de la matematización del saber y de la realidad en estos términos:

"Ante nuestros ojos transcurre el proceso de un cambio cualitativo de las matemáticas; entre las ramas de las matemáticas que antes parecían hallarse muy distantes se descubren estrechas relaciones; surgen nuevas disciplinas matemáticas. La implantación de la técnica electrónica de cálculo ha modificado radicalmente las concepciones que antes se tenían acerca de la eficacia de los distintos métodos matemáticos. Ésta además, ha ampliado el campo de aplicación de las matemáticas en una medida nunca conocida hasta ahora. Las relaciones entre las matemáticas y otras ciencias se desarrollan constantemente. Si antes se limitaban fundamentalmente a la Mecánica, a la Astronomía y a la Física, en la actualidad los métodos matemáticos penetran cada vez más profundamente en la Química, la Geología, la Biología, la Medicina, la Economía y la Lingüística. Resulta de universal conocimiento, el papel de las Matemáticas en el desarrollo de nuevas orientaciones de la Técnica, como la Radioelectrónica, la energía nuclear y los vuelos espaciales. La antigua afirmación de que las Matemáticas son la Reina de las Ciencias, adquieren así un contenido mucho más profundo" (Wussing & Arnold, 1989: 653-654).

3.7.3.- A modo de síntesis.

Dos asuntos se tratan en esta síntesis, con los que se pretende resumir lo ya expuesto y mostrado en las explicaciones del apartado (3.7.) precedente que se corresponde a este resumen y que vamos a denominar: el plan nacional de I+D+I y los resultados de las políticas científicas en nuestro país.

El VI Plan Nacional para la ciencia constituye una maqueta bien construida para el desarrollo científico nacional. Este instrumento se articula sobre unos principios fundamentales – generar nuevos conocimientos al servicio de un desarrollo sostenible – está dotado de una estructura integrada por cuatro áreas y posee los medios adecuados

Universidad Pontificia de Salamanca

para alcanzar los objetivos propuestos, mediante planes nacionales de actuación. Persigue unos objetivos claramente especificados que pueden resumirse en uno que es situar a España en la vanguardia del conocimiento, para lo que se le dota de una organización, unos responsables en los distintos niveles y unos recursos de infraestructuras y económicos imprescindibles.

En cuanto a los resultados solo unas escuetas menciones que sinteticen algunas de las aportaciones significativas de los investigadores nacionales: a) Ha aumentado el número de las publicaciones, parece que más por razón del crecimiento de los investigadores, que por la productividad investigadora. Crece de manera constante el porcentaje de publicaciones a nivel mundial, lo que es una buena noticia. b) Es muy significativo el aumento de patentes que se solicitan y que han designado a España como objetivo de mercado. Causa cierta extrañeza el exiguo número de las patentes cursadas por la Oficina Española de Patentes. c) La participación en el Programa EUREKA no parece muy significativa en cuanto al periodo de cinco años, de los que tenemos datos. Sin embargo se percibe un lento pero constante aumento de proyectos presentados, lo que puede ser más indicativo de la realidad. En los programas MARCO son todavía menos significativos los datos de que se dispone.

3.8. COROLARIOS PEDAGÓGICOS PARA LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS

Los propósitos pedagógicos que motivan nuestra investigación nos han aconsejado el recorrido de este capítulo en el que, según nuestra intención, la cronología ha servido de soporte para proseguir la argumentación general de la tesis encaminada a poner de manifiesto el avance de la mentalidad matemática con el propósito de deducir corolarios educativos y estrategias didácticas.

El progresivo enriquecimiento de las matemáticas, alcanzado mediante las sucesivas tentativas que hemos ido señalando, las interpretamos, en nuestro contexto pedagógico, como prueba de que el profesor actual ha de motivarse por la convicción, según la cual no puede esperar que el alumno, en edad temprana y con formación incipiente, comprenda y asimile de inmediato y con facilidad, las nociones y operaciones que sobrepujan sus experiencias ordinarias, en cuanto que obedecen a una lógica en la que no se mueve ni el sentido común ni la vida ordinaria de las personas. El

Universidad Pontificia de Salamanca

proceso histórico, que hemos ido señalando, con atención selectiva a lo más significativo, debe transmitir las complejidades de las nociones, teoremas, procesos y significado de las operaciones matemáticas. Debido a ello, los hitos históricos vienen a desempeñar un papel auxiliar, para ampliar las exigencias y recursos mentales que el profesor debe poner en práctica, respecto a su propia preparación para las clases, con el fin de hacer más asequibles sus enseñanzas, ya que no se puede esperar que el alumno comprenda en una hora aquello que a la humanidad le ha costado siglos alcanzar.

Desde esta convicción básica, proponemos algunas conclusiones de lo tratado y que a lo largo del texto denominamos a la manera de síntesis, algunas de las cuales pueden tener carácter de conclusiones, a las que añadimos otros comentarios, a modo de corolarios orientados a la enseñanza de las matemáticas básicas que, a nuestro juicio, deben servir al profesor de orientaciones previas a sus propios conocimientos y a las destrezas didácticas prácticas. Las matemáticas deben ser enseñadas con una mentalidad pedagógica que no las considere fin en sí mismas, sino contribución a crear y fomentar en el alumno hábitos mentales capaces de sobrepujar el sentido común, sin obviar el contenido idealista que se encierra en la propia naturaleza del sistema lógico deductivo matemático. El profesor ha de llevar al convencimiento de los estudiantes que la utilidad de las matemáticas no queda reducida al de su operatividad para los intereses cotidianos, sino que se abre hacia un modo de pensar y de actuar regido por una racionalidad exigente, que supera la que solemos aplicar a nuestras acciones inmediatas. Esta idealidad hace que las matemáticas aparezcan no sólo interesantes, sino de gran belleza para quienes comprenden su lógica, aunque no alcancen a solucionar siempre los problemas, ecuaciones y teoremas.

3.8.1.- La nueva ciencia como concreción del moderno espíritu científico

Los asuntos más destacados que fueron objeto de tratamiento en este primer apartado del capítulo tercero se refieren a la concreción de los necesarios cambios hacia una concepción nueva de la naturaleza física y su funcionamiento, elaboración de los nuevos procedimientos científicos y recreación conceptual y contextual del nuevo saber.

1) A lo largo de los siglos XV y XVI se elabora y consolida una nueva concepción de la naturaleza física de tal suerte que los grandes representantes de la nueva ciencia se encuentran con un original espacio para el uso intensivo de las matemáticas en el tratamiento, descripción y explicación de la regularidad, la frecuencia y otros rasgos cuantificables del funcionamiento de la naturaleza. Representa una

Universidad Pontificia de Salamanca

verdadera revolución científica el abandonado definitivo de las nociones de un *mundo del más o menos*, para confirmar que el nuestro es un *universo de precisión,* regulado por sus propias fuerzas y por el rigor de la exactitud matemática. Esta perspectiva supuso una extraordinaria novedad para la ciencia, que propone como método la matematización de los fenómenos físicos y para las teorías del conocimiento la novedad está en que, de aquí en adelante, el conocimiento legítimo es el expresado mediante la exactitud de las matemáticas. Mediante la aplicación de las matemáticas la ciencia moderna persigue la exactitud y la precisión como sus características más destacadas. Las leyes enunciadas en términos matemáticos serán consideradas como la expresión única del conocimiento científico. *La matematización del conocimiento* es una conclusión obligada desde el momento en que el concepto griego de naturaleza y sustancia se sustituye por un conjunto de fenómenos que son observables, cuantificables y medibles.

2) En estas circunstancias contextuales y cognoscitivas emerge un *nuevo concepto de ciencia* que desde los comienzos de la edad moderna se impone en todos los ámbitos de la realidad física y, a lo largo de los siglos siguientes, consolida su efectiva presencia en toda realidad observable, cuantificable y medible. El tratamiento de este asunto comprendió tres aspectos: en el primero se atendieron más directamente los factores culturales recuperados de la *tradición pitagórica* por los humanistas y de la concepción cristiana de una creación del universo, inteligente, con sentido y ordenada. El paso siguiente fue identificar las necesarias regularidades del funcionamiento de la naturaleza y buscar las leyes matemáticas, que descubren la estructura real del mundo físico. En cuanto a los factores sociales que animaron estos procesos de cambio, es obligado constatar la emergencia de una nueva clase social, ubicada en las grandes ciudades del Mediterráneo, que acumula un capitalismo incipiente, mediante el comercio con Oriente, que le fortalece como nueva clase social, los comienzos de la burguesía, cuyos gustos se orientan más hacia lo secular, lo positivo, lo útil y lo pragmático. La nueva ciencia es sensible a estos intereses que coinciden con las pretensiones y sucesivos intentos de dominio y explotación de la naturaleza, apuntando así a una actitud tecnológica de la nueva ciencia en sus aplicaciones y pragmatismo.

L*os rasgos que definen esta nueva ciencia* se han sintetizado en sus elementos esenciales: el *contenido* - el conjunto de conocimientos sobre la realidad – *el campo de la ciencia es la realidad observable*, quedando excluido por consiguiente el tratamiento científico del ámbito de lo trascendente, sobre lo que la nueva ciencia no se manifiesta.

Universidad Pontificia de Salamanca

Se define también la ciencia por *el procedimiento que es la forma típica de actuación* en la formación del conjunto de conocimientos, que se denomina método hipotético – deductivo, contrastando sus hipótesis mediante la falsación de las mismas. La ciencia nueva se define asimismo por unos *objetivos específicos que son el analizar* o describir, *explicar* o el dar razón del por qué de las cosas , *predecir* que cobra una manifiesta importancia en el nuevo contexto de la aplicación metodológica de las matemáticas y el *actuar*, que deviene como consecuencia de los anteriores objetivos y que hace al hombre poderoso frente a esa realidad a desentrañar.

3) Las matemáticas, al convertirse en el procedimiento insoslayable para avanzar con rigor, seguridad y precisión en el conocimiento de la realidad física, se abren hacia un orden cósmico y hacia una verdad en la que estamos instalados por encima de nuestras propias capacidades. La perfección infinita de los pitagóricos, la idea platónica, las astronomías geométricas y mecánicas renacentistas, la matematización de las nuevas ciencias que comienza y todo el progreso de las concepciones matemáticas lleva a una convicción que viene ya desde la antigüedad: las matemáticas elevan la certeza de un mundo, en el que la armonía y el orden no son solo una quimera, sino una realidad que anima las mentes humanas, cuya satisfacción no es menos importante que la obtenida en los intereses cotidianos.

Hallamos confirmada esta convicción por la notable figura de Beltran Russell, al que volvemos a citar por su gran dosis de realismo pedagógico hablando de la enseñanza de las matemáticas: "Apartadas las pasiones humanas, apartadas incluso de los hechos lamentables de la naturaleza, las generaciones han creado gradualmente un cosmos ordenado, donde el pensamiento puro puede habitar como en su casa natural y donde por lo menos uno de nuestros impulsos más nobles puede escapar del monótono exilio del mundo real" (Russel, B., 2001: 91).

Las generaciones de nuestros actuales alumnos no se caracterizan quizás por su idealismo, aunque por su juventud no son ajenos tampoco a la ambición de superar las condiciones de vida actuales, ansiosas de cierto meliorismo propicio para las enseñanzas que los aproximen a expectativas que, aunque escasamente prefiguradas, no por eso son ajenas a la eficacia de las enseñanzas que sobrepuje los utilitarismos. En todo caso, sea cual fuere la fuerza del ambiente, el profesor de matemáticas no puede abdicar de presentar las matemáticas en su lógica pureza. A diferencia de la literatura, las matemáticas vislumbran una belleza del mundo, desposeída de aditamentos y complementos, sean significativos o irrelevantes. Sin embargo, teniendo en cuenta lo

Universidad Pontificia de Salamanca

que acabamos de decir, no podemos dejar de advertir una cautela que procede de nuestra propia práctica docente: no abdicar del realismo en cuanto que los datos e incluso los números son, en primer lugar, sensibles, antes que mentales [86].

3.8.2.- Racionalidad moderna y renovación metodológica

El ámbito de la racionalidad moderna, sus rasgos específicos y la renovación de los procedimientos científicos constituyen los asuntos tratados en este apartado.

1) En cuanto al ámbito de la racionalidad moderna se configura por el método como la coordenada fundamental, hasta el punto de denominar a la razón moderna la razón metódica; la certeza como aspiración y motor de la ciencia y de la investigación que se afana por acumular observaciones sobre los fenómenos; la matematización del saber, es decir, las matemáticas se convierten en el saber modélico, a-histórico, racional y riguroso, en el que los nuevos saberes han de fundarse y configurarse a su imagen.

Desde esta perspectiva de racionalidad, no cabe duda que el profesor de matemáticas deberá ser exigente consigo mismo en dos niveles de su intervención escolar. En primer lugar, en la precisión conceptual y terminológica, esto es, en el uso de un lenguaje que ha de hacer compresible para poner al alcance del alumno cada uno de los conceptos y términos que se vaya introduciendo en la exposición de los contenidos. Aun los conceptos más simples - magnitud, igualdad, semejanza, proporción e identidad - deben ser aclarados en el sentido preciso que se maneja en cada caso o problema. Esta precaución es más necesaria cuando se trata de términos más complejos o ambiguos - irracional, inconmensurable, infinito u otras terminologías - a los que recurren con frecuencia las matemáticas modernas.

Las exigencias de un saber modélico conducen a una importante cautela didáctica: exponer y enseñar las matemáticas de tal modo que aparezca como importante en sí mismo y decisivo cada uno de los pasos de un problema o teorema, y no solamente la solución final. La educación matemática es una labor orientada a la

[86] Se podría aquí recordar al filósofo M. Kant que, razonando al hilo de la ciencia moderna y de las matemáticas, escribió en la Introducción a la *Crítica de la razón pura*, “No hay duda alguna de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia. Por consiguiente, *en el orden temporal,* ningún conocimiento precede a la experiencia, todo conocimiento comienza con ella. Pero no por eso todo él procede de la experiencia” (Kant, *Crítica de la razón pura,* B 1. Trad. cast., P. Ribas, Ed. Alfaguara, Madrid, 1978, p. 41-42)

Universidad Pontificia de Salamanca

formación y competencia habitual para el cálculo, que no se alcanzará sino mediante la comprensión de la importancia que en sí mismo tiene cada paso

2) La racionalidad moderna se define por una serie de rasgos entre los que sobresalen el nuevo modo de entender la razón, no ya como una facultad sino como una forma de conocimiento o como el conjunto de los dinamismos superiores de conocimiento. La razón en la modernidad es el escenario donde se lleva a cabo la revelación cognoscitiva de las diversas realidades que conocemos, pero no es una revelación confiada sino crítica. Un rasgo específico de la razón moderna es la lucha por su autonomía, primero frente a Dios y luego frente a la experiencia senso-perceptual, a fin de alcanzar esa razón pura kantiana, que le permite obrar sin contaminaciones de confusión y oscuridad. A fin de evitar confusión y oscuridad, se exige de modo especial al profesor de matemáticas que transmita precisión sobre el significado del orden, de la finitud y concreción de las operaciones, sobre la relación entre método y notación, que son condiciones insoslayables para poner en claro la discursividad lógica sobre la que se articulan todas las soluciones operativas.

3) En la modernidad se ofrecen nuevas realidades plurales y desconocidas, que es necesario investigar. A nuevos problemas nuevos procedimientos y así se comportan los protagonistas de la nueva situación: la observación y el experimento pasan a ocupar el primer lugar como procedimientos con los que aproximarse al estudio de las nuevas realidades y al descubrimiento de las leyes y regularidades que rigen las los fenómenos naturales. En la nueva ciencia se acentuó el papel de los procedimientos en la elaboración del discurso científico y esta perspectiva debiera ser considerada con mayor atención desde el punto de vista educativo. El profesor ha de transmitir que lo importante en los problema no es tanto la solución cuanto la comprensión de los procedimientos para llegar a la solución o aproximarse a ella, si bien el resultado final sea lo buscado desde el punto de vista práctico.

3.8.3.- Aportaciones de los innovadores a la nueva ciencia

Las aportaciones de los grandes iniciadores y creadores de la nueva ciencia se presentó desde una triple perspectiva que tuvo en cuenta la concordancia entre sus vigorosas personalidades y la parte más destacada de su producción científica, con la clara conciencia, sin embargo, de que la categoría intelectual y científica de estos genios rebasa cualquier modelo. Se ha pensado también que la perspectiva propuesta está más en consonancia con el sentido pedagógico que se pretende dar a la tesis.

Universidad Pontificia de Salamanca

1) La *primera perspectiva* corresponde a la *geometría*, como representación gráfica matematizada de la experiencia elemental e ineludible de toda realidad material y extensa. Los avances logrados en la astronomía, con repercusiones en toda la cosmología y la física avalaron el recurso a la representación geométrica y sus figuras para explicar el movimiento de los cuerpos celestes y del sol a través del Zodíaco, así como las estaciones y regresiones de los planetas. La geometría fue la mediación necesaria para el progreso de las matemáticas: el círculo, la esfera y el triángulo como figuras prototípicas fueron referencias espaciales que precedieron a la propia argumentación deductivo/inductiva de los procesos matemáticos. Eso no fue una opción casual o accidental, sino que responde, a nuestro juicio, a una esencial y elemental forma de darse la experiencia humana, que se desarrolla y despliega entre el realismo espacial y la lógica racional. El espacio es el suelo firme sobre el que discurre la vida de los seres humanos, en todas sus dimensiones, de las materiales y afectivas a las más espirituales. Consideramos que Copérnico y Kepler son los grandes representantes del enfoque geométrico.

2) Sin alejarse en exceso del anterior enfoque, Galileo y Newton introducen una mentalidad más ocupada en los problemas mecánicos que demanda la auténtica *mecánica celeste* y de la nueva física terrestre, que ellos van a consolidar. De la atención prestada a los movimientos de los cuerpos celestes, estos pioneros de la nueva ciencia orientan sus investigaciones hacia la naturaleza, las causas y el funcionamiento de todos los fenómenos y relaciones que puedan darse entre los móviles. No sólo entre las órbitas de los cuerpos celestes, sino de todos los cuerpos en movimiento, sin excluir aquellos que pertenecen a la naturaleza en la que nos movemos.

3) Descartes y Leibniz se aproximan en sus inquietudes metodológicas, en el sentido de que para ambos el formato metodológico y científico por excelencia viene dado por las matemáticas, porque solo ella ofrece garantías de veracidad, de rigor y de precisión que han de extenderse a todos los ámbitos que pretendan presentarse como conocimientos científicos verdaderos. Descartes, desde sus preocupaciones metafísicas y morales, pretende que los saberes humanísticos tomen a las matemáticas como modelo de sus argumentaciones y Leibniz, mediante la introducción de la mónada, algo análogo al infinito matemático, establece la analogía entre la metafísica y las matemáticas, facilitando la metodología matemática para el universo de los saberes.

En nuestro parecer estas perspectivas son claramente complementarias y en ningún caso excluyentes. Son convicciones desde las que argumentar la motivación

Universidad Pontificia de Salamanca

educativa que lleve al profesor de matemáticas a recurrir a la experiencia de lo sensible, geométrica o mecánica, como mediación didáctica de probada eficacia, precediendo y acompañando, donde sea posible, la enseñanza de las operaciones y ecuaciones matemáticas. Por su claridad y autoridad en el asunto nos parecen elocuentes estas palabras de B. Russell, que preferimos transcribir en su integridad porque nos adherimos plenamente a su solicitud:

Cuando los teoremas son difíciles, habría que enseñarlos primero como ejercicios mediante dibujos geométricos hasta que la figura se haya vuelto completamente familiar; entonces será agradable que nos enseñen las conexiones lógicas que tienen lugar entre las diferentes líneas o círculos. También es deseable que la figura que ilustra un teorema se dibuje en todas sus formas y en todos los casos posibles, para que de esta manera las relaciones abstractas que estudia la geometría puedan surgir por sí mismas como resultado de la semejanza entre una diversidad aparentemente tan grande. En este sentido las demostraciones abstractas sólo deberían constituir una pequeña parte de la instrucción, y habría que darlas cuando, gracias a la familiaridad con las ilustraciones concretas, han llegado a sentirse como la materialización natural de un hecho visible. (Russell, B., 2001, 93).

3.8.4.- Resultados de las revoluciones científicas

No se trata de exponer todos los resultados de las revoluciones científicas de la edad moderna, solo se pretende mostrar algunos de los muchos éxitos que los innovadores y continuadores de la nueva ciencia aportaron al progreso de la ciencia.

1) Entre los resultados importantes y más permanentes para la ciencia sobresalen las leyes científicas formuladas sobre la caída libre de los cuerpos y sobre la ciencia del magnetismo, así como las tres leyes de Kepler para la interpretación del movimiento planetario. Newton inició la ciencia del calor y de la luz, dando lugar a la nueva ciencia de la óptica, al tiempo que elaboró el cálculo infinitesimal, consumó la aplicación de la matemática a la física. Leibniz lega a la posteridad el Teorema fundamental del cálculo.

2) La metodología de la nueva ciencia constituye una irrupción original al dar la mayor relevancia a la experimentación y a la observación. Los nuevos procedimientos siguen a la nueva concepción de la Naturaleza física que, para los sabios del siglo XVII y siguientes, está diseñada y configurada en formas matemáticas a descubrir. En coherencia con tales presupuestos, las matemáticas se constituyen en el patrón – tipo de la nueva ciencia, subrayándose la importancia de la predicción científica, que se va a

Universidad Pontificia de Salamanca

configurar como un rasgo sobresaliente de la ciencia moderna. Las aplicaciones prácticas de la ciencia afectarán al ser humano y a su dominio sobre las fuerzas y tesoros de la naturaleza.

3) Se crean instituciones para el progreso de la ciencia, entre las que sobresalen las Academias y que se constituyen en centros de reunión para realizar experimentos en conjunto; reproducir experiencias efectuadas en otras partes; escuchar informes sobre trabajos realizados por los miembros y enterarse de las novedades provenientes de otros grupos y países. Es destacable la creación de una red formal de comunicaciones, que se llevan a cabo principalmente a través del intercambio de publicaciones y de un registro de los descubrimientos, teorías y conclusiones científicas a que llegan los científicos. Surgen también las Sociedades o Asociaciones de Científicos que siguen pautas de actuación semejantes a las académicas.

4) A lo largo de los siglos siguientes las matemáticas se van configurando como la materia científica instrumental que conforma los métodos de los nuevos saberes emergentes. Es reconocida como la materia más importante en el panorama científico, por su capacidad para efectuar aportaciones fundamentales a otras ciencias y técnicas, como la astronomía, la química, la ingeniería, la física con todas sus ramas, de la mecánica a la electricidad y, hasta a la reciente electrónica. Por su carácter instrumental y por su condición de prodigiosa técnica destinada a facilitar instrumentos de indagación el proceso de la matematización de la ciencia avanza con seguridad.

5) El progreso científico se manifiesta en los siglos siguientes de modo generalizado y se suscitan cambios que afectan a las condiciones del trabajo científico: las universidades se convierten en centros de investigación, siguiendo los nuevos procedimientos matemáticos, se establecen nuevos estudios y grados universitarios, se fundan nuevas universidades y se crean espacios dedicados exclusivamente a la investigación.

En cuanto a los aspectos conceptuales, en el siglo XIX sobresalen las revoluciones de la física: la de la relatividad, la de la mecánica cuántica y la teoría de los campos de Maxwell. Cambios importantes tienen lugar en la química y la biología que cuenta con el nuevo paradigma de la evolución de las especies. La probabilidad y la estadística configuran la metodología de otras disciplinas que fundamentan sus explicaciones, más en la probabilidad que en la causalidad.

En el siglo XX la profesionalización de la actividad del matemático constituye un factor decisivo en el desarrollo de las diferentes ramas de las matemáticas en

Universidad Pontificia de Salamanca

particular y de las ciencias en general. De ello resultará directamente un aumento considerable del número de investigadores y se asistirá a una verdadera explosión del número de publicaciones científicas. En las universidades y escuelas superiores, se reserva a las matemáticas un lugar mucho más importante que en el pasado. La enseñanza de las matemáticas se generaliza en los centros de enseñanza, permitiendo a los estudiantes adquirir una base sólida sobre la que progresará el desarrollo científico.

3.8.5.- Las matemáticas y la ciencia en la actualidad

El progreso de la mentalidad matemática a lo largo de la historia transmite una importante aplicación pedagógica: la importancia de la práctica y de la experiencia operativa en el progreso de los procesos puramente racionales y mentales. Desde antiguo y con mayor intensidad en la sociedad global del conocimiento, los avances matemáticos se desplegaron sobre un ininterrumpido proceso práctico en el sentido que se objetivaron en las operaciones y en los procedimientos. Las matemáticas, en este sentido, no se precipitaron hacia enunciados teóricos sino que se centraron en la comprobación operativa de lo demostrable y lo indemostrable y en su formalización mediante teoremas o leyes formuladas numéricamente.

1) En la Europa de la segunda mitad del siglo XX surgen serias preocupaciones por la actualización de los estudios de las matemáticas y los Estados asumen la tarea de actualizar el estudio de las matemáticas. En el área de álgebra se consideran magnitudes de naturaleza más general; en el análisis se desarrollan y precisan los conceptos de variable, función, límite, integral y derivada, surgiendo una nueva teoría del análisis que es la teoría de las funciones de variable real. Las tendencias más relevantes que canalizan el currículo de las matemáticas en los últimos cuarenta años son la teoría de conjuntos (Cantor), el logicismo (Boole), el formalismo (Hilbert) y el constructivismo matemático (Brouwer).

2) Con la expresión la producción científico-matemática se alude de manera prioritaria a la innovación, incremento y progresiva aceleración en la producción de los conocimientos matemáticos y científicos y, de manera indirecta, al relevante dinamismo social de la ciencia. La tesis se argumenta por los escritos de los expertos, la multiplicación de las bibliotecas y de sus dotaciones, la proliferación de las publicaciones científicas y el extraordinario crecimiento de estudiantes matriculados en la Educación Superior.

Universidad Pontificia de Salamanca

3) En la sociedad global del conocimiento es indudable el reconocimiento social de los científicos, que responde a una acumulación de circunstancias vinculadas con los objetivos progresos de la investigación científica, la progresiva sensibilidad de la Opinión Pública respecto de la ciencia y la creciente atención que los Mass Media prestan a los resultados prácticos de la investigación científica.

La acogida favorable de la ciencia en la sociedad actual, deberá ser ocasión propicia para que el profesor de matemáticas transmita al ánimo de los alumnos esta situación y el horizonte al que conduce este camino que están señalando los científicos a fin de crear vocaciones de matemáticos y científicos, despertar la estima de los alumnos por la ciencia y conducir su atención hacia figuras señeras del panorama científico y los avatares que acompañan los muchos esfuerzos que exige el trabajo de los científicos.

3.8.6.- La democratización de la ciencia

El uso y manejo responsable de las matemáticas y de los procedimientos científicos constituyen una exigencia insoslayable para la planificación económica y social en cualquier campo de la sociedad global. Las matemáticas resultan fundamentales en las operaciones de marketing y prospectiva y las operaciones cuantificadas de ponderación, contraste, estadísticas, estudios de campo, etc., sólo pueden realizarse con seriedad y solvencia mediante las matemáticas, que la sociedad favorece con la pretensión de asegurar el desarrollo de la Ciencia y sus progresos actuales y futuros, precisamente a partir de la formulación matemática de las leyes científicas. La sociedad es consciente del poder de la ciencia y ésta cada día también se hace más deudora de aquella, en cuanto que necesita para su desarrollo de crecientes recursos materiales y humanos de los que solo la sociedad dispone. Estos dos supuestos están sensibilizando cada día más a los habitantes de este planeta sobre la necesidad de una adecuada responsabilidad de los científicos en el uso de los recursos y en la aplicación de sus descubrimientos. Es una obligada exigencia para la buena marcha de la historia y el progreso de la ciencia, no sólo en el ámbito tecnológico y económico, sino también en el social y político.

1) La democratización de la ciencia plantea la negativa a que los grupos de investigación pretendan juzgarse a si mismos en la valoración de sus productos. Mas bien la participación ciudadana está reclamando la necesidad de arbitrar unos códigos y unas normativas rigurosas y transparentes que animen a los científicos a realizar unas

Universidad Pontificia de Salamanca

verificaciones rigurosas de las conclusiones a que llegan para evitar los efectos perversos que acompañan a conclusiones científicas.

2) La investigación básica de la ciencia se transforma en ciencia aplicada y ésta en tecnología con progresiva urgencia, causando una inmediata incidencia de la ciencia en la sociedad que constituye un verdadero cúmulo de riesgos civilizatorios. El proceso desde la investigación básica a la aplicación tecnológica implica, con harta frecuencia, la reducción de los plazos adecuados para la verificación de conclusiones. En el sistema industrial de hacer ciencia que se está imponiendo se cae con facilidad en la situación de evaluar las conclusiones científicas con los criterios que evaluamos la salida al mercado de una nueva marca de coches o de zapatillas.

3) Los riesgos para el ser humano directamente, mediante productos alimenticios o vinculados con la salud, son muchos y graves, como también lo son los que afectan a los recursos naturales. En todo caso la calidad de la vida humana se deteriora desde estos hechos. La sensible Opinión Pública demanda con progresiva urgencia la participación ciudadana en el diseño y seguimiento de la política científica e investigadora a llevar a cabo en la sociedad, a fin de que el ciudadano que es el propietario de la mayor parte de los recursos que financian las investigaciones sea atendido en sus justas y legítimas reivindicaciones.

3.8.7.- Las políticas científicas de I+D+I.

Dos asuntos se tratan en esta síntesis, con los que se pretende resumir lo ya expuesto y mostrado en las explicaciones del apartado (3.7.): el plan nacional de I+D+I y los resultados de las políticas científicas en nuestro país.

1) El VI Plan Nacional para la ciencia es el instrumento que el Estado pone a disposición de los científicos para el desarrollo científico nacional: se articula sobre unos principios fundamentales – generar nuevos conocimientos al servicio de un desarrollo sostenible – está dotado de una estructura integrada por cuatro áreas y posee los medios adecuados para alcanzar los objetivos propuestos, mediante planes nacionales de actuación. Persigue unos objetivos claramente especificados que pueden resumirse en uno: situar a España en la vanguardia del conocimiento. Para esa finalidad se le dota de una organización, unos responsables en los distintos niveles y unos recursos de infraestructuras y económicos imprescindibles.

2) En cuanto a los resultados solo unas escuetas menciones que sinteticen algunas de las aportaciones significativas de los investigadores nacionales: a) Es obvio

Universidad Pontificia de Salamanca

el aumento del número de las publicaciones, aunque parece obedecer más al crecimiento del número de investigadores, que a la productividad investigadora. Crece de manera constante el porcentaje de publicaciones nacionales en relación con el total de publicaciones a nivel mundial. b) Es significativo el aumento de patentes que se solicitan y que han designado a España como objetivo de mercado. Causa cierta extrañeza en cambio el exiguo número de las patentes cursadas por la Oficina Española de Patentes. c) La participación en el Programa EUREKA no parece muy significativa en referencia al periodo de cinco años, de los que tenemos datos. Sin embargo se percibe un lento pero constante aumento de proyectos presentados, lo que puede ser más indicativo de la realidad. En los programas MARCO son todavía menos significativos los datos de que se dispone.

Estos objetivos científico - técnicos que se presentan y, de manera especial, la amplia atención prestada en este capítulo a la ciencia, a sus condiciones y aplicaciones, tienen como propósito contribuir a alcanzar los objetivos pedagógicos de la tesis porque, histórica y conceptualmente, la ciencia es la actividad que, desde el punto de vista pedagógico y didáctico, justifica el interés por las matemáticas y la necesidad de su aprendizaje por los alumnos actuales. No hay ciencia sin matemáticas, ni habrá progreso científico sin su aprendizaje y cultivo. El alumno debe percibir y comprender la *interacción entre ciencia, matemáticas, tecnología, progreso y bienestar social* si se pretende que estudie y comprenda la materia, su lógica y sus mediaciones operativas.

Por propia experiencia y por las aportaciones de la psicología evolutiva, sabemos que no tiene eficacia pedagógica llamar la atención del niño y del adolescente invocando motivaciones que no formen parte de su mundo inmediato, de su experiencia cotidiana. El recurso al futuro con expresiones tales como “esto será muy importante para tu futuro”, “sin esto no podrás ganarte la vida” o “esto es fundamental para el curso o cursos próximos”, no tienen eficacia escolar ni estimulan su estudio. Sin embargo, en la actualidad, la tecnología recubre toda la vida personal y social, hasta tal punto que el propio alumno está profundamente influenciado y condicionado por el uso de sus artefactos. No sólo recurre a ellos en la vida doméstica y social, del automóvil al mando a distancia, sino que los juegos, teléfonos, computadoras, libros electrónicos, etc., forman parte de sus intereses más inmediatos. A su vez, la que suele denominarse Gran Ciencia - la energía de origen nuclear, la exploración del subsuelo terrestre y marítimo, la tecnología espacial - en gran medida es más el resultado de deducciones matemáticas

Universidad Pontificia de Salamanca

que de experimentación empírica es el cálculo matemático quien ha llevado a la ampliación de la mecánica clásica con los impresionantes resultados que conocemos.

La dependencia tecnológica y su omnipresencia, a nuestro juicio, debe ser usada como motivación pedagógica encaminada a la enseñanza de la matemática en cuanto que toda esa tecnología con la que el investigador trabaja y el alumno incluso se divierte, ha sido fabricada en virtud de aplicaciones matemáticas. Como en este capítulo se ha expuesto, la matemática fue penetrando todo el ámbito científico haciendo posible su concreción tecnológica. Se ha mencionado y ahora reitero que esa marcha hacia las condiciones de la producción, la socialización y la democratización de las ciencias y de las matemáticas ponen en evidencia su utilidad para la vida actual. Nada hubiera sido posible sin el cálculo y la aplicación matemática. Y si bien es cierto que no es demostrable ante el alumno que eso ha sido así, hacerle ver que su vida presente y futura está ligada a las aplicaciones del progreso matemático, parece un estímulo que compensará la dimensión idealizante y la aparente lejanía de la matemática de la vida cotidiana.

Esta convicción requiere que el profesor, a través de ejemplos palpables como son los juego mecánicos, los usuales "*psp*" manuales, televisores, teléfonos móviles y demás artilugios que el alumno lleva en su bolsillo, pueden ser materia de comentario para hacer evidente que las matemáticas son las que han facilitado la digitalización, la computerización, la información electrónica, etc. La ampliación hacia la tecnología tiene la finalidad de hacer evidente que las matemáticas son algo familiar, que impregna nuestras utilidades más inmediatas e interesentes. No será fácil hacer ver y comprender que lo enseñado en las clases tendrá una aplicación rentable, pero el profesor tendrá que pertrecharse de informaciones científicas y tecnológicas que ilustren la inevitable explicación más teórica de sus enseñanzas Hoy las revistas científicas, más o menos especializadas, como *Nature* o *Investigación y Ciencia,* ofrecen informaciones muy interesantes, algunas muy curiosas y llamativas, sobre avances científicos muy sugerentes, a los que el profesor podrá recurrir para aproximar al alumno las aplicaciones científicas y tecnológicas de las matemáticas.

No parece temerario afirmar que el haber alejado el cálculo de la vida pública, en toda su amplitud, ha sido el factor fundamental de las crisis que estamos padeciendo en todo el mundo, pero muy particularmente en España. La falta y los fallos en el cálculo económico de la balanza entre gastos y beneficios, en la previsión de utilidad/necesidad, han sido factores profundamente perturbadores. La actual situación

Universidad Pontificia de Salamanca

de dudas y desconciertos en el contexto de la actual globalización, -económica, tecnológica, ética, estética, etc.- puede deberse a la ausencia de criterios sometidos al cálculo, al rigor y a la seriedad que enseña y exige una mentalidad ilustrada por la matemática.

En este mismo contexto, la enseñanza de la matemática elemental no puede ser pedagógicamente desvinculada de sus utilidades económicas. Cálculo, medida, proporción, gasto, rentabilidad, ahorro y despilfarro de la cantidad, sea de dinero, tiempo, energía, etc., antes que prácticas en la vida cotidiana, son conceptos matemáticos. Espontánea e intuitivamente, lo mismo que sucede con nuestro lenguaje natural, los seres humanos lo vamos aprendiendo desde la infancia. Pero su perfeccionamiento y cultivo encaminado a sus aplicaciones más apreciables, no puede ser sino resultado de la formación matemática, del mismo modo que la espontaneidad lingüística se acrecienta y perfecciona con la enseñanza de la lengua.

A partir de tales convicciones se justifican nuestras concreciones didácticas, practicadas transversalmente por el profesor de matemáticas, desde sus primeras clases.

a) *Transmitir* escolarmente, con comentarios ejemplificados, la certeza de que sin matemáticas no hay ciencia, ni tecnología de utilidad para la vida diaria.

b) *Inducir* el convencimiento de que el cálculo debe ser aplicado a todos los ámbitos de la realidad, no sólo como reflexión racional, sino objetivado a través de formulaciones matemáticamente controlables, para que el futuro tenga menos desajustes y crisis incontrolables.

c) *Fomentar* el aprecio por la ciencia y sus aplicaciones en el ambiente escolar. A ello puede contribuir la adquisición de alguna publicación periódica de divulgación científica, por parte del centro escolar, que el profesor lleve a clase para que los alumnos puedan verla y se estimulen a leer artículos y textos sobre las infinitas aplicaciones tecnológicas. Las matemáticas deben ser enseñadas vinculando su aprendizaje con las infinitas utilidades de sus aplicaciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

3.9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUADO, J., (1994). "Apuntes sobre la idea leibniziana de progreso a la luz de su teoría del continuum", en RACIONERO, Q. Y ROLDÁN, C. (Comp.). *G. W. Leibniz. Analogía y expresión*. Madrid: Universidad Complutense.

BAUMAN, Z., (2007). *Tiempos líquidos.* Barcelona: Tusquets.

BECK, U., (2006). *La sociedad del riesgo global*. Madrid: Siglo XXI.

BELL, D., (1996). Reflexiones al final de una era, en revista *Claves de la Razón Práctica*, nº 68. Madrid: Santillana.

BERGMANN, G., (1961). *Filosofía de la Ciencia.* Madrid: Tecnos.

BERMEJO, V., (2010). "El PEIM: un programa de intervención", en Bermejo, V. (Coord.), *Como enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.

BERNARD, I., (1989). *Revolución en la ciencia*, Barcelona: Gedisa.

BISHOP, A., (2000). "Enseñanza de las matemáticas:¿Cómo beneficiar a los alumnos?", en GORGORIÓ, N.; DELOFEU, J. Y BIHOP, A., (Coord.). *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

BISHOP, A.J.; HART, K.; LERMAN, S.; NUNES,T., (1993). *Significant influences on children's learning of mathematics*. París: UNESCO.

BOURBAKI, N., (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

BUNGE, M., (1972). *La investigación científica*. Barcelona: Ariel.

BUTTERFIELD, H., (1958). *Los orígenes de la Ciencia Moderna.* Madrid: Taurus.

CAMPEDELLI, L., (1970). *Fantasía y lógica en la matemática*. Barcelona: Labor.

CLAPHAN, C., (1998). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Oxford-Complutense.

CLEMENTS, M.A.; ELLERTON, N.F., (1996). *Mathematics education research: past, present and future.* Bangkok: UNESCO.

COLLETTE, J. P., (1985). *Historia de las matemáticas II*. Madrid: Siglo XXI Editores.

COMISIÓN INTERMINISTERIAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA, (2007). *Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica 2008 – 2011*. Madrid: Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT).

CICYT, (2007a). *Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica, 2008 – 2011*. Madrid: FECYT.

__ (2007b). *Resumen. Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica, 2008 – 2011.* Madrid: FECYT.

__ (2008). *Informe SISE 2007*. Madrid: FECYT.

Universidad Pontificia de Salamanca

COMMONER, B., (1990). *En paz con el planeta.* Barcelona: Crítica.

DAMEROW, P.; DUNKLEY, M.E.; NEBRES, B.F.; WERRY, B. (eds.), (1984). *Mathematics for all*. París: UNESCO.

DESCARTES, R., (1959). *Discurso del Método*. Buenos Aires: Losada.

FERNÁNDEZ P., J., (2010). "¿Cómo se hace la ciencia? y ¿cómo se comportan los científicos", en MACEIRAS, M. Y MÉNDEZ, L., (Coor). *Ciencia e investigación en la sociedad actual*. Salamanca: San Esteban.

FERRATER, J., (1994). "Ciencia", en *Diccionario de Filosofía*. Madrid: Ariel.

FORO INTERNACIONAL SOBRE GLOBALIZACIÓN, (2003). *Alternativas a la globalización económica.* Barcelona: Gedisa.

GALILEI, G., (1976). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.* Madrid: Editora Nacional. (Edición preparada por C. Solís y J. Sádaba)

GARCÍA, A., (1991). *Isaac Newton (1642-1727*). Madrid: Labor.

GARBAYO, E., (1978). *Control ideológico de la invención matemática*. Barcelona: Garbayo.

GAVILÁN, P., (2004). *Álgebra en secundaria. Trabajo cooperativo en Matemáticas*. Madrid: Narcea – MEC.

GILSON, E., (1962). *René Descartes, Discours de la Méthode*. París: Ed. Vrin.

GORGORIÓ, N. y BISHOP, A., (2000). "Implicaciones para el cambio", en GORGORIÓ, N.; DELOFEU, J. Y BIHOP, A., *Matemáticas y educación*. *Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó.

GREGORIO, J. R., (2002). "El constructivismo y las matemáticas". *Revista SIGMA*, nº 21, Urria. Vitoria: Gobierno Vasco. P. 113 -130.

HABSBURGO, O., (1986). *Una política para el año 2000*. Madrid: Ediciones Iberoamericanas.

HACKING, J., (1983). *Representar e intervenir*. Barcelona: Gedisa.

HORTALÁ, M.T.; LEACH, J.; RODRÍGUEZ, M., (1998). *Matemática discreta y lógica matemática*. Madrid: Universidad Complutense.

HOLZ, H., (1970). *Leibniz.* Madrid: Tecnos.

INNERARITY, D., (2011). *La democracia del conocimiento*. Barcelona: Paidós.

KANT, M., (1978). *Crítica de la razón pura,* (B 1. Trad. cast., P. Ribas). Madrid: Alfaguara.

KUHN, T., (1962). *The Structure of Scientific Revolution.* Chicago/London: Univ. Press, (Trad. cast., México: FCE, 1975).

Universidad Pontificia de Salamanca

LAMO, E., (1994). *La sociología del conocimiento y de la ciencia.* Madrid: Siglo XXI – C.I.S..

LEKOURT, D. (Dir.), (2010). "Academia", en *Diccionario Akal de Historia de la Filosofía y de las Ciencias*. Madrid: Akal.

LEWONTIN, R. C., (1982). "Introducción", en AA.VV., *La biología como arma social*. Madrid: Alambra.

LEY 13/ 1986, de 14 de abril, de *Fomento y Coordinación General de la Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico*. (Vigente hasta el 2 de diciembre de 2011).

LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, BOE, núm. 106, de 4 de mayo de 2006. (El Título III se dedica al profesorado).

LEY 14/ 2011, de 1 de junio, de la *Ciencia, la Tecnología y la Innovación*. Madrid: BOE, nº 131, 2 de junio de 2011.

LÓPEZ, A., (1997). *Fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad.

MACEIRAS, M., (2006). "Política educativa, tecnociencia y desarrollo", en MEJÍA, R. (Coor.), *Educación, globalización y desarrollo humano*. Santo Domingo (Rep. Dominicana): Búho.

MEJÍA, R., (2009). "La investigación como reto de la Universidad Dominicana", en MACEIRAS, M. Y MEJÍA, R., (Coor.). *Investigación e Innovación*. Salamanca: San Esteban.

MAMIANI, M., (1990). *Introducción a Newton*. Madrid: Alianza.

MARDONES, J. M., (1991). *Filosofía de las ciencias humanas y sociales.* Madrid: Anthropos.

MÉNDEZ, L., (2009). "La sociedad del conocimiento", en MACEIRAS, M. Y MEJÍA, R., (Coor.) *Investigación e innovación*. Salamanca: San Esteban.

MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN, (2008). *Indicadores del Sistema Español de Ciencia y Tecnología 2007*. Madrid: FECYT.

MOYA, F. de, (2008). *Indicadores bibliométricos de la actividad científica española 2002 – 2006*. Madrid: FECYT.

NICOLÁS, J. A., (1994). "Fundamento y expresión en Leibniz", en RACIONERO, Q. Y ROLDÁN, C. (Comp.). *G. W. Leibniz. Analogía y expresión*. Madrid: Complutense.

PASCAL, B., (1963). *Oeubres Complétes*. Senil, París: ed. de L. Lafuma.

PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNÉ, J. y THOM, R., (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Madrid: Alianza.

Universidad Pontificia de Salamanca

PRESIDENCIA DEL CONSEJO EUROPEO, (2002). *Conclusión 47*. Barcelona. En www.consilium.europa.eu/ueDocs ; (Consulta, 6 mayo 2012).

RÁBADE, S., (1994). *La razón y lo irracional*. Madrid: Complutense.

RACIONERO, Q., (1994). "Verdad y expresión. Leibniz y la crítica del subjetivismo moderno", en RACIONERO, Q. Y ROLDÁN, C. (Comp.). *G. W. Leibniz. Analogía y expresión*. Madrid: Complutense.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS, (1999). *Diccionario esencial de las ciencias*. Madrid: Espasa.

REY P., J. y BABINI, J., (1985). *Historia de las matemáticas.* 2 vol. Barcelona: Gedisa.

RIOJA, A. y ORDOÑEZ, J., (1999). *Teorías del universo.* Vol. I. Madrid: Síntesis.

ROSOVSKI, H., (1996). *La Universidad del Siglo XXI: problemas actuales, misión cambiante y posibles soluciones.* Madrid: Universidad Complutense.

RUSSEL, B., (1969). *La perspectiva científica*. Barcelona: Ariel.

RUSSEL, B., (2001). M*isticismo y lógica*. Barcelona: Edhasa.

SAINT-SIMÓN, (1975). *El sistema industrial*. Madrid: Revista del Trabajo.

SIERRA, R., (1991). *Técnicas de la Investigación social*. Madrid: Panorama.

SIERRA, R., (1997).*Tesis Doctorales*. Madrid: Paraninfo.

STEWART, I., (2006). *Cartas a una joven matemática*. Barcelona: Crítica.

TATON, R., (1988). *La ciencia moderna*. Vol. II. Barcelona: Orbis.

UNESCO, (2010). *Conferencia Mundial sobre Educación Superior. 2009*. París. En www.unesco.org/es/wche2009 . (Consulta17/04/2012).

UNESCO, (2012). En www.iesalc.unesco.org.ve (Consulta 17/04/2012)

VALERO, P., (2012). "La inclusión de visiones sobre lo social y lo político en educación matemática", en PLANAS, N. (Coord.), *Teoría crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

WUSSING, H. y ARNOLD, W., (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Zaragoza: Prensas universitarias de Zaragoza.

ZIMAN, J., (1986). *Introducción al estudio de las ciencias*. Barcelona: Ariel.

ZUBIRI, X., (1982). *Discurso de recepción del premio Ramón y Cajal.* 18/10/1982. Madrid: Periódico YA 19/10/1982.

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 4

EL AGENTE DE LA EDUCACIÓN:

EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

C O N T E N I D O __ PÁGS.

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 4.- EL AGENTE DE LA EDUCACIÓN: EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El contenido de este capítulo se dedica a las condiciones del profesional de la educación, que se integran en el conjunto de cualidades del profesor en general, especificando como es obvio otras más concretas que atañen a la formación inicial y permanente del profesor de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato. El profesor ha de poseer las condiciones que la sociedad demanda en cada época y circunstancia, puesto que por la misma naturaleza de las funciones que ha de asumir el profesor es primordial la tarea de socialización crítica que ejerce sobre sus alumnos, al menos en los niveles de la educación primaria, secundaria y bachillerato. El profesor ha de esforzarse en crear actitudes críticas pero esencialmente positivas hacia la sociedad global del conocimiento, que se caracteriza básicamente por unos núcleos densos de contenidos como las dimensiones científicas, tecnológicas y económicas. Consiguientemente el profesor ha de tejer cuidadosamente la urdimbre de los plurales aspectos educativos para que los alumnos - los sujetos educandos son objetivo preferente de la educación - se integren con satisfacción y competencia en la sociedad que les ha tocado vivir, sin renunciar obviamente al cambio del progreso científico y a las mejoras de las condiciones sociales, económicas y políticas del medio de pertenencia. Esta meta permanente del profesor condicionará su ejercicio profesional a lo largo de toda su vida, que muchas veces se alarga en el tiempo, con los consabidos problemas que genera a su ejercicio profesional, más transparentes todavía en un mundo abierto, en que los cambios se suceden con notable celeridad. Desde nuestra concepción, el profesor es la pieza clave de la educación, es el catalizador más importante para el éxito y para la innovación en el escenario de la educación, animado de sentimientos de solidaridad con los individuos y de tolerancia con los diferentes ha de esforzarse por recrear un clima propicio a la comunicación educativa. Me atrevo a afirmar que sin su implicación personal y técnica, todo proceso educativo fracasaría. Esta condición justifica que le dediquemos un capítulo de la tesis al equipamiento humanístico, específico de matemáticas y pedagógico que integran las características esenciales del profesor de matemáticas.

Universidad Pontificia de Salamanca

Desde la perspectiva del alumno se ha de tomar en consideración que en las circunstancias actuales de apertura económica, social y de intensa presencia mediática, a la que están expuestos y son especialmente receptivos los niños, adolescentes y jóvenes, el desfase o distanciamiento de partida entre alumnos y profesores se agranda cada día, complica más el proceso de la enseñanza-aprendizaje y comporta mayores exigencias para superarlo por parte del profesor y de los alumnos. Estas escuetas referencias a circunstancias sociales tan actuales como difundidas por la sociedad globalizada del conocimiento muestran un ejercicio profesional difícil y hasta conflictivo que, unido a la precariedad del empleo y de las circunstancias de su ejercicio, crea situaciones no solo de desencanto sino de temor, que lleva a tantos profesores a frecuentes situaciones de depresión, convirtiendo en verdaderamente penoso el ejercicio profesional. Desde esta perspectiva se impone el análisis de las condiciones y características que han de poseer los profesores para hacer frente con cierto éxito a la difícil complejidad de su ejercicio profesional. A continuación se presenta una breve descripción del contenido de este capítulo.

4.1.- La formación del profesor. No cabe duda que una parte importante de los contenidos que integran la formación de los profesores viene exigida por las condiciones sociales en que el profesor ejerce su rol profesional. En este apartado presentamos un complejo y dinámico escenario con las dimensiones que responden al necesario tratamiento de la formación del profesor, en sus dimensiones más generales e imprescindibles: a) *La personalidad* como organización dinámica constituye la primera y más fundamental dimensión, que compromete toda la formación del profesor, puesto que sus comportamientos serán una derivación de la tarea previamente ejercida sobre el yo individual o personalidad de cada cual; b) *la formación cognitiva* de la personalidad intelectual del profesor exige proyectos de formación que impliquen tanto prácticas como ejercicios específicos de información teórica, que construyan la capacidad analítica, puesto que ésta no es algo innato ni se improvisa; c) en la *formación para la acción comunicativa* se trata la comunicación educativa que no se reduce al puro intercambio de opiniones, exige la necesaria formación lingüística, hablada y escrita, del profesor y el desarrollo de cierta capacidad dialéctica; d) en el *análisis de la personalidad ética del profesor*, se parte de dos supuestos: el ser humano está dotado de unos irrenunciables *universales éticos,* y las políticas educativas no pueden dejar de ampararse en unos valores éticos compartidos y racionalmente fundados, por

Universidad Pontificia de Salamanca

consiguiente el profesor ha de reconocer estas referencias axiológicas reguladoras de su acción educadora.

4.2.- La formación matemática del profesor de la ESO y del bachillerato. En este apartado, el análisis se centra en la formación específica, es decir, la formación matemática del que va a ser profesor de matemáticas en la educación secundaria obligatoria, en el bachillerato y en la formación profesional, que comprende las siguientes dimensiones: a) *La graduación en matemáticas,* en la que se integran un conjunto de contenidos matemáticos, objetivos y competencias de la misma materia, así como normas y valores comunes a todo profesional español. El nuevo título de Grado se elabora a partir de una normativa estatal que organiza los estudios de matemáticas, que con anterioridad componían en título de Licenciado en Matemáticas. El cambio de licenciado a Grado no entraña únicamente nuevos procedimientos metodológicos, sin también nuevas competencias y objetivos en orden a la homologación de nuestros estudios universitarios con los estudios de los países de la Unión Europea para converger en la construcción del Espacio Europeo de la Educación Superior. b) *La preparación específica en un nuevo sistema de competencias matemáticas* que establece la legislación vigente y que orientan, aunque con cierta flexibilidad, a una docencia de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria, en que se acentúa su función social y la resolución de los problemas de la vida cotidiana que ha de enfrentar el ciudadano. Para esta formación competencial en el texto se ofrecen diferentes modelos de organización de las competencias, el texto de las *Recomendaciones* de la Unión Europea y las normativas legales del Estado sobre las competencias que se asignan al profesor de matemáticas en la educación secundaria obligatoria. c) Investigaciones sectoriales de profesores de matemáticas y los informe que nos vienen de la Unión europea insisten en *la progresiva introducción del espacio tecnológico en las aulas de matemáticas* y a pesar de ciertas dificultades que los profesores hallan en su implantación, se está generalizando cada vez más la opinión del positivo impacto de la incorporación de las TICs al proceso didáctico del aprendizaje. Desde este punto de vista se exponen en el texto diferentes experiencias y proyectos del uso de las TICs para la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas, se aducen los argumentos en que se apoya su utilización educativa y se mencionan los resultados de una investigación empírica, que permite afirmar que los avances en el aprendizaje de las matemáticas produce un mejoramiento del aprendizaje general. d) *La propuesta del profesor Hilton.* Se presenta

Universidad Pontificia de Salamanca

también un análisis razonado y con notable soporte sobre la experiencia de muchos años de docencia de matemáticas, que hace el profesor Hilton, sobre la preparación inicial específica del profesor de matemáticas de la educación secundaria obligatoria y de Bachillerato. Al hilo de la esta exposición, nuestro planteamiento respecto de la preparación inicial del profesor de matemáticas, se decanta por la Graduación en Matemáticas, que en la actualidad sustituye a la anterior licenciatura. Las matizaciones de este planteamiento sobre la docencia de las matemáticas y las dificultades a vencer, además de la autoridad científico-didáctica del autor avalan este análisis. e) *El apartado sobre el enfoque comunicativo*, en cuanto situamos la comunicación como un rasgo insustituible, en general de todo profesor, pero también de connotaciones específicas para el profesor de matemáticas, se justifica por si mismo y como plataforma para la comprensión de la educación matemática, que elabora un profesor de la experiencia de Goñi Zabala sobre las condiciones profesionales del profesor de matemáticas, señalando algunos aspectos interesantes y otros que pueden considerarse más discutibles, aunque siempre interesantes y actuales. f) Por último se dedican unas pocas páginas a identificar y analizar algunos de los hechos y razonamientos que avalan *la generalizada preocupación que está cundiendo entre los responsables políticos y técnicos de la educación en la Unión Europea respecto de los profesores de matemáticas* y de la enseñanza de las matemáticas.

4.3.- La formación pedagógica del profesor de la ESO. En este apartado se tratan cuatro asuntos: a) la *legislación genérica y previa* en la que se explora el marco legal de los perfiles que puede tomar la formación pedagógico para el profesorado de la educación secundaria obligatoria y del Bachillerato. b) Mediante *sucesivos decretos* y alguna orden ministerial se concretan los contenidos pedagógicos más generales y los específicos correspondientes a este profesorado, que adquiere la estructura definitiva de Master. c) La *organización de los Master* para la formación del profesorado se encomienda a las universidades, que expedirán los correspondientes títulos. d) Concluye este apartado con una *valoración crítica* de los aspectos positivos y débiles que ofrece el nuevo sistema de los Master de formación pedagógica del profesorado. La experiencia no ofrece todavía datos suficientes para valorar el sistema.

Universidad Pontificia de Salamanca

4.1. LA FORMACIÓN DEL PROFESOR

A pesar de las complejas situaciones que se presentan al sistema educativo desde diversas perspectivas, sin embargo, en la sociedad global la educación de calidad constituye un importante instrumento de progreso para la sociedad, que obliga a una rigurosa preparación inicial y a la actualización continua, a fin de ofrecer nuevos conocimientos y modernas tecnologías. La duración de las competencias y habilidades y también de los conocimientos, que la educación ofrece, está reduciéndose progresivamente por la aceleración de los ritmos de cambio que se suceden en todos los órdenes de la actividad humana y especialmente de la actividad productiva. En la medida en que la educación se vincula cada vez más a la economía se contaminará de las variaciones y cambios que se producen en el ámbito de la misma, que suelen moverse a un ritmo más acelerado que en otros ámbitos de las actividades humanas. El ideal de una actividad para toda la vida y de un empleo permanente no se compatibiliza bien con los cambios en las tareas y profesiones y viene siendo contestado por profesores y directores de las más famosas escuelas de negocios que aconsejan reiteradamente a sus alumnos que en los comienzos de su actividad profesional no han de quedar atrapados en empleos de larga duración ni desarrollar lealtades institucionales permanentes (Bauman, 2008:27).

Las políticas educativas han de diseñar con minuciosidad y preparar con el debido esmero los modos de formación inicial y continua de los formadores de los profesionales teniendo presente el acelerado ritmo de cambios sociales y económicos que tienen lugar en la sociedad actual. Procediendo con una elemental racionalidad, todo profesional y, de manera especial, el profesor ha de asumir la debida responsabilidad respecto de su formación inicial y continua, si no quiere ver cómo en poco tiempo sus conocimientos y competencias se vuelven obsoletas y su integración profesional y laboral se hace progresivamente más difícil y precaria. El individuo sólo no puede hacer frente con éxito a los retos de la situación general de cambio y obsolescencia que le atañe en su quehacer profesional. Han de ser la sociedad y las instituciones educativas, en especial la universidad, conscientes de la situación y con la ayuda del Estado, las que diseñen y pongan en práctica procedimientos variados y densos de contenido y metodologías para asegurar la formación inicial pertinente y la formación continua adecuada a las circunstancias de promoción individual y de progreso social. La formación continua del profesorado, que impulsó la educación de

Universidad Pontificia de Salamanca

calidad, interesaba directamente a los individuos y sus familias, sin embargo, en la sociedad global del conocimiento estos retos trascienden los espacios individuales y han de sustentarse prioritariamente sobre los recursos de las instituciones sociales. Los Estados debieran asumir estos retos como una función esencial a satisfacer. En España la función y características de la formación inicial y permanente del profesorado, en los distintos niveles, están establecida en la Ley Orgánica (2/2006), de 3 de mayo, de Educación, en cuyo Titulo III, referido al Profesorado en general, el Capítulo III se dedica a la formación inicial y permanente de los profesores, su incorporación a la educación pública y a los procedimientos de formación para los profesores que ejercen sus tareas docentes en los colegios públicos.

Teniendo en cuenta la insoslayable necesidad de afrontar este asunto, en este capítulo se tratan algunas de las importantes dimensiones que ha de asumir la formación inicial y continua del profesorado, tanto porque esta categoría profesional es muy heterogénea en relación con los diferentes ámbitos de su ejercicio, como por las diferencias según los países, el nivel de desarrollo, las culturas en que se ejerce. Entre otras características propias y diferenciales, el rol de profesor se ve afectado por la circunstancia de que el ciclo vital del ejercicio profesional es muy largo, en muchos casos más de treinta años. De la situación se infiere, como objetivo específico, la conveniencia y necesidad de proponer algunas ideas que consideramos matrices para articular programas de formación del profesor, aunque a nuestro juicio son aplicables a otros profesionales cuya actividad vaya a desarrollarse ante grupos humanos y colectividades con exigencias intelectuales y éticas.

Entre las condiciones sustanciales para la formación del profesorado, se atiende con preferencia a la *personalidad*, como "organización dinámica" bio-psicológica, a su *articulación cognitiva*, a las *competencias comunicativas* y a la *responsabilidad ética*.

4.1.1.- La personalidad como "organización dinámica" bio-psicológica

En cuanto a la diversidad de factores que intervienen en el comportamiento del profesor, es obligado aclarar, en primer lugar, lo que se entiende por *personalidad* que, desde el punto de vista de nuestro objetivo, se orienta a su articulación con el rol de profesores. Acudimos para tal clarificación a la tradición de cierta psicología, calificada de "humanista" que desde hace casi un siglo, ha atendido con reiteración al problema de la personalidad, sin que nuestras consultas a tratados actuales de psicología hayan

Universidad Pontificia de Salamanca

aportando novedades. Por lo que concierne a nuestro interés, el concepto de personalidad se encuentra bien matizado por Allport, quien en 1961 la definía ya con estas palabras: "La personalidad es la organización dinámica en el individuo de aquellos sistemas psico-físicos que determinan *el comportamiento y la vida cognoscitiva* (thought) que le son característicos" (Allport, 1961: 28-29).

En primer lugar, si se atiende a los términos de la definición de este gran psicólogo, en ella van implícitos elementos que afectan directamente a los individuos considerados como sujetos singulares, esto es, como personas con caracteres peculiares que las diferencia de los demás. Por tanto, la personalidad va siempre asociada a un sujeto singular, a un yo, pronombre personal que identifica a cada cual, en la medida en que posee diferencias individuales que lo distinguen. La personalidad, pues, es atributo propio e intransferible. *En segundo lugar*, siguiendo la misma definición, la personalidad es *organización dinámica*, es decir, no es algo heredado, a modo de identidad biológica, sino que es perfectible y variable. Sin embargo, tal mutabilidad se efectúa de forma *organizada*, esto es, de acuerdo a una interrelación sistémica de todos los elementos *psicofísicos* que intervienen en ella. *En tercer lugar*, y lo más importante para nuestro propósito, la personalidad determina tanto el ámbito intelectual y su actividad, que Allport califica como *vida cognoscitiva*, cuanto el ámbito práctico, esto es, el de las conductas conscientes y libres del individuo, que se denomina comportamiento. En consecuencia, las diferencias en los comportamientos, incluso las reacciones distintas ante los mismos estímulos, obedecen a diferencias en la personalidad del individuo.

Teniendo en cuenta a Allport, y a otros estudiosos de la personalidad, el profesor Pinillos, (1977: 599-602) sintetiza *los elementos* que intervienen en la personalidad, que aquí citamos libremente: a) La personalidad es *algo propio y distintivo* de cada individuo, lo que lleva implícito el reconocimiento de que cada ser humano está dotado de algún fundamento propio y específicamente suyo. b) Implica *un modo específico* e individual de responder a *situaciones heterogéneas*. c) El modo específico de responder se deriva de una organización global de las *funciones adaptativas*. No es, por tanto, un inventario inconexo que se vaya aplicando a cada caso, sino que responde a una *organización básica*. d) Las funciones más importantes que influyen en la organización de la personalidad no son las intelectivas o racionales, sino *las afectivas*. e) En la actualidad, en la articulación de la personalidad se concede más importancia a los *factores sociales* que a los factores constitucionales, lo que se conoce como

Universidad Pontificia de Salamanca

sociogénesis o *sociogenética*. Según esta opinión, los modos de irse manifestando el yo están siempre implicados en series de relaciones que lo condicionan profundamente. f) Más que por leyes fijas, el funcionamiento y comportamiento del individuo, sólo puede ser predicho a través de *sistemas de indicadores* que tengan en cuenta las condiciones específicas o peculiares de cada individuo y de su acción.

Estos supuestos derivados no sólo de Allport, sino de otras teorías de la personalidad[87], justifican nuestro empeño de comprometer la formación del profesor con la articulación de su personalidad en cuanto que todo lo que esperemos de sus comportamientos será una derivación de esa tarea previa, ejercida sobre el yo individual o personalidad de cada cual. Lo que conduce a la conclusión de que la formación más eficaz tendrá siempre en cuenta que no hay un tipo único o modélico de profesor, sino que debe contarse con la personalidad que cada cual individualmente vaya articulando. En ella intervienen, como decíamos, *factores genético/biológicos*, pero son igualmente determinantes *los sociales, educativos y contextuales*. Es esto lo que pretendemos aclarar en los epígrafes siguientes, teniendo en cuenta los propósitos de este capítulo centrado en la personalidad del profesor.

4.1.2.- Formación cognitiva de la personalidad intelectual del profesor

Convendrá adelantar algunas precisiones sobre el concepto *cognitivo*, que consideramos particularmente adecuado para nuestro interés, dirigido a diseñar la personalidad intelectual del profesor. Con el significado de cognitivo se expresa la específica disposición de la mente para recibir, procesar y organizar la información que recibe de la experiencia en general. Por una parte, esto supone reconocer ciertas aptitudes y disposiciones mentales, patrimonio de la estructura y del funcionamiento cerebral; por otra, se admite el papel y la influencia de lo exterior, de nuestro ámbito de

[87] En la obra que acabamos de citar, Pinillos distingue (pp. 588-601) las siguientes corrientes en el estudio de la personalidad: Psicodinámicas (Freud), psicométricas (Allport, Rogers, Castell), Funcional (Michel), Biológico (Gray), Psicosocial (Mandura, Mead), Humanística (Allport, V. Frankl). Siguiendo de cerca esta clasificación, se percibe que en cada una de ellas se privilegian factores distintos como determinantes de la personalidad: desde los inconscientes en Freud a los de orden social en Bandura, así como a los más ligados al concepto de subjetividad, como es el caso de Allport y Frankl. Esta clasificación no es excluyente ni alternativa, porque, aún privilegiando distintos elementos distintos, se admiten también los que las otras teorías señalan.

Universidad Pontificia de Salamanca

experiencias, sobre la propia estructura y el funcionamiento mental. El reconocimiento de la mayor o menor preponderancia de cada uno de estos polos - dotación mental/ experiencia - marca la diferencia entre diversas teorías cognitivistas (García, 2001). Nuestro propósito no es discutir tales discrepancias, pero de ellas decantamos dos convicciones que además vienen avaladas desde siempre por la propia experiencia cotidiana: 1ª) Dar por cierto que la personalidad intelectual es una meta que deber ser perseguida en todas las etapas de la vida. Sería una falacia pensar que el joven universitario titulado ha alcanzado el grado de domino científico necesario para ejercer plenamente la especialidad que ha estudiado en la universidad. 2ª) Convicción de que la inteligencia humana va configurando la complejidad y su funcionamiento a partir de sus experiencias más usuales, de sus acciones y realizaciones, que van remodelando su propio funcionamiento cerebral, en la juventud, en la madurez y en la ancianidad.

Estas tesis que se presentan como muy actuales, no hacen sino actualizar las convicciones de la epistemología genética de Piaget, según la cual, todo el desarrollo de la inteligencia y del pensamiento organizado, a pesar de la preponderancia concedida a las operaciones intelectivas, "no son más que el final de una larga construcción que procede de la acción misma; y es a través de una sucesión ininterrumpida de estructuras, en un principio muy incompletas y poco equilibradas, pero posteriormente cada vez más amplias, complejas y precisas, como la inteligencia alcanza las estructuras formales del pensamiento verbal”(Piaget, 1982: 142). De los primeros a sus últimos escritos, Piaget se manifiesta fiel a tales principios, de tal modo que la coordinación de las operaciones derivadas de la acción, en todas las etapas del desarrollo antropológico, se van articulando como estructuras cognitivas progresivamente formalizadas y racionalmente estables. Esta acción reactiva de la experiencia sobre la mente es, para el autor consecuencia de la propia estructura biológica humana, de tal modo que el progreso evolutivo - cognitivo se desarrolla como un proceso “isomorfo a la evolución orgánica concomitante, que asegura una cierta unidad de funcionamiento".(Piaget, 1982: 147). Piaget se aproxima, sin confirmarla plenamente, a una de las tesis fundamentales de la biología contemporánea según la cual la plenitud del desarrollo antropológico, incluso desde el punto de vista orgánico, llega a ser lo que es tanto por su dotación estructural

Universidad Pontificia de Salamanca

biológica que lo constituye como por todo lo que va haciendo a largo de su vida (Jacob, 1970: 320) [88].

De estas referencias de fondo, extraemos un corolario inmediato para nuestro propósito: ningún proyecto encaminado a la formación intelectual de profesores podrá realizarse *con independencia de prácticas y ejercicios específicos* que deberán acompañar la irrenunciable información teórica. Este corolario, en principio nada novedoso, en nuestra propuesta va acompañado de las concreciones y exigencias empíricas que precisamos a continuación [89].

a) La práctica de la atención reflexiva

Entendemos aquí por atención, la capacidad o competencia para valorar las cosas y situaciones y atender a los contextos específicos en que debe desplegarse nuestra acción, tanto personal como profesional. Esta cautela pudiera ser tildada como banalidad de Perogrullo, a primera vista, sin embargo es una solicitud en la que coinciden la ontología tradicional, centrada en lo que las cosas son por sí mismas, con las metodologías científicas actuales que quieren ser fieles a los hechos (Maceiras, 2007: 20-63). De esta coincidencia deducimos no pocas actitudes, de interés en nuestro proyecto formativo, como son las siguientes: fijar la atención en la realidad objetiva, despojada de aditamentos y suplementos, esto es, *ir a las cosas mismas*, por encima de los prejuicios; distinguir entre el ser y el figurar, entre lo permanente y lo transitorio. Estas actitudes llevarán a sopesar y conceder un valor más justo a todo cuanto nos concierna. La atención supone, pues, definir la situación, esto es, tener claro con qué, con quien y en qué circunstancias debemos movernos en nuestra vida personal y profesional. Esta exigencia demanda que en los programas de formación sea atendida la formación para la atención reflexiva. Atención y reflexión se solicitan mutuamente. En

[88] Jacob, F., La *logique du vivant,* Gallimard, Paris, 1970, p. 320. Se toma esta referencia de Maceiras, M., *Metamorfosis del Lenguaje*, Síntesis, Madrid, 2002, p. 153-154.

[89] En general, menciono pero no sigo la compleja formulación del conocido como *Proyecto Tuning*. Sus valiosas precisiones en torno a las complejas competencias deseables para todo profesor, sobre todo universitario, no puede ser puesta en duda. Ahora bien, su falta de concreción práctica nos parece también una evidencia. Sus propuestas vienen a ser una síntesis de las excelentes cualidades que deben concurrir en todo ser humano, no sólo en el profesor. Una síntesis de tal proyecto se encuentra en un trabajo del profesor Emilio García García, (2006),"Las competencias del profesor en la sociedad del conocimiento"., en Mejía, R., *Educación, Globalización y Desarrollo Humano*, PUCMM, Santo Domingo, R.D.: editorial Buho, pp. 109-151.

Universidad Pontificia de Salamanca

la actualidad, la literatura pedagógica es prolija en recurrir al concepto de reflexión, si bien no siempre se acentúa debidamente la dimensión práctica y operativa del concepto, como se recoge en el texto siguiente:

"La composición misma del vocablo *reflexión* introduce la noción de reiteración, de vuelta o retorno, en nuestro caso del pensamiento sobre sí mismo tras el paso por lo observado, lo visto, lo vivido, en fin, por lo experimentado. Es precisamente este movimiento del *volver sobre* lo que caracteriza a la reflexión como cuidado en doble dirección: cuidado de sí mismo para no extraviarse en el juego del ser y del parecer, y cuidado para que la realidad y la verdad de los objetivos no se confunda con la fugacidad de sus apariciones" (Maceiras, 2007: 37).

La atención reflexiva, en consecuencia, es un acto que tiene un primer movimiento de salir de sí mismo para pasar, atender y analizar todo lo que entra en el campo de nuestras percepciones y experiencias. Es, pues, afirmación y reconocimiento de lo que tenemos delante para pasar, en un segundo movimiento, a la reconsideración interna de esa exterioridad, esto es, a repensar lo que experimentamos. Por último, la reflexión implica emitir un juicio, tomar una decisión, adoptar una actitud sobre el significado y valor de lo que hemos percibido o experimentado. La reflexión exige, pues, el realismo que evite el autoengaño ilusorio, que acecha sin remedio a quien actúa sin la debida atención y reconocimiento, tanto de sí mismo y de sus capacidades, como de la realidad que tiene delante.

Adiestrar en el realismo reflexivo es una práctica que debe ser enseñada y practicada, contra toda ingenuidad formativa. Los programas de formación deben enfrentar al joven profesor con dos ámbitos reales, uno subjetivo y otro objetivo. Desde el punto de vista subjetivo, el profesor debe tomar conciencia de sus propias limitaciones intelectuales, científicas y pedagógicas. Esta reflexión sobre sí mismo le llevará a la preparación minuciosa de las materias y asuntos que tenga que enseñar y abordar en las clases. La experiencia demuestra que una de las más perniciosas corruptelas didácticas es considerar que, como ya se conoce la materia que se debe enseñar, ya se está en condiciones de transmitir su conocimiento. Eso lleva a la actitud futura de no preparar las clases. Desde el punto de vista objetivo, la formación reflexiva debe adelantar las situaciones reales en las que se va a encontrar la práctica educativa: generalizada falta de recursos materiales, condiciones académicas precarias, deficiente falta de formación básica en los alumnos, ausencia de motivaciones profesionales estimulantes, entre otras. Generalmente, los ámbitos educativos, el universitario, el de

Universidad Pontificia de Salamanca

bachillerato, el de la ESO o el de primaria, viven un ambiente con inquietudes intelectuales y sociales que nada tienen que ver con las situaciones profesionales en las que se va a encontrar en la tarea docente, en cuya inmersión se pierden los horizontes amplios que en la Universidad va abriendo la ciencia. El profesor no preparado previamente para este realismo, se percibe frustrado intelectualmente, con pérdida del gusto por su profesión y el abandono de la preocupación por su formación permanente. La formación del profesor debe adelantar y prevenir esta situación, quizás una de las causas del fracaso personal y de la falta de rendimiento de los profesionales de la enseñanza.

b) Mentalidad y metodología analítica

Si se consulta la literatura psicológico/pedagógica orientada a la formación intelectual infantil y juvenil y se compara con la dedicada a la formación investigadora especializada, se verá que la capacidad analítica aparece como una de las competencias más importantes para la adecuada articulación cognitiva en todas las edades y para todo ejercicio intelectual, sea cual fuere el nivel educativo de las personas (Beltrán et.al., 1966). Esta competencia se hace más necesaria en la medida en que la formación del profesor es inseparable de la orientación investigadora, aunque el profesor no vaya a dedicarse a la investigación. Analizar es muestra de madurez intelectual que implica distinguir y, por tanto, diferenciar e identificar, según la acepción que el *Diccionario de la Lengua Española* atribuye al término análisis: "Distinción y separación de las partes de un todo hasta llegar a conocer sus principios o elementos". Analizar supone, no sólo la puesta en práctica de la atención reflexiva, que acabamos de mencionar, sino también implica dar cuenta de aquellos elementos a partir de los cuales se articula cualquier realidad o conjunto, sea cosa, discurso, argumento, etc. En fin, saber analizar es ejercer la destreza de dar cuenta de las partes que configuran cualquier realidad y, por tanto, facilita la evaluación que podamos hacer de ella, puesto que se aprecia a partir de sus componentes, distinguiendo los principales de los secundarios, lo aparente y lo real, lo fijo y lo transitorio. Formar en las actitudes analíticas es, pues, sinónimo de formar en la capacidad de enfocar las cosas desde una perspectiva que no deja de lado nada, incluso aquellos elementos menos perceptibles a primera vista. La mentalidad analítica es fundamental tanto para adquirir como para transmitir conocimientos. *En primer lugar*, el análisis lleva a incorporar conocimientos de manera comprensiva, esto es, tomando conciencia de su significado, de sus efectos y consecuencias. Objetivos que no se

Universidad Pontificia de Salamanca

alcanza sin la precisión en el análisis. *En segundo lugar*, la mentalidad analítica es mucho más importante para el educador que debe transmitir conocimientos, puesto que nada será bien enseñado sin una comprensión por parte del educando de la estructura molecular de las cosas, de la historia de un objeto o una ciencia. Sin embargo, la mentalidad analítica ni es espontánea ni se improvisa. Es una de las competencias que con más amplitud debe integrar cualquier programa de formación, mediante prácticas muy concretas como la lectura comprensiva, estratégicas específicas que puedan ser aplicadas y desarrolladas como habilidades, según la especialidad de los profesores en formación y la disposición para la argumentación coherente, tan necesaria en la vida profesional del profesor, tanto desde el punto de vista docente, como en la esfera de la relación comunicativa interpersonal.

4.1.3.- Formación para la acción comunicativa

Comunicarse con eficacia es quizás la competencia más deseable para cualquier profesor, en todos los niveles educativos. Lo es en la infancia, en la adolescencia del bachillerato y sin merma en su necesario ejercicio lo sigue siendo en la universidad. Así es porque la esencia de la educación en general y de la enseñanza de cualquier materia en particular, es indisociable de la comunicación entre dos sujetos interlocutores que, sin embargo, se encuentran en situaciones muy distantes, tanto desde el punto de vista epistemológico, como social y moral: el maestro o profesor sabe más y, a su vez, está investido de superior y más relevante autoridad. No se da, por tanto, entre ellos una relación biunívoca. *De esa desigualdad* de planos, sin embargo, se derivan para el *profesor exigencias comunicativas específicas*, que sintetizamos en las dos siguientes:

1ª) Recurrir a *procedimientos comunicativos eficaces*, adecuados para recubrir la distancia de niveles entre alumno y profesor. Toda relación educativa se sustenta en esa desigualdad problemática: por una parte, debe ser reconocida por ambos y, por otra, la tarea educativa consiste en superarla. Y es al profesor a quien corresponde adoptar una actitud comunicativa que integre los procedimientos de trato adecuados para superar tal desigualdad.

2ª) Aplicar *estrategias epistemológicamente adecuadas* para transmitir el saber y la ciencia a quien sabe menos que él. Algo a tener en cuenta: la situación de dificultad que implica la comprensión adecuada de lo que no sabemos. Nada, en efecto, será transmitido con eficacia sin la previa comprensión de lo que se transmite.

Universidad Pontificia de Salamanca

Esta duplicidad de disposiciones básicas del profesor las precisamos a continuación siguiendo la exposición que encontramos en el capítulo octavo de la obra de Maceiras (2002: 401-408) *Metamorfosis del Lenguaje*, que lleva por título "Lenguaje y Comunicación". El autor parte de la distancia que existe entre la competencia lingüística y la comprensión comunicativa, distinción fundamental si se piensa en la formación del profesor, quien debe ser consciente de que sea lo fuere lo que él diga y, por bien que lo diga, *no garantiza su comprensión adecuada por sus interlocutores*, que son sus alumnos. Eso supone no pocas cautelas, que sintetizamos en las siguientes.

a) Configurar un contexto psicológico común

Para superar las indudables barreras implícitas en las situaciones de desigualdad entre profesor y alumno, a las que acabamos de aludir, parece imprescindible configurar un contexto comunicativo / educativo común, que solicita estrategias específicas, entre las que señalamos las siguientes.

1ª) *Hacer surgir experiencias comunes y compartibles*, a las que coadyuvan el conocimiento mutuo, para lo que es exigible al profesor hacer perceptibles sus convicciones intelectuales, morales, sociales, etc., demostrando con su conducta que el alumno le interesa y es el objetivo de sus preocupaciones personales y profesionales. El alumno debe intuir esta voluntad "interesada" del profesor.

2ª) *En segundo lugar, la voluntad de enseñarle lo que no sabe* debe ser una evidencia para el alumno, de tal modo que perciba el efecto psicológico del esfuerzo de aproximación, aunque se reconozca la dificultad de la materia que debe aprender.

3ª) *La lección o la materia preparada* difícilmente alcanzarán el propósito de su aprendizaje, si no se trasmiten también por medios no discursivos: presencia grata, tono, gesto, modales, etc.

4ª) *El reconocimiento de la autoridad intelectual y moral del profesor* es un factor esencial para transmitir cualquier enseñanza. Es una exigencia precomunicativa, que no se improvisa sino que debe ser adquirida mediante el dominio personal y la formación psicológica y moral previa del profesor

5ª) *La comunicación educativa* debe contar con que, sea cual fuere su carácter o temperamento, todo ser humano y más todavía el joven, de modo espontáneo e inconsciente, reacciona en defensa de su identidad personal y de sus propias creencias, prejuicios y conocimientos ya adquiridos. Esta actitud de autodefensa se agudiza cuando

Universidad Pontificia de Salamanca

lo que se enseña implica asuntos que van dirigidos a modificar conductas, modos de actuar, costumbres, etc., sean de orden intelectual o práctico.

b) Configuración de un contexto cognitivo común

Entendemos por cognitivo la capacidad de asimilación y procesamiento de la información recibida. Parece lógico afirmar que las disposiciones intelectivas del alumno no son una variable dependiente del profesor y nos parece falaz afirmar que la inteligencia depende de lo que se enseña y de cómo se enseña. Ahora bien, esto en nada aminora la gran influencia de los métodos y contenidos de lo que se enseña, si bien su eficacia cognitiva queda pendiente de la comprensión intelectual adecuada, que solicita cautelas como las siguientes.

1ª) *Los enunciados*, incluso los más complejos desde el punto de vista del conocimiento, deberán adaptarse y ponerse al servicio de las capacidades de comprensión del interlocutor: lenguaje empleado, estilo, forma lógica y retórica de la exposición, ejemplificación y habilidad para "poner ante los ojos", etc.

2ª) *La comunicación educativa* será tanto más eficaz, cuanto más perceptibles sean los beneficios y ventajas que el alumno encuentre en lo que se le pretende hacer comprender. Poner de manifiesto la utilidad, actualidad y rentabilidad, incluso profesional, de la materia que se enseña será un estímulo imprescindible para alcanzar una comunicación educativa eficaz.

3ª) *El efecto comunicativo* será más eficaz en la medida en que se alcancen a introducir en el contexto cognitivo elementos relevantes, esto es, aquellos que produzcan un efecto multiplicador, como puedan ser los deseos, gustos o expectativas profesionales. Ejemplo: para un mal estudiante es relevante hacerle conocer las estadísticas que ponen en evidencia que el mayor número de personas bien remuneradas han sido buenos estudiantes.

4ª) *El sistema de creencias o ideas previas del alumno y su estado mental*, han de ser tenidos en cuenta para reforzar la comprensión de los contenidos teóricos que se quieran transmitir. De ahí la importancia de valorar la influencia del entorno familiar y ambiental, así como tener en cuenta la experiencia y el mundo de la vida de cada cual.

5ª) *La comunicación educativa se amplía* en forma proporcional a los conocimientos previos del alumno que será necesario rescatar y reactivar. Un incremento y cultivo de la memoria supone un agregado de la comprensión y la comunicación.

Universidad Pontificia de Salamanca

“Como advierte Bergson, todas nuestras percepciones están impregnadas de recuerdos y las experiencias presentes arrastran la herencia de la experiencia del pasado que, por una parte, puede facilitar la comprensión actual pero puede también perturbarla en cuanto que puede substituirla. En todo caso, la información y experiencia previas contribuyen a la contextualización intelectual y evaluadora de la nueva información. Esto demanda la rehabilitación de las exigencias de la retención sucesiva de contenidos y datos con el fin de garantizar una comunicación fecunda. Se trata del fomento educativo de la memoria, garantía de la continuidad y unidad del proceso y progreso intelectual, como secuencia comunicativa, sin que esto tenga nada que ver con el *memorismo* estéril” (Maceiras (2002: 405).

c) Efectos educativos de la acción comunicativa

En la actualidad se entiende por *acción comunicativa* el ejercicio de interacciones coordinadas por el lenguaje. En nuestro contexto, la acción comunicativa supone regular las conductas mediante acuerdos establecidos por la conversación y el diálogo entre los que intervienen en los procesos educativos. Se recurre a los usos del lenguaje como mediación privilegiada para alcanzar la necesaria cooperación entre profesor y alumno. Ahora bien, este recurso al lenguaje puede hacerse desde perspectivas distintas, algunas más adecuadas que otras para la relación educativa (Maceiras, 2002).

Una primera perspectiva confía en que la argumentación, lógicamente bien articulada y enunciada, debe ser la mediación educativa para alcanzar acuerdos y superar las diferencias entre profesor y alumno. Tal es la opinión de Habermas (1985). Según otra opinión, Arendt (1993), nuestro lenguaje no está orientado a argumentar, sino a persuadir recurriendo a los valores básicos compartidos por profesor y alumno. La tercera perspectiva considera al lenguaje como simple mediación para el intercambio de opiniones y pareceres subjetivos, sin compromiso alguno orientado a alcanzar alguna verdad compartida. Tal es la opinión de Rorty (1983).

Aplicada a nuestro contexto educativo, la acción comunicativa, propiamente dicha no puede reducirse al puro intercambio de opiniones como sugiere Rorty. Ella debe ser un instrumento real para superar las diferencias y comprometerse con lo considerado más verdadero. Para eso será necesario argumentar bien y, al tiempo, avivar los valores básicos sobre los que se asienta el mundo común a profesor y alumno.

Universidad Pontificia de Salamanca

Esto supone tomar a Habermas y Arendt, no como alternativos, sino como complementarios. Toda comunicación, también la educativa, debe incluir habilidades retóricas, que juegan un papel igualmente notable en la acción educativa. Eso exige, como ya hemos adelantado, la formación lingüística del profesor la que deberá someterse a la formación, no sólo hablada, sino a la capacidad para escribir. No es menos importante la capacidad dialéctica, entendida en el sentido platónico, según el cual la comprensión racional es la conclusión de un proceso ascendente que va desde las apariencias físicas de las cosas a su comprensión racional, mediante la intervención educativa.

Una rueda será sólo un objeto redondo para quien no estudia geometría y no alcanza a saber lo que es una circunferencia para alcanzar el conocimiento de la relación entre su radio y su longitud, con todas las demás derivaciones trigonométricas. La comprensión racional es consecuencia "De un discurso pedagógico capaz de introducir al interlocutor en un paulatino remontarse de lo más evidente y visible a lo más especulativo e invisible. Ello quiere decir que la racionalidad comunicativa no es alcanzable sin la participación activa y la actitud de aprendizaje de todos los intervinientes en la comunicación. Dicho de otro modo: el éxito de la comunicación no se alcanza por imposición sino por convicción. Lo que, además de las solicitudes teóricas que se van evocando, demanda tiempo y práctica pedagógica compartidas"(Maceiras, 2002: 411).

d) Racionalidad comunicativa para el trabajo en común

Además de la importancia concedida a la formación comunicativa del profesor, éste no podrá establecer una relación aceptable con sus compañeros y alumnos sin una racionalidad justificada que pueda ser compartida. Esto supone que aquello que se comunica, sea un contenido científico, una orientación ética o una recomendación práctica, debe estar avalado por alguna razón que reconozcan los interlocutores. En este contexto es muy sugerente el recurso a los tres pivotes racionales siguientes:

1º) *Las evidencias empíricas:* algo es aceptable y puede ser racionalmente compartido cuando se basa en hechos, datos empíricos comprobables, situaciones indiscutibles.

Universidad Pontificia de Salamanca

2º) *Las pruebas y argumentos:* expuestos con lógica comprensible o presentados mediante buenas razones y coherencia. Voluntarismo, autoritarismo, subjetivismo, la opinión personal sin dar argumentos, o el, *a mi me parece* no razonado, imposibilitan la comunicación.

3º) *Coherencia con las normas, leyes o pautas*: para que algo sea comunicable y/o compartible, los interlocutores deben mantenerse y atenerse al marco normativo que regula su interacción. Algo puede ser presentado como excelente o genial, pero la eficacia comunicativa solicita que se atenga a las normas vigentes en su contexto. Conducir por la derecha en Londres no es racional, pero sí lo es hacerlo en Madrid.

La comunicación, la colaboración, el trabajo en equipo, en fin, la vida en común y las relaciones sociales, deben contar con la premisa de las diferencias, dando por descontado que el conflicto y las divergencias son algo implícito a las relaciones y disposiciones en todos los ámbitos y niveles en los que se va desarrollando la razón y la vida de los seres humanos. Así fue a lo largo de su historia, lo que, con los inconvenientes, viene a dignificar sus resultados, también en el ámbito educativo.

4.1.4.- La personalidad ética del profesor

Teniendo en cuenta las exigencias de nuestras actuales sociedades tecnificadas, convertidas en auténticas comunidades del conocimiento, pero también dominadas por los intereses del consumo y del bienestar, el profesor debe enfrentarse con las exigencias de formación en actitudes y hábitos éticos que sean el soporte para su ejercicio profesional con sentido humano en las novedosas coyunturas culturales (Méndez, 2008: 137 -180). El profesor es el auténtico *capital humano* indispensable para la garantía del éxito educativo en las sociedades actuales. Por grandes que sean los efectos beneficiosos de las Tecnologías de la Información y la Comunicación, será un profesor con sólida formación ética, quien habrá de garantizar el futuro de la educación en general y de la transmisión de la ciencia, cada día más exigente de criterios éticos para su aplicación (Maceiras, 2010: 129-159). Apuntamos algunas ideas fuerza que puedan sustentar la *formación del profesor.*

a) Responsabilidad biográfica y las excelencias éticas

Más que cualquier otra persona, el profesor debe reconocerse a sí mismo como el *capital humano* necesario para el desarrollo social actual, es decir, debe ser consciente de la influencia de la tarea de los maestros y profesores en el cambio de

Universidad Pontificia de Salamanca

hábitos y costumbres, personales y sociales. Para ello debe dotarse de la actitud para *asumir por sí mismo la responsabilidad de su biografía con el fin de realizarla como proyecto personal intransferible*. El profesor será tanto más influyente en su futura actividad en la medida en que sea capaz de responder de sus actos, en primer lugar ante sí mismo. La formación para la autobiografía responsable, se erige en fundamento benefactor de la intervención educativa futura. Esta afirmación podrá ser calificada de simpleza, pero ella fue gozne esencial de la filogénesis biológica y cultural de la humanidad y deberá seguir animando la tarea educativa en nuestro tiempo. La formación ética del profesor exige que sitúe las obligaciones, no solo en la obediencia a una ley o a la normativa institucional, sino en el deber de hacerse cada uno cargo de sí mismo. Esta mentalidad ilustrada es esencialmente educativa en cuanto que sitúa la raíz de la ética en la fidelidad a sí mismo y en el cuidado del propio proyecto existencial al que ningún ser humano puede renunciar. Entre las excelencias básicas para un programa de formación de profesores deben mencionarse las siguientes:

1ª) *El respeto a sí mismo como referencia básica del respeto a los demás*. Esta cualidad, valor o excelencia es inaplazable en todo educador y, por tanto, en todo profesor. Es especialmente importante por el número y la variedad de personas con las que se va encontrar en su futura actividad, en la que deberá actuar siempre desde la autoridad intelectual y moral.

2ª) *La virtud o excelencia de la sinceridad*. La sinceridad no es sino la continuidad de la preocupación por la verdad. La sinceridad exige ejercer la propia profesión, no como si se representase un papel de actor eventual, sino como la manifestación permanente de la propia personalidad, sin recurrir a ficciones de conveniencia ante los demás. Una de las cualidades que tanto niños como jóvenes y adultos esperan del profesor, es la consistencia y permanencia de las manifestaciones del talante, de actuaciones y formas regulares de trato y esperables en gran medida.

3ª) *El sentido de la equidad.* Los niños y jóvenes son particularmente sensibles a las diferencias de trato por parte del profesor. La más mínima actitud que lleve implícita alguna preferencia de unos respecto a otros, es una herida en la sensibilidad de todos, tanto de los preferidos como de los postergados. El tacto y el "saber hacer" son aquí virtudes fundamentales porque sobre ellas se va fraguando la relación educativa fecunda

Universidad Pontificia de Salamanca

y duradera. Dentro de la excelencia de la equidad, debe prestarse atención a la formación en la madurez sentimental. Nadie está exento de las propias pasiones, de las tendencias sentimentales e inclinaciones afectivas que, con notable frecuencia, ensombrecen comportamientos impropios de los responsables educativos, que perturban el ambiente de los centros, no sólo de enseñanza preuniversitaria, sino también universitaria. Las preferencias, las amistades particulares o singularizadas, así como los afectos y amores entre profesores y alumnas o alumnos, son un motivo que entorpece profundamente cualquier relación educativa y perturba la armonía necesaria en las aulas y en los centros.

4ª) *La actitud humilde.* Sin remedos moralistas, la humildad es la actitud que, superada la preocupación por sí mismo, dispone para la comprensión de los demás, con la tolerancia de sus impulsos, incluso de sus impertinencias y salidas de tono. Estos comportamientos en sí mismos inaceptables, pueden resultar motivo educativo si el profesor sabe "encajarlas" con respuestas y reacciones de humildad que el alumno debe percibir de modo claro. La humildad requiere el equilibrio interno del profesor precisamente en circunstancias en las que sus alumnos, padres o colegas manifiesten sus tendencias e inclinaciones pasionales.

El profesor humilde será siempre capaz de saber transigir, sin perder autoridad, y dejar el margen de libertad conveniente a sus alumnos. Tal actuación inducirá conductas adecuadas, motivadas más por respeto que por el peso de la autoridad del profesor. Desde esta actitud, no será difícil administrar las discrepancias y poner en entredicho incluso las propias opiniones, revisando y rectificando decisiones, sin la menor merma de la autoridad. A su vez, será esta práctica la que hará compaginables la autoridad y el compañerismo no igualitario, asequible siempre a partir de las actitudes del profesor, exceptuando casos patológicos y conductas marginales. Pero, incluso en esos casos, la humildad reflexiva será más eficaz que el autoritarismo y el puritanismo rigurosos. La humildad sincera tiene por adelantado ganada la confianza del alumno, situación con frecuencia infravalorada en la enseñanza, pero no por eso menos necesaria para su eficacia, tanto desde el punto de vista intelectual como psicológico.

b) Valores básicos en el profesor educador

Es un lugar común de nuestro ambiente postmoderno insistir en que nos faltan referencias seguras en la actualidad para orientar una educación integral. Sin embargo,

Universidad Pontificia de Salamanca

como hemos adelantado más arriba, no estamos desposeídos de valor insoslayable: la obligación de cada uno de realizar su propio proyecto biográfico (Maceiras, 2007:134-139). Y eso debe hacerlo el profesor y cualquier otra persona que viva con cierta consciencia de su papel en el mundo. Ahora bien, cualquier proyecto personal o colectivo, se haría inviable sin algunos valores básicos de referencia que, por grandes que sean las discrepancias, no pueden dejar de animar la formación del profesor y, por tanto, su actividad educativa futura. Son valores que pueden ser calificados de *universales éticos* que deberán pasar de la formulación teórica a las conductas concretas y específicas, fomentadas durante los años de formación universitaria. Aunque pudieran enunciarse de otros modos y en distintos términos, se precisan las preferencias a través de los siguientes contrastes:

- la igualdad a la jerarquía, la solidaridad al conflicto, el acuerdo a la indiferencia
- la verdad a la mentira, cumplir la palabra al incumplimiento de las promesas
- la convivencia al aislamiento, el respeto al desprecio, la comunicación al solipsismo
- la generosidad a la usurpación, el dar al recibir, el trabajo a la explotación
- el esfuerzo a la comodidad, lo sano a lo enfermo, lo espontáneo a lo fingido
- la paz a la guerra y al conflicto, el amor al odio, el perdón a la venganza
- el conocimiento a la ignorancia, el inventar al imitar, lo natural a lo artificial[90]

Siendo estos valores puramente racionales y de sentido común, tienen razón quienes afirman que no hay ninguna escuela neutra, ni la de ideario religioso ni la de orientación laica o aconfesional. Así es, porque no cabe duda que el ser humano está dotado de estos *universales éticos,* entre otros, que el profesor debe reconocer por adelantado como referencias axiológicas fundamentales reguladoras de toda su acción. Se evitará así supeditar la tarea educativa a las ideologías excluyentes, que conducen a la negación de la libertad en educación, porque la someten a sus propios postulados, bajo el domino del poder político o de los grupos de mayor presión e influencia social. No puede haber educación para la libertad sin valores y derechos éticos humanos, como los que acabamos de señalar.

[90] A estas ideas subyacen las tesis de autores actuales de prestigio incontestable. Citamos en particular los siguientes. Arendt, H., (1993). *La condición humana. Barcelona:* Paidós. Habermas, J., (1985). *Conciencia moral y acción comunicativa.* Barcelona: Península. Taylor, Ch., (1989). *Fuentes del Yo.* Barcelona: Paidós. Cortina, A., (1980). *Etica sin moral.* Madrid: Tecnos.

Universidad Pontificia de Salamanca

A su vez, las comunidades y sociedades son depositarias de valores tradicionales que sólo ellas mismas, mediante consensos sociales no manipulados, pueden revisar y desarrollar. En este sentido, una cosa es la libertad de pensamiento y de cátedra, otra muy distinta es el nihilismo axiológico o el exclusivismo ideológico, según el cual cada profesor tendría el derecho de enseñar lo que subjetivamente considere conveniente, sin respeto a la búsqueda de la verdad, a los programas y materias, a la normativa legal, a las atribuciones de la familia y a los derechos humanos. Tal actitud supondría la invalidación de la educación como proceso hacia la libertad individual y social. Por las mismas razones, las políticas educativas no pueden dejar de ampararse en unos valores éticos compartidos y racionalmente fundados, como los que hemos enumerado.

4.1.5.- Aproximación valorativa

El problema de fondo, de lo hasta aquí sugerido, es lograr un responsable desarrollo del ser humano implicado en el proceso educativo, en este caso la referencia inmediata es el profesor pero también queda imbricado en ese objetivo de la educación, la mejora del otro, el alumno, por lo que el discurso ha de elevarse a concretar cuáles son las características del ideal de persona, de esta forma se llega a un plano científico – filosófico, que es la perspectiva que hemos pretendido en los puntos anteriores. Se ha de tener en cuenta que la calidad de la educación de un país no es superior a la calidad de su profesorado. De ahí la prioridad que la gran mayoría de las reformas educativas otorgan al fortalecimiento de la profesión docente[91] (Marchesi, 2009:135). Como pone de manifiesto la investigación comparada, los países que logran los mejores resultados en las evaluaciones internacionales cuidan especialmente a su profesorado: seleccionan

[91] "Pero si el profesorado es clave para la calidad de la enseñanza, es preciso admitir también que no se puede mejorar la acción educativa de los profesores sin conseguir, al mismo tiempo, mayores niveles de calidad en el funcionamiento de las escuelas. Como resume de forma gráfica Alba Martínez (2009), el desarrollo profesional docente y la mejora de la escuela constituyen las dos caras de una misma moneda o, para expresarlo con más claridad, forman una unidad indisoluble al modo de una cinta de Moebius, ese objeto geométrico en el cual es imposible diferenciar fuera de dentro. Los docentes trabajan en un contexto social y cultural determinado y en unas condiciones educativas y laborales específicas. Las políticas públicas a favor del profesorado necesitan tener en cuenta estos contextos y condiciones para remover los posibles obstáculos que limitan el éxito de determinadas iniciativas orientadas de forma específica al desarrollo profesional de los docentes. Desde esta perspectiva, las propuestas para mejorar la situación del profesorado deben basarse en enfoques contextuales e integrales, en los que se tengan en cuenta todos los factores que contribuyen a facilitar el trabajo de los docentes. En el mismo sentido y de forma complementaria, la gran mayoría de las iniciativas que se plantean para mejorar la educación no deben perder de vista su implicación para el fortalecimiento de la profesión docente" (Marchesi, 2009: 135).

Universidad Pontificia de Salamanca

a los candidatos a la formación docente en el tercio superior de los egresados de la educación secundaria; ofrecen buenos salarios iniciales para hacer de la docencia un profesión atractiva; y presentan múltiples oportunidades de mejora durante la carrera profesional (Ravela, 2009).

En el territorio de la Unión Europea es un asunto de creciente interés y preocupación, la preparación inicial y permanente de los profesores de matemáticas y así suele recogerse en los informes sobre la enseñanza de las matemáticas, como ejemplo de lo que puede mejorarse esta educación: "En los últimos años la mayoría de los países han emprendido reformas de su estructura con la intención de reforzar el desarrollo de competencias y habilidades, de mejorar los aspectos transversales y de hacer hincapié en la aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana. Este enfoque basado en los resultados del aprendizaje tiende a ser más integral y flexible a la hora de responder a las necesidades de los alumnos. Sin embargo, conseguir que los objetivos curriculares se trasladen efectivamente a la práctica docente en el aula depende, entre otras cosas, de que tanto el profesorado como los centros educativos reciban apoyo y asesoramiento específico sobre cómo impartir el nuevo currículo" (EURYDICE, 2011b:11)

Cada vez hay más conciencia para el establecimiento de sistemas que gestionen la formación permanente del profesorado, pues como afirma el profesor Deulofeu, J., Director del Departamento de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Barcelona, son muchas las iniciativas al respecto pero están escasamente estructuradas y organizadas. "Los cursos de carácter general realizados por la administración en relación con la reforma representan una primera fase de la formación necesaria, pero resultan claramente insuficientes. Es fundamental la oferta de actividades de formación permanente más específicas que ayuden al profesorado de los centros en todas aquellas tareas que deberá desarrollar y que van desde la interpretación del currículum del área hasta los cambios metodológicos necesarios para su implantación real en las aulas del centro. El conjunto de decisiones que hay que tomar es muy elevado y su importancia para el desarrollo del proceso de la enseñanza-aprendizaje es decisiva" (Deulofeu, 2000: 21).

4.1.6.- A modo de síntesis

1) Partiendo de la definición de Allport, para quien *la personalidad* es la organización dinámica del individuo que determina tanto el comportamiento como la

Universidad Pontificia de Salamanca

vida cognitiva, se infiere que la personalidad va ligada a un yo que le identifica distinguiéndolo de los otros, es algo dinámico, cambia y evoluciona, de manera organizada y por último la personalidad es el ámbito propio de la actividad intelectual y de la acción del individuo. Los estímulos son muchos y variados, más importantes los afectivos que los racionales, más consistentes los sociales que los constitutivos y la previsión de su comportamiento se vincula más a indicadores que tengan en cuenta las condiciones particulares del individuo que a leyes fijas.

2) *La formación continua* del profesor ha de prestar atención a la *formación teórica* que implica información y capacidad para transformar la información en conocimiento y esta operación encaminada a la formación del profesorado tampoco podrá realizarse con independencia de las prácticas. La argumentación se refiere al reconocimiento de ciertas aptitudes y disposiciones mentales y a la influencia de lo exterior, es decir, a nuestro ámbito de experiencias. La mayor o menor preponderancia atribuida a una u otra - dotación mental / experiencia - marca la diferencia entre diversas teorías cognitivistas.

3) *La comunicación constituye un imperativo de formación* insustituible para el profesor, teniendo en cuenta que mediante la *comunicación hablada y escrita*, valiéndose de los significados del lenguaje pero también de los recursos retóricos y dialécticos, el profesor ha de salvar la problemática desigualdad con el alumno a fin de que éste pueda hacerse con los conocimientos, las competencias y habilidades, que necesita. Esto exige en el profesor la comprensión previa de aquello que mostrará al alumno. Para ello se exige una serie de condiciones: un medio cultural comprendido por ambos; la instauración de un contexto psicológico común; la configuración de un escenario cómodo a los dos actores; la regulación de la comunicación y el diálogo para una acción comunicativa eficaz. En todo caso la acción comunicativa ha de mantenerse siempre dentro de los cauces de la racionalidad que pueda ser compartida en el trabajo en común.

4) *En la personalidad ética del profesor* se ha tratado, en primer término, el conjunto de valores en que ha de inscribirse su acción educativa: el respeto a sí mismo como referencia básica del respeto a los demás; la sinceridad en sus discursos como preocupación por la verdad; el sentido de la equidad, que le lleva a evitar los particularismos o tratos preferenciales a lo que los niños y adolescentes son particularmente sensibles y la actitud humilde, que le disponga para la comprensión de los demás, con tolerancia ante sus impulsos e incluso sus impertinencias. El proyecto

Universidad Pontificia de Salamanca

educativo en que está inmerso el profesor no sería viable sin algunos valores básicos de referencia o *universales éticos* que deberán pasar de la formulación teórica a las conductas concretas y específicas del profesor y de los alumnos, que animarán tanto la formación del profesor como su actividad educativa.

5) En la *aproximación valorativa* se muestra la incuestionable relación entre calidad educativa y la calidad del profesorado, que se nutre de la formación inicial y permanente que se ofrece a este colectivo. El profesor ha de ser motivado desde el comienzo para la formación inicial y de manera continua para la formación permanente. No basta enviar publicidad de cursos y seminarios de formación, es necesario prestar ayudas a los profesores y a los centros y que esa formación permanente constituya un aliciente para los centros y fuente de satisfacción para el profesorado.

4.2. FORMACIÓN MATEMÁTICA DEL PROFESOR DE LA ESO Y DE BACHILLERATO

Me ha parecido interesante, al comenzar este apartado del capítulo dedicado a la preparación inicial y específica del profesor de matemáticas, repasar algunas de las preocupaciones difundidas por la Unión Europea en torno a la formación inicial, situación actual y previsiones respecto a la formación permanente del profesorado de matemáticas. Esta es la senda por la que discurrió la etapa de información, discusión y reflexión, que precedió a la configuración del Grado de Matemáticas en España y que protagonizaron, principalmente los Decanos de Facultades y Directores de departamentos de matemáticas de las universidades españolas, como queda claramente recogido en el libro informe, *Titulo de Grado en Matemáticas* (Campillo, 2005). Desde el año 2011 circulan en toda la Unión Europea y también obviamente en España los informes Eurydice sobre *La enseñanza de las matemáticas* y *La enseñanza de las ciencias*, de cuya edición se responsabiliza la Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural (EACEA P9 Eurydice) y en España se lleva a cabo por el *Centro Nacional de Innovación e Investigación Educativa*. Se acompañó de una inespecífica presentación del informe *Mathematics Education en Europe: Common Challenges and Nacional Policies* (EURYDICE 2011b), en que se manifiesta la necesidad de tomar iniciativas en España para ayudar a los alumnos, profesores y centros a enfrentarse al problema del bajo rendimiento en Matemáticas y Ciencias. Los currículos de algunos

Universidad Pontificia de Salamanca

países europeos ofrecen directrices para abordar el problema en términos generales, pero muy pocos definen objetivos o programas específicos sobre las Matemáticas y las ciencias. En los últimos tiempos se han actualizado los currículos de estas materias, pero el apoyo que se está dando al profesorado para que incorporen dichos cambios a su tarea docente aún es muy escaso. En el mencionado informe sobre las matemáticas, se reclama atención sobre tres aspectos: la *formación inicial del profesorado* está aún muy centrada en el currículo a desarrollar; la necesidad de *utilizar metodologías de enseñanza diferentes en matemáticas* para satisfacer las demandas del proceso de la enseñanza-aprendizaje y, por último, *mejorar la formación del profesorado* en los conocimientos y habilidades necesarios para una enseñanza flexible. Entre otras preocupaciones de política educativa, en los países europeos se constatan hechos como la *disminución de alumnos matriculados en los estudios de matemáticas* en la educación superior o la consiguiente *disminución de los titulados superiores en matemáticas* y en otras disciplinas relacionadas con las ciencias. A este propósito la Comisaria de Educación, Cultura, Multilingüismo y Juventud manifiesta que "es urgente abordar este problema, ya que la escasez de especialistas en matemáticas y en otras áreas afines puede afectar a la competitividad de nuestras economías y a nuestros esfuerzos por superar la crisis económica y financiera" (Vassiliou, A., 2011)

En este apartado el análisis se centra en otros aspectos, de manifiesta relevancia igualmente, como los siguientes: *la formación matemática que inicialmente recibe el profesor de matemáticas de educación secundaria obligatoria, mediante los estudios de Grado* en Matemáticas, cuyos contenidos matemáticos adquieren preeminencia sustancial. En las circunstancias actuales, se estima necesario que la educación incorpore, además de los conocimientos, el pertinente bagaje de competencias. *La adquisición de competencias por parte del profesor de matemáticas* mediante la programación de los estudios del Grado, del Master y mediante su trabajo y experiencia personal, es algo imprescindible para el éxito docente. *La introducción de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas y el uso de las TICs en las explicaciones matemáticas* de aula hacen más asequible el éxito del proceso de la enseñanza aprendizaje. Se exponen asimismo *algunos planteamientos complementarios sobre la formación específica del profesor de matemáticas de la ESO* que estimo de interés por las propuestas enunciadas por destacados autores sobre la formación matemática del profesor y por la autoridad magisterial de sus autores. Se concluye este apartado con

Universidad Pontificia de Salamanca

algunos comentarios sobre aspectos destacados y problemáticos de la *enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la Unión Europea*.

4.2.1.- Graduación en Matemáticas

Para iniciar este apartado, me ha parecido oportuno una idea tomada del libro *"Cartas a una joven matemática"*, en que el autor insiste reiteradamente que "nadie llega sin querer a ser matemático. Por el contrario, es un empeño en el que incluso las personas con talento pueden quedar apartadas" (Stewart, 2006: 21). Se requiere, al menos, la convergencia de algunas circunstancias, como la dedicación de buenos profesores para que alguien, aún con talento, llegue a culminar con éxito los estudios matemáticos. La mayor parte de las matemáticas han de enseñarse mediante la acción de profesores con un amplio conocimiento de las mismas y comprensión profunda de los temas que se estudien. Este planteamiento de Stewart para la enseñanza superior, es también válido para el profesor de matemáticas de la ESO o que imparte su docencia en las clases de bachillerato. Con sus explicaciones debería satisfacer las necesidades de la mayoría de sus alumnos y "contribuir a la formación cultural del estudiante en general y ofrecer preparación profesional a quienes usarán más tarde las matemáticas, es decir, a los que pretenden ser ingenieros y científicos, teniendo en cuenta a la vez las ciencias físicas, que son la base de nuestra civilización tecnológica, y las ciencias sociales, que pueden hacer progresivamente mayor uso de las matemáticas en el futuro" (Stewart, 2006:43). Desde esta perspectiva, el profesor de matemáticas dará respuesta a la triple finalidad que importan las enseñanzas de las matemáticas en la educación secundaria y en el bachillerato: las matemáticas como conocimiento, como instrumento para hacer ciencia y como competencia para el desarrollo personal y la integración social. En consecuencia, el profesor de matemáticas, en sus explicaciones ha de tener en cuenta las varias necesidades de los estudiantes presentes en el aula, por lo que en el currículo se incluirán los temas matemáticos más esenciales para futuros matemáticos o de otras especialidades científicas, las carreras técnicas, que exijan preparación específica de matemáticas, aunque ello no justificaría que, por la presencia de unos pocos que piensan dedicarse a las matemáticas o a las carreras técnicas, el profesor de secundaria en su aula se dedicara a aquellos temas que solo pueden interesar a una minoría de futuros especialistas (Piaget, J. & al.,1978: 330).

Este punto de vista ha de estar presente en el análisis sobre los aspectos esenciales de la formación, al nivel de la graduación en matemáticas, que se muestra en

Universidad Pontificia de Salamanca

los párrafos siguientes, teniendo en cuenta también que "en matemáticas es imposible educar con éxito si el profesor no está adecuadamente formado, si no posee un conocimiento que va más allá del nivel que ha de enseñar o si no posee un nivel de comprensión que, como mínimo, se asemeja a aquella de sus mejores alumnos" (Hilton, P., 2000: 80-85). Para cumplimentar esta adecuación de contenidos, competencias y objetivos, el profesor de educación secundaria obligatoria y bachillerato debe estar en posesión del Grado de matemáticas o grados similares y el Master correspondiente, tal como determina la legislación vigente española. Es obvio que, aunque la legislación se refiere a los Grados universitarios en general, yo solo me referiré al graduado en matemáticas.

a) Legislación española sobre el Grado de matemáticas

En España, como en la mayoría de los Estados integrados en las Naciones Unidas, se ha establecido un período educativo obligatorio. Esta circunstancia implica que, ineludiblemente, el Estado español legisla sobre estos estudios, contenidos, objetivos y competencias que se programa adquirir y sobre los competentes para el ejercicio profesional de la docencia en el sistema educativo y de modo especial en la educación secundaria obligatoria. En consecuencia es referencia obligada atender a la legislación vigente y ver qué nos muestra al respecto.

En cuanto a sus antecedentes más próximos a la situación actual y en referencia a la preparación inicial del profesorado de la educación secundaria obligatoria, es obligada referencia a la *Ley Orgánica* 6/2001, de 21 de diciembre, *de universidades,* que establece en el artículo 94 la titulación académica para impartir las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria, "será necesario tener el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto o el título de Grado equivalente, además de la formación pedagógica y didáctica de nivel de Postgrado" [92].

En la *Ley Orgánica* 4/2007, *12 de abril, por la que se modifica la ley orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de universidades,* se vuelve a plantear el asunto de los ciclos de las enseñanzas universitarias y se entra a reformar lo establecido en el artículo

[92] Artículo 94. *Profesorado de educación secundaria obligatoria y de bachillerato*.
"Para impartir las enseñanzas de educación secundaria obligatoria y de bachillerato será necesario tener el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto, o el título de Grado equivalente, además de la formación pedagógica y didáctica de nivel de Postgrado, de acuerdo con lo dispuesto en el artículo 100 de la presente Ley, sin perjuicio de la habilitación de otras titulaciones que, a efectos de docencia pudiera establecer el Gobierno para determinadas áreas, previa consulta a las Comunidades Autónomas" (Ley Orgánica 6/2001, de universidades. Boletín Oficial del Estado, núm. 307, 24 diciembre 2001).

Universidad Pontificia de Salamanca

94 de la LOU 6/2001, modificando el artículo 37 que, en la nueva redacción se establece que “las enseñanzas universitarias se estructurarán en tres ciclos: Grado, Máster y Doctorado” [93] . Desaparece el viejo título de *licenciatura*, que se sustituye por dos complementarios: el Grado y el Master.

La legislación más específica, sobre el título universitario de Grado, está contenida en el Real Decreto 1393/ 2007, de 29 de octubre, *por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales* [94], la nueva ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales y sus correspondientes títulos oficiales, así como las condiciones, contenidos, objetivos y competencias que se adjuntan a las nuevas titulaciones.

a.1) Objetivos para la implantación del Grado

Nos referimos a continuación a los aspectos más relevantes para la configuración de los títulos universitarios y oficiales de Grado, que se especifican en la exposición de motivos de este real decreto:

1º) La primera justificación que aduce el legislador para este relevante cambio en las educación superior se refiere a la obligada construcción del *Espacio Europeo de Educación Superior*, al que España se había comprometido por su integración europea y por adhesión explícita a la *Declaración de Bolonia* que colocaba el horizonte de esta construcción en el año 2010.

Sobre la situación de las titulaciones de grado en la Unión europea, se podría sintetizar diciendo que en la mayoría de los países que forman la actual Unión Europea se ha optado por la titulación de Grado con una duración legal de 3 cursos académicos. Si se toma en cuenta el factor de empleabilidad de los graduados, la situación es más variada y adquiere matices diversos. Reino Unido e Irlanda tienen grados de tres años para acceder al trabajo, pero también tienen grados de cuatro años y por ejemplo en Escocia se exigen los grados con cuatro años para acceder al trabajo profesional de

---

[93] «Artículo 37. *Estructura de las enseñanzas oficiales.*
“Las enseñanzas universitarias se estructurarán en tres ciclos: Grado, Máster y Doctorado. La superación de tales enseñanzas dará derecho, en los términos que establezca el Gobierno, previo informe del Consejo de Universidades, a la obtención de los títulos oficiales correspondientes”. (Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de universidades. Boletín Oficial del Estado, núm. 89, (13 abril 2007).

[94] Este real decreto se recoge casi íntegro en ANEXOS, Capítulo IV, Anexo III.

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas. Esta diversidad situacional también fue observada por el grupo Tuning de Matemáticas [95].

2º) En la exposición de motivos del real decreto (1393/2007) se asume la conveniencia de avanzar hacia una mayor autonomía universitaria y flexibilizar la organización de las enseñanzas universitarias, reconociendo a las universidades la capacidad de organizar sus propios títulos y contenidos, dado así oportunidad a las capacidades de innovación que las universidades pueden aportar a la sociedad española. Con este progreso autonómico la universidad española se aproximaba más al escenario universitario europeo, donde las universidades gozan de espacios amplios de libertad y responsabilidad en la ordenación de sus enseñanzas, titulaciones y expedición de los correspondientes títulos académicos. En consecuencia el legislador anima a las universidades a aprovechar la ocasión para que estos cambios alcancen también a las "metodologías docentes, que centren el objetivo en el proceso del aprendizaje del estudiante, en un contexto que se extiende ahora a lo largo de la vida" (Real Decreto, 1393/2007).

3º) Otros objetivos recogidos en este real decreto se refieren al uso de los "créditos europeos ECTS, tal y como se definen en el Real Decreto" (1125/2003, de 5 de septiembre), con la finalidad de que aparezca no solo el resultado del aprendizaje del

---

[95] "Los dos países donde tradicionalmente los graduados pueden acceder al mercado de trabajo tras un Bachelor de 3 años (Irlanda y el Reino Unido) tienen, a pesar de ello, también Grados de Matemáticas de 4 años que quieren mantener. De hecho, en Irlanda y Escocia los Grados de Matemáticas son, en general, de 4 años. Hay dos países (Alemania y Austria) que parecen haber apostado por Grados de Matemáticas de 3 años con relevancia laboral, aunque en ambos hay todavía muy pocas universidades que hayan adaptado sus títulos. En Italia también se apuesta por Graduados de 3 años empleables, aunque hay un diploma adicional tras 4 años, y se mantienen los 4 años como requisitos para los profesores de secundaria. En seis países los Grados de Matemáticas serán de 3 años, pero parece que se considera que no darán acceso al mercado laboral. Será necesario hacer un Master (Dinamarca, Finlandia, Holanda) o, al menos, un curso adicional (Bélgica, Francia, Suecia). En dos países (Grecia y Portugal) se ha optado directamente por Grados de 4 años" (p.25)

"Todo esto parece plantear dudas sobre la relevancia laboral de los Grados. Los miembros del Grupo Tuning de Matemáticas, en su última reunión, así lo pusieron de manifiesto: "Some members still feel that it is not possible in science to be employable after the 1st cycle; while others asserted that there were several extant examples of such degrees. The problem seems to be that some countries have just chopped their old degrees in 2; this can only be exposed by level descriptors etc." (p.26) (acta de la reunión de Tuning en Atenas, 7-8 de noviembre 2003) (Campillo L., A. (Coord. y Presidente de la CDM) (2005: 25-26). *Titulo de Grado en Matemáticas*. Madrid: ANECA)

Universidad Pontificia de Salamanca

alumnos, sino también su esfuerzo y trabajo por alcanzar los objetivos propuestos, además de facilitar la movilidad estudiantil, de reconocido interés en el espacio europeo. Se aceptó que estos cambios en la educación superior influirían positivamente en el empleo de los estudiantes al finalizar la carrera, lo que obviamente en 2013 no parece haberse logrado. Se introduce una exigencia de calidad en los nuevos planes de estudio que impone una periódica revisión de resultados sobre los planes de estudio propuestos por las universidades.

4º) Como último objetivo, el legislador entiende que "se debe tener en cuenta que la formación en cualquier actividad profesional debe contribuir al conocimiento y desarrollo de los Derechos Humanos, los principios democráticos, los principios de igualdad entre mujeres y hombres, de solidaridad, de protección medioambiental, de accesibilidad universal y diseño para todos y de fomento de la cultura de la paz" (ANEXOS, capítulo IV, anexo III: Real Decreto, 1393/2007, exposición de motivos).

a.2) Estructura de las enseñanzas oficiales.

Los dos asuntos a tratar, se refieren a los siguientes, títulos y directrices generales para el diseño de los títulos de grado, tal como la legislación establece (Real Decreto, 1393/2007).

1º) En cuanto a la denominación de los títulos, la legislación contenida en el real decreto ya mencionado establece que las enseñanzas universitarias Oficiales orientadas a la "obtención de título de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional se estructuran en tres ciclos denominados": Grado, Master y Doctorado (ANEXOS, capítulo IV, anexo III: Art. 8. *Estructura general*)

2º) Las enseñanzas de grado tienen como finalidad "la obtención por parte del estudiante de una formación general, en una o varias disciplinas", orientada a la preparación para el ejercicio profesional. Su superación "dará derecho a la obtención del título de Graduado o Graduada", en Matemáticas o la que corresponda a los estudios realizados, según figura en el RUCT [96] (ANEXOS, capítulo IV, anexo III: Art. 9.*Enseñanzas de Grado*.)

[96] RUCT es el acrónimo de Registro de Universidades, Centro y Títulos, que se llevará en el Consejo General de Universidades.

Universidad Pontificia de Salamanca

3º) Art. 12. *Directrices para el diseño de los títulos de Graduado.* En este artículo se recogen las más importantes disposiciones para la organización de la enseñanza universitaria y oficial del Grado (ANEXOS, capítulo IV, anexo III: Art.12. *Directrices…*):

> 1. Los planes de estudios conducentes a la obtención del título de Graduado serán elaborados por las universidades.
> 2. Los planes de estudios tendrán 240 créditos que contendrán toda la formación teórica y práctica, que el estudiante deba adquirir.
> 3. Estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un trabajo de fin de Grado.
> 4. La Universidad propondrá la adscripción del correspondiente título de Graduado o Graduada a alguna de las siguientes ramas de conocimiento:
>
> a) Artes y Humanidades
> b) Ciencias.
> c) Ciencias de la Salud.
> d) Ciencias Sociales y Jurídicas.
> e) Ingeniería y Arquitectura.
>
> 5. El plan de estudios deberá contener un mínimo de 60 créditos de formación básica.
> 6. Si se programan prácticas externas, éstas tendrán una extensión máxima de 60 créditos y deberán ofrecerse preferentemente en la segunda mitad del plan de estudios.
> 7. El trabajo de fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título.
> 8. El estudiante podrá obtener reconocimiento académico en créditos de sus actividades culturales, deportivas, solidarias y de cooperación, hasta un máximo de 6 créditos del total de créditos del plan de estudios.
> 9. Cuando se trate de títulos que habiliten para el ejercicio de actividades profesionales reguladas en España, el Gobierno establecerá las condiciones a las que deberán adecuarse los correspondientes planes de estudios.

4º) En el art. 13. *Reconocimiento de Créditos en las enseñanzas de Grado,* se establecen normas complementarias sobre "la transferencia y reconocimiento de créditos en las enseñanzas de grado" que han de respetar las reglas que se especifican (ANEXOS, capítulo IV, anexo III: Art. 13. *Reconocimiento…*).

b) Título de Grado de Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid [97]

La atención a este título viene dada porque desde el real decreto ya mencionado los estudios de Grado tendrán los contenidos que establezca la universidad dentro de los

[97] Resolución de 28 de mayo de 2010, de la Universidad Complutense de Madrid, por la que se publica el plan de estudios de Graduado en Matemáticas. Boletín Oficial del Estado, núm. 150, (21 de junio de 2010), pp. 54.349 y ss. (ANEXOS, capítulo IV, anexo IV)

Universidad Pontificia de Salamanca

marcos legales establecidos, que son los referenciados en el punto anterior. Antes de mostrar los contenidos del Grado de Matemáticas en una universidad española, es interesante ofrecer información sobre contenidos en el Grado de Matemáticas de la Unión Europa como se recoge en el Libro Blanco de Matemáticas preparado, a instancias de la ANECA [98].

Para mostrar unos contenidos es necesario atender a un Grado de una universidad, puesto que cada cual establecerá un diseño general adecuado a las normas generales establecidas respecto de los grados a impartir, pero como ha desaparecido la troncalidad que establecía el Estado para todas las universidades y aceptando que ha de favorecerse la flexibilidad y autonomía que corresponde a cada universidad, es obvio

---

[98] 1.3.1 Contenido para los titulados de Grado en Matemáticas en la Unión europea

1.3.1.1 Todos los titulados en matemáticas conocerán y entenderán, y serán capaces de usar, los métodos y las técnicas apropiados a su plan de estudios. La parte común de todos los planes incluirá cálculo en una y varias variables reales álgebra lineal.

1.3.1.2 Los titulados en matemáticas han de conocer las áreas básicas de las matemáticas, no solo las que históricamente han guiado la actividad matemática, sino también otras de origen más moderno. En consecuencia los titulados normalmente habrán de conocer la mayoría de las siguientes materias, y preferiblemente todas:

ecuaciones diferenciales a nivel básico
funciones de variable compleja a nivel básico
algo de probabilidad
algo de estadística
algo de métodos numéricos
geometría de curvas y superficies a nivel básico
algunas estructuras algebraicas
algo de matemáticas discretas.

1.3.1.3 De acuerdo con el carácter y las exigencias del plan de estudios, se desarrollarán otros métodos y otras técnicas, cuyos niveles serán definidos por el propio plan. En cualquier caso, todos los planes incluirán un número importante de asignaturas con contenido matemático.
1.3.1.4 Es necesario que todos los titulados conozcan al menos una de las más importantes áreas de aplicación de las matemáticas, en la que el uso de las matemáticas sea esencial para entender verdaderamente la materia.

3.2 Destrezas
3.2.1 Los estudiantes que se gradúan en matemáticas disponen de una amplia variedad de posibilidades de empleo. Los empresarios valoran en alto grado la capacidad y el rigor intelectual, y las habilidades de razonamiento que estos estudiantes han adquirido, así como sus demostradas capacidades numéricas y el enfoque analítico a la solución de problemas que constituyen sus cualidades más distintivas.
Por tanto, las tres destrezas clave que consideramos que cualquier titulado en matemáticas debería adquirir son:

(a) ***la capacidad para idear demostraciones***
(b) ***la capacidad para modelizar matemáticamente una situación***
(c) ***la capacidad para resolver problemas con técnicas matemáticas.***

Hoy en día está claro que resolver un problema debe incluir su resolución numérica y computacional. Para esto se requiere un firme conocimiento de algoritmos y de programación, así como del uso del software actualmente existente (Campillo L., A. (Coord. y Presidente de la CDM) (2005: 28-29). *Titulo de Grado en Matemáticas*. Madrid: ANECA).

Universidad Pontificia de Salamanca

que para conocer los contenidos de una título de grado, en este caso de matemáticas, se ha de atender a la elaboración que haya hecho cada universidad concreta. Teniendo en cuenta que hice mi licenciatura en la UCM, me pareció coherente exponer el Grado de Matemáticas de esta Universidad que, de acuerdo con una mirada rápida que hice por Internet a otras universidades, el conjunto de contenidos es muy semejante. (ANEXOS, capítulo IV, anexo IV.

b.1*) Descripción del Título de grado en Matemáticas*

* *El grado de Matemáticas* se implanta en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense Madrid.

* Denominación: *Matemáticas, Ciclo Grado*

* Rama de conocimientos: *Ciencias*

* Tipo de enseñanza: *Presencial*

* Idioma de impartición: *Español y/o inglés*

* Modalidades de la matrícula: tiempo completo o tiempo parcial[99]

* Número total de Créditos ECTS del título de Grado en Matemáticas es de *240.00*

Cuadro1: Distribución del plan de estudios en créditos ECTS:

Tipo de materia	Créditos ECTS
Formación básica	64,5
Obligatorias	103,5
Optativas	60
Prácticas Externas	–
Trabajo de Fin de Grado	12
Créditos totales	240

Cuadro 2: Créditos de formación básica. Distribución en materias:

Rama de conocimiento	Materia	Asignaturas vinculadas	ECTS	Curso
Ciencias.	Matemáticas.	Algebra Lineal.	18	1
Ciencias.	Matemáticas.	Análisis de variable real.	18	1
Ciencias.	Matemáticas.	Matemáticas básicas.	9	1
Ciencias.	Física.	Física: mecánica y ondas.	6	2
Ingeniería y Arquitectura.	Informática.	Informática.	7,5	1
CC. de la Salud.	Estadística.	Estadística.	6	2
Créditos totales			64,5	

[99] Para tiempo completo se requiere matricular 60 ó más créditos y para tiempo parcial un mínimo de 30 créditos. Los estudiantes con discapacidad no están sujetos a los límites mínimos fijados.

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuadro 3: Plan de estudios resumido por módulos

Módulo	Materia	Carácter	Créditos ECTS	Semestre
FORMACIÓN BÁSICA.	MATEMÁTICAS.	MATERIA BÁSICA.	45	1.º y 2.º
	INFORMÁTICA.	MATERIA BÁSICA.	7,5	1.º y 2.º
	ESTADÍSTICA.	MATERIA BÁSICA.	6	4.º
	FÍSICA.	MATERIA BÁSICA.	6	4.º
CONTENIDOS INICIALES.	ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS Y APLICACIONES.	MATERIA OBLIGATORIA.	7,5	1.º y 2.º
	ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES.	MATERIA OBLIGATORIA.	12	3.º y 4.º
	MÉTODOS NUMÉRICOS E INVESTIGACIÓN OPERATIVA.	MATERIA OBLIGATORIA.	12	3.º y 4.º
	ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	4.º
	ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	3.º y 4.º
	PROBABILIDAD.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	3.º
	GEOMETRÍA LINEAL.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	3.º y 4.º
CONTENIDOS INTERMEDIOS.	GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA.	MATERIA OBLIGATORIA.	15	5.º y 6.º
	ECUACIONES DIFERENCIALES Y SU ANÁLISIS NUMÉRICO.	MATERIA OBLIGATORIA.	13,5	5.º y 6.º
	ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.	MATERIA OBLIGATORIA.	7,5	5.º y 6.º
	OPTIMIZACIÓN.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	5.º y 6.º
	ECUACIONES ALGEBRAICAS.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	5.º y 6.º
CONTENIDOS ESPECÍFICOS.	FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS.	MATERIA OPTATIVA.	*12	5.º y 6.º
	MATEMÁTICAS GENERALES.	MATERIA OPTATIVA.	*12	5.º y 6.º
	ASTRONOMÍA Y GEODESIA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	5.º y 6.º
	MODELOS LINEALES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	5.º y 6.º
MATEMÁTICA PURA Y APLICADA.	ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	GEOMETRÍA ALGEBRAICA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	ANÁLISIS AVANZADO.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	VARIEDADES DIFERENCIABLES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
CONTENIDOS AVANZADOS EN MATEMÁTICA PURA Y APLICADA I.	ÁLGEBRA CONMUTATIVA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	GEOMETRÍA O TOPOLOGÍA AVANZADAS.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
	ANÁLISIS FUNCIONAL O COMPLEJO.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
CONTENIDOS AVANZADOS EN MATEMÁTICA PURA Y APLICADA II.	MÉTODOS ANALÍTICOS O NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
	ANÁLISIS REAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º

Universidad Pontificia de Salamanca

	PROCESOS ESTOCÁSTICOS O SIMULACIÓN.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	ÁLGEBRA COMPUTACIONAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º

Módulo	Materia	Carácter	Créditos ECTS	Semestre
CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN.	ÁLGEBRA COMPUTACIONAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	FUNDAMENTOS DE LA PROGRAMACIÓN.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
	AUTÓMATAS O COMPUTABILIDAD.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
CONTENIDOS AVANZADOS DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN.	PARADIGMAS DE PROGRAMACIÓN.	MATERIA OPTATIVA.	*18	7.º y 8.º
	GEOMETRÍA COMPUTACIONAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
CONTENIDOS ESPECÍFICOS AVANZADOS.	TEORÍA DE NÚMEROS.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	CÁLULO DE VARIACIONES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	MECÁNICA CELESTE.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
TRABAJO FIN DE GRADO [100].	TRABAJO FIN DE GRADO.	MATERIA OBLIGATORIA.	12	7.º y 8.º

b.2) Competencias del título de Grado en Matemáticas

Las competencias que se proponen para el Graduado en Matemática de la UCM garantizan el cumplimiento de las competencias básicas descritas en el Anexo I y II del Real Decreto 1393/2007, de 28 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. Las competencias propuestas son de dos tipos [101]: transversales y generales.

Síntesis de las competencias transversales:

CT1.- Haber demostrado poseer y comprender conocimientos en el área de las Matemáticas, partiendo de la base de la educación secundaria general.
CT2.- Saber aplicar los conocimientos a su trabajo y demostrar las competencias mediante argumentaciones y resolución de problemas.
CT3.- Tener capacidad para interpretar datos relevantes de índole social, científica o ética.
CT4.- Capacidad para transmitir ideas, problemas y soluciones a un público especializado o no especializado.

[100] Nota: Estos tres cuadros en que se muestra el contenido científico-matemático exigido para el Grado de Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid está publicado en la Resolución de 28 de mayo de 2010, de la Universidad Complutense de Madrid, por la que se publica el plan de estudios de Graduado en Matemáticas. Boletín Oficial del Estado, núm. 150, (21 de junio de 2010), pp. 54.349 y ss.

[101] http://www.mat.ucm.es/index/grado-en-matemáticas (Consulta 21/01/2013)

Universidad Pontificia de Salamanca

CT5.- Haber desarrollado habilidades para comprender estudios posteriores con autonomía.

Síntesis de las competencias generales:

CG1.- Comprender y utilizar el lenguaje matemático, enunciar proposiciones matemáticas, construir demostraciones transmitir conocimientos matemáticos adquiridos.
CG2.- Conocer demostraciones rigurosas de algunos teoremas matemáticos clásicos.
CG3.- Asimilar la definición de un nuevo objeto matemático y ser capaz de usarlo en diferentes contextos.
CG4.- Saber abstraer las propiedades estructurales de los objetos distinguiéndolas de las ocasionales y poder comprobarlas con demostraciones o refutarlas con contraejemplos e identificar errores en razonamientos incorrectos.

b.3) Objetivos del título de Grado en Matemáticas

1.- Conocer la naturaleza, métodos y fines de los distintos campos de las Matemáticas y su desarrollo histórico.

2.- Reconocer la presencia de las Matemáticas en la Naturaleza, la Ciencia y el Arte.

3.- Desarrollas la capacidad analítica y de abstracción, la intuición y el pensamiento lógico mediante el estudio de las Matemáticas.

4.- Capacitar par la utilización de los conocimientos matemáticos, teóricos y prácticos, tanto en contextos académicos como profesionales.

5.- Preparar para posteriores estudios especializados matemáticos o de otros saberes que requieran fundamentos matemáticos.

6.- Comprometer al estudiante con el autoaprendizaje como instrumento de su ejercicio profesional.

7.- Proporcionar capacidad innovadora y de divulgación de los hallazgos científicos.

8.- Respetar los derechos fundamentales y de igualdad entre hombres y mujeres, como se establece en la LOE 3/2007 de 22 de marzo.

9.- Respetar los principios d igualdad de oportunidades y no discriminación, según establece la Ley 51/2003, de 2 de diciembre.

10.-Fomentar los valores de la cultura de la paz, los Derechos Humanos y los valores democráticos, según establece la Ley 27/2005, de 30 de noviembre.

Universidad Pontificia de Salamanca

Estos objetivos propuestos para el título de Grado en Matemáticas, por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid[102] coinciden con los propuestos en el informe Tuning "Hacia un marco común para los títulos de matemáticas en Europa"[103] y con los establecidos en el Libro Blanco de Matemáticas preparado, a instancias de la ANECA, por diversos foros nacionales.

b.4) Normas de permanencia (Boletín Oficial de la Universidad Complutense nº 14, 20-IX-2008).

1.- El número de convocatorias tiene un límite máximo de seis.

2.- Se concederá una convocatoria extraordinaria en los siguientes supuestos:

2.1.-Les reste para finaliza sus estudios un máximo del 30 % de los créditos correspondientes al plan de estudios.

---

[102] Objetivos. http://www.mat.ucm.es/index/grado-en-matematicas (consulta 21/01/2013)

[103] THE MATHEMATICS TUNING GROUP.
El objetivo principal del proyecto fue estudiar la forma de "afinar" (como los distintos instrumentos de una orquesta, no uniformizar) las estructuras educativas europeas, y colaborar así en la construcción del Espacio Europeo de la Educación Superior. Esto debería a su vez contribuir a la movilidad y mejorar las posibilidades laborales de los titulados europeos.
Uno de los campos incluidos en el proyecto Tuning fue el de las matemáticas, y este documento refleja el consenso unánime del grupo de matemáticas del proyecto.
El Grupo Tuning de Matemáticas quiere mostrar su agradecimiento a los coordinadores del proyecto Tuning, Julia González (Universidad de Deusto) y Robert Wagenaar (Rijksuniversiteit Groningen), y a la Comisión Europea por crear las condiciones que permitieron una agradable y provechosa comunicación entre sus miembros.
La finalidad de disponer de un "marco común para los títulos de matemáticas en Europa" es la de facilitar un reconocimiento automático, que contribuya a la movilidad. La idea de un marco común debe ir ligada a la de un sistema de acreditación. Las dos componentes de un marco común son unas estructuras similares (aunque no necesariamente idénticas) y una parte troncal, básica y común, en los contenidos de los dos o tres primeros años del plan de estudios (permitiendo cierto grado de flexibilidad local).
Más allá de la parte básica y troncal del plan de estudios, y sin duda en todo el segundo ciclo, los planes podrían diverger de modo significativo. Puesto que hay muchas áreas en matemáticas, y están enlazadas con otros campos del conocimiento, la flexibilidad es de la máxima importancia.
La base común de todos los planes de estudios incluirá el ***cálculo en una y varias variables reales y el álgebra lineal***.
No presentamos una lista obligatoria de temas que haya que estudiar, pero sí que mencionamos tres destrezas que cualquier graduado en matemáticas debería poseer:

(a) la capacidad de idear demostraciones,
(b) la capacidad de modelizar matemáticamente una situación,
(c) la capacidad de resolver problemas con técnicas matemáticas.

El primer ciclo normalmente debería incluir el aprendizaje de algo de computación y la adquisición del conocimiento de al menos uno de los más importantes campos de aplicación de las matemáticas.
Se debería procurar que los segundos ciclos de matemáticas fueran de muy diversa índole. Su característica común debería ser que todos los estudiantes lleven a cabo una apreciable cantidad de trabajo individual. ***Para conseguir esto, parece necesario un mínimo de 90 créditos ECTS para obtener un título de Master*** (Campillo L., A. (Coord. y Presidente de la CDM) (2005: 36-37). *Titulo de Grado en Matemáticas*. Madrid: ANECA)

Universidad Pontificia de Salamanca

2.2.-No haya disfrutado de una convocatoria extraordinaria por otra asignatura de la titulación.
2.3.-La nota media de su expediente sea igual o superior a la media de la promoción titulada dos cursos anteriores.

3.- Se concederá convocatoria extraordinaria en las siguientes circunstancias que han de ser justificadas documentalmente:

3.1.-Enfermedad grave y prolongada del estudiante.
3.2.-Enfermedad grave o fallecimiento de cónyuge, hijo, padre, madre o hermano.
3.3.-Causas económico-laborales graves de especial relevancia para el caso.
3.4.-Situaciones lesivas graves que afecten a la vida académica del estudiante.
3.5.-Otras circunstancias análogas relevantes, de especial consideración.

En todo caso, estas situaciones serán resueltas por el Rector o persona en quien delegue, previo informe de la Comisión de Estudios.

4.-Los estudiantes de primer curso que no hayan aprobado ninguna asignatura básica u obligatoria en las convocatorias del primer curso, sin que concurra alguna de las circunstancias expresadas anteriormente, no podrán continuar los mismos estudios. Se les permitirá, por una sola vez, iniciar otros estudios en la Universidad Complutense de Madrid [104].

4.2.2.- Las competencias matemáticas en la formación del profesor

En los escritos actuales de educación el asunto de la formación de los profesores suele abundar en una específica terminología de las competencias. El planteamiento competencial [105] adquiere la consistencia y la pertinente coherencia con la nueva formación matemática que se ha elaborado en torno al Grado y al Master de Matemáticas. En el primer apartado de este capítulo se esbozaron algunos aspectos fundamentales de la formación inicial y permanente de los profesores. Ahora bien, esta perspectiva no invalida en modo alguno las aplicaciones prácticas requeridas en la actualidad para el ejercicio actual del rol de profesor, con satisfacción personal y

[104] Normas de permanencia. http://www.mat.ucm.es/index/grado-en-matematicas (consulta 21/01/2013).

[105] Un estudio interesante sobre las competencias como un caso de estudio en que estas se incorporan al currículo es el artículo de RUIZ, J.M., (2010). Evaluación del diseño de una asignatura por competencias, dentro del EEES, en la carrera de Pedagogía: Estudio de un caso real. Madrid: Revista de Educación, 351. Enero – Abril 2010, pp. 435-460.

Universidad Pontificia de Salamanca

aprobación social, en las difíciles circunstancias que conlleva la sociedad global. En todo caso, teniendo en cuenta la experiencia investigadora, que se realiza en el ámbito de la educación secundaria obligatoria, es obligado referirse a las competencias con que ha de dotarse el profesor de matemáticas, que ejerce su profesión en este nivel educativo. Pionera en este asunto ha sido la OCDE que, mediante el documento titulado Marcos teóricos de PISA 2003, publicado por el Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE), define ya en el Prólogo como entienden la competencia matemática. En PISA 2003 se incide en la competencia matemática, "definida como la capacidad de los estudiantes para reconocer, comprender y participar en las matemáticas y opinar con fundamento sobre el papel que desempeñan las matemáticas en la vida diaria. Además, como nuevo elemento del proyecto PISA [106], se ha añadido la evaluación de la capacidad de resolución de problemas, definida como la competencia de los estudiantes a la hora de utilizar procesos cognitivos para resolver problemas interdisciplinarios sin una solución obvia" (PISA 2003, 14). A esta definición se puede añadir otras concreciones, tomadas del mismo documento, que clarifican qué se entiende en este tipo de documentos por el término competencia:

"El término *competencia matemática* se ha escogido para enfatizar el uso funcional del conocimiento matemático en numerosas y diversas situaciones y de manera variada, reflexiva y basada en una comprensión profunda. Por descontado, para que este uso sea posible y viable, se requieren una gran cantidad de conocimientos y de destrezas matemáticas básicas, y tales destrezas forman parte de nuestra definición de competencia. (…) Del mismo modo, la competencia matemática no debe limitarse al conocimiento de la terminología, datos y procedimientos matemáticos, aunque, lógicamente, debe incluirlos, ni a las destrezas para realizar ciertas operaciones y cumplir con determinados métodos. La competencia matemática comporta la combinación creativa de estos elementos en respuesta a las condiciones que imponga una situación externa" (PISA 2003, 28). Para el profesor José Mª Goñi, PISA apuesta

[106] PISA es el acrónimo del Programm for Internacional Student Assessment (Programa para la evaluación internacional de los alumnos) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) que puso en marcha en 1997 para hacer un estudio comparativo, internacional y periódico del rendimiento efectivo de los alumnos de 15 años, a partir de la evaluación de tres competencias clave: comprensión lectora, competencia matemática y competencia científica, que se evalúa cada tres años desde la primera convocatoria que tuvo lugar en el año 2000.

Universidad Pontificia de Salamanca

con total decisión por la finalidad funcional de las matemáticas en la enseñanza secundaria obligatoria [107].

Otro aspecto interesa mencionar en este momento. En este capítulo, nos estamos refiriendo directamente a la formación matemática que ha de poseer el profesor que va a impartir matemáticas en la educación secundaria obligatoria y bachillerato, conviene clarificar en pocas líneas las finalidades de la enseñanza de las matemáticas. En la enseñanza de las matemáticas se pueden perseguir al menos tres finalidades distintas: primera, *la de quienes observan las matemáticas desde la perspectiva de las competencias*. Desde este punto de vista, la razón de la enseñanza de esta materia consistirá en dotar a los alumnos de la capacidad de aplicar con satisfacción personal y social este saber a las variadas y complejas situaciones de la vida en que están ubicados. Como se afirma en el informe español PISA 2009 "la competencia matemática se relaciona con el uso amplio y funcional de esa ciencia; el interés incluye la capacidad de reconocer y formular problemas matemáticos en situaciones diversas" (2009,23). No cabe duda que desde la perspectiva de los documentos PISA, en la enseñanza obligatoria se habrá de acentuar el carácter funcional de las matemáticas. La Unión Europea mediante la propuesta de *Recomendaciones* que hace sobre las competencias clave y autores de prestigio insisten en este punto de vista. Una segunda perspectiva se establece cuando mediante la enseñanza de las matemáticas "se propone la construcción del conocimiento matemático, como base de la organización del currículo. En este enfoque, la propia estructura epistemológica de las matemáticas sirve de eje sobre el que debe pivotar la organización del currículo. Según esta manera de enfocar la enseñanza, un contenido es prioritario sobre otro porque es una pieza más importante en la construcción del edificio matemático. La lógica del currículo se hace coincidir con la lógica de la organización del conocimiento matemático" (Goñi, 2011,23). Una tercera

---

[107] "La propuesta que hace PISA es clara y en sintonía con la idea que desde la Unión Europea se hace por medio de la propuesta de competencia matemática dentro de la lista de competencias básicas. Según esta publicación, la finalidad fundamental que debe acompañar la enseñanza de las matemáticas en la enseñanza obligatoria (dejemos en este momento el bachillerato ya que el proyecto PISA evalúa Matemáticas al finalizar la educación obligatoria), debe residir en la capacidad de aplicar el conocimiento matemático a los contextos. De manera que puede verse una apuesta clara, desde este organismo, para que la finalidad de las matemáticas en la educación obligatoria pivote básicamente sobre el eje de la aplicación funcional de los conocimientos matemáticos" (Goñi, J.Mª, 2011,22)

Universidad Pontificia de Salamanca

finalidad de las matemáticas se refiere a su carácter instrumental al servicio de otros saberes y del progreso científico en general, como constata Pickover (2012: 10) al comienzo de su obra *El libro de las matemáticas* [108].

Estas perspectivas no son incompatibles y a la sazón, quienes defienden la construcción del conocimiento no ignoran su aplicación, si bien la consideran subordinada a la creación del conocimiento y quienes afirman la prioridad de las competencias, no niegan la importancia del conocimiento, si bien debe estar subordinado a las exigencias competenciales y todos comprenden el carácter instrumental de las matemáticas. Según Goñi la LOE (2006) no se decanta claramente por una u otra de las alternativas, las matemáticas como conocimiento que desarrolla las capacidades cognitivas, su valor instrumental para la ciencia o su aplicación funcional. En mi parecer, sin embargo, en esta Ley Orgánica el Legislador, al menos manifiesta cierta afinidad por la finalidad de las competencias, con el argumento de asimilar nuestros estudios a los planteamientos de nuestro entorno europeo, como tendré oportunidad de mostrar en el apartado próximo dedicado a la legislación española y en concreto a la LOE y también se recoge de manera más explícita en el Real Decreto (1631 / 2006), de 29 de diciembre, que tiene por objeto *establecer las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria* e impulsar la inclusión de las competencias básicas en el currículo. Estoy en total acuerdo con la opinión del profesor Goñi que, en la enseñanza obligatoria, debiera prevalecer el "enfoque competencial que tiende a primar el tipo de conocimiento matemático cuyo uso social es más fundamental" (Goñi, 2011, 24). Este enfoque funcional es asumido también por la Comisaria Europea de Educación, Cultura, Multilingüismo y Juventud cuando afirma que "la competencia matemática ha sido considerada por la Unión

[108] "Las matemáticas impregnan todos los campos del conocimiento científico y desempeñan un papel incalculable en biología, física, química, economía, sociología e ingeniería. Las matemáticas pueden utilizarse para explicar los colores de un atardecer o la estructura cerebral. Nos ayudan a construir aviones supersónicos y montañas rusas., a simular el fluir de los recursos naturales de la Tierra, a explorar las realidades subatómicas y a imaginar las galaxias lejanas. Las matemáticas han cambiado el modo en que miramos al cosmos. (…) Las matemáticas nos permiten construir naves espaciales e investigar la geometría del universo. Los números podrían ser la primera forma de comunicarnos con razas alienígenas inteligentes. Algunos físicos han llegado a jugar con la idea de que una mejor comprensión de las dimensiones superiores y de la topología, podría llevarnos a escapar de nuestro universo algún día, cuando éste llegue a su fin por el calor o el frío: entonces podremos decir que todo el espacio-tiempo es nuestro hogar"

Universidad Pontificia de Salamanca

Europea como una de las competencias clave para el desarrollo personal, la ciudadanía activa, la inclusión social y la empleabilidad en la sociedad del conocimiento del siglo XXI" (Vassiliou, A., 2011: Prólogo).

a) Planteamiento de Tribó

Tribó (2008: 183-209) agrupa las competencias específicas profesionales en el caso del profesorado de secundaria en los cuatro ámbitos de competencias indicados por el Informe Delors (1996): a) *Conocer* que apunta directamente a las competencias científicas de los contenidos actualizados del área de conocimiento que ha de impartir y a la formación permanente que ha de estar atenta a los avances de la pedagogía, la psicología y la sociología. b) *Saber hacer* que se refiere prioritariamente a las competencias metodológicas y técnicas, que favorezcan el trabajo en equipo de los alumnos y fomenten la cohesión en el trabajo del grupo de clase al tiempo que progresivamente sean sensibles a las diferencias. El saber hacer apunta directamente a que los alumnos adquieran, además del conocimiento de las cosas, la competencia necesaria para hacerlas. c) *Saber estar* apunta a desarrollar en el estudiante aquel tipo de competencias que le permitan una satisfactoria integración social de participación y colaboración como miembro activo de la comunidad educativa y en la construcción participada de reglas de convivencia democrática en el centro, en el aula y en la sociedad en donde ha de vivir, favoreciendo actitudes de ciudadanía crítica y responsable. d) *Saber ser,* que se refiere al conjunto de competencias personales del conocimiento propio y de la capacidad de tomar decisiones individualmente pero también ayudar en los procesos colectivos de toma de decisiones. Se percibe el aliento del profesor para insertar en el escenario individual y social la racionalidad y comportamientos racionales y conductas razonablemente aceptables y responsables socialmente.

b) Planteamiento de Perrenoud

Perrenoud, P., (2004) desde una perspectiva más moderna y con implicaciones más próximas al papel del profesor en cuanto agente de la acción educativa y miembro integrado en un centro educativo, *organiza las competencias del profesional de la enseñanza en diez tipos o familias de competencias*:

1. Organizar y animar situaciones de aprendizaje.

Universidad Pontificia de Salamanca

2. Gestionar la progresión de los aprendizajes.
3. Elaborar y hacer evolucionar dispositivos de diferenciación.
4. Implicar a los alumnos en sus aprendizajes y en su trabajo.
5. Trabajar en equipo.
6. Participar en la gestión de la escuela.
7. Informar e implicar a los padres.
8. Utilizar las nuevas tecnologías.
9. Afrontar los deberes y dilemas éticos de la profesión.
10. Organizar la propia formación continua.

Según el autor en estas diez familias de competencias, la terminología usada en los títulos, que identifican los diferentes tipos de competencias, está tomada de un referencial adoptado por una institución en concreto, si la elaboración y explicación de los contenidos de cada uno de estos tipos de competencias pertenece a la responsabilidad del autor. En este contexto, competencia significa prioritariamente "la capacidad de movilizar varios recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones" (Perrenoud, P., (2004:10).

Por tanto las competencias en si mismas no tienen por qué ser necesariamente conocimientos, aunque movilizan conocimientos. Son referidas a una concreta situación y como cada situación es única la competencia de una situación puede no tener la condición de competencia en otras situaciones. El ejercicio de las competencias comprende operaciones mentales complejas: se soportan sobre esquemas de pensamiento, permiten determinar y realizar en un tiempo breve la acción adaptada a la situación y, por último, las competencias se pueden adquirir mediante procesos de formación pero también son fruto de la experiencia del trabajo profesional.

Por consiguiente, la descripción de la competencia, remite a tres dimensiones específicas y originales: a) a la situación o situaciones a las que el profesor ha de hacer frente y que debiera controlar; b) la segunda dimensión afecta a los recursos, conocimientos, habilidades, actitudes, etc., a movilizar para hacer frente a la situación y c) la competencia remite ineludiblemente a los esquemas de pensamiento que permiten la movilización de los recursos pertinentes para solucionar la situación o situaciones a que hacer frente. El cuadro que sigue muestra las diez familias de competencias y sus contenidos:

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuadro 4: Competencias y sus contenidos

Competencias de referencia	**Contenidos específicos para trabajar en la formación continua**
1. Organizar y animar situaciones de aprendizaje	Conocer los contenidos de la materia a enseñar y su traducción en objetivos Trabajar desde las representaciones de los alumnos y errores de aprendizaje Planificar dispositivos didácticos e implicar a los alumnos en proyectos de investigación.
2. Gestionar la progresión de los aprendizajes	Concebir y hacer frente a las situaciones según posibilidades de alumnos. Tener visión de los objetivos a enseñar y vincular teoría y actividades de aprendizaje. Evaluar y controlar las competencias a los alumnos en situaciones de aprendizaje.
3. Elaborar y hacer evolucionar dispositivos de diferenciación	Hacer frente a la heterogeneidad en el mismo grupo-clase y en espacios más amplios. Practicar apoyo integrado a alumnos con grandes dificultades. Desarrollar la cooperación entre alumnos y ciertas formas simples de enseñanza mutua.
4. Implicar a los alumnos en su aprendizaje y su trabajo	Fomentar deseo de aprender, relacionando conocimiento y trabajo de clase. Hacer funcionar un consejo de alumnos para negociar reglas y acuerdos. Ofrecer actividades de formación opcionales y 'a la carta'. Favorecer la definición de un proyecto personal del alumno.
5. Trabajar en equipo	Elaborar un proyecto de equipo e impulsar un grupo de trabajo y reuniones. Formar y renovar un equipo pedagógico. Analizar conjuntamente situaciones complejas y problemas profesionales. Hacer frente a situaciones de conflicto entre personas.
6. Participar en la gestión de la escuela	Elaborar y negociar un proyecto institucional y administrar los recursos. Coordinar y fomentar una escuela con todos los componentes. Hacer evolucionar en la escuela la participación de los alumnos.
7. Informar e implicar a los padres	Favorecer reuniones informativas y de debate. Dirigir las reuniones. Implicar a los padres en la valoración y construcción de los conocimientos.
8. Utilizar las nuevas tecnologías	Utilizar programas de edición de documentos y explotar los potenciales. didácticos de programas en relación con los objetivos de la enseñanza. Comunicación a distancia y utilizar instrumentos multimedia en enseñanza.
9.Afrontar los deberes y los dilemas éticos de la profesión	Prevenir la violencia y luchar contra los prejuicios y discriminaciones. Participar en la creación de reglas disciplinares y sanciones de conductas. Analizar relaciones entre enseñanza, autoridad y comunicación. Desarrollar sentido de la justicia, responsabilidad, solidaridad.
10. Organizar la propia formación continua	Saber explicitar sus prácticas y programar la formación personal continua. Negociar un proyecto de formación continua con los compañeros. Aceptar y participar en la formación de los compañeros. Implicarse en las tareas de la enseñanza, del sistema educativo y del centro.

Fuente: Perrenoud, P., (2004:15-16)

c) ***Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo de la Unión Europea (2006), sobre las competencias básicas*** (ANEXOS, cap. IV, anexo I.2)

Universidad Pontificia de Salamanca

Mediante esta *Recomendación* que firman el presidente del Parlamento Europeo y el presidente del Consejo Europeo se establecen unas encomiendas a los Estados miembros de la Unión Europea para desarrollar la oferta de las *competencias clave* para el *aprendizaje permanente*, para todos, en el contexto de las diversas estrategias del aprendizaje. En el punto cuatro (4) de las recomendaciones a los Estados miembros se dice que han de establecerse las infraestructuras pertinentes para la educación y formación de todos los adultos y en ese *todos los adultos*, afirman de manera específica y explícita *incluidos los profesores y formadores*.

En el anexo se recogen las competencias clave para el aprendizaje permanente – un marco de referencia europeo - en el que se especifican ocho tipos de competencias básicas y en esa lista, el número tres (3) lo ocupan conjuntamente la "competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología".

Listado de competencias clave siguientes:

1. comunicación en la lengua materna;
2. comunicación en lenguas extranjeras;
3. *competencia matemática* y competencias básicas en ciencia y tecnología;
4. competencia digital;
5. aprender a aprender;
6. competencias sociales y cívicas;
7. sentido de la iniciativa y espíritu de empresa, y
8. conciencia y expresión culturales.

En el párrafo siguiente, se acentúa la importancia decisiva que atribuyen a todas y cada una de las competencias agrupadas en los ocho tipos que constituyen el marco de referencia, porque "cada una de ellas puede contribuir al éxito de la sociedad del conocimiento". Aunque en el número 3 del listado precedente de competencias aparecen juntas matemáticas, ciencia y tecnología, luego en la especificación que se hace de cada una de las competencias básicas, se definen cada una de estas de manera separada y diferenciada. La competencia básica de las matemáticas es definida en los términos siguientes:

"*La competencia matemática* es la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña — en distintos grados— la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos,

Universidad Pontificia de Salamanca

construcciones, gráficos y diagramas)" (Parlamento y Consejo Europeo, 2006: punto 3.1, pág. 8)).

En cuanto a los c*onocimientos, capacidades y actitudes esenciales relacionados* con la *competencia matemática* en la *Recomendación* se afirman explícitamente tres aspectos considerados importantes. *Primero*, en relación con las capacidades que se exigen en esta competencia básica, se afirma la necesidad de *tener un buen conocimiento* de los elementos estructurales de las matemáticas, números, medidas, operaciones y comprensión de los términos y conceptos matemáticos [109]. *En segundo término* se afirma que los individuos debieran ser competentes para aplicar los principios a las situaciones de la vida cotidiana, de razonar matemáticamente y comprender las demostraciones matemáticas [110]. *Por último* una actitud positiva hacia las matemáticas se ha de fundar en el respeto de la verdad y en la voluntad de encontrar argumentos y evaluar su validez.

d) Legislación española: LOE (2/2006)

Estas recomendaciones de la Unión Europea se complementan en España con dos textos legales de la mayor importancia: el primero es la Ley Orgánica 2/ 2006, de 3 de mayo de Educación. Boletín Oficial del Estado (4 de mayo de 2006) y el Real Decreto 1631/2006. Esta Ley Orgánica pretende simplificar las normativas vigentes para hacerlas más claras y comprensibles y pretende además asegurar, como se afirma en el Preámbulo "la necesaria homogeneidad básica y la unidad del sistema educativo, resaltando el amplio campo normativo y ejecutivo de que disponen estatutariamente las Comunidades Autónomas para cumplir los fines del sistema educativo". Su objetivo último es establecer las bases sólidas para hacer frente a los importantes desafíos que la educación española tiene ante sí, para lograr las ambiciosas metas que se ha propuesto en los próximos años. Se parte de los avances que el sistema educativo ha realizado en

[109] Texto original de la Recomendación: "Las capacidades necesarias en el ámbito de las matemáticas incluyen un buen conocimiento de los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones básicas y las representaciones matemáticas básicas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos y un conocimiento de las preguntas a las que las matemáticas pueden dar respuesta".

[110] Texto original de la Recomendación: "Las personas deberían contar con las capacidades necesarias para aplicar los principios y los procesos matemáticos básicos en situaciones cotidianas de la vida privada y profesional, así como para seguir y evaluar cadenas argumentales. Las personas deberían ser capaces de razonar matemáticamente, comprender una demostración matemática y comunicarse en el lenguaje matemático, así como de utilizar las herramientas de ayuda adecuadas".

Universidad Pontificia de Salamanca

las últimas décadas, incorporando los aspectos estructurales y de ordenación que han demostrado su pertinencia y su eficacia y proponiendo cambios en aquellos otros que requieren revisión. Se asume la convicción de que las reformas educativas deben ser continuas y paulatinas, a fin de favorecer la mejora continua y progresiva de la educación que reciben los ciudadanos.

Tres son los principios que inspiran esta ley: El primero consiste en la exigencia de proporcionar una educación de calidad a todos los ciudadanos de ambos sexos, en todos los niveles del sistema educativo. Se trata de mejorar el nivel educativo de todo alumnado, conciliando la calidad de la educación con la equidad de su reparto. Como segundo principio se exige un mayor esfuerzo compartido a todos los miembros de la comunidad educativa para lograr ese primer objetivo de calidad y equidad. Cita explícitamente al alumnado, los centros y el profesorado que deberán esforzarse por construir entornos ricos de aprendizaje, motivadores y exigentes. El tercer principio, en mi parecer el importante, que inspira esta Ley consiste en un compromiso decidido con los objetivos educativos planteados por la Unión Europea para los próximos años. El proceso de construcción europea está llevando a una cierta convergencia de los sistemas de educación y formación, que se ha traducido en el establecimiento de unos objetivos educativos comunes[111] para este inicio del siglo XXI (LOE, Preámbulo).

En cuanto a las competencias en la LOE se reitera la necesidad de converger con los objetivos educativos de la Unión Europea, que recomienda a los Estados una serie de competencias que han de seguir en la educación secundaria obligatoria y permanente. En este sentido afirma el especial interés que reviste la inclusión de las competencias básicas entre los componentes del currículo y extiende este planteamiento al contexto de la enseñanza primaria, en el Art. 17, letra g): "*Desarrollar las competencias matemáticas básicas* e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la

[111] "Es por ello por lo que en primer lugar, la Unión Europea y la UNESCO se han propuesto mejorar la calidad y la eficacia de los sistemas de educación y de formación, que implica mejorar la capacitación de los docentes, desarrollar las aptitudes necesarias para la sociedad conocimiento, garantizar el acceso de todos a las tecnologías de la información y la comunicación, aumentar la matriculación en los estudios científicos, técnicos y matemáticos y aprovechar al máximo los recursos disponibles, aumentando la inversión en recursos humanos. En segundo lugar, se ha planteado facilitar el acceso generalizado a los sistemas de educación y formación, lo que supone construir un entorno de aprendizaje abierto, hacer el aprendizaje más atractivo y promocionar una ciudadanía activa, la igualdad de oportunidades y la cohesión social. En tercer lugar, se ha marcado el objetivo de abrir estos sistemas al mundo exterior, lo que exige reforzar los lazos con la vida laboral, con la investigación y con la sociedad en general, desarrollar el espíritu emprendedor, mejorar el aprendizaje de idiomas extranjeros, aumentar la movilidad y los intercambios y reforzar la cooperación europea" (LOE, Preámbulo).

Universidad Pontificia de Salamanca

realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, *así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida diaria* (LOE, art. 17. Las cursivas son propias). Si bien no aparece de modo explícito la preferencia por el objetivo de las competencias, sin embargo de modo indirecto, en mi parecer, es manifiesto.

e) Legislación española: Real Decreto (1631/2006)

Este documento del Estado español desarrolla la Ley Orgánica de la Educación (2/2006) en lo que se refiere a la *educación secundaria obligatoria*. El Real Decreto (1631 / 2006), de 29 de diciembre, tiene por objeto *establecer las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria* e impulsar la inclusión de las competencias básicas en el currículo. (ANEXOS, cap. IV, Anexo I. 3: Competencias Básicas)

El artículo 7 de este real decreto se dedica a las competencias básicas y en el primer punto se establece lo siguiente:

1. "En el *Anexo I se fijan las competencias básicas* que los alumnos y alumnas deberán haber adquirido al final de esta etapa" (Real Decreto 1631/2006, Art. 7)

El Anexo I, al que remite el artículo 7 del real decreto, se recogen varios aspectos de importancia: la *lista de las competencias*, la *definición de cada una de las competencias*, los rasgos más generales que las caracterizan y otras dimensiones diversas de las competencias. Se inicia haciendo dos consideraciones previas: *en la primera* se defiende que la *integración de las competencias básicas en el currículo* "permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos" (Real Decreto 1631/ 2006. En mi parecer se manifiesta un excesivo afán innovador, como si los propuestos saberes a adquirir no hubieran tenido siempre el objetivo de hacer competentes en alguna área de la realidad, a los que los aprenden. *En un segundo párrafo* considera que la integración de las competencias básicas en el currículo tiene una *triple finalidad*: primera, "integrar los diferentes aprendizajes", segunda, "permitir a todos los estudiantes integrar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos" y tercera, "orientar la educación", es decir, "inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje". (Real Decreto 1631/2006)

Universidad Pontificia de Salamanca

De acuerdo con la propuesta de la Unión Europea y atendiendo a las precedentes consideraciones, en el real decreto se identifican *ocho competencias básicas*, cuya lista se transcribe literalmente:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística
7. Competencia para aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal

A diferencia con el documento, *Recomendaciones,* de la Unión Europea, ya mencionado, en este texto se desglosa la *competencia matemática* de la tecnología y la ciencia, relegando la ciencia, en mi opinión a una zona reducida, escasamente defendible en un momento expansivo de la ciencia, como el actual. A continuación, se afirma en el real decreto que "el currículo de la educación secundaria obligatoria se estructura en materias, es en ellas en las que han de buscarse los referentes que permitan el desarrollo y la adquisición de las competencias en esta etapa" (Real Decreto, 1631/2006, Competencias Básicas, p. 686).

Prescindimos, como es obvio de otras competencias y en lo que respecta a la *competencia matemática* se define en los términos siguientes: "Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral" (Real Decreto 1631/2006, Anexo 1, Competencia matemática, p. 686-687)

Complementa la precedente definición, la descripción de las *dimensiones esenciales de la competencia matemática*, como sintetizamos en los párrafos que siguen:

- La competencia matemática consiste en "la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones".
- Esta competencia implica el "conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información".

Universidad Pontificia de Salamanca

- La competencia matemática constituye una "disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.), que contienen elementos o soportes matemáticos" (…) Gusto por la certeza en su búsqueda a través del razonamiento.
- Esta competencia adquiere pleno sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan.
- La adquisición de esta competencia implica, al final de la educación secundaria obligatoria, la capacidad utilizar -en los ámbitos personal y social- "elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones" (Real Decreto 1631/2006, Anexo 1; 2. Competencia matemática, p.687).

El artículo 8 de este real decreto, que estamos comentando, se refiere a los *objetivos, contenidos y criterios de evaluación* de las diferentes materias que se integran en la educación secundaria obligatoria y en el punto primero se explicita el contenido del Anexo II en estos términos:

1. "En el Anexo II de este real decreto se fijan los objetivos de las diferentes materias, la contribución de las mismas a la adquisición de las competencias básicas, así como los contenidos y criterios de evaluación de cada materia en los diferentes cursos" (Real Decreto 1631/2006, art. 8, punto 1)

En el Anexo II del decreto se establecen las materias de educación secundaria obligatoria y en la página 750 aparecen las matemáticas y antes de especificar el desarrollo de la materia de las matemáticas entre las distintas disciplinas matemáticas que la integran y los diferentes cursos en que se encarnan, presenta tres asuntos: el primero se refiere a *la relevancia que las matemáticas* han tenido en el pasado, en la actualidad y que tendrán hacia el futuro[112] , en general y especificando esta importancia por distintas disciplinas que integran las matemáticas.

[112] "En su intento de comprender el mundo todas las civilizaciones han creado y desarrollado herramientas matemáticas: el cálculo, la medida y el estudio de relaciones entre formas y cantidades han servido a los científicos de todas las épocas para generar modelos de la realidad. Las matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura y los individuos deben ser capaces de apreciarlas. El dominio del espacio y del tiempo, la organización y optimización de recursos, formas y proporciones, la capacidad de previsión y control de la incertidumbre o el manejo de la tecnología digital, son sólo algunos ejemplos.

Universidad Pontificia de Salamanca

El segundo asunto se refiere según reza su título a la *Contribución de la materia* (matemáticas) *a la adquisición de las competencias básicas.* Se trata en cierto modo de una obviedad, por cuanto todo *el currículo de la materia de las matemáticas ha de contribuir a la adquisición de la competencia matemática* y todos los bloques del contenido "están orientados a aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad" (Real Decreto 1631/2006, Anexo II; Contribución de la materia a la adquisición de las competencias básicas, p.751). Sin embargo, no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen de igual manera a la adquisición de las competencias correspondientes [113].

El tercer asunto viene dado por *los objetivos* y lo presenta el legislador afirmando que la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria "tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades". No se entiende bien que reiterando de manera continua a lo largo del real decreto y en los dos anexos que lo integran, el uso del término competencias que es lo que se pretende, el objetivo a alcanzar son las competencias básicas, que el legislador se decida al final a utilizar el término capacidades y no el de competencias. Al margen de la notoria ambigüedad terminológica, para concluir recogemos literalmente las competencias a lograr con las matemáticas en la educación obligatoria.

En la sociedad actual las personas necesitan, en los distintos ámbitos profesionales, un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas que las que precisaban hace sólo unos años. La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo, y en la información que se maneja cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación. Por ello, los ciudadanos deben estar preparados para adaptarse con eficacia a los continuos cambios que se generan " (p.750).

Los contenidos matemáticos seleccionados para esta etapa obligatoria están orientados a conseguir que todos los alumnos puedan alcanzar los objetivos propuestos y estén preparados para incorporarse a la vida adulta" (Real Decreto 1631/2006, Anexo II; Matemáticas, p.750).

[113] "Conviene señalar que no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana" (Real Decreto 1631/2006, Anexo II; Contribución de la materia a la adquisición de las competencias básicas, p.751) .

Universidad Pontificia de Salamanca

“1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica” (Real Decreto 1631/2006, Anexo II; Contribución de la materia a la adquisición de las competencias básicas, p.752).

Universidad Pontificia de Salamanca

Teniendo en cuenta que tanto el Real Decreto (1631/2006) como, sobre todo, la Ley Orgánica (2/ 2006), de Educación insisten en el derecho de las Comunidades Autónomas a completar esta legislación atendiendo a las circunstancias y situaciones, que consideren oportunas y convenientes tener en cuenta para completar el texto legislativo de la educación secundaria obligatoria en orden a su puesta en práctica. He revisado la legislación de la Comunidad Autónoma de Madrid sobre la educación secundaria obligatoria que se contiene en el Decreto 23/2007 de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la comunidad de Madrid el currículo de Educación Secundaria Obligatoria. En relación con las competencias básicas, en el mencionado decreto del Gobierno de la Comunidad de Madrid sólo el artículo cinco del decreto se refiere a la cuestión y se remite a lo establecido en el mencionado real decreto, sin añadir nada a lo establecido [114].

4.2.3.- Las TIC y otras perspectivas sectoriales

La enseñanza de las matemáticas está convirtiéndose en una verdadera preocupación social, entre otras razones se aducen las dificultades que al parecer encuentran profesores y alumnos en el proceso de la enseñanza-aprendizaje. El asunto ocupa la atención de los centros educativos y autoridades de la política educativa y preocupa en todo caso a los profesores que atienden a la docencia de las matemáticas. El martes 17 de abril de 2012, en la Comunidad de Madrid 58.000 alumnos de 3º curso de la ESO se examinaron en la prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables, que comprendía conocimientos sobre matemáticas – diez ejercicios y dos problemas - y Lengua. La prueba se ha realizado por quinto año consecutivo en la Comunidad de Madrid y por parte de responsables de los centros educativos[115] suele considerarse como "útil herramienta de evaluación para contrastar si estamos enseñando bien o mal a nuestros alumnos" (Delgado, 2012: 52). A la preocupación no es ajena la irrupción del

[114] Artículo 5. Competencias básicas: "En el marco de las competencias clave para el aprendizaje permanente definidas por la Unión Europea, las competencias básicas, como elementos integrantes del currículo son las fijadas en el Anexo I del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. En las distintas materias de la etapa se prestará una atención especial al desarrollo de dichas competencias que los alumnos deberán haber adquirido al finalizar la enseñanza básica".

[115] En ANEXOS, CAP. V, Anexo 2, Ejemplos de ejercicios de Álgebra en las pruebas CDIS) se presentan los ejemplares de las *Pruebas de Matemáticas* de la Comunidad de Madrid correspondientes a los años 2007 (3º curso de la ESO); 2008 (2º y 3º curso de la ESO) y 2010 (3º curso de la ESO).

Universidad Pontificia de Salamanca

ordenador, la calculadora gráfica, la pizarra digital u otros aparatos más o menos sofisticados que parecen destinados a su incorporación en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Las TICs están introduciéndose y son bienvenidas para hacer menos aburridas y pesadas determinadas tareas, obviar la necesidad de destinar muchas horas a los trabajos pesados y monótonos cuya naturaleza es esencialmente mecánica. Esta perspectiva tecnológica y el uso cada vez más extendido de las TICs en las aulas de matemáticas exigen que el profesor tenga las pertinentes competencias para utilizarlas, posean la motivación suficiente y la confianza adecuada en el uso de estas tecnologías. Es obvio que las instituciones educativas han de convencerse de que la aplicación de las TICs puede mejorar el rendimiento en matemáticas y se decidan a dotar de las necesarias infraestructuras de calidad para utilizar las nuevas tecnologías con el mayor provecho[116]. Exponemos a continuación algunas experiencias que han adquirido notoriedad en la comunicación mediática y en algunos ámbitos educativos como ejemplos de una posible preparación tecnológica para la aplicación de estos instrumentos en el aula de matemáticas por parte del profesor. En el Real Decreto 1631/2006 por el que se desarrolla la Ley Orgánica de Educación, y en apoyo de los recursos tecnológicos e informáticos, obviamente las TICs, en la enseñanza de las matemáticas se afirma lo siguiente: “En la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrase en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos comúnmente usados en la vida cotidiana, por tanto el trabajo de esta materia en el aula debería reflejar tal realidad” (Real Decreto, 1631/2006. Anexo II, Matemáticas, p. 751). De nuevo el mismo texto legislativo vuelve sobre el conveniente uso de los recursos técnicos e

[116] “Todavía son pocos los que emplean los medios tecnológicos en clase (Clares y Gil, 2008), incluso algunos autores consideran que la aplicación en la clase de las nuevas tecnologías resta creatividad (Hamilton, 2003; Kimbell, 2000). Es manifiesto, sin embargo, que la investigación en los procesos educativos se desarrolla con evidente celeridad y, al socaire de la investigación, aumenta el número de los profesores que, individualmente o en grupo, están asumiendo los instrumentos tecnológicos para el mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje (Ritz y Martin, 2012) y a ello contribuyen asimismo las nuevas revistas educativas dedicadas a la investigación de la aplicación tecnológica a la educación. Merecen especial mención al respecto Computers & Education, el Opencourse online que están desarrollando la Universidad de Harvard y el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), el Toolkit y el Learning Catalytics de Harvard, la investigación en laboratorios virtuales como el LabView (Quiñónez et al., 2006), la aplicación de páginas web al proceso de enseñanza y aprendizaje para facilitar el aprendizaje cooperativo (Tsai, 2010) y otras experiencias semejantes” (Méndez, D., 2012)

Universidad Pontificia de Salamanca

informáticos en el aprendizaje de las matemáticas, señalando expresamente como objetivo a alcanzar, "utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje"(Real Decreto, 1631/2006. Anexo II, Matemáticas: Objetivo 6, p.752). De los datos empíricos, se puede afirmar una vez más, que en general la opinión de los profesores de matemáticas es favorable al uso de las tecnologías y reconociendo el valor de este recurso en la educación, sin embargo se topan con múltiples dificultades a la hora de adoptar dicha tecnología[117]. En todo caso, en la parte dedicada a ANEXOS, en Capítulo IV, Anexo, V-A; V-B y V-C se ofrecen una serie de direcciones de Internet, en las que los profesores y estudiantes pueden entrar y disponer, de forma gratuita, de vídeos muy interesantes para hacer más comprensibles las explicaciones matemáticas de la clase.

a) El profesor Gurú de las TICs

En el extraordinario dominical del periódico ABC, XL SEMANAL, nº 1277 (de 15 a 21 de abril de 2012) <www.xlsemanal.com> se dedica un amplio cuadernillo de ocho páginas con profusión de imágenes a los nuevos y avanzados sistemas tecnológicos de enseñar matemáticas a los estudiantes, que experimentan dificultades en su aprendizaje (Goitia y Azevedo, 2012: 20-27). Se presentan cuatro experiencias sobre el asunto, ubicadas en distintos lugares, que tienen en común el uso de las nuevas tecnologías para facilitar el aprendizaje de las matemáticas.

1) *La academia del matemático Salman Khan*. Desde Silicon Valley este matemático, deja su puesto de analista de riesgos y se dedica a la elaboración de videos para ayudar la enseñanza de las matemáticas. Luego de los primeros éxitos, este hombre ha colgado en la Red 3000 vídeos, no solo de matemáticas y que acumulan 140 millones de visitas, entre las que sobresale el fundador de Microsoft, Bill Gates que, entusiasmado con el éxito del nuevo sistema para la enseñanza de las matemáticas, le

[117] "En consecuencia, sólo una minoría de docentes las han incorporado a la enseñanza. Entre las barreras que existen para el uso de las TIC, se menciona la falta de conocimientos del profesorado, una escasa motivación y confianza en el uso de dichas tecnologías, una formación inadecuada, la ausencia o escasa calidad de infraestructura para las TIC y otras cuestiones relacionadas con los sistemas educativos tradicionales. (…) para asegurar unas soluciones políticas realistas e integrales, es necesario identificar y comprender todos los factores que impiden que el profesorado las integre de manera plena en su práctica docente" (Eurydice, 2011b: 67)

Universidad Pontificia de Salamanca

ofreció el apoyo de la Fundación Gates, donándole un millón y medio de dólares y animando a otros benefactores a prestar las correspondientes ayudas. El éxito ha animado a muchas escuelas del estado de California a usar estos programas en la educación de las matemáticas en las aulas. Los alumnos ven los videos en casa y en el aula del colegio se dialoga para esclarecer el asunto y resolver dificultades, pero el estudio individual de la lección se reserva al domicilio del alumno visionando los correspondientes vídeos (Goitia y Azevedo, 2012: 20-27).

2) El profesor Juan Medina de Valencia inició su tarea de impartir la docencia de las matemáticas a sus alumnos de la Universidad Politécnica de Cartagena en el año 2006 y cuenta ya en la actualidad con más de 20 millones de visitas acumuladas y 40.000 seguidores regulares. Asegura que "como profesor, mi fijación siempre ha sido hacer fácil mi asignatura (…) y pensé que si les grababa los ejercicios en vídeo, los ayudaría a ponerse al día en su casa" [118]. Así comienza a grabar en vídeo sus explicaciones de matemáticas y a colgarlos en la red y de pronto un aluvión de mensajes colapsó su correo, dando las gracias, lo que animó a seguir grabando y colgándolos en la red. Sus 3000 vídeos son referencia para estudiantes de España y de América Latina. Ha hecho todo de forma gratuita y de momento se conforma con saber que sus métodos señalan las diferencias.

3) Walter Lewin es profesor de Física del Instituto Tecnológico de Massachussets (MIT), inicia una verdadera revolución educativa, cuando se decide a grabar en video sus clases, en 2003 y colgarlos de forma gratuita en OpenCourseWare, web de material docente, en código abierto del propio MIT. En 2007 con millones de descargas acumuladas apareció en la portada del The New Cork Times que lo calificaba como el 'gurú' de la red. Afirma que gracias a este tipo de clases los estudiantes comenzaron a mirar la física con nuevos ojos y añade que muchos profesores piensan que lo principal es dar mucha materia en clase. Es un error, porque poco de lo que te enseñan en el aula te sirve luego para la vida real (Goitia y Azevedo, 2012: 20-27).

4) Sir Robinson importante experto en educación, se hizo famoso con motivo de una conferencia, en 2006, en la que, bajo el título *Las escuelas matan la creatividad*, describió las siete mentiras que se transmiten en la escuela mediante la enseñanza: si te

[118] Del profesor Juan Medina de Valencia en los ANEXOS, Capítulo IV, Anexo 5-A; 5-B y 5-C se ofrecen varias direcciones de Internet, en las que de forma gratuita el profesor y el estudiante pueden obtener videos muy útiles para resolver problemas y facilitar el aprendizaje de las matemáticas. <www.lasmatematicas.es>

Universidad Pontificia de Salamanca

esfuerzas en el cole, de mayor tendrás un buen trabajo que ya nadie cree, pero que alimenta las profundas reformas de la educación, porque algo no funciona pero sin saber de qué se trata. La segunda mentira: *todos los que suspenden son tontos* porque el sistema educativo se diseñó en la Ilustración, al servicio de la producción industrial, priorizando las matemáticas y las ciencias, que expulsa del sistema a mucha gente, porque no es brillante según esa vara de medir. La tercera es la clasificación de los niños por edades, cuando la educación es para desarrollar seres humanos y este desarrollo no es lineal. La cuarta se refiere a que la escuela *desarrolla la inteligencia de forma integral*, cuando lo que hace es anular el pensamiento divergente que, según el autor, mengua en la escuela e imposibilita el progreso. En todo el sistema educativo hay quejas de falta de atención, cuando para el profesor, este diagnóstico es *equivocado y ficticio*. Más bien sucede la sobreestimulación provocada por el consumo, televisión, Internet, publicidad y videojuegos, que presentan un mundo diferente del que presenta la escuela, que no logra interesarles. La solución d exigir menos a los alumnos es otra mentira de la educación, teniendo en cuenta que la escuela ha de ser la que descubra las aptitudes naturales y potenciales de los educandos. Por consiguiente no se trata tanto de exigir más a los alumnos cuanto a los centros educativos. La séptima mentira para Robinsón está en querer medir la inteligencia con un test, puesto que la cuestión clave es de qué manera eres inteligente, no si lo eres. Concluye el autor afirmando la educación es algo muy simple: talento más pasión igual a éxito. La dificultad está en descubrir cual sea ese talento. En cuya función son los padres tienen un papel clave (Goitia y Azevedo, 2012: 25-27).

b) La dinámica de las matemáticas

Para el profesor Cepeda, de la Universidad Nacional de Colombia en su investigación a muchos colegios de Colombia encontró que, en relación con los recursos docentes, el mayor promedio de éxito se observó en los centros escolares que contaban con un elevado número de docentes que tienen como cualidades destacadas, el dominio de las Matemáticas, la capacidad de organizar actividades educativas, la seriedad y la ética en el trabajo (Cepeda, 2005: 505). Trabajos serios en investigación, sobre las competencias educativas del profesor de ciencias, suelen subrayar el conocimiento de las matemáticas o disciplina científica a enseñar y en la capacidad para la elaboración y adaptación del currículo. Los altos niveles de éxito en conocimientos adquiridos se asignan a los colegios y centros educativos que con frecuencia evalúan a sus docentes en el dominio de las Matemáticas, colaboración con el colegio y el rendimiento de los

Universidad Pontificia de Salamanca

alumnos[119]. El profesor Cepeda, en el análisis de los colegios de Colombia, que llevó a cabo desde esta perspectiva, constató que los procesos desarrollados sobre la capacitación de docentes no habían contribuido al mejoramiento de la calidad de la educación, a pesar de haber recibido los profesores cursos de capacitación sobre *métodos de enseñanza-aprendizaje*, ni se habían percibido diferencias significativas en los resultados obtenidos por los estudiantes. En cambio se hallaron evidencias estadísticas de que la capacitación, en áreas específicas de las Matemáticas, había contribuido al mejoramiento de la calidad educativa, en el sentido de obtener un mayor nivel de éxito cognitivo los alumnos (Cepeda, 2005: 506).

4.2.4.- Planteamiento de Hilton sobre las condiciones del profesor de matemáticas en la Enseñanza Secundaria.

En el capítulo "Necesidad de una reforma" que Hilton escribió para el libro *Matemáticas y educación,* una parte importante lo ocupan los asuntos - el autor los denomina principios - dedicados a diseñar un perfil del profesor de Matemáticas de la educación secundaria, que en España comprende la ESO y el Bachillerato. Para el autor, para avanzar con relativa seguridad respecto de los mencionados principios, es obvio que se exige una cierta materia noble para trabajar con ella y está claro que "cualquier recomendación para mejorar la calidad de la educación matemática fracasará si falta una enseñanza que sea reveladora de conocimientos. El futuro enseñante ha de tener una buena educación. También es cierto, no obstante, que debemos asegurar la entrada en la profesión educativa de personas de notable calidad y con gran dedicación" (Hilton, 2000: 81). Es de conocimiento general que en las sociedades democráticas los roles profesionales más apetecibles y valorados se ubican en el entorno económico, con la consecuencia evidente de su mejor remuneración y en las circunstancias actuales las siempre apetecibles riquezas están alejadas y son extrañas a la profesión de profesor, que no está especialmente valorada en los niveles de primaria y de secundaria, que es nuestro escenario de referencia. En consecuencia habrá de trabajarse con los mimbres de que se dispone. Antes de exponer los principios, el autor hace una última

[119] Nota: Estos datos corresponden a la investigación, *Factores asociados al logro cognitivo en Matemáticas*, llevada a cabo en Colombia, mediante encuesta a 12.069 estudiantes de séptimo grado y a 12.444 estudiantes de noveno grado, a quienes el ICFES aplicó la prueba. Se aplicaron formularios a 985 profesores y 712 a los directores de los centros escolares. Para esta aplicación, la muestra se determinó con una fiabilidad del 95% y un margen de error del 5%.

Universidad Pontificia de Salamanca

recomendación manifiestamente utópica: “un buen profesor debería siempre tener la oportunidad de enseñar lo que le gusta más” (Hilton, 2000:82). La razón es obvia. Cuanto más le satisface enseñar algo, con más calor y amor se comunicará el profesor en la enseñanza y esos sentimientos serán captados por sus alumnos que sin otras argumentaciones explicitas experimentarán interés por el aprendizaje. Este matiz en la educación tiene más importancia de la que suele reconocerse y se evidencia en ostensibles limitaciones de positivas actitudes ante las matemáticas. A continuación se exponen algunas cualidades que, según el autor, configuran un buen profesor de matemáticas.

a) Perfil del profesor de matemáticas de educación secundaria

1º) Las necesidades específicas futuras del profesorado de secundaria en formación no deberían reflejarse en su currículum preuniversitario, ni tampoco en el currículum de su licenciatura.

Con esta doble afirmación Hilton (2000:82) apunta que el futuro profesor de matemáticas de secundaria no ha de dedicarse en su carrera de formación a seleccionar las materias propias del currículo de secundaria ni a elegir dentro de los estudios de grado en matemáticas los contenidos del currículo de la educación de secundaria. Debiera buscar los contenidos de calidad y en el Grado de matemáticas dedicarse, en primer lugar a entender la significatividad - matemática y en relación con el mundo real - de las matemáticas y esa comprensión proviene de la dinámica de la buena formación matemática y de las implicaciones de esos estudios. La comprensión matemática del profesor siempre debe ir en un nivel superior al que enseña para que se sienta seguro de lo que enseña, anime la formulación de preguntas por parte de sus alumnos y fomente con ellos la experimentación. Por consiguiente, se impone como primer requisito que el profesor esté bien formado en los principios matemáticos, que haya sido capaz de captar no solo aquello de lo que D. Quijote instruía a Sancho Panza sobre los rasgos de un buen caballero andante: “Debe saber también matemática, porque le será necesario en todo momento valerse de ella”, sino también la belleza de “la creación del pensamiento puro que tiene la potencia y la fascinación de una obra de arte, puesto que en la matemática está la génesis y la síntesis de un pensamiento esencial para la mente humana” (Campedelli,1970: 130).

Universidad Pontificia de Salamanca

2º) La formación, en la universidad, de los futuros profesores de matemáticas de secundaria debería alejarse muy poco de la impartida para la especialización como matemático.

Con este principio el profesor Hilton se expresa que el profesor de matemáticas ha de ser un experto en matemáticas, haber cursado estudios densos y organizados, el Grado de matemáticas o cosa semejante. Esta condición ya fue mostrada y defendida en el punto anterior y ahora se hace explícita. Esta amplia preparación matemática y profunda comprensión de las matemáticas constituye el núcleo sustancial para el aspirante a profesor de matemáticas de secundaria. Este equipamiento específico adquirido no elimina la necesidad de obtener los pertinentes conocimientos pedagógicos que, sin adquirir idéntica consideración que el aprendizaje de los contenidos matemáticos, debieran intercalarse con el aprendizaje matemático y complementarse en el período de formación continua, puesto que tal vez su importancia no sea tan percibida en el proceso inicial de formación del profesor. Para el autor, el incremento de créditos de pedagogía pudiera jugar un papel decisivo en la formación permanente del profesorado. “Los cursos de pedagogía deberían estar cuidadosamente coordinados con los cursos de contenidos y no se debería impedir a ningún estudiante ser profesor ni negársele un certificado provisional por el mero hecho de que le falten créditos de cursos de pedagogía” (Hilton, 2000:83).

3º) El atributo más importante de un profesor de matemáticas es una actitud positiva hacia las matemáticas. El conocimiento esencial de las matemáticas está relacionado con la misma naturaleza de las matemáticas: con su unidad y su esencia como disciplina.

Esta norma es de obligado cumplimiento para cualquier profesor de matemáticas de cualquier nivel y en cualquier circunstancia. Obviamente para el profesor de enseñanza primaria sería el principio primero y más fundamental. El profesor de matemáticas de este nivel ha de tener las ideas muy claras, sobre lo que son las matemáticas – un sistema de pensamiento que dispone de un lenguaje propio y bien adaptado – pero las matemáticas no son una mera técnica ni un conjunto de saberes dispersos. Lo importante, más en primaria pero ineludible en secundaria, es que el profesor y el alumno aprendan a pensar matemáticamente. Para ello, cualquier parte significativa de las matemáticas es una ocasión válida a aprovechar, pero ninguna parte aislada de las matemáticas será válida para que el estudiante entienda las matemáticas ni

Universidad Pontificia de Salamanca

alcance la necesaria comprensión matemática si esta se reduce a unas habilidades a aprender y retener memorísticamente. Con un ejemplo, el profesor Hilton, proyecta claridad al asunto. El profesor Saxon se lamenta de la fácil disponibilidad de las calculadoras en los alumnos de primaria, que conduce al analfabetismo matemático, promoviendo una campaña para obligar a aprender memorizando. Para Hilton esta es una deplorable filosofía que no conduce a la habilidad para comprender y aplicar las ideas matemáticas. Sin embargo el éxito de los libros de Saxon testifica la plausibilidad social del mensaje (Hilton, 2000:84).

4º) Es vital que el futuro profesor entienda la distinción entre educación y formación, (por el contexto parece que el autor identifica formación con lo que nosotros denominamos instrucción).

Esta normativa se relaciona con la anterior pero es más explícita, en el sentido de que la formación técnica siempre estará afectada por un probable transitoriedad, puesto que las técnicas son por naturaleza efímeras, pero en un mundo cambiante y con ritmos acelerados de cambio las técnicas aprendidas en las aulas apenas serán útiles cuando esos alumnos se integran en el mundo de la realidad. La técnica por su propia naturaleza se orienta a *satisfacer los intereses a corto plazo*, en cambio la educación favorece todo el ser, la vida y todas las dimensiones de la vida del estudiante. Una educación matemática, si es buena, conduce inevitablemente a la *adquisición de habilidades*, mientras que una formación técnica, según el autor, no exige profundizar en los estudios matemáticos. La tendencia a deplorar la escasa dotación técnica de los estudiantes cuando salen de las aulas universitarias es una falacia inherente a confundir la educación con la formación. Pone el ejemplo de que las mujeres y los niños ingleses del siglo XIX tenían considerables capacidades técnicas mineras y hoy no las tienen y nadie lo lamenta. A veces hasta es bueno perder ciertas habilidades. Siempre hay quien se lamenta de no poseer habilidades y confiarse a la calculadora, porque ésta puede quedarse sin pilas y no acierta a superar una leve dificultad. El autor responde con desenfado a estas acusaciones diciendo que siendo consecuentes, cuando esos vayan en coche deberían llevar un caballo por si le fallaba la batería o alguna otra parte del coche.

"Es lamentable que muchos padres, en su bienintencionada preocupación por el futuro bienestar de los hijos, contribuyan a la confusión entre educación y formación, al buscar una conexión inmediata entre lo que los alumnos aprenden en la escuela y la forma en que posteriormente esos alumnos se ganarán la vida. Podemos comprender los

Universidad Pontificia de Salamanca

motivos de esos padres; no obstante, no deberíamos hacer otra cosa que burlarnos y despreciar a esos educadores que ceden ante la preocupación de los padres y conspiran para robar a los niños sus propios derechos" (Hilton, 2000: 85).

5º) Se debería hacer el menor número posible de exámenes. Además los exámenes deberían reflejar el currículo sin condicionarlo.

Se extiende por doquier una lamentable moda de hacer y reiterar exámenes. Según el autor esto suele distorsionar el mismo currículo y todavía peor la moda, que en Inglaterra se está afianzando, de publicar la clasificación de los centros escolares según las calificaciones de los exámenes. Sin duda que algunas pruebas son necesarias, para conocer los profesores, los padres, los centros y sobre todo los alumnos sus progresos en el saber de que se trate. Ahora bien, el profesor conocedor y seguro de sus conocimientos ha de arbitrar procedimientos que le puedan dar cuenta del progreso de sus alumnos sin que haya que estar haciendo exámenes continuamente. Puede caerse en la tentación de preparar a los estudiantes para hacer exámenes. Esta situación puede darse en la España actual, con la reiteración de las pruebas Pisa, las pruebas que algunas comunidades hacen a los estudiantes y las ya habituales de los centros, nos aproximamos a situaciones perversas. Como desorientadoras son, al menos para las matemáticas las pruebas tipo test y las preguntas de respuesta múltiple son ridículas. Cuando se afrontan los problemas de la realidad, esta no nos ofrece cuatro alternativas o cinco a elegir la respuesta verdadera.

"Deberíamos declararnos inexorablemente opuestos a cualquier forma de evaluación que únicamente dé crédito a lo que se llama respuesta y que no preste atención al razonamiento del estudiante, a la explicación de la elección de método. La tiranía de los exámenes y la hegemonía de los examinadores sólo puede romperse por la determinación de profesores que estén seguros de ellos mismos y tengan una buena formación a todos los niveles" (Hilton, 2000:85).

b) Resumen de las mencionadas propuestas

De las variadas propuestas que el profesor Peter Hilton presenta para trazar el perfil del profesor de matemáticas, estimo que sobresalen al menos las siguientes:

1) El profesor de matemáticas ha de tener unos conocimientos amplios de la materia que se denomina matemáticas, con independencia del lugar y nivel donde vaya

Universidad Pontificia de Salamanca

a ejercer como profesor. La preparación del profesor de matemáticas debiera alcanzar al Grado en Matemáticas, con lo que se supone que el profesor ha captado el sentido unitario de esta ciencia y las ramificaciones que la integran dentro de esa unidad.

2) La capacidad comprensiva debe ser tan relevante que le permita comprender el saber matemático en su ensamblaje interno, poseer el lenguaje específico de las matemáticas y ser capaz de crear o descubrir ese pensamiento matemático puro desde la estimulación de la realidad exterior. Explicado de otra manera, el profesor de matemáticas ha de ser un profesional del saber capaz de pensar en clave matemática los fenómenos no solo del mundo natural sino también del ámbito social en el que se sitúa y explicarlos en formato matemático a sus alumnos.

3) También el profesor de matemáticas ha de conocer las reglas pedagógicas y didácticas más esenciales para mejor transmitir los conocimientos matemáticos a los alumnos, saber verterlos en metáforas y figuras, para la mejor comprensión de los estudiantes. Sin duda que estos conocimientos didácticos deberán ser los más amplios posibles, aunque será consciente que si no domina y comprende profundamente los contenidos matemáticos, no podrá transmitirlos. El viejo adagio de que nadie da lo que no tiene, es de aplicación rigurosa en este ámbito.

4) Además de conocer bien las matemáticas, el profesor debe tener una actitud positiva hacia las matemáticas, ha de gustarle lo que enseña y, en ese caso, sin duda que será capaz de transmitir el gusto por el pensamiento matemático y una actitud positiva respecto de los conocimientos matemáticos. El profesor Peter Hilton dice que en Nueva York, donde él ejerce su profesión, profesor de matemáticas en la universidad, hay muchas maestras de educación primaria que quieren a los niños, adoran a sus alumnos pequeños, pero que temen a las matemáticas en su práctica docente y los resultados son desastrosos, ya que esas maestras de forma sutil están transmitiendo a los niños su propia actitud hacia las matemáticas.

5) En quinto lugar debiera quedar claro al profesor que las matemáticas no se reducen a una especial técnica ni a un conjunto de técnicas, aunque esta sea la característica más perceptible y más repetida a la vista del público. Hasta es posible que los alumnos inicien sus estudios de las matemáticas con prenociones de la misma como una técnica para conocer resultados económicos y conjuntos poblacionales, para establecer las orbitas de los satélites u otras dimensiones de la realidad natural o social. Esta es una impropia reducción de las matemáticas a técnicas más o menos sofisticadas, muy presente en la actual comunicación mediática.

Universidad Pontificia de Salamanca

6) Por último, una condición importante del profesor de matemáticas y, probablemente, de todo profesor es que se ocupe de enseñar los conocimientos matemáticos y no transmita preocupación alguna de que enseña para que los estudiantes aprueben los exámenes. No es trivial esta condición del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta la acumulación de exámenes interiores y exteriores al centro educativo a realizar durante el curso. A esta situación no es ajena la disponibilidad de los profesores a hacer exámenes y repescas de exámenes para que los muchachos aprueben la correspondiente evaluación. Como ya he mencionado anteriormente la inserción de exámenes externos y de torneos intercentros con sus correspondientes pruebas, puede sustituir en la mente del alumno el objetivo prioritario de conocer y saber en favor de aprender para superar el examen.

4.2.5.- El enfoque comunicativo

Al fijar la comunicación como un rasgo específico e insustituible, en general, del profesor y del profesor de matemáticas en concreto, se ha mencionado que ésta implica un intercambio de información entre dos seres humanos, que se produce en un marco común de significados y de sentido. Sin este marco común, denominado también sintonía de significados, no es posible la comunicación como tampoco puede haberla sin la intención. Es lógico afirmar que las disposiciones intelectivas del alumno no son una variable dependiente del profesor, pero esto en nada aminora la gran influencia de los métodos y contenidos de lo que se enseña, si bien su eficacia cognitiva queda pendiente de la comprensión intelectual adecuada. La mayor responsabilidad para llevar a buen fin el proceso comunicativo depende del docente y por tanto disponer de buenos docentes de matemáticas es imprescindible para alcanzar el éxito en esta cuestión. Siempre serán positivos los esfuerzos y la atención que se dediquen a mejorar los factores que intervienen en la calidad de la enseñanza, como será ineludible mejorar las competencias humanas y profesionales de los profesores en relación con los procedimientos en la educación matemática. En este contexto el profesor de didáctica de las matemáticas en la universidad del País Vasco, Goñi Zabala, presenta el enfoque comunicativo como base para una correcta comprensión de lo que es la educación matemática. En la exposición que sigue, se atiende a las propuestas del autor sobre las condiciones profesionales del profesor de matemáticas. (Goñi, 2008: 189-229).

Universidad Pontificia de Salamanca

a) Hipótesis previa de la calidad de la enseñanza

La calidad del proceso de la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas depende fundamentalmente del profesor de matemáticas en un doble sentido: de su capacidad para *planificar, buscar y proponer tareas adecuadas* a los estudiantes de matemáticas y de sus habilidades para *estimular la comunicación* profesor-alumno, alumnos – profesor y alumno-alumno.

1) Los alumnos aprenden preferentemente cuando hacen las cosas y el profesor cuando enseña a los alumnos a hacer lo que han de hacer. Respecto de esta función, según Goñi, parece preferible denominar a los docentes *profesionales de la enseñanza*, vinculando de este modo a los profesores con las competencias correspondientes a su función, puesto que el profesional es el sujeto competente en un área de la realidad. No solo porque tiene algunos o muchos conocimientos teóricos sino porque sabe hacer algunas cosas, en este caso, sabe resolver problemas reales, es decir, sabe gestionar el proceso de la enseñanza-aprendizaje. Es una obviedad que, para alcanzar este objetivo, se exige al profesor de matemáticas un amplio conocimiento del contenido matemático del currículo, condición necesaria que, en otros casos pudiera no ser suficiente. Sin embargo cuando de matemáticas se trata, hace muchos años Piaget escribió que "en matemáticas un conocimiento valioso no supone una mera posesión de información, sino 'saber hacer'. *Saber matemáticas significa poder hacer matemáticas*: usar el lenguaje matemático con alguna fluidez, hacer problemas, criticar argumentos, buscar demostraciones y, lo que puede ser más importante, reconocer un concepto matemático en una situación concreta o extraerlo de ella" (Piaget & al., 1978: 330).

2) La mejora de la competencia para gestionar el currículo de las matemáticas por parte del profesor es un factor importante de calidad de la enseñanza pero no es el único, puesto que el proceso de la enseñanza-aprendizaje tiene lugar en un escenario, el centro escolar, que es una institución que sigue reglas generales de la política educativa y reglas más particulares que originan los rectores de la institución, donde confluyen unas circunstancias concretas de individuos con los que se han de establecer relaciones. Por otra parte, la gestión del currículo de matemáticas no ha de entenderse solo como un conjunto de conocimientos, sino como la competencia para la gestión y en cuanto competencia integra condiciones a desarrollar en la práctica, que no se reducen a un saber abstracto que pueda estudiarse solamente de manera teórica (Goñi, 2008:191). Subyace aquí la gran polémica del siglo pasado sobre *las matemáticas puras y las matemáticas aplicadas*, que tuvo una importante consecuencia de tipo administrativo,

Universidad Pontificia de Salamanca

por la que se crearon en las universidades dos departamentos en que se ubicaban separadamente las matemáticas puras y las aplicadas. Stewart escribe lo siguiente: "Prefiero un único nombre, *Matemáticas*, y creo que deberían hallarse dentro de un mismo departamento universitario. Actualmente se pone énfasis en desarrollar la unidad de áreas solapadas de matemáticas y ciencias, no en imponer fronteras artificiales" (Stewart, 2006: 145).

3) El procedimiento matemático de los 'fractales' puede aprovecharse para expresar las distintas dimensiones insertadas en lo que el autor denomina la gestión del currículo: se necesitan alumnos capaces de convertir en competencias los conocimientos que aprenden, profesores con habilidades para promover la competencia en los estudiantes, lo que implica programas universitarios de matemáticas estimulantes de las competencias de los universitarios para ser capaces de gestionar el currículo en el ejercicio de su profesión. Para el autor no es adecuado el procedimiento de estudiar la teoría durante los cursos de la carrera y al final de la misma realizar el prácticum, más bien ha de procederse de modo que "puedan asegurar la correcta relación entre la práctica profesional y la teoría que la debe sustentar. Pensar en fractal es aplicar en todos los niveles formativos la misma lógica de priorizar, para el desarrollo profesional, la práctica reflexiva como eje organizador de todo el entramado educativo y no solamente en algunos de ellos" (Goñi, 2008: 192 - 193).

4) Otro asunto de interés, para Goñi, se refiere a la necesidad de que el alumno de matemáticas - aunque también puede ser válido para alumnos de otras materias - no puede recibir un currículum como *un agregado de propuestas inconexas* sino como algo que tiene sentido y es coherente con las propuestas que le han hecho quienes le precedieron impartiendo matemáticas y quienes le sigan con las que hace en el presente el profesor actual. Esta coherencia ha de extenderse asimismo a las exposiciones que otros docentes hacen de sus propios currículos. Todo ello obliga a indagar sobre la comunicación interdepartamental y sobre la comunicación que se observa en el centro educativo entre todos los estamentos implicados en el proceso de la enseñanza-aprendizaje. Solo una visión sincrónica de la suma de estímulos descubrirá el verdadero sentido del currículum y de las diferentes áreas a los estudiantes (Goñi, 2008: 194).

b) Los docentes de matemáticas

Un diagnóstico muy extendido, casi un tópico, respecto a la preparación de los profesores de matemáticas es enunciado por el profesor Goñi en los términos siguientes:

Universidad Pontificia de Salamanca

los docentes de primaria no saben matemáticas y los de secundaria no saben enseñarlas. A este diagnóstico simplista suele contraponerse una solución del mismo género: enseñar matemáticas a los maestros y enseñar didáctica a los profesores de secundaria. Tanto los diagnósticos como las soluciones cuanto más simples más alejadas de la realidad. En España la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, en el Titulo III, referido al Profesorado en general, Capítulo III, Artículo 100 especifica normas generales sobre la formación inicial de los profesores [120].

1) *Docentes de educación primaria.* Hemos de distinguir es este asunto dos grupos de docentes que han de impartir matemáticas: los docentes de educación primaria o maestros y los profesores de educación secundaria obligatoria y de bachillerato, entendiendo por tales los que imparten matemáticas en el largo trayecto que va desde la terminación de la educación primaria hasta que ingresan en la universidad. En cuanto a los primeros, los maestros, es obvio que su tarea es singular, en cuanto que han de impartir varias áreas de conocimiento, sobre cada una de las cuales es impensable que obtengan una preparación a nivel de grado. En la educación primaria la importancia de los contenidos en el proceso formativo suele considerarse que es menor que en secundaria. En cambio es mayor la atención que han de prestar a los aspectos de la enseñanza-aprendizaje, puesto que el acento ha de ponerse en la adquisición de hábitos de aprendizaje más que en el contenido de los mismos. Tal vez emerge aquí el problema de la deficiente preparación en el nivel de bachillerato que es la etapa en la que los futuros docentes de primaria se alimentan de los diversos contenidos disciplinares, que luego van a impartir en la educación primaria (Goñi, 2008: 195). En mi parecer ayudaría a paliar la situación la toma de decisiones sobre tres aspectos: fijar bien los contenidos disciplinares de primaria, con especial atención a los que implican un mayor nivel de dificultad, como son de ordinario los conocimientos del área de ciencias y matemáticas. Segundo que en los centros de formación de los

[120] 1. La formación inicial del profesorado se ajustará a las necesidades de titulación y de cualificación requeridas por la ordenación general del sistema educativo. Su contenido garantizará la capacitación adecuada para afrontar los retos del sistema educativo y adaptar las enseñanzas a las nuevas necesidades formativas. 2. Para ejercer la docencia en las diferentes enseñanzas reguladas en la presente Ley, será necesario estar en posesión de las titulaciones académicas correspondientes y tener la formación pedagógica y didáctica que el Gobierno establezca para cada enseñanza. 3. Corresponde a las Administraciones educativas establecer los convenios oportunos con las universidades para la organización de la formación pedagógica y didáctica a la que se refiere el apartado anterior. 4. La formación inicial del profesorado de las diferentes enseñanzas reguladas en la presente Ley se adaptará al sistema de grados y postgrados del espacio europeo de educación superior según lo que establezca la correspondiente normativa básica.

Universidad Pontificia de Salamanca

docentes de educación primaria se consolidaran los contenidos epistemológicos adquiridos en bachillerato y atendieran preferentemente a los procedimientos de enseñanza - aprendizaje de los mismos. Por último, asignar a la formación continua la ampliación de esos contenidos, matemáticos y científicos principalmente, en función de las decisiones de política educativa que se establecieren. En los informes de la Unión Europea sobre ciencias y matemáticas parece abrirse paso esta orientación de ampliar esos contenidos en los procesos de formación continua, como respuesta a las necesidades percibidas por el docente de educación primaria.

2) En cuanto a la formación específica de los docentes de educación secundaria obligatoria y de bachillerato [121], en principio estoy de acuerdo con el profesor Goñi, cuando afirma la necesidad de que los aspirantes a docentes en estos niveles dispongan de *formación universitaria en el corpus de las disciplinas correspondientes*, en este caso matemáticas. Teniendo en cuenta, la duración (4+2 cursos) de la educación secundaria obligatoria y de bachillerato desde la terminación de primaria hasta la entrada en la universidad, no parece que presente dificultad que los docentes de secundaria, en el ciclo de su formación inicial, obtengan su formación específica en el área de conocimientos a que va dedicarse, a nivel de Grado y Master en la correspondiente facultad, como lo estipula la legislación vigente. Sin embargo en el planteamiento del profesor Goñi, se establece una matización interesante que resulta conveniente explicitarla: “no parece tan evidente el tipo de formación universitaria que deben recibir y, en consecuencia, el tipo de grado que deben cursar” (Goñi, 2008: 196). Esta matización la fundamenta el autor en las siguientes argumentaciones:

1ª) La educación secundaria obligatoria y el bachillerato funciona mejor *con un profesorado polivalente*, si cualquier profesor de este nivel puede impartir docencia en diferentes áreas de conocimiento. La excesiva especialización produce un cierto obstáculo a la comunicación.

---

[121] Artículo 94. Profesorado de educación secundaria obligatoria y de bachillerato.
“Para impartir las enseñanzas de educación secundaria obligatoria y de bachillerato será necesario tener el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto, o el título de Grado equivalente, además de la formación pedagógica y didáctica de nivel de Postgrado, de acuerdo con lo dispuesto en el artículo 100 de la presente Ley, sin perjuicio de la habilitación de otras titulaciones que, a efectos de docencia pudiera establecer el Gobierno para determinadas áreas, previa consulta a las Comunidades Autónomas” (Ley Orgánica 2/2006 de educación) .

Universidad Pontificia de Salamanca

2ª) En la actualidad y parece que hacia el futuro *no va a ser posible contar con profesores de matemáticas que hayan cursado este grado*, teniendo en cuenta el descenso de matrícula, que viene observándose en los últimos años en las facultades de matemáticas. Esta circunstancia está ya ocurriendo en otros países de nuestro entorno europeo.

3ª) Esta situación parece afectar asimismo a otros estudios de ciencias - física, química, biología y geología – en que decae el número de estudiantes matriculados, en cambio son cada vez más demandados por las nuevas empresas e industrias. En los *informes Eurydice* de ciencias y de matemáticas, reiteradamente mencionados, se constatan los hechos expuestos y se esgrime también este tipo de argumentos.

Desde las precedentes razones, argumenta el profesor Goñi la creación de un nuevo grado universitario, orientado a los docentes de educación secundaria obligatoria y bachillerato, en que se formaría un profesor polivalente para matemáticas y ciencias, a semejanza de los que, en los espacios de cultura anglosajona se denomina el Bachelor of Sciences (Goñi, 2008: 196 – 202).

Sin desvalorizar en modo alguno las razones expuestas, que pudieran inducir a la creación de un grado específico y común para matemáticas y ciencias, en mi parecer, hay algunos aspectos que conviene tener en cuenta a fin de formular una valoración más ponderada de la precedente propuesta. Primero se ha de considerar que *las ciencias en la actualidad están avanzando con notable celeridad* y acumulando gran cantidad de conocimientos de excelente calidad, en cualquier área que se considere, que hace inviable en la práctica, la organizada acumulación de saberes tan diferentes en un mismo individuo. Segundo, un grado de este tipo *se descolgaría necesariamente de los procesos de investigación* e innovación que les caracteriza en la actualidad, cayendo en una rutinaria transferencia de conocimientos obsoletos en poco tiempo, que empobrecería a los futuros docentes de secundaria. Un último aspecto a tener en cuenta se refiere a las *dimensiones vocacionales de los individuos* que acceden a los distintos grados universitarios, en virtud de ciertas preferencias y características individuales y que la sociedad debiera respetar.

Por consiguiente mi propuesta es que *los profesores de educación secundaria obligatoria y de bachillerato adquieran sus competencias en el área específica del saber, por su incorporación a las facultades o centros de educación superior donde esos grados académicos se impartan*. De esta manera el profesor que se incorpora a la educación secundaria es un graduado que posee unos conocimientos actualizados,

Universidad Pontificia de Salamanca

conoce a los importantes científicos que en su país asumen un rol investigador de calidad y sabe hacia donde se orientan esos saberes en la actualidad, facilitando la orientación que necesiten los alumnos en sus estudios y en las necesarias elecciones que, desde la educación secundaria obligatoria y en el bachillerato han de tomar en el paso a la universidad. La comunicación y sintonía que de esta manera se establece entre la universidad y los centros y profesores de la educación secundaria obligatoria y bachillerato es relevante y, sin embargo, en mi parecer, está descuidada en la actualidad, con negativa incidencia tanto para la educación secundaria obligatoria y bachillerato, cuanto para la universidad. Este último asunto tiene una incidencia directa en la preparación didáctica que la universidad pretende llevar a cabo con los docentes de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato.

4.2.6.- El profesor de matemáticas en la Unión Europea

Formar al profesorado para mejorar los conocimientos y habilidades necesarios para una enseñanza flexible es, en la actualidad, la preocupación más urgente de la política educativa en la Comisión Europea que, además de otros problemas, ve aumentar los porcentajes de fracaso escolar en matemáticas y en general en las materias de ciencias. Esta concreta circunstancia ha forzado a la U.E. a proponer como objetivo para todos los países de la Unión Europea que para el año 2020 “el porcentaje de jóvenes de 15 años con un nivel de competencia insuficiente en lectura, matemáticas y ciencias debería ser inferior al 15%” (Vassiliou,A., 2011b, 3). Esta, entre otras situaciones que también despiertan cierta alarma social, han impulsado tres informes de notable interés, sobre matemáticas, sobre ciencias y sobre las influencias de género en los diferentes nieles educativos y que han sido publicados en 2011. Presentamos un breve análisis sobre los profesores de matemáticas en los países de la Unión Europea siguiendo uno de los informes de Eurydice (2011b) sobre el asunto, que lleva por título *Mathematics Education in Europe: Common Chellenges and National Policies* (La educación matemática en Europa: retos comunes y políticas nacionales). La eficacia de la enseñanza de las matemáticas y de cualquier disciplina exige, como es obvio, un profundo conocimiento de la disciplina, una buena formación sobre sus procedimientos didácticos y la flexibilidad suficiente para adaptar sus estrategias y tácticas a las necesidades de todos los estudiantes. En la Unión Europea hay una cierta preocupación sobre tres aspectos de interés, que centran el estudio del profesorado de matemáticas: 1)

Universidad Pontificia de Salamanca

problemas o retos que afectan de modo especial a este profesorado y que despierta una notable preocupación; 2) la formación inicial del profesor de matemáticas y 3) las medidas o disposiciones que, para el mejoramiento de la educación matemática y de la formación permanente de los profesores de matemáticas, se están ensayando en algunos de los países de la U.E., para mejorar sus competencias.

a) Problemas de los profesores de matemáticas

Entre los retos destaca como más urgente el envejecimiento de los profesores de matemáticas en los países europeos. Los datos provienen de TIMSS [122] 2007 y de Eurostat[123] y se refieren a Bulgaria, Alemania, Italia y Rumania y parecen indicar que esta tendencia está presente en los mencionados países y pudiera extenderse a otros. Sin embargo falta un análisis más detallado por todos los países de la U. E. para valorar el problema y arbitrar las soluciones apropiadas. El segundo reto se relaciona con el *deseable equilibrio entre el número de mujeres y hombres en el cuerpo de profesores,* que se rompe por el alto porcentaje de mujeres profesoras sobre todo en primaria. La tendencia hacia el equilibrio de género parece consolidada únicamente en Dinamarca y en los primeros cursos de secundaria, en que la proporción de mujeres y hombres está equilibrada entre los profesores de matemáticas. En cambio, entre los profesores jóvenes de matemáticas, parece confirmarse la tendencia en países como Luxemburgo o Turquía, en este caso la fuente de estos datos proviene de PISA[124]. Un último problema relacionado con la preparación matemática de los profesores que imparten la materia, se refiere a las claras deficiencias de conocimientos de la materia en los profesores de matemáticas que imparten docencia en el nivel primario.

En cuanto a las regulaciones y recomendaciones sobre la formación de los profesores de matemáticas, se observa en la mayoría de los países, que en los programas ITE[125] se dedica un mínimo porcentaje del curso al aprendizaje de los conocimientos

[122] TIMSS 2007 es el acrónimo de the Trends in Internacional Mathematics and Science Study, que en castellano significa *Tendencias en el estudio internacional de las matemáticas y la ciencia*.

[123] Eurostat es la *Oficina Estadística de la Unión Europea*, que gestiona los datos estadísticos en la U.E.

[124] PISA es el acrónimo de Programme for Internacional Student Assessment (*Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos*), que lleva a cabo la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)

[125] ITE es el acrónimo de Initial Teacher Education, que en español quiere decir *educación inicial para profesores*.

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticos de los profesores. Estos porcentajes son desproporcionalmente más altos para los profesores especialistas de matemáticas en comparación con el porcentaje obtenido por los profesores generales. Por el momento, solo unos pocos países parecen estar dando pasos para cambiar esta tendencia y modificar la educación de profesores, el entrenamiento y sus condiciones de trabajo. El Reino Unido ha asumido un excepcional compromiso con las iniciativas dirigidas al aprendizaje de conocimientos matemáticos por parte de los profesores de primaria, así como en apoyar la formación de profesores especialistas de matemáticas en este nivel (Eurydice, 2011b:140).

b) La enseñanza de las matemáticas

En cuanto a la *enseñanza de las matemáticas,* el Informe de Eurydice recoge la opinión de algunos autores que proponen el contenido siguiente: "conocimientos matemáticos para la enseñanza". Esta categoría hace referencia a conocimientos matemáticos específicos para la profesión docente – entre los que se incluyen tener en cuenta el razonamiento matemático de los alumnos, realizar un seguimiento del temario y de su evolución en el aula, proporcionar nuevas representaciones o explicaciones para temas conocidos, etc. Pero supone planificar las clases interactivas, valorar el progreso de los alumnos y realizar evaluaciones, explicar a los padres el trabajo que se realiza en el aula, gestionar los deberes, abordar cuestiones de equidad, etc. – todo lo cual ha de tener lugar dentro del contexto del conocimiento que tiene el profesor de "conceptos matemáticos y habilidades de razonamiento matemático y de comunicación, dominio de la terminología y de los ejemplos, así como la comprensión y la reflexión sobre la naturaleza de la competencia matemática (…) los investigadores han descubierto que el que los profesores obtengan una puntuación alta en estas medidas de los conocimientos matemáticos para la enseñanza contribuye a que sus alumnos obtengan mejores resultados" (Ball y otros, 2005:17).

En la mayoría de los países europeos con regulaciones centrales, recomendaciones u orientaciones, en los programas ITE exigen que los profesores tengan capacidad para enseñar el currículo matemático, crear una variedad de situaciones de enseñanza – aprendizaje y funcionar con variados materiales didácticos. Asimismo han de ser capaces de conducir el aprendizaje de sus alumnos, sus prenociones y actitudes hacia las matemáticas así como resolver sus dificultades de aprendizaje. Para este fin, los profesores han de involucrar a los padres y otras personas, como las autoridades en educación, en la vida de los colegios y colaborar con otras

Universidad Pontificia de Salamanca

iniciativas para compartir el conocimiento y las experiencias adquiridas en el proceso de enseñanza de las matemáticas (Eurydice, 2011b:119).

Los países con regulaciones centrales suelen analizar y evaluar el contenido de los programas de ITE, que se extiende a amplias áreas de conocimiento matemático, pero en el que están escasamente incluidos los conocimientos y procedimientos de cómo enseñar matemáticas en una forma sensible al género. Las instituciones de educación superior que implementan los programas de ITE son responsables de los contenidos del currículo, de la presentación y la evaluación de esos exámenes. Exámenes centrales para los futuros profesores de matemáticas son raros en Europa (Eurydice, 2011b: 140).

c) EACEA [126] / Eurydice (SITEP) [127]

Los *programas de educación inicial para profesores* (SITEP) revelan más similitudes que diferencias entre los programas de profesores generales y específicos. La competencia más importante en ambos casos es el conocimiento y la habilidad para enseñar el currículo oficial de las matemáticas / ciencias. La recreación de variado espectro de situaciones de enseñanza o de aplicación de las variadas técnicas de enseñanza suele ser parte de los cursos específicos de ambos modelos de profesores. Aplicar el aprendizaje cooperativo, el basado en proyectos, en problemas o el sustentado en preguntas se incluyen tanto en programas generales como específicos para la educación del profesorado. Tratar la enseñanza en clave de diversidad, por ejemplo, enseñar teniendo en cuenta la diversidad cultural de los alumnos, los diferentes intereses de chicos y chicas o evitar los estereotipos de género, cuando los profesores interactúan con los alumnos, son otros tantos asuntos sobre los que se recogen escasas aportaciones en los programas para la formación de profesores específicos (Eurydice, 2011b: 141).

d) Importancia de la formación continuada

En la U. E. parece haber un amplio consenso sobre la conveniencia de que los profesores de matemáticas han de continuar actualizando sus conocimientos y habilidades a lo largo de su vida profesional. Las oportunidades para que estos

---

[126] EACEA es el acrónimo de The Education, Audiovisual and Culture Executive Agency, que en español significa la Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo , Audiovisual y Cultural.

[127] SITEP es el acrónimo de Survey on Inicial Education Programmes, que en español significa las encuestas o mejor la *investigación en programas de educación inicial para profesores*.

Universidad Pontificia de Salamanca

profesores se comprometan a continuar su desarrollo profesional, (CPD)[128], puedan tener consecuencias positivas en su trabajo, en sus expectativas profesionales, en la adquisición de nuevas habilidades y actitudes, en su actuación laboral y en su satisfacción profesional, son realmente escasas. Además, los cambios en el conocimiento de los profesores y en su comportamiento en la clase por el desarrollo profesional tienen un impacto positivo en el aprendizaje de sus alumnos. Múltiples investigaciones muestran que el desarrollo profesional de los profesores tiene consecuencias positivas en los logros de los estudiantes.

En este contexto las oportunidades de CPD son beneficiosas tanto para los profesores generales que enseñan matemáticas, sin tener un abundante bagaje matemático ni una cualificación específica en la materia, como para los profesores de matemáticas con conocimientos específicos. Los profesores de matemáticas no solo han de impartir el currículo, deben ser capaces de crear adaptaciones metodológicas a las necesidades cambiantes de los alumnos, integrar nuevos materiales y tecnologías en los procesos de la enseñanza-aprendizaje y tener en cuenta los resultados de las investigaciones relacionadas con el aprendizaje teórico de los alumnos y con las prácticas de las matemáticas.

Timperley et al. (2007) revisó 72 estudios sobre el efecto que tiene el desarrollo profesional de los profesores en los resultados de los estudiantes, a fin de identificar qué aspectos del conocimiento y habilidades en las sesiones de desarrollo profesional parecían ser más efectivas. El desarrollo profesional era más efectivo cuando iba más allá de la pedagogía general para proporcionar a los profesores un surtido de conocimientos basados en matemáticas y métodos de enseñanza específicos y exclusivos de los matemáticos (Eurydice, 2011b:123).

La mayoría de los países recomiendan programas de CPD centrados en aumentar los conocimientos de matemáticas de los profesores. En cambio, son escasos los países que promocionan programas relacionados con los procedimientos de la enseñanza / aprendizaje de las matemáticas y sólo una minoría de ellos se focaliza en apoyar métodos de enseñanza teniendo en cuenta la variable género y las investigaciones producidas. La mayoría de los países de la U. E. orientan a los profesores en el desarrollo de los conocimientos del currículo matemático, actualizarse con las reformas

[128] CPD es el acrónimo de *Continuing Profesional Development,* que en castellano se traduce por la *formación profesional continua*.

Universidad Pontificia de Salamanca

e integrar las ICT[129] en su enseñanza de las matemáticas, buscando los modos de mejorar el pensamiento crítico de sus alumnos o sus habilidades en la resolución de problemas. En bastantes países europeos, los programas de CPD están diseñados para ofrecer a los profesores conocimientos sobre cómo integrar las matemáticas en otras materias o aplicarlas en los contextos de la vida.

A pesar de las numerosas evidencias de que el uso de la investigación ayuda a los profesores y se refleja positivamente en la práctica profesional, solo nueve de los países defienden programas de CPD en los que se anima a los profesores a usar las investigaciones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas.

Los datos TIMSS 2007 muestran que la participación en los programas de formación continuada es baja sobre todo a nivel de primaria: sólo un tercio de los estudiantes había tenido un profesor que hubiera asistido a programas de desarrollo profesional, sobre la enseñanza de las matemáticas, habilidades en la resolución de problemas o integrar las TICs en la enseñanza de las matemáticas. Sólo unos pocos países europeos ofrecen reales incentivos, económicos o de otro tipo, para promocionar la participación de los profesores en los cursos para mejorar sus habilidades en la enseñanza de las matemáticas (Eurydice, 2011b: 122 – 130).

e) Fórmulas prácticas para mejorar la enseñanza de las matemáticas

En orden a conseguir una mejora en la enseñanza de las matemáticas, en la U. E. parece imponerse la opinión de que es importante mantener *comunidades* o redes donde los profesores, otras entidades y otras personas implicadas cooperen y colaboren. Una particular forma de práctica cooperativa que parece efectiva en la mejora de la enseñanza es lo que se denomina con la expresión, *estudiar la lección*: los profesores se reúnen en grupos para trabajar en el diseño, la implementación, la evaluación y la mejora de una lección específica. Un ejemplo de implementación de esta práctica de aprendizaje de colaboración entre los profesores es el proyecto europeo PRIMAS [130], que ayuda a desarrollar y a trabajar con este tipo de redes de profesores y profesionales de 12 países para realizar las encuestas a estudiantes de matemáticas y ciencia. El proyecto proporciona materiales desarrollados por otros profesionales, para explorar la

[129] ICT es el acrónimo de Information and Comunication Technology, que significa lo las *tecnologías de la información y la comunicación* o lo que denominamos con el acrónimo TIC.

[130] PRIMAS son las siglas con que se denomina el *Proyecto europeo para promover el aprendizaje de las matemáticas y la ciencia en los niveles de primaria y secundaria, basados en la investigación*.

Universidad Pontificia de Salamanca

efectividad de los métodos de enseñanza así como los materiales de clase para uso de los estudiantes. Esto asegura a los profesores que son apoyados a través de la red por padres y agentes de políticas educativas involucradas en el proyecto.

La mayoría de los países europeos promocionan y proporcionan soporte, a nivel nacional, para el desarrollo de redes de profesores para el intercambio de ideas, de métodos didácticos, de materiales y de experiencias para fomentar la cooperación entre profesores de diferentes colegios o entre profesores e investigadores. En la mitad de los países europeos, el objetivo perseguido consiste en proporcionar una variedad de formatos para los encuentros que permitan intercambiar ideas en grupos de trabajo, proyectos, conferencias, seminarios, congresos, etc. En algunos países la colaboración de profesores se lleva a cabo principalmente a través de websites, plataformas con aprendizajes virtuales, blogs u otros tipos de redes de trabajo que tienen como objetivo a los profesores de todas las asignaturas incluyendo las matemáticas (Eurydice, 2011b: 126 – 128).

f) Apoyo de la dirección de los centros

Para que la colaboración de profesores al igual que para el desarrollo de programas de formación continua es muy importante que la dirección de los centros escolares la apoye y valore. Inversamente, si el ambiente del colegio falla en proporcionar las infraestructuras necesarias para la calidad de la enseñanza, tales como el soporte de la dirección, tiempo, espacio, recursos, etc. se pueden frustrar las mejores competencias, actitudes y esfuerzos de los profesores de matemáticas y de cualquier profesor (Eurydice, 2011b:130).

4.2.7.- A modo de síntesis

1) La preparación inicial del profesor de matemáticas para la educación secundaria obligatoria y para el bachillerato comienza con los estudios universitarios conducentes a la obtención del título universitario y oficial de Grado de Matemáticas. Las condiciones y procedimientos para la graduación en matemáticas están establecidas en la legislación vigente, que obviamente trata prioritariamente la graduación en general, sus condiciones y competencias, objetivos y normas para su organización y diseño. La legislación importante es la siguiente: a) *La Ley Orgánica 6/2001*, de universidades, que determina la titulación académica para impartir docencia en la ESO

Universidad Pontificia de Salamanca

y su formación pedagógica correspondiente. b) *La Ley Orgánica 4/2007 de 12 de abril*, que modifica la anterior y establece los ciclos de la enseñanza universitaria oficial: Grado, Master y Doctorado. El Grado ocupa el lugar de la anterior Licenciatura. c) *La legislación más específica* y que desarrolla los ciclos universitarios es el Real Decreto 1693/2007 por el que "se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales" y por consiguiente desarrolla la organización y diseño de los Grados, enmarcándolos en cuatro grandes ramas, determinando que sean las universidades las que fijen los contenidos académicos, las condiciones para la graduación, las competencias, objetivos y normas de permanencia y de convalidación de estudios, que serán medidos mediante los *créditos europeos ECTS*. En este real decreto el artículo 12 establece un *diseño bastante pormenorizado* de cómo ha de organizarse y qué integra el titulo de Grado. En este apartado se muestra un titulo concreto de Grado de Matemáticas, el de la Universidad Complutense de Madrid, con sus contenidos, competencias, objetivos y normas para la graduación, tal como se imparte en este momento y que cumple con las exigencias legales correspondientes.

2) La referencia a la necesidad del *nuevo planteamiento de las competencias para la mejora de la formación del profesor* significa apuntar hacia un horizonte de un profesor mejor preparado y esto significa educar mejor, sacar lo mejor de los estudiantes, es decir de las personas que integran el sistema educativo. Esta perspectiva competencial refuerza las aplicaciones prácticas requeridas en la actualidad para el ejercicio actual del rol de profesor, con satisfacción personal y aprobación social, aun en las difíciles circunstancias que conlleva la sociedad global del conocimiento. Se muestran dos planteamientos que son complementarios, Tribó y Perrenoud implican a los agentes del proceso educativo, profesor y alumno, pero también al centro, en donde el proceso educativo se realiza plenamente. Asimismo se ha recogido con brevedad la *Recomendación sobre competencias básicas*, del Parlamento europeo y del Consejo de la Unión Europea a los Estados miembros. Luego el análisis se centra en la legislación española, Ley Orgánica (2/2006) de Educación y el Real Decreto (*1631/2006)*, que son los instrumentos que desarrollan el asunto de las competencias matemáticas para la educación secundaria obligatoria.

3) En *relación con las TICs y su aportación a la enseñaza de las matemáticas* están haciéndose variadas experiencias en distintos lugares y de modos diferentes, en diversos escenarios culturales, que hemos mencionado y descrito en el texto, cuyos resultados positivos vienen avalados por los datos de que se dispone y por las

Universidad Pontificia de Salamanca

esporádicas noticias que los medios suelen transmitir. Sobre el uso de las TICs en los procesos educativos se constata que, a nivel teórico y de opinión los profesores suelen reconocer el valor de este recurso para la educación pero todavía son pocos los que han implantado de manera constante estos instrumentos en su clase. En general hay ya una cierta presión social y legal para la implantación de las TICs en las clases. El efecto positivo logrado en la enseñanza de las matemáticas, con el apoyo de las TICs parece más claro en los jóvenes que inician sus estudios en la Universidad, pero no es ajeno a los sectores estudiantiles de los adolescentes. En todo caso no abundan los estudios generalizados sobre esta experiencia en la educación secundaria obligatoria.

4) Del planteamiento del profesor Peter Hilton, sobre el profesor de matemáticas en la enseñanza secundaria, sobresalen al menos las siguientes aspectos: a) El profesor de matemáticas ha de tener unos *conocimientos amplios de la materia que se denomina matemáticas* y esto con independencia del lugar y nivel donde vaya a ejercer como profesor. El profesor de matemáticas debiera alcanzar a la graduación en matemáticas. b) El profesor de matemáticas ha de ser *un profesional del saber capaz de pensar en clave matemática* los fenómenos no solo del mundo natural sino también del ámbito social en el que se sitúa y explicarlos en formato matemático a sus alumnos. c) El profesor de matemáticas ha de tener una *actitud positiva hacia las matemáticas*, gustarle lo que enseña y ser capaz de transmitir el gusto por el pensamiento matemático. d) *Las matemáticas no se reducen a una especial técnica* ni a un conjunto de técnicas, aunque ésta sea la característica más perceptible y más repetida a la vista del público y posiblemente la poseen cuando los alumnos inicien sus estudios de las matemáticas. e) *El profesor de matemáticas ha de conocer las reglas pedagógicas y didácticas* más esenciales para mejor transmitir los conocimientos matemáticos a los alumnos, saber verterlos en metáforas y figuras, para la mejor comprensión de los estudiantes. Una condición importante del profesor de matemáticas es *que se ocupe de enseñar los conocimientos matemáticos* y no transmita preocupación alguna de que enseña para que los estudiantes aprueben los exámenes.

5) Del *enfoque comunicativo* se pueden inferir algunos resultados sobre la enseñanza de las matemáticas en los sectores adolescentes de la ESO y el Bachillerato: se promueve un enfoque específico de preparación inicial y permanente para los profesores de la ESO y de Bachillerato, de modo tal que los conocimientos específicos y genéricos que se adquiriesen en el centro tuviesen la orientación de formar profesores para estos niveles de la enseñanza. Se defiende un *profesorado polivalente*, es decir, que

Universidad Pontificia de Salamanca

cualquier profesor de este nivel puede impartir docencia en las diferentes áreas de ciencias, puesto que la excesiva especialización obstaculiza la comunicación, esencial en la enseñanza. Entre los argumentos en que se basa esta tendencia está el siguiente: en el futuro no va a ser posible contar con profesores de matemáticas, que hayan cursado el grado de matemáticas, teniendo en cuenta el descenso de matrícula en esta carrera. Esta situación parece afectar asimismo a otros estudios de ciencias - física, química, biología y geología – en que decae el número de estudiantes matriculados, en cambio son cada vez más demandados por las nuevas empresas e industrias.

6) En la Unión Europea se ha constatado el hecho de que muchos alumnos fracasan en la evaluación de las matemáticas, sobre todo en los niveles de secundaria y bachillerato. Ante tales hechos, los Estados están ensayando variadas iniciativas y apoyando experiencias que disminuyan los índices de fracaso, sin embargo, por el momento, no parecen haber mejorado los resultados. De esta experiencia vivida e investigada, surge la preocupación por estudiar el asunto con cierto detalle y por expertos, desde la perspectiva del profesorado especialmente, a fin de dar con las causas que producen el fracaso en los adolescentes y jóvenes europeos, con la finalidad de introducir las correspondientes correcciones. A esta generalizada preocupación responde el informe analizado desde la perspectiva del profesor de matemáticas, en el que se indican ya algunas de las medidas que los Estados toman para solucionar el problema.

4.3. FORMACIÓN PEDAGÓGICA DEL PROFESOR DE LA ESO Y DEL BACHILLERATO

Se han dispuesto nuevos procedimientos para la formación pedagógica del profesorado de la ESO y de Bachillerato en España. A partir de la ORDEN ECI/3858/2007*, de 27 de diciembre,* se da forma académica de Master al período formativo de este profesorado, se determina su estructura, organización y funcionamiento y se regulan sus competencias. Desde estos supuestos, el discurso de este apartado sigue la ruta establecida por la misma naturaleza de la realidad a describir. Tres aspectos destacan: en el primero básicamente se atiende a las leyes, decretos y órdenes ministeriales que diseñan y desarrollan los marcos legales para la formación didáctica y específica del profesorado de educación secundaria obligatoria, de bachillerato, de enseñanza profesional y de idiomas. El segundo asunto a tratar se refiere a los aspectos que me han parecido más interesantes - organización,

Universidad Pontificia de Salamanca

competencias y control de calidad - tanto de la estructura del *Master de formación de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato*, *formación profesional y enseñanza de idiomas*, como de *su funcionamiento* para que los futuros docentes de estos ciclos educativos puedan adquirir las habilidades didácticas y específicas para el desempeño de su cometido profesional. Por último haré una breve *valoración de las estructuras educativas construidas y de sus limitaciones* en relación con el fin propuesto.

La legislación general no contempla distintas características de formación didáctica para los profesores de matemáticas dentro del *profesorado de la ESO y bachillerato*, que es el término genérico de uso legislativo. Es obvio que lo atribuido al profesor de secundaria y bachillerato es de aplicación a todo profesor de ese nivel y también al profesor de matemáticas, aunque adecuándolo al destinatario en cada caso. En cuanto a la formación específica, en cambio, en la organización del Master obviamente se establecen las materias pertinentes mediante las que se transmite la formación específica de la disciplina de matemáticas. En la legislación respectiva se determina el papel protagonista de las universidades en el diseño de esta titulación, concretándolo en una serie de objetivos y competencias adecuadas a la enseñanza de las diversas materias y también de las matemáticas. La perspectiva seleccionada para el presente apartado, centrada en el análisis del nuevo procedimiento para la formación del profesorado de la ESO y de Bachillerato, me ha parecido la pertinente para dar cuenta del asunto con el adecuado detalle.

4.3.1.- Legislación genérica para el Master de formación del profesorado

A continuación, se muestran los supuestos normativos que contextualizan la nueva formación que el Estado español ha puesto en práctica para dotar de una adecuada preparación genérica y específica, para *el ejercicio de la profesión docente*. Los textos legislativos que se citan para el análisis del Master, se exponen siguiendo el orden de su aparición en el *Boletín Oficial del Estado*. Alguno en particular se recoge íntegramente en la parte final dedicada a Anexos, por la importancia que se le atribuye. La acumulación de textos legislativos se justifica puesto que mediante los mismos se diseñan, se organizan y se ejecutan los Máster de formación del profesorado.

Universidad Pontificia de Salamanca

a) Ley Orgánica (2/2006) de Educación

El asunto de la formación de postgrado del profesorado se recoge en la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, en el Art. 100 se afirma que el ejercicio de profesor exige además de *estar en posesión de las titulaciones académicas correspondientes* (Graduado, Ingeniero o Arquitecto) habrá de *tener la formación pedagógica y didáctica* adecuada a cada enseñanza y que el Gobierno en dicha ley se compromete a establecer. A partir de esta Ley Orgánica la Administración Educativa de España avanza en el diseño y configuración de estructuras pertinentes para que los docentes puedan adquirir la mencionada formación pedagógica y didáctica, que se va especificando mediante sucesivos decretos y ordenes ministeriales. En el punto 4 del artículo 100 de la mencionada LOE se establece que esta formación se *adaptará al sistema de grados y postgrados del espacio europeo de educación superior*. Para los profesores de educación secundaria obligatoria la preparación inicial requerida es la de Grado en la materia d que se trata, equivalente a la hasta hace poco tiempo Licenciatura. Se determina además que las Universidades lleven a cabo los *convenios oportunos* con la Administración educativa para la organización de la formación pedagógica y didáctica de los profesores de secundaria como estudios de postgrado.

b) Real Decreto (56/2005)

Con anterioridad a la Ley Orgánica mencionada, ya se había iniciado la tarea de diseño de los estudios universitarios de segundo ciclo, conducentes a la obtención del título de Máster. Me refiero al *Real Decreto 56/2005, de 21 de enero,* (BOE 25/01/2005), cuyo capítulo II, en dos artículos se especifican los estudios universitarios para el Máster. Son dos artículos importantes para nuestro cometido. En el primero, art. 8, se desarrollan tres asuntos [131]: el número de créditos del título de Máster se establecerá entre un mínimo de 60 y un máximo de 120 dedicados a la formación

[131] Art. 8: Estructura:
1.Los estudios universitarios de segundo ciclo conducentes a la obtención del título oficial de Master tendrán una extensión mínima de 60 créditos y máxima de 120, y estarán dedicados a la formación avanzada, de carácter especializado o multidisciplinar, dirigida a una especialización académica o profesional o bien a promover la iniciación en tareas investigadoras.
2.Los estudios de Master podrán incorporar especialidades en la programación de sus enseñanzas que se correspondan con su ámbito científico, humanístico, tecnológico o profesional.
3.El Gobierno podrá establecer directrices generales propias y requisitos especiales de acceso en los estudios conducentes al título oficial de Master, en aquellos casos en que, según la normativa vigente, dicho título habilite para el acceso a actividades profesionales reguladas.

Universidad Pontificia de Salamanca

avanzada, especialización académica o iniciación investigadora. Estos estudios podrán incorporar especialidades diversas en su programación y en caso de que el título habilitara para el ejercicio profesional, el Gobierno se reservaba la facultad de establecer requisitos de acceso a esos estudios. En el segundo artículo, art. 9, está dedicado a la organización del Máster: se asigna a la Universidad y a sus órganos responsables del desarrollo del Máster, la concreción de los créditos totales del Master y de las correspondientes materias a cursar así como la posibilidad de que las Universidades incorporen a las tareas docentes del Máster a personal ajeno a la Universidad [132].

c) Real Decreto (1393/2007)

Un tercer paso se da con el *Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre* por la que se *establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales* (BOE 30 octubre 2007) para la formación del profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato y de otros docentes de diferentes ciclos educativos. En el capítulo II determina la *estructura de las enseñanzas universitarias oficiales* y en el art. 10. *Enseñanzas del Máster* y establece tres asuntos [133]: finalidad, necesidad de superar las

---

[132] Art. 9: Organización:
1. La universidad, a propuesta del órgano responsable del desarrollo de cada programa, asignará un número determinado de créditos a cada una de las materias y actividades formativas del programa.
2. El órgano responsable del desarrollo del programa fijará el número mínimo de créditos, así como las materias del programa que ha de cursar cada estudiante, en función de la formación previa acreditada por éste. En todo caso, para la obtención del título de Máster será preciso cursar, dentro del programa, un mínimo de 60 créditos.
3. La Universidad, a propuesta del órgano responsable del desarrollo del programa, *podrá autorizar la colaboración de profesionales o investigadores que no sean profesores universitarios, bajo la supervisión de uno o varios profesores del programa.* Asimismo, podrá establecer acuerdos de colaboración con otras instituciones u organismos públicos y privados, así como con empresas o industrias. Todas estas colaboraciones deberán contar con la autorización previa de la universidad, a propuesta del órgano responsable del desarrollo del programa. (Las cursivas son propias, no del artículo)

[133] Artículo 10. *Enseñanzas de Máster.*
1. Las enseñanzas de Máster tienen como finalidad la adquisición por el estudiante de una formación avanzada, de carácter especializado o multidisciplinar, orientada a la especialización académica o profesional, o bien a promover la iniciación en tareas investigadoras.
2. La superación de las enseñanzas previstas en el apartado anterior dará derecho a la obtención del título de Máster Universitario, con la denominación específica que figure en el RUCT.
3. La denominación de los títulos de Máster será: Máster Universitario en T por la Universidad U, siendo T el nombre del Título y U la denominación de la Universidad que expide el título. En todo caso, las Administraciones Públicas velarán porque la denominación del título sea acorde con su contenido y en su caso, con la normativa específica de aplicación, y no conduzca a error sobre su nivel o efectos académicos ni a confusión sobre su contenido y, en su caso, efectos profesionales.

Universidad Pontificia de Salamanca

enseñanzas previstas para obtener el título de Máster, formato y denominación de estos títulos . El capítulo IV del Real Decreto se dedica a las *enseñanzas universitarias oficiales de Máster*, que desarrolla en los artículos 15, 16 y 17. En primer término se señalan las *directrices para el diseño de títulos de Máster Universitario* (art. 15) [134]. En el art. 16 se establecen los correspondientes requisitos para el *acceso a las enseñanzas oficiales de Máster* [135] y, por último, en el art. 17 se establecen las condiciones para la *admisión a las enseñanzas de Máster*[136].

---

[134]*Artículo 15. Directrices para el diseño de títulos de Máster Universitario.*
1. Los planes de estudios conducentes a la obtención del título de Máster Universitario, serán elaborados por las universidades y verificados de acuerdo con lo establecido en el presente Real Decreto.
2. Los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster Universitario tendrán entre 60 y 120 créditos, que contendrá toda la formación teórica y práctica que el estudiante deba adquirir: materias obligatorias, materias optativas, seminarios, prácticas externas, trabajos dirigidos, trabajo de fin de Máster, actividades de evaluación, y otras que resulten necesarias según las características propias de cada título.
3. Estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa pública de un trabajo de fin de Máster, que tendrá entre 6 y 30 créditos.
4. Cuando se trate de títulos que habiliten para el ejercicio de actividades profesionales reguladas en España, el Gobierno establecerá las condiciones a las que deberán adecuarse los correspondientes planes de estudios, que además deberán ajustarse, en su caso, a la normativa europea aplicable. Estos planes de estudios deberán, en todo caso, diseñarse de forma que permitan obtener las competencias necesarias para ejercer esa profesión. A tales efectos la Universidad justificará la adecuación del plan de estudios a dichas condiciones.

[135] *Artículo 16. Acceso a las enseñanzas oficiales de Máster.*
1. Para acceder a las enseñanzas oficiales de Máster será necesario estar en posesión de un título universitario oficial español u otro expedido por una institución de educación superior del Espacio Europeo de Educación Superior que facultan en el país expedidor del título para el acceso a enseñanzas de máster.
2. Así mismo, podrán acceder los titulados conforme a sistemas educativos ajenos al Espacio Europeo de Educación Superior sin necesidad de la homologación de sus títulos, previa comprobación por la Universidad de que aquellos acreditan un nivel de formación equivalente a los correspondientes títulos universitarios oficiales españoles y que facultan en el país expedidor del título para el acceso a enseñanzas de postgrado. El acceso por esta vía no implicará, en ningún caso, la homologación del título previo de que esté en posesión el interesado, ni su reconocimiento a otros efectos que el de cursar las enseñanzas de Máster.

[136] *Artículo 17. Admisión a las enseñanzas oficiales de Máster.*
1. Los estudiantes podrán ser admitidos a un Máster conforme a los requisitos específicos y criterios de valoración de méritos que, en su caso, sean propios del título de Máster Universitario o establezca la universidad.
2. La Universidad incluirá los procedimientos y requisitos de admisión en el plan de estudios, entre los que podrán figurar requisitos de formación previa específica en algunas disciplinas.
3. Estos sistemas y procedimientos deberán incluir, en el caso de estudiantes con necesidades educativas específicas derivadas de discapacidad, los servicios de apoyo y asesoramiento adecuados, que evaluarán la necesidad de posibles adaptaciones curriculares, itinerarios o estudios alternativos.

Universidad Pontificia de Salamanca

d) Real Decreto (861/2010)

En el año 2010 se promulgó otro decreto a fin de subsanar ciertas lagunas, corregir algunos aspectos del real decreto (1393/2007) que acabamos de mencionar y atender a ciertas sugerencias provenientes ya de las concretas experiencias que ofrecían la puesta en marcha de los Master en las Universidades, reclamando hacer algunas modificaciones. La administración educativa fue sensible a tales demandas y publicó el nuevo *Real Decreto 861/2010, de 2 de julio*, (BOE, núm. 161, Sábado 3 de julio de 2010), por el que se modifica el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, en el que se estableció la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. Entre los artículos que hemos citado y que han sido modificados está el apartado del punto 3 del art.10. Teniendo en cuenta que son muchas las modificaciones introducidas en los artículos del texto del decreto modificado que afectan a los estudios oficiales de Master se ha optado por ofrecer una copia del Real Decreto 861/2010 (ANEXOS: Capítulo IV: Anexo I. 4) en que se contemplan los artículos modificados, la nueva redacción de los artículos modificados y las nuevas decisiones establecidas. Quisiera sin embargo mencionar que el nuevo decreto fija definitivamente en *60 créditos el Master* e implanta una *distinción en los tipos de materias* del Master que se distribuyen en materias obligatorias y materias optativas, estableciendo asimismo que, a la terminación de los cursos del Master, ha de haber un *Trabajo de Fin de Master* al que se atribuirán 15 créditos de los 60 de que consta el Master. También se especifica la *necesidad de contar con prácticas externas* en el Master.

4.3.2.- Legislación específica para el Master de Formación del Profesorado

La Orden del Ministerio de Educación Ciencia e Investigación (Orden ECI, 3858/2007, BOE, núm. 312, 29 de diciembre 2007) establece la necesidad de legislar sobre los requisitos a los que atenerse en la elaboración de los estudios conducentes a la adquisición de los Master para impartir docencia en la ESO y en el Bachillerato y con esta finalidad se legisla para establecer los requisitos a los que deberán adecuarse los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster que *habiliten*

4. La admisión no implicará, en ningún caso, modificación alguna de los efectos académicos y, en su caso, profesionales que correspondan al título previo de que esté en posesión el interesado, ni su reconocimiento a otros efectos que el de cursar enseñanzas de Máster.

Universidad Pontificia de Salamanca

para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, que presenten las universidades para su verificación por el Consejo de Universidades (Orden ECI, 3858/2007).

En la Disposición Primera de la Orden ministerial específica lo siguiente:

"Los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, deberán cumplir, además de lo previsto en el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, los requisitos respecto a los apartados del Anexo I del mencionado Real Decreto que se señalan en el Anexo a la presente Orden"[137].

De acuerdo con este mandato legislativo, efectuado por parte de la autoridad competente, en este caso el Ministerio de Educación y Ciencia, quedan establecidas las condiciones para la puesta en marcha del proceso formativo del profesorado de educación secundaria y de bachillerato, a las que habrán de atenerse las Universidades en el desarrollo de este planteamiento legislativo y que se contienen en el Anexo de esta Orden Ministerial, que vamos a sintetizar a continuación, empezando por la denominación del título.

1ª) Denominación del título

En cuanto a la denominación del título en el Apartado 1.1 Denominación (Anexo de la Orden ECI, 3858/2007), se hace referencia a un Acuerdo del Consejo de Ministros de 14 de diciembre de 2007 en que determinan los estudios conducentes a la obtención del título correspondiente y a una Resolución del Secretario de Estado de Universidades e Investigación sobre el título de Master (BOE, núm. 305e, de 21 de diciembre de 2007). En el mismo apartado se dice que en el título deberán quedar recogidas con toda claridad las disciplinas para las que está preparado a ejercer su profesión de Profesor: "deberá facilitar la identificación de la profesión para cuyo ejercicio habilita y en ningún caso, podrá conducir a error o confusión sobre sus efectos profesionales". Las condiciones son obligatorias y no pueden subsanarse por el Consejo de Universidades si

[137] La Orden ECI/ 3858 /2007/ de 27 de diciembre, por su importancia, se incorpora literalmente con el correspondiente anexo, que es la parte más importante, en los ANEXOS: Capítulo IV, Anexo I.1.

Universidad Pontificia de Salamanca

el título “no cumple las condiciones establecidas en el referido Acuerdo y en la presente Orden”.

2ª) Condiciones de acceso

En el Apartado 4.2 del Anexo de la Orden Ministerial (ECI, 3858/2007) sobre las *condiciones de acceso a cursar el Master de Formación del Profesorado* se establece: a) “la acreditación del dominio de las competencias relativas a la especialización que se desee cursar”, mediante una prueba específica o por estar en posesión de las titulaciones universitarias correspondientes a la especialización elegida. Como segundo requisito, habrá de acreditarse el dominio de una lengua extranjera, al menos al nivel B1 del Marco Común Europeo de Referencia para Lenguas.

3ª) Objetivos

Los objetivos que en este caso son las competencias a adquirir por parte de los estudiantes del Master se refieren a todo tipo de asuntos. Los transcribimos literalmente a pie de página para ser fieles al pensamiento del legislador[138].

---

[138] 1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.
2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.
4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.
5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.
6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.
7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.
8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.
10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.
11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.

Universidad Pontificia de Salamanca

4ª) Planificación de las enseñanzas

Cuatro asuntos se contemplan en el apartado 5 de la mencionada Orden Ministerial: a) El título de Master exige unas enseñanzas universitarias oficiales que tendrán la duración de 60 créditos. b) En la estructuración de estas enseñanzas se han de tener en cuenta "las materas y ámbitos docentes" donde va a ejerce su profesión. c) El 80 % de los créditos totales del Master han de ser presenciales, a excepción de aquellas universidades que desarrollan sus programas a distancia que "han de garantizar que el prácticum tenga carácter presencial". d) Las instituciones educativas que participen en el Prácticum deben estar reconocidas como centros de prácticas.

Cuadro 5.- Módulo del plan de estudios

Módulos	Nº de créditos europeos	Competencias a adquirir
Genérico: 1)Aprendizaje y desarrollo de la personalidad 2)Procesos y contextos educativos 3)Sociedad, familia y educación	**12**	Conocimiento de las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones, el desarrollo de la personalidad de estos estudiantes y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje Conocimiento de los procesos de interacción y comunicación en el aula y en el centro. Conocimiento de la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país, sus recursos y estrategias de información, tutoría y orientación académica y profesional. Promover acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana y participar en la definición del proyecto educativo. Relacionar la educación con el medio y comprender la función educadora de la familia y la comunidad.
Específico: 1) Complementos para la formación disciplinar [139] 2) Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes [140] 3) Innovación docente e iniciación a la investigación educativa [141]	**24**	Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares. Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo. Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas, desarrollar proyectos de investigación.
Prácticum:	**16**	Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización.

[139] Dos asignaturas integran estos complementos en el Máster de la UCM: La una, *El significado de las matemáticas en Educación Secundaria* y la segunda *Pensamiento matemático y resolución de problemas*

[140] Este complemento se corresponde con la asignatura *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*

[141] Asignatura: *Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas*

Universidad Pontificia de Salamanca

1) Prácticum en la especialización, incluyendo el trabajo de fin de Master		Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente. Adquirir destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia. Estas competencias, junto con las propias del resto de materias, quedarán reflejadas en el Trabajo fin de Máster.

4.3.3.- Organización del Master de formación del profesorado en la Universidades

Las universidades, desde el curso 2006-07 estuvieron implicadas en el estudio, diseño y organización de la formación genérica y específica que implicarían los Master de formación del profesorado de la ESO y Bachillerato. La organización en detalle para echar a andar esta estructura de formación es posterior y todavía no se cuenta con datos sobre los aspectos positivos o negativos que tal procedimiento pudiera implicar. En algunas universidades este curso, junio - septiembre de 2012, egresarán los primeros titulados de este Master y otras llevan dos años de experiencia y otras menos. Por consiguiente me limitaré a mostrar algunos datos que se han podido obtener mediante la red de Internet.

a) La *Universidad Pontificia Comillas* [142]distribuye los créditos y las materias de la manera que se presentan a continuación y los datos se han obtenido del BOE. Núm. 120; Lunes 17 de mayo de 2010 Sec. III. Pág. 43213/15

Cuadro 6.- Módulo de plan de estudios Comillas

MÓDULO	Créditos mínimos
Genérico	**12**
Específico	**24**
Practicum y Trabajo Fin de Master	**16**
Optatividad	**08**
TOTAL	**60**

La Universidad Pontificia Comillas distribuye los créditos del módulo específico entre las siguientes cuasi-asignaturas, para el *Master de Matemáticas:*

[142] ANEXOS, cap. IV, Anexo II. 1

Universidad Pontificia de Salamanca

Materia**:** Complementos para la formación disciplinar en Matemáticas (6 ECTS)
Materia**:** Aprendizaje y enseñanza de Matemáticas (12 ECTS)
Materia**:** Prácticum en la materia de Matemáticas (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Matemáticas (6 ECTS)

b) La *Universidad Pontificia de Salamanca* ofrece la información sobre los Master Oficiales en la web de la universidad < www.upsa.es > . En esta dirección se hacen algunas consideraciones respecto de la metodología docente sobre el proceso de la enseñanza-aprendizaje que revisten cierta importancia y son las que siguen: (ANEXOS, cap. IV, Anexo II, 2)

> *Clases teóricas y prácticas* en pequeño grupo. *Seminarios y talleres* interdisciplinares con participación de profesores y orientadores de centros de E.S.O , Bachillerato y F.P. *Tutorías individuales* y en pequeño grupo. *Prácticas tuteladas* en centros de ESO, Bachillerato y F.P. *Clases presenciales* combinadas con aprendizaje Blended Learning

El resumen de contenidos y créditos es como sigue:
Créditos de Formación Genérica: 16, 0 créditos ECTS
Créditos de Formación Específica: 24, 0 créditos ECTS
Créditos de Prácticas Externas: 14, 0 créditos ECTS
Créditos de Trabajo Fin de Master: 6, 0 créditos ECTS

En esta Universidad no se cuenta con el Master de Matemáticas

c) La *Universidad Complutense de Madrid* ofrece en su web <www.ucm.es> una amplia información sobre los Master en general, pero también explicita bastante la formación que pretende dar al Master de Matemáticas.

Cuadro 7.- Módulo genérico para los Máster en Complutense

Módulo genérico: asignaturas	**ECTS**
Aprendizaje y desarrollo de la personalidad	4
Procesos y contextos educativos	4
Sociedad, familia y educación	4

Cuadro 8.- Módulo específico de matemáticas en Máster Complutense

Máster Profesorado Secundaria y Bachillerato: matemáticas		
Plan de estudios		
Especialidad		*Matemáticas*

Universidad Pontificia de Salamanca

Módulo Específico: 30 ECTS			
Materia	ECTS	Asignatura	ECTS
Complementos para la formación matemática	15	El significado de la matemática en Educación Secundaria.	10
		Pensamiento matemático y resolución de problemas	5
Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes	10	Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas	10
Innovación docente e iniciación a la investigación educativa	5	Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en matemáticas	5

Cuadro 9.- Módulo de prácticum para los master Complutense

Módulo prácticum: materias y TFM	**ECTS**
Prácticum en un Centro de Educación Secundaria	12
Trabajo Fin de Máster	6

Estos son los datos que se ofrecen sobre la nueva formación del profesorado de la ESO, Bachillerato, Formación Profesional y Escuelas de Idiomas que se ha podido obtener. Con el paso del tiempo se harán ya juicios críticos a la vista de los resultados que se presenten al respecto. Supongo que todas las universidades han constituido una comisión de seguimiento que irá emitiendo sus correspondientes juicios críticos sobre la formación de estas nuevas titulaciones que se han implantado recientemente.

En cuanto a las titulaciones exigidas por la UCM [143] para matricularse en el Máster de profesores de matemáticas para ESO y bachillerato tienen acceso preferente las *Licenciaturas [144] en Matemáticas y Ciencias y Técnicas Estadísticas* y como otras titulaciones y si quedaran plazas vacantes se ofrece la posibilidad de cursar el Master de formación de profesores de matemáticas a los "titulados universitarios que hayan cursado y aprobado un mínimo de 120 ECTS en asignaturas de contenido matemático de los que al menos 50 corresponderán a asignaturas de Matemáticas o Estadística. Esta especialidad no admite diplomados". Respecto de los criterios de admisión y valoración de solicitudes para acceso al Máster universitario en formación del profesorado de ESO y bachillerato, FP y enseñanzas de idiomas, hay bastante coincidencia entre las

[143] En el ANEXOS. Capítulo IV: Anexo II.3 se adjunta un resumen más amplio del Master de la UCM.

[144] Cuando este Master se pone en funcionamiento se iniciaba también la carrera para el graduado y en consecuencia tienen que usar esta terminología. No había Graduados. Terminada esta fase es lógico se reconsidere este asunto, al menos para adaptar la terminología.

Universidad Pontificia de Salamanca

universidades que hemos consultado, Pontificia de Salamanca, Comillas y Complutense de Madrid, que recogen las dos condiciones de la Orden Ministerial ECI/ 3858/ 2007: Para ser admitido en una especialidad se requiere que el estudiante acredite una formación suficiente en las materias correspondientes a la misma. En caso de no darse esta circunstancia, los solicitantes serán excluidos del proceso de valoración. Para cada especialidad se han establecido titulaciones de *Acceso Preferente* que se considerarán prioritarias a la hora de seleccionar a los alumnos[145].

4.3.4.- Valoración crítica del sistema de formación del profesorado

Sin duda que estamos ante un nuevo sistema de formación del profesorado de secundaria y de bachillerato en cuyo diseño y elaboración han convenido las administraciones educativas de España y las universidades que, a lo largo de los diez últimos años, han debatido y presentado plurales ofertas sobre el asunto. Algunos autores, sin embargo, coinciden en denominar como aspectos débiles del entramado legislativo la manifiesta generalidad de los textos obligatorios que, relacionado con el grado de autonomía universitaria para organizar sus planes de estudio, convierte en problemático cualquier análisis, que se pretenda, hasta tanto no se disponga del diseño concreto de Máster de formación de los docentes de matemáticas para la educación secundaria y bachillerato y la experiencia de su implantación (Goñi, 2008: 203).

Me parece sensata esta propuesta de Goñi, si bien quisiera también añadir una breve consideración respecto del escaso carácter abierto que ofrece el diseño legal. En principio, puede resultar positivo, en mi parecer, el traslado a un escenario más próximo a la realidad educativa, la universidad, la elaboración y desarrollo de algunas competencias para un diseño más concreto y específico del Máster de formación del

[145] Adenda a los criterios de acceso: 1ª) Los solicitantes que hayan cursado titulaciones diferentes, salvo las consideradas equivalentes a las de acceso preferente por la Comisión de Admisión, serán valorados en segundo lugar. 2ª) Dentro de cada grupo de titulaciones, se considerarán en primer lugar los procedentes de licenciaturas o ingenierías y después los que provengan de diplomaturas o ingenierías técnicas, en caso de que la correspondiente especialidad admita este tipo de titulaciones. En los profesores de matemáticas no se admiten candidatos provenientes de diplomaturas. 3ª) **El** único criterio de valoración que será considerado en cada uno de los grupos de titulaciones establecidos será la media del expediente académico en escala 0-4. A efectos prácticos, para separar los cuatro grupos definidos, se multiplicará la media del expediente por el siguiente factor según el grupo de titulación a que corresponda: 1. Licenciaturas e Ingenierías de Acceso Preferente: 1.000. 2. Diplomaturas e Ingenierías Técnicas de Acceso Preferente: 100. 3. Otras Licenciaturas e Ingenierías: 10. 4. Otras Diplomaturas e Ingenierías Técnicas: 1.

Universidad Pontificia de Salamanca

profesorado. También pudiera resultar positivo, tengo más dudas en este caso, que las distintas universidades ofrezcan Máster de formación del profesorado matizadamente diferentes. En esta consideración interviene otra circunstancia a tener presente, que es positiva: el carácter abierto de la legislación facilita que en el transcurso del tiempo se puedan introducir reformas de adaptación sin necesidad de cambiar la legislación, que siempre acarrea mayores dificultades, amén de los retrasos y desajustes que se van produciendo y que por la misma inercia no se cambian hasta que perecen.

Para el profesor Jesús Mª Goñi es lamentable que en la legislación sobre el Máster de formación del profesorado no se promuevan las relaciones de convenios con los centros educativos en los que van a ejercer su rol profesional los futuros profesores y con la administración, ambos muy interesados siempre en la formación inicial y continua de este profesorado: "Formación inicial, período de inducción y formación continua son tres elementos que no pueden ir separados ni estar dirigidos por instituciones diferentes que no mantienen entre sí relaciones estructurales con respecto a estas responsabilidades; porque la carrera profesional debe entenderse como un continuo que comienza en la formación inicial y se extiende a las posteriores, y porque dicha formación ha de poner los cimientos de ese camino, cimientos que no pueden ser establecidos solamente por una de las tres instituciones implicadas" (Goñi, 2008: 211).

En mi parecer esta disociación entre las instituciones implicadas en el proceso formativo de este tipo de profesorado está la parte más débil de este proceso. Los *centros educativos* donde el profesor ejercerá su tarea, las *universidades* que quieren transmitir la necesaria formación didáctica y técnica y la *administración* que establece la política educativa y el marco de la actuación del profesor han de estar presentes en el diseño, organización y ejecución del proceso de formación y en todas sus etapas para que en todo caso esa formación se corresponda con las necesidades reales de los centros e individuos a educar y de acuerdo con las necesidades sociales presentes pero también de inmediato futuro. En consonancia con esta perspectiva considero de interés seguir de cerca los problemas que afectan en este sentido a los países europeos de nuestro entorno[146].

[146] Infomes como los preparados sobre matemáticas y ciencias, reiteradamente citados en la tesis, que ha elaborado la Unión Europea, son de interés para hacer el seguimiento de los Master de formación del profesorado, puesto que los problemas planteados en la U.E. no son diferentes de los que padece la sociedad española.

Universidad Pontificia de Salamanca

4.3.5.- A modo de síntesis

1) A lo largo de casi diez años los expertos, personal de la administración educativa del Estado y la institución universitaria han elaborado un conjunto normativo sólido y bastante detallado en torno a la formación de los profesionales de la enseñanza. En teoría al menos, este corpus legislativo se ha elaborado teniendo presente la situación de los restantes países de la Unión Europea sobre el asunto del profesorado de la educación secundaria obligatoria. No en vano estamos inmersos en unos procesos de convergencia que justifican la situación. Desde esta perspectiva más genérica se han atendido asuntos como la finalidad de esta nueva preparación, las condiciones de acceso, empleo de los créditos europeos, los ECTS de que constaría esta formación, la titulación específica de Master, así como la integración de las nuevas titulaciones en el contexto educativo de España.

2) En cuanto a la legislación específica, me refiero a la ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, se establece ya con carácter obligatorio el inicio de la nueva formación del profesorado, la denominación de la titulación de Master, las condiciones de acceso a estos nuevos estudios, los sesenta créditos de que consta, determinando una aproximación distributiva de los créditos entre la formación genérica (12), específica (24), el prácticum y el trabajo de fin de master (16), dejando 8 créditos a una cierta libertad de decisión de los centros que organicen los Master. De este modo queda claramente establecida la planificación de las enseñanzas para la formación del profesorado de secundaria y bachillerato.

3) Las universidades han recogido estas normativas y han organizado los estudios de formación del profesorado de la ESO y de Bachillerato sin sustanciales modificaciones. Aunque la legislación establece que el 80 % de las enseñanzas han de ser presenciales, sin embargo algunas universidades, atendiendo a su condición de centros de estudio no presenciales, han sido autorizadas para organizar sus enseñanzas “a distancia” o por via on-line, a excepción del prácticum. En los centros que han organizado este tipo de estudios se han creado Comisiones de seguimiento o de calidad para hacer el seguimiento de estos estudios y presentar los correspondientes informes.

4) En cuanto a la valoración de estos nuevos modos de formación pedagógica del profesorado, algunos autores entienden que son puntos débiles la escasa concreción normativa de la formación, puesto que, teniendo en cuenta la autonomía universitaria, se pueden esperar modos de formación de este profesorado, que pudieran ser muy

Universidad Pontificia de Salamanca

diferenciados. Se reprocha también a las autoridades de la administración educativa no haber tomado en consideración la necesidad de arbitrar procedimientos normales de incorporación y seguimiento de los profesores en los centros educativos mediante el Master. En mi parecer este carácter abierto de la formación es positivo y puede facilitar en el transcurso del tiempo las necesarias acomodaciones y cambios a nuevas situaciones, sin necesidad de tener que crear nuevas y complejas normativas que suelen retrasarse en virtud de la inercia que notablemente afecta a las instituciones sociales. En mi parecer sin embargo, teniendo en cuenta que las reformas se presentaban para la mejor homologación de nuestros títulos con los otros países de la U. E. y, en consecuencia, como la obligada respuesta de España a la construcción del *Espacio Europeo de Educación Superior*, al que el Gobierno de España se había comprometido por su integración europea y por adhesión explícita a la *Declaración de Bolonia,* en la práctica nos hemos distanciado elaborando una titulación de Grado de cuatro años, cuando la mayoría de los países de la U.E. lo mantienen con tres años. En cambio en la U. E., el Master de dos cursos es más frecuente que el de uno de 60 créditos.

4.4. COROLARIOS PEDAGÓGICOS PARA LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS

4.4.1.- La formación humanística y social del profesor

En cuanto a *la formación del profesorado* se ha atendido a los aspectos esenciales tanto referidos a la personalidad del agente humano que gestiona una actividad específica, como a la actividad que encarna en su rol de profesor, resaltando su carácter dinámico, organizador y receptor de los variados estímulos afectivos y racionales que recibe en orden a su formación. Se contemplan las influencias sociales, culturales, económicas y éticas que configuran el rol social de profesor. Ente los estímulos formativos, se han destacado los orientados a capacitar al profesor para convertir la información en conocimiento, en conjunción armoniosa y simultánea con la práctica. La consecución de este objetivo se argumentó desde dos condiciones: la necesidad de una comunicación hablada y escrita que se vale de recursos varios para solventar la distancia entre profesor y alumno, que demanda el proceso de la enseñanza-aprendizaje. Otra condición se refería al conjunto de valores en que debe inscribirse la

Universidad Pontificia de Salamanca

acción educativa tanto por referencia a la verdad que siempre ha de orientar el proceso cuanto por referencia al contexto en que la acción educativa tiene lugar.

4.4.2.- Formación matemática del profesor de la ESO y del Bachillerato

En el segundo apartado dedicado a *la dotación del profesor de matemáticas*, se parte de la general formación que ha de poseer el profesor, alcanzando a algunas dimensiones específicas del profesor de matemáticas, cuya síntesis se recoge en las cuatro siguientes:

1) La preparación inicial está configurada principalmente por la *graduación en matemáticas,* que se constituye en el primer ciclo de la enseñanza universitaria oficial para la *adquisición del título académico de Grado en Matemáticas* y que a partir de 2010 sustituye a la anterior Licenciatura. La preparación fundamental del profesor de matemáticas viene dada por los estudios de matemáticas que integran el plan de estudios del Grado de Matemáticas. Este primer ciclo de estudios universitarios oficiales, ya implantado en todas las universidades españolas, constituirá el recurso de formación para el ejercicio profesional en la mayor parte de las tareas a realizar en la sociedad. *Tiene un diseño que integra, contenidos, objetivos, competencias generales y transversales, normas y valores* con los que se considera que el graduado moderno, al finalizar sus estudios y superar las pruebas del trabajo final, está aprovisionado para el ejercicio profesional, en este caso, para el ejercicio docente de las matemáticas.

2) Una segunda aportación que converge a *este desarrollo formativo viene dada por las competencias que el proceso de enseñanza-aprendizaje exige y la legislación vigente, nacional y europea, establece para la formación del profesor,* tanto en su etapa inicial de la graduación como en la siguiente del Master. Se estima que la inmersión en este escenario de competencias habilitará cumplidamente a los profesionales, les hará suficientemente competentes para realizar la tarea profesional correspondiente, en este caso la docencia en la educación secundaria obligatoria, el bachillerato, la formación profesional u otras actividades docentes similares.

3) Otro aspecto tratado en este apartado se refiere a la *introducción de la tecnología en el aula de matemáticas, el uso de las TICs para el éxito del proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas,* en la función de profesor de esta materia, que por la experiencia propia y ajena, está resultando un ejercicio profesional complicado. Se acentúa el uso de las tecnologías modernas y se anima a emplearlas en la clase de matemáticas, para hacer más asequible las explicaciones pertinentes, sobre

Universidad Pontificia de Salamanca

todo teniendo en cuenta que en la actualidad, se ha de acentuar en la enseñanza la función social de las matemáticas. Se han mostrado algunos ejemplos que parecen haber tenido éxito en la mejora del aprendizaje matemático y se ofrecen algunos portales provistos de buenos materiales para facilitar las explicaciones matemáticas.

4) Las matemáticas no son reducibles a una técnica específica, *son un saber científico y en consecuencia el profesor ha de poseer unos amplios conocimientos sobre la materia,* ha de mostrar en todo caso una actitud positiva hacia las matemáticas, si quiere que los alumnos progresen en la comprensión de los conceptos, axiomas, principios y argumentaciones matemáticas. El profesor de matemáticas asume como objetivo inexcusable que los alumnos sean capaces de pensar en clave matemática no solo los fenómenos del mundo natural sino también aquellos que pertenecen al ámbito de la acción de los seres humanos. Para alcanzar este nivel de comprensión, el profesor ha de concretar la utilidad de las matemáticas ofreciendo explicaciones de fácil intelección sobre ejemplos tomados de la realidad cotidiana o de los medios de comunicación. Para que los alumnos adquieran la pertinente comprensión de los conocimientos matemáticos, el profesor de esta materia ha de conocer las reglas de la didáctica que le permitan hacer comprensible y estimulante el estudio de las matemáticas.

5) Se muestra el enfoque comunicativo para la enseñanza de las matemáticas, en que *se propone un tipo de profesor de la ESO y de Bachillerato que sea un profesor polivalente*. Se exponen los argumentos a favor de esta opción y también a favor del sistema actual de que el profesor de matemáticas sea un experto en este amplio y concreto saber que son las matemáticas, condición a adquirir mediante la obtención de la graduación correspondiente.

6) En la atención prestada a los países de nuestro entorno europeo, se han constatado problemas semejantes a los que afectan a la enseñanza de las de matemáticas en España. En todo caso, tanto en la U. E. como en España se hace preciso disponer de datos más concretos sobre la escasez de vocaciones para los estudios matemáticos y científicos, al menos con una perspectiva de varios años. Se ha constatado un hecho, común a todos los países, de que muchos alumnos fracasan en la evaluación de las matemáticas, sobre todo en los niveles de secundaria y bachillerato. Ante la situación, se perciben variadas iniciativas que, por el momento, no parecen haber mejorado los resultados. Se impone asimismo en todos los países de la U. E. y en el nuestro estudios detallados y elaborados por expertos, desde la perspectiva del profesorado

Universidad Pontificia de Salamanca

especialmente, a fin de dar con las *causas que producen el fracaso en los adolescentes y jóvenes europeos y también españoles*, a fin de introducir las correspondientes correcciones.

4.4.3.- Formación pedagógica del profesorado de la ESO y del Bachillerato

Desde el año 2005, en España, se abre un *proceso de reflexión, análisis de propuestas e informes sobre la necesidad de elaborar una propuesta de formación del profesorado* de la ESO, de Bachillerato, de Formación Profesional y de Enseñanzas de Idiomas, de utilidad para los egresados universitarios que pretendieran acceder al ejercicio profesional de profesor en los niveles mencionados y guardara las correspondientes similitudes con los procesos de formación de los profesores europeos en dichos niveles. De una legislación más bien genérica producida en el intervalo de 2005 hasta el 2009, se infiere un diseño de formación para este profesorado que implicaría lo siguiente: debería enmarcarse la mencionada formación en un nivel de post-grado, con denominación de Master, que se obtendría mediante sesenta créditos ECTS y serían las universidades las encargadas de implementar este proceso formativo. De la legislación más específica se infiere una mayor concreción de la nueva figura de los Master: se establece que al menos el 80 % de los créditos deberían ser presenciales, se distribuyen entre formación genérica, específica y práctica, concretando los objetivos y unos contenidos mínimos para cada uno de estos tramos de formación.

En todo caso son apreciables zonas poco concretas, lo que alarma a no pocos autores, puesto que esta circunstancia y teniendo en cuenta la autonomía universitaria, la formación de los profesores puede llegar a dispersarse de tal manera que no solo se impartiera una formación no equiparable a la que reciben sus colegas europeos, con el consiguiente perjuicio que esto importa, sino que en nuestro medio nacional puedan observarse fórmulas contrapuestas y disparatadas, que poco o nada aporten a la necesaria formación del profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Por mi parte pienso que han de valorarse los aspectos positivos de la indeterminación legislativa, que yo estimo muy escasa, como fuente de creatividad, de originalidad y de perfectibilidad. En cambio una gran parte de los autores que tratan de estos asuntos - yo me adhiero a este planteamiento - reprochan al legislador no haber

Universidad Pontificia de Salamanca

considerado la difícil cuestión de los procedimientos a poner en práctica para la progresiva incorporación de los egresados del Master a los centros educativos privados y públicos, con el adecuado seguimiento de su tarea didáctica y técnica, durante los primeros años de ejercicio profesional y su definitiva adscripción a los centros educativos correspondientes o al menos ofrecerles la posibilidad de obtener una acreditación para impartir la docencia en los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

4.5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLPORT, G, (1961). *Pattern and Growth in Personality*. New York: Harcourt College.

ARENDT, H., (1993). *La condición humana.* Barcelona: Paidós.

BALL, D.L.; HILL, H.C., y BASS, H., (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics wel enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator*, 29 (1), pp. 14 – 46. (Cita tomada de Eurydice 2011b: 119).

BAUMAN, Z. (2008). *Los retos de la educación en la Modernidad Líquida.* Barcelona: Gedisa.

BELTRÁN, J., (1988). *Para comprender La Psicología.* Estella (Navarra): EVD.

BELTRAN, J. et al., (1996). *Psicología de la Instrucción*. Madrid, Síntesis. Cf. igualmente, MAYOR, J., Y PINILLOS, J. L., (eds), *Tratado de psicología general.* Madrid: Alambra. (En particular, vol. V: "Inteligencia y pensamiento").

BISHOP, A., (2000). "Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos?". En GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. y BISHOP, A. (Coord.), *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

CAMPEDELLI, L., (1970). *Fantasía y lógica en la matemática*. Barcelona: Labor.

CAMPILLO, A. (Coord. y Presidente de la CDM), (2005). *Titulo de Grado en Matemáticas*. Madrid: ANECA.

http://www.aneca.es/var/media/150436libroblanco_jun05_matematicas (Consulta 10 enero 2013).

Universidad Pontificia de Salamanca

CARRILLO, J. y CONTRERAS, L.C., (1998). *El desarrollo profesional del profesor de matemáticas.* Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

CEPEDA, E., (2005). Factores asociados al logro cognitivo en matemáticas. En *Revista de Educación,* núm. 336. Madrid: Secretaría General Técnica del MECD, pp. 503-514.

CLARES, J. y GIL, J. (2008) "Recursos tecnológicos y metodologías de enseñanza en titulaciones del ámbito de las ciencias de la educación". Bordón 60(3), 21-33. (Cita tomada de Méndez, D., 2012).

CORTINA, A., (1980). *Ética sin moral*. Madrid: Tecnos.

DECRETO 23/ 2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, *por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de Educación Secundaria Obligatoria.* Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, núm. 126, (29 de mayo de 2007).

DELGADO, A., (2012). *Delibes y la velocidad del sonido, en la prueba de nivel, de 3º de ESO.* Madrid: Periódico ABC.

DELORS, J., (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid: Santillana.

DEULOFEU, J. Y GORGORIÓ, N., (2000). "Planteamientos para el cambio". En GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. y BISHOP, A. (Coord.), *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

EURYDICE, (2011a). *Diferencias de género en los resultados educativos: medidas adoptadas y situación actual en Europa*. Madrid: Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación. (Bruselas: EACEA P9 Eurydice).

__ (2011b). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies.* Bruselas: EACEA P9 Eurydice.

__ (2011-c). *Science Education in Europe: National Policies, Practices and Research.* Bruselas: EACEA P9 Eurydice.

GARCÍA, E., (2001). *Mente y Cerebro.* Madrid: Síntesis.

__ (2006)."Las competencias del profesor en la sociedad del conocimiento". En MEJÍA, R., (Coord.), *Educación, Globalización y Desarrollo Humano.* Santo Domingo, R.D.: Buho.

GOITIA, F. y AZEVEDO, V. de, (2012). *Educación: Estos profesores están revolucionando la enseñanza.* Madrid: XLSemanal. ABC (Semana del 15 al 21 de abril de 2012).

GOÑI, J. Mª., (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.

GOÑI, J.Mª., (Coord.),(2011). *Didáctica de las matemáticas*. Vol.II. Barcelona: Graó.

Universidad Pontificia de Salamanca

HABERMAS, J., (1985). *Conciencia moral y acción comunicativa.* Barcelona: Península.

HILTON, P., (2000). "Necesidad de una reforma". En GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. y BISHOP, A. (Coord.), *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

JACOB, F., (1970). La *logique du vivant.* París: Gallimard.

LEY 51/2003, de 2 de diciembre, *de igualdad de oportunidades, no discriminación y accesibilidad universal de las personas con discapacidad.* BOE núm. 289 (3 de diciembre 2003)

LEY 27/2005, de 30 de noviembre, *de fomento de la educación y cultura de la paz*. BOE, núm. 287. (1 de diciembre 2005).

LEY ORGÁNICA 6/2001, 21 de diciembre, *de universidades*. BOE, núm. 307, (24 de diciembre 2001).

LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, *de Educación*. BOE, núm. 106, (4 de mayo 2006). (El Capítulo III del Título III se dedica a la formación del profesorado).

LEY ORGÁNICA 3/2007 de 22 de marzo, *para la igualdad efectiva de mujeres y hombres*. BOE, núm. 71, (23 de marzo 2007).

LEY ORGÁNICA 4/2007, de 12 de abril, *por la que se modifica la Ley Orgánica* 6/2001, de 21 de diciembre, *de universidades*, Boletín Oficial del Estado, núm. 89, (13 de abril 2007)

MACEIRAS, M., (2002). *Metamorfosis del Lenguaje*. Madrid: Síntesis.

MACEIRAS, M., (2007). *La experiencia como argumento.* Madrid: Síntesis.

MACEIRAS, M., (2010). "La investigación científica, bioética y derechos humanos", en MACEIRAS, M. y MÉNDEZ, L., (Coord.), *Ciencia e Investigación en la sociedad actual*. Salamanca: San Esteban.

MARCHESI, A., (2009). *Las Metas Educativas 2021. Un proyecto iberoamericano para transformar la educación en la década de los bicentenarios*. Madrid: OEI; Revista CTS, nº 12, vol.4, abril.

MÉNDEZ, D., (2012). La sociedad tecnológica actual y sus implicaciones en la educación científica, en *Sociedad y Utopía. Revista de Ciencias Sociales*, nº 40, p. 78, Noviembre 2012. Madrid: edita Fundación Pablo VI.

MÉNDEZ, L., (2008). "La Sociedad del Conocimiento", en MACEIRAS, M. y MEJÍA, R., (Coord.), *Investigación e Innovación.* Salamanca: San Esteban.

OCDE e INSTITUTO DE EVALUACIÓN Y CALIDAD DEL SISTEMA EDUCATIVO (INECSE), (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003.* Madrid: Secretaría

Universidad Pontificia de Salamanca

General Técnica del MEC. www.institutodeevaluacion.educación.es (Consulta 15/01/2013).

OCDE e INSTITUTO DE EVALUACIÓN, (2010). *PISA 2009*. Madrid: Secretaria General Técnica. Ministerio de Educación.

ORDEN MINISTERIAL ECI/3858/ 2007/ de 27 de diciembre, *por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.* BOE, núm.312, (29 de diciembre 2007).

PARLAMENTO EUROPEO Y CONSEJO DE LA UNIÓN EUROPEA, (2006**).** *Recomendación sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente.* Bruselas: L 394/18 ES Diario Oficial de la Unión Europea 30.12.2006.

PERRENOUD, P., (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona: Graó.

PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNÉ, J. ; THOM, R.,(1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Madrid: Alianza.

PIAGET, J., (1982). *Estudios sobre lógica y psicología.* Madrid: Alianza.

PICKOVER, C.A., (2012). *El libro de las matemáticas*. Madrid: Cillero & de Motta.

PINILLOS, J. L., (1977). *Principios de Psicología*. Madrid: Alianza.

QUIÑONEZ, C.; RAMÍREZ, D.; RODRÍGUEZ, Z.; RIVERA, F.; TOVAR, E.; VÁSQUEZ, G. y RAMÍREZ, A. (2006). Desarrollo de herramientas virtuales para la enseñanza de la termodinámica básica. *Revista Colombiana de Física* 38, 1423-1426.

RAVELA, P., (2009). "La evaluación del desempeño docente para el desarrollo de las competencias profesionales", en MARTÍN, E. y MARTÍNEZ, F. (coord.): *Avances y desafíos en la evaluación educativa,* Madrid: OEI.

REAL DECRETO 1125/2003, de 5 de septiembre, *por el que se establece el sistema europeo de créditos, y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional.* BOE, núm. 224, (18 de septiembre 2003).

REAL DECRETO 56/ 2005, de 21 de enero, *por el que se regulan los estudios universitarios oficiales de Postgrado*. BOE, núm. 21, (25 de enero 2005).

REAL DECRETO 1631/ 2006, de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* BOE, núm. 5, (5 de enero 2007).

Universidad Pontificia de Salamanca

REAL DECRETO 1393/ 2007, de 29 de octubre, *por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.* BOE núm. 260, (30 de octubre 2007).

REAL DECRETO 861/2010, de 2 de julio, por el que se modifica el Real Decreto 1393/ 2007 de 29 de octubre. BOE núm.161, (3 de julio 2010). Disposición nº 10.544.

RESOLUCIÓN, de 28 de mayo de 2010, de la Universidad Complutense de Madrid, *por la que se publica el plan de estudios de Graduado en Matemáticas*. BOE, núm. 150, (21 de junio de 2010), pp. 54.349 y ss

RITZ, J.M. y MARTÍN, G. (2012). Research needs for technology education: an international perspective. *International journal of technology and design education,* DOI 10.1007/s10798-012-9215-7. (Cita tomada de Méndez, D., 2012).

RORTY, R., (1983). *La filosofía y el espejo de la naturaleza*. Madrid: Cátedra.

RUIZ, J.M., (2010). "Evaluación del diseño de una asignatura por competencias, dentro del EEES, en la carrera de Pedagogía: Estudio de un caso real". Madrid: Revista de Educación, 351. Enero – Abril 2010, pp. 435-460.

STEWART, I., (2006). *Cartas a una joven matemática*. Barcelona: Crítica.

TAYLOR, CH., (1989). *Fuentes del Yo.* Barcelona: Paidós.

TIMPERLEY, H.; WILSON, A.; BARRAR, H. y FUNG, I.Y.Y., (2007). Teacher professional learning and development: Best evidence síntesis iteration. Wellington, New Zealand: Ministry of Education. (pdf) Available at:
www.educationcounts.govt.nz/goto/Bes (cita tomada de Eurydice:2011b:123).

TRIBÓ, G. (2008). "El nuevo perfil de los profesores de secundaria", en revista *Educación XXI,* Madrid, (11), p183-209.

TSAI, C. (2010). Do students need teacher's initiation in online collaborative learning? *Computers & Education,* 54, 1137-1144. (Cita tomada de Méndez, D., 2012).

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, (2008) *Normas de Permanencia*, Boletín Oficial de la Universidad Complutense, nº 14, (20 de septiembre).

VASSILIU, A.,(2011) "Prólogo", en Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural (EACEA P9 Eurydice), *La enseñanza de las Matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales.* Madrid: Secretará General Técnica del MEC y D.

WEBGRAFÍA:

INFORME DE CIENCIAS: (Se dispuso del manuscrito impreso en inglés)

Universidad Pontificia de Salamanca

http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/133EN.pdf

INFORME DE MATEMÁTICAS: (Se dispuso del manuscrito impreso en inglés)

http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132EN.pdf

INFORME DE GÉNERO: http://www.eurydice.org o también en la siguiente dirección española: <http://www.educacion.es/cide/eurydice> (Se dispuso del manuscrito en español)

INFORMACIÓN MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID: http://www.ucm.es/centros/webs/m5057
(Consulta: septiembre 2012)

INFORMACIÓN MASTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO. UNIVERSIDAD PONTIFICIA DE SALAMANCA:

www.upsam.es/ (Consulta: septiembre 2012)

INFORMACIÓN MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO. UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS:

www.upcomillas.es/ (Consulta: septiembre 2012)

INFORMACIÓN MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO. UNIVERSIDAD NACIONAL DE EUCACIÓN A DISTANCIA:

http://portal.uned.es/portal/page?_pageid=93.25604849&_dad=portal&_schema=PORTAL&idMaaster=230401 (Consulta: septiembre 2012)

VIDEOS DEL PROFESOR JUAN MEDINA MOLINA

Link:

http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=Z6sOdZIuIE8 ((Consulta: noviembre 2012)

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 5

ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

CONTENIDO **PÁGS.**

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 5.- ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en la experiencia investigadora en torno a los supuestos básicos de la enseñanza - aprendizaje del Álgebra por parte de los estudiantes de segundo curso de la ESO y a las motivaciones que animan el proceso. Como introducción a la presentación, interpretación y análisis de los resultados obtenidos respecto de estos tres asuntos imbricados en el motivado proceso de la enseñanza – aprendizaje, mediante los correspondientes cuadros, gráficos y texto, me permito exponer con brevedad y concisión algunas dimensiones básicas y actuales sobre la didáctica de las matemáticas, sobre los aspectos fundamentales del aprendizaje y sobre las dimensiones esenciales de la motivación y del autoconcepto, que sin reclamar exclusividad alguna en la materia, se han elaborado para la mejor comprensión del complicado proceso de la enseñanza secundaria obligatoria de las matemáticas. No se trata de constituir un espacio cerrado sino de pergeñar los trazos más elementales del escenario diseñado para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el nivel educativo de la enseñanza secundaria obligatoria española.

Los procedimientos didácticos de las materias objeto de enseñanza, en virtud del principio de interdisciplinariedad, no se elaboran con arbitraria independencia sino que convergen en una urdimbre de coincidencias y diferencias, como no puede ser de otra manera teniendo en cuenta que el destinatario es siempre el mismo, los estudiantes. Ello no obsta a que algunos planteamientos, que definen la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, están presentes en las enseñanzas de otras disciplinas y viceversa. Es inevitable un cierto desplazamiento hacia ideas más generales porque, como constata el profesor Goñi (2008: 12) “la enseñanza de las matemáticas fuera del halo que las rodea y de los intereses de quienes se creen que tienen la exclusiva capacidad para hablar de ellas, no se diferencia tanto de otras áreas del conocimiento humano y que las diferencias, que existen, no justifican la excesiva separación que suele ser habitual cuando se abordan estas cuestiones”. La razón es bastante fácil de entender. Las matemáticas son un producto de la cultura humana donde se crean otros muchos conocimientos sobre las diversas realidades que el hombre enfrenta y a las que trata de responder satisfactoriamente y en ese trayecto van apareciendo fenómenos que la

Universidad Pontificia de Salamanca

inteligencia humana cuantifica con más o menos aciertos pero, mediante el procedimiento de ensayo de aciertos y errores, la cultura humana se acrecienta y los conocimientos se acumulan. "Los profesores de matemáticas vistos como profesionales de la educación, tienen la palabra profesor como sustantivo y la de matemáticas como circunstancia y parece difícil hablar de algo dedicando más tiempo a la circunstancia que a la sustancia" (Goñi, 2008: 12).

Fernández (1996) afirma que el objeto formal de la didáctica es el proceso comunicativo, bi-direccional entre el docente y el discente que tiene lugar en cada acto didáctico. Se trata de analizar la relación entre ambos, los métodos y procedimientos utilizados para conseguir el aprendizaje del alumno, donde entran en juego elementos como la relación docente-discente, el método, la materia o contenido de aprendizaje, el entorno cultural, etc. Zabalza (1990) añade que los aspectos relevantes que competen prioritariamente a los estudios didácticos son la enseñanza, la planificación y el desarrollo curricular, el análisis profundo de los procesos de aprendizaje, las innovaciones, los medios y recursos educativos, el proceso de formación y desarrollo del profesorado y los programas especiales de instrucción. La formación educativa de los discentes es la finalidad de todo proceso didáctico y su marco de referencia.

Teniendo en cuenta el interés por los aspectos prácticos de la enseñanza de las matemáticas, sin abandonar la trayectoria teórica de la didáctica, desde los presupuestos enunciados se atenderá a los aspectos más característicos de la didáctica que se estiman imprescindibles de este saber, por cuanto al ser un proceso orientado a la educación del sujeto humano, cobra una incuestionable relevancia, que me afecta especialmente en mi condición de profesora de matemáticas que he sido y seguiré siendo. Hasta no hace mucho tiempo, se solía afirmar que para ser buen profesor, bastaba conocer bien la disciplina. Sin embargo, en la actualidad se asume que también es insustituible una adecuada formación didáctica[147].

[147] Desde su raíz etimológica, el término didáctica, del griego didasco (διδασχο) significa enseñar, instruir, exponer claramente, demostrar. Didasco procede a su vez de didásk que hace referencia a la acción repetida (di) de sostener alguna cosa poniéndola a la vista de alguien (da) con la intención de que se apropie de lo que se muestra (sk). Según otros autores, la palabra "didáctica proviene directamente del término griego didaktiké, que significa el arte de enseñar. El actual Diccionario de la Lengua Española recoge el término Didáctica como "arte de enseñar" y didácticamente como "de manera propia para enseñar", y en la Enciclopedia Larousse se comentan las acepciones como adjetivo - la literatura digna de ser cultivada porque de ella se deriva alguna enseñanza - y sustantivo que significa "la ciencia que trata de la enseñanza escolar en general, bajo cualquier aspecto de normas y principios, y estudia fenómenos y leyes".

Universidad Pontificia de Salamanca

No cabe duda que los cambios que afectan a la sociedad repercuten con fuerza también en el ámbito educativo y afectan directamente al rol de profesor de matemáticas. Como dice el profesor Bermejo (2004) en las aulas actuales de matemáticas, el profesor ha de ceder protagonismo a favor del alumno, supeditando su labor de facilitación y apoyo al aprendizaje del niño, porque lo que realmente importa desde una perspectiva pragmática y de optimización, "es conocer el desarrollo matemático específico infantil, de modo que puedan seguirse los pasos que recorre el niño para pasar de su competencia matemática actual a la competencia que se desea conseguir"(Bermejo, V., 2004: 13).

Los procedimientos para la enseñanza de las matemáticas, en cuanto particular disciplina de la didáctica para la enseñanza del currículo de las matemáticas, será el objeto de mi atención preferente puesto que afecta directamente al objeto de la tesis y existe una viva preocupación social por la enseñanza de las matemáticas, al menos por las especiales dificultades que parece entrañar el asunto. Sobre la didáctica en general no se pretende un análisis exhaustivo[148], que sería inviable teniendo en cuenta la dilatada historia de la disciplina, me limitaré a hacer una breve anotación sobre los elementos comunes que aparecen en la mayor parte de las definiciones de didáctica remitiendo a la obra de Navarro Hinojosa (2007). Los asuntos, que se tratan en este apartado, se especifican a continuación.

5.1.- Dimensiones de la didáctica de las matemáticas. En este apartado se exponen algunas de las nuevas y sustanciales aportaciones en forma de reglas, normas, usos sociales, comportamientos individuales o colectivos, recursos, etc., que la didáctica pone a disposición del profesor de matemáticas y de los estudiantes de esta materia para dar alguna respuesta a la generalizada ocupación y extendida preocupación de '*cómo*

[148] Primero, la mayoría de los autores designan la didáctica como una ciencia –"ciencia auxiliar", "ciencia aplicada", "ciencia teórico-normativa" o simplemente "ciencia"-; segundo, en relación al contenido de esta ciencia, lo comúnmente aceptado por los autores se refiere a la didáctica como un proceso de enseñanza o de enseñanza-aprendizaje; tercero, en cuanto a su finalidad existen opciones variadas, crecimiento intelectual, aprehensión de la cultura para el desarrollo integral, la instrucción. De este análisis se infiere que la didáctica es una ciencia teórico-práctica y normativa que estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje para optimizar el crecimiento intelectual e integral de cada individuo. NAVARRO HINOJOSA, R. (2007). *Didáctica y currículum para el desarrollo de competencias.* Madrid: Dykinson.

Universidad Pontificia de Salamanca

enseñar mejor las Matemáticas'. Se destacan en este apartado, como denominador común a todas las demás, las buenas prácticas de clase y en este marco se insertan la innovación, el diseño, el contexto en sus variados modos de presentarse, la comunicación verbal o conversación, las buenas relaciones metodológicas entre las ciencias y las matemáticas, el fenómeno tan actual como global de la omnipresencia de la diversidad que presenta nuevos retos a la enseñanza de las matemáticas y, por último, la progresiva y tantas veces conflictiva aproximación entre las nuevas tecnologías y la enseñanza matemática. Entre otros, hemos atendido a Jesús María Goñi y Nuria Planas, autores que en el año 2011 y 2012 han puesto en el mercado publicaciones muy estimables sobre la didáctica de las matemáticas, como referentes significativos en este apartado.

5.2.- Aproximación conceptual al aprendizaje matemático. En este apartado se consideran tres asuntos de interés en todo discurso sobre el aprendizaje: los aspectos conceptuales de la definición de aprendizaje, las características del aprendizaje que comprenden tanto las actividades implicadas en el aprendizaje, como los asuntos y los factores que lo condicionan. El tercer aspecto se dedica a pergeñar con brevedad algunas de las principales aportaciones teóricas al aprendizaje.

5.3.- El aprendizaje de las matemáticas. En este apartado se describen dos de las grandes aportaciones al proceso de la enseñanza-aprendizaje: la experiencia PISA y la modelización matemática. De la primera se exponen los objetivos para la enseñanza.-aprendizaje de las matemáticas que tienen PISA y los datos del aprendizaje matemático en relación con España. La modelización matemática se centra en la utilidad y necesidad de seguir contando con los problemas verbales en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

5.4.- La motivación: término y definición. Se indaga en el significado del término motivación acentuando los rasgos que lo caracterizan: la dimensión de valor, la expectativa de éxito y la dimensión emocional de especial significado en el proceso de la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas. Otro concepto al que se presta atención es el de *autoconcepto*: se mencionan los diferentes significados que se le atribuyen, se identifica como una categoría conceptual y multidimensional, de contenido denso respecto del *binomio motivación – rendimiento escolar*. Desde este concepto se establecen conexiones significativas con el rendimiento escolar en el estudio de las matemáticas.

Universidad Pontificia de Salamanca

5.5.- Contenido curricular del Álgebra en el panorama español e internacional: Se muestran algunos intentos didácticos llevados a la práctica en el panorama español, en el ámbito nacional y en el de las comunidades autónomas, a favor de la mejora en la enseñanza de las matemáticas. Se toma en consideración la legislación del Estado, las normativas específicas de las comunidades autónomas y otros recursos puestos en práctica con la finalidad de elevar los niveles del aprendizaje matemático en los centros escolares, por los estudiantes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Se muestran además experiencias internacionales de consolidado prestigio, como las pruebas PISA y TIMSS.

5.1.- DIMENSIONES DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Pergeñados unos elementales rasgos de la didáctica en general, nos ubicamos en el escenario de la didáctica de las matemáticas, que contextualiza la investigación empírica que presento en este capítulo. Es obligada mención que ya en la década de los setenta del siglo pasado, Piaget y otros (1978:331) colocan la enseñanza de las matemáticas como el elemento decisivo para los cambios que habían de introducirse en el escenario americano: “La enseñanza de las matemáticas en la enseñanza primaria y secundaria está retrasada con respecto a los requerimientos de la actualidad, y necesita mejoras esenciales: sin ningún género de dudas suscribimos esta opinión casi universalmente aceptada” y añade algo más de notable interés para la enseñanza de las matemáticas, que estimo todavía de actualidad, a pesar de los cuarenta y cinco años transcurridos desde que estos autores hicieron el diagnóstico:

“Lo que está mal en el actual plan de enseñanza secundaria no son tanto los temas que se tratan como el aislamiento de las matemáticas de los otros dominios del conocimiento y la investigación, especialmente de las ciencias físicas, y el aislamiento de los distintos temas entre si; incluso las técnicas y los teoremas dentro de un mismo tema aparecen aislados, como trucos inconexos para el estudiante, a quien se deja en la oscuridad acerca del origen y el propósito de las manipulaciones y hechos que se supone debe aprender de memoria. Y así, desgraciadamente, a menudo sucede que la materia explicada aparece como inútil y aburrida, excepto quizá para los pocos futuros matemáticos que pueden persistir a pesar del plan” (Piaget, J. y otros, 1978: 332).

Desde una perspectiva más reciente en el tiempo encontramos en un interesante

Universidad Pontificia de Salamanca

libro coordinado por Nuria Planas, que dedica la segunda parte de la obra a la *enseñanza de las matemáticas*, centrada en la formación y desarrollo profesional del profesorado, en el diseño de la práctica docente para la formación de maestros y en la necesidad de integrar la investigación en la formación del profesorado de matemáticas, es decir, a presentar “los resultados relativos a los procesos de enseñanza de las matemáticas en situaciones profesionales, escolares y curriculares o bien de conceptualización teórica” (Planas, N., 2012:18). En la tercera y última parte vuelve sobre la enseñanza de las matemáticas en conjunción con su aprendizaje, explorando algunas de las mas importantes variables que inciden en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como son las tecnologías de la información y de la comunicación, el multilingüismo que afecta en la actualidad a tantos estudiantes, la dimensión afectiva y emocional de especial relevancia en el aprendizaje de las matemáticas y la visión de lo social y político en el aprendizaje de las matemáticas. En la obra *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas* (2011) que Nuria Planas comparte autoría con Goñi, en más de cien páginas de un capítulo que lleva por título *Buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato* establece una serie de principios y criterios sobre la didáctica de las matemáticas, tanto desde la perspectiva del profesor, del currículo y de los estudiantes. Voy a seguir el desarrollo de la didáctica de las matemáticas, que hace la autora con tanta brillantez como rigor científico.

5.1.1.- Diseño, innovación y buenas prácticas en la clase de Matemáticas

La profesora Nuria Planas comienza su capítulo afirmando la necesidad de incorporar los aspectos transversales en la formación inicial del profesorado de matemáticas con el propósito de “facilitar la comprensión de la compleja naturaleza de las dificultades en el aprendizaje matemático de los estudiantes de secundaria obligatoria y de bachillerato (…) Debe haber una intención de enseñanza explícita recogida en varias sesiones de los módulos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Este es un requisito importante si se quiere mejorar la educación matemática y, en particular, si se quiere contribuir de una forma más completa al desarrollo de la competencia relacionada con el diseño y la implementación de buenas prácticas en la clase de Matemáticas” (Planas, N., 2011:58). A continuación especifica las dificultades de orden cognitivo, epistemológico, cultural y social, defendiendo la

Universidad Pontificia de Salamanca

necesidad de una aproximación inclusiva a la educación matemática[149]. Este primer esbozo de la didáctica de las Matemáticas implica un variado contenido de procesos de innovación [150] que ofrezca oportunidades de transformar el aula, introduciendo contenidos y metodologías nuevas sino sobre todo, "explorando nuevas maneras de resolver, hasta donde sea posible, las tensiones clásicas entre enseñanza y aprendizaje" (Planas, N., 2011: 60).

No obvia la autora las dificultades que, de todo orden, se van a presentar para cambiar los procedimientos y la dinámica del aula, con especial atención a la *sobrecarga de las innovaciones* y la acumulación de acciones pensadas y diseñadas que exigen los cambios y las falacias que pesan sobre las innovaciones, que más parecen arbitrarias instalaciones de cambios permanentes que nunca ofrecen estabilidad como los modelos. En este proyecto de mejora de las clases de matemáticas, la autora se decanta con matices a favor del *libro de texto* de matemáticas, que en muchas clases había dejado de ser el recurso principal, pero "continua siendo un medio de enseñanza y aprendizaje que no debería menospreciarse. En estos momentos de anuncio de libros digitales en todos los centros, parece incluso que se abren nuevas posibilidades. Los libros de texto fueron creados con el propósito de ayudar a enseñar, orientándose cada vez más hacia el 'ayudar a aprender' a lo largo de la última década." (Planas, N., 2011: 62). Dos últimos criterios son considerados por la autora Nuria Planas que venimos

[149] "En contraposición con las ideas que relacionan la atención a aspectos sociales y culturales con prácticas menos exigentes en cuanto al aprendizaje de la materia, defendemos una aproximación inclusiva a la educación matemática, ligada a la calidad de los aprendizajes matemáticos. Los criterios de significatividad, reflexividad, interdisciplinariedad e inclusión deben considerarse e interpretarse como parte de una estrategia didáctica de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos" (Planas, N., 2011: 58).

[150] La perspectiva innovadora y progresista de la educación, según Jaume Carbonell, ha de concebirse "como un conjunto de ideas, procesos y estrategias, más o menos sistematizados, mediante los cuales se introducen y provocan cambios en las prácticas educativas vigentes … Este tipo de innovación repercute en la vida cotidiana de las aulas; en la gestión y organización de los centros; en la dinámica participativa de la comunidad educativa y en la cultura profesional del profesorado. Su objetivo es alterar de algún modo la gramática escolar y el orden establecido, modificando concepciones y actitudes, introduciendo nuevas metodologías y mejorando y transformando, según los casos, los procesos de enseñanza y aprendizaje" (Carbonell, S.,J.,2008: 62-63)

Universidad Pontificia de Salamanca

siguiendo en este apartado: Desde la perspectiva del criterio de reflexividad [151], las experiencias de aprendizaje reflexivo han de alimentar un diálogo entre el profesor y el estudiante que sirva para el planteamiento de preguntas, la discusión de respuestas y la interpretación de nuevos interrogantes. En la actualidad se ha avanzado en la interdisciplinariedad entre distintos campos de las Matemáticas como la aritmética, el álgebra y la geometría, etc., sería también interesante reforzar los viejos vínculos con otros campos de la ciencia que traerían al escenario matemático nuevas y diferentes metodologías de experimentación. Sería también interesante aproximar las matemáticas al discurso lingüístico, ya que las habilidades matemáticas dependen también de la comprensión lectora de los estudiantes, como queda reflejado en las pruebas internacionales TIMSS[152] y PIRLS[153].

El criterio de interdisciplinariedad debiera interpretarse como condición según la cual el trabajo matemático ha de relacionarse con otros dominios de contenido científico, orientado "la construcción de un conocimiento integrado que sea útil y funcional" (Planas, N., 2011: 72-73). El profesor Jaume Carbonell descubre posibilidades de innovaciones exitosas en el escenario[154] de la enseñanza mediante el ajuste de las distintas piezas intervenientes en el proceso y por su sostenibilidad. Ahora bien, esta cooperación necesaria exige a su vez la convergencia de un conjunto de variables como el trabajo en equipo, compartir conocimientos y perspectivas, confianza y elevadas expectativas sobre los estudiantes, la propia innovación, la colaboración con el centro y con los padres de los estudiantes. Se ha de trabajar por flexibilizar la organización escolar y recabar el mayor apoyo del centro educativo y su personal.

---

[151] "Desde la perspectiva del estudiante, las experiencias de aprendizaje reflexivas son las que responden a necesidades de comunicación promoviendo primero la presentación de opiniones y después la elaboración de descripciones, explicaciones, definiciones, argumentaciones, justificaciones, pruebas… para la expresión del pensamiento matemático y la fundamentación de opiniones" (Planas, N., 2011: 70)

[152] TIMSS es el acrónimo de The Trends in International Mathematics and Science Study. En español: Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias.

[153] PIRLS es el acrónimo de Progress in International Reading Literacy Study.

[154] Para el autor, "los dos escenarios básicos de aplicación de las innovaciones son, sin duda, el aula y el centro. Es aquí donde se focalizan los procesos de cambio y de transformación. Pero es conveniente salir de este espacio aislado y acotado para ampliar la mirada y compartir ideas y experiencias con profesores de otros lugares ... Este intercambio, al tiempo que abre nuevas perspectivas teóricas y prácticas acerca de la innovación, refuerza y enriquece el proceso específico de cada centro" (Carbonell, J., 2008: 67-68).

Universidad Pontificia de Salamanca

5.1.2.- El contexto en el proceso de la enseñanza - aprendizaje de las Matemáticas

No cabe duda que en la actualidad el contexto en sus múltiples dimensiones se ha incorporado al sistema educativo en sus variantes más significativas. Según Carbonell, el contexto es el mejor libro de texto y la ciudad es como un "libro abierto donde se condensa la memoria y la actualidad y la ciudad educadora conlleva al propio tiempo una finalidad utópica y un viaje lleno de ofertas, actividades y oportunidades, con destinos próximos y lejanos, con distintas velocidades de crucero y con propósitos modestos y ambiciosos. En cualquier caso, se trata de activar el diálogo de la escuela con el entorno y del conjunto de la educación con el territorio" (Carbonell, J., 2008: 72). En la investigación de la calidad de los sistemas educativos, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) ha sido una institución pionera en impulsar la utilización y desarrollo de los indicadores para valorar y medir el desarrollo y la calidad de los sistemas educativos de los países. Entre estos indicadores, ya desde la década de los setenta del siglo XX, se encontraba el contexto de la enseñanza que luego en la década de los noventa este indicador se concretaba en las categorías de *contexto demográfico*, *contexto económico* y una tercera categoría de *opiniones y esperanzas* (González, A., 2004: 56-57). Esta relación entre contexto y los procesos de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas es puesta de manifiesto en el estudio TIMSS que constata la existencia "de una fuerte correlación entre el rendimiento de los alumnos en el área de matemáticas y su entorno familiar, medido en base al número de libros disponibles en el hogar o al hecho de que se hable en casa el mismo idioma que el utilizado en las pruebas de evaluación. Sin embargo, un rendimiento escolar deficiente no es consecuencia inmediata de la procedencia de un entorno desfavorecido" (EURYDICE, 2011d:23-24).

La introducción del contexto social y económico, cultural y de expectativas en la enseñanza de las matemáticas parece haber tenido una influencia positiva en el modo de ver las matemáticas y consiguientemente su enseñanza-aprendizaje, en el sentido de que descubren que las matemáticas pueden tener cierta utilidad en el escenario de la vida cotidiana: "Al introducir con regularidad actividades de contexto real en el aula de secundaria obligatoria y de bachillerato, se da prioridad al trabajo del análisis, el razonamiento, la comunicación y la discusión de ideas, promoviendo la actitud crítica, la creatividad, la toma de decisiones y el enfrentamiento con problemáticas que, sin la

Universidad Pontificia de Salamanca

perspectiva matemática, podrían pasar desapercibidas" (Planas, N., 2011: 81).

Para la autora este esfuerzo por llevar al aula elementos significativos de los ámbitos contextuales contribuyen a lo que puede denominarse como la alfabetización matemática, en el sentido de dotar de capacidad a los estudiantes para relacionar las matemáticas con asuntos de la vida diaria y por consiguiente facilitando al individuo capacidades de utilizarlas en los variados contextos en que se ubica la vida del estudiante. En todo caso de esta manera se abre una vía para que las matemáticas tengan algún sentido para los estudiantes y dejen de verlas como algo teórico que está absolutamente desgajado de los asuntos que le ocupan en la vida diaria y se despierte su interés por conocerlas y hasta por comprenderlas [155].

Para la autora la aproximación de la enseñaza de las matemáticas a las situaciones contextuales de los estudiantes será de interés didáctico mientras ello suponga para el profesorado y para los estudiantes una novedad, desde la que se vayan adjuntando los modos de funcionamiento en la clase para que la situación tenga impacto en el aprendizaje del estudiante y al tiempo no se reduzca a algo meramente puntual, sino que se inscribe en el normal funcionamiento de la clase, es decir puede tener permanencia y puedan los estudiantes racionalizar las experiencias de la realidad, con la ayuda del profesor y superar la tentación de desechar lo preconcebido, como algo extraño al estudio matemático. En este punto reside la importancia de que el profesorado aprenda dar argumentos que convenzan a los estudiantes de que "saber matemáticas implica ser competente en su aplicación a situaciones que pueden no ser matemáticas ni escolares, son las propias de la vida cotidiana de las mujeres y de los hombres que no son escolares (Planas, N. 2011: 82).

---

[155] En la actualidad la urdimbre contextual encuentra acogida en los textos legales españoles, que tratan sobre el currículo de las matemáticas, mencionando tres contextos que tienen significación en la didáctica de las matemáticas: el *contexto dado por la matemática, el de la vida cotidiana y el del mundo laboral*. Para la autora que venimos siguiendo "la corriente realista en educación matemática da especial relevancia al segundo tipo, ya que supone que la vida cotidiana informa sobre la funcionalidad y el carácter social de las matemáticas. Esta orientación , que tiene mucho en común con los movimientos de reforma en distintos países (…) ha llevado a la llamada matematización progresiva constituida por una dimensión horizontal y otra vertical (…). Por lado, la *matematización horizontal* lleva del mundo real al mundo de los símbolos y posibilita tratar matemáticamente un conjunto de problemas. Por otro lado, la *matematización vertical* consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones" (Planas, N. 2011: 81-82). La autora puntualiza este planteamiento cuestionando lo que entienden los autores por *realidad,* ya que estos no la entienden tanto como realidad objetiva cuanto por experiencia de lo real.

Universidad Pontificia de Salamanca

5.1.3.- La buena práctica de la conversación en el aula de Matemáticas

En un capítulo precedente consignaba que la racionalidad comunicativa en el escenario de la clase de matemáticas y en cualquier otro no es asequible sin la participación activa de los intervenientes en la acción de conversar y si no se cuenta con la actitud de aprendizaje de todos los que colaboran en la comunicación. El éxito de la comunicación no se alcanza por la imposición sino por la convicción, que además demanda tiempo y práctica pedagógica compartidas. Es obvia la necesidad de una formación comunicativa del profesor de matemáticas, pero no es suficiente. Para lograr una relación aceptable con los estudiantes de la clase de matemáticas, es imprescindible una racionalidad justificada que pueda ser compartida por el profesor y los estudiantes. La justificación puede construirse sobre tres soportes racionales: las evidencias empíricas, las pruebas y argumentos y la coherencia con las leyes, normas y pautas mutuamente aceptables y socialmente aceptadas.

La importancia de considerar la conversación en el desarrollo de buenas prácticas en la clase de matemática va a fluir sobre el cauce de las preguntas y respuestas formuladas en la clase en torno a la materia de matemáticas y que son de gran relevancia cuando se interpretan con la finalidad de establecer y fortalecer cauces y prácticas de diálogo. A veces los profesores irrumpen con preguntas, no tanto con la finalidad mencionada, cuanto para suscitar respuestas de los estudiantes y mediante esas respuestas avanzar en mecanismos de evaluación. Este tipo de comunicación apenas deja espacios para discusiones profundas, a las que se puedan sumar otros estudiantes que prolonguen un discurso significativo. Lo que procede son “preguntas dirigidas a acompañar el aprendizaje, que estimulen el análisis y la discusión e incluso la interacción en secuencias de interrogación-respuesta-evaluación (IRE) entre estudiantes. Esto hace que a menudo sean los profesores quienes acaben respondiendo a preguntas que ellos mismos han introducido, sin que se reflexione sobre el por qué los estudiantes no han respondido o por qué no muestran interés (…) y retraigan la aparición de respuestas” (Planas, N., 2011: 98)

No cabe duda que en las clases de matemáticas los profesores hacen preguntas sobre la materia que se está impartiendo o se ha impartido, sin embargo el clima general de las clases no parece que esas preguntas animen a los estudiantes a participar en la conversación sugerida por las preguntas de profesor y ello sugiere la pertinencia de

Universidad Pontificia de Salamanca

mejorar la práctica de la enseñanza - aprendizaje por el sistema de formular preguntas, esperar respuestas e introducir a partir de éstas el análisis y la discusión tan conveniente en clase de matemáticas. "No cabe duda que las preguntas, ya sean orales o escritas, contribuyen a generar situaciones de construcción individual y conjunta de conocimiento matemático. Son una potente estrategia para la enseñanza y el aprendizaje y, en realidad, puede incluso decirse que una de las dimensiones de la competencia matemática consiste en ser capaz de formular buenas preguntas. Aprender a hacer preguntas, sin embargo, no es fácil porque todavía hoy en día está poco legitimado en el entorno escolar el uso de preguntas por parte del alumnado" (Planas, N., 2011: 98-99).

Si tenemos en cuenta que el hacer preguntas con sentido y formulación inteligible a los estudiantes sobre los temas matemáticos no es asunto fácil y si aceptamos que didácticamente son instrumentos valiosos para el aprendizaje de las matemáticas, es obvio que la profesora de la materia, cuando se dedica a preparar la lección del día siguiente y piensa en las prácticas que encomendará a los estudiantes para que profundicen en los conocimientos de la teoría, debería preparar también una batería de preguntas sobre el asunto explicado o a explicar que relacionen la teoría con la práctica. En el decurso de la clase de matemáticas surgirán preguntas variadas e inopinadas, a las que hará frente la profesora o el profesor con la mejor voluntad y competencia, pero ha de improvisar y tal vez no resulte fácil dar respuestas con sentido e inteligibles a las estudiantes. La situación ha de animar al profesor de matemáticas a asumir como parte de la tarea de preparación de la clase de matemáticas, la elaboración de preguntas simples y complejas, fáciles y difíciles para animar el diálogo y que servirán de ayuda a la construcción conjunta del conocimiento matemático.

No cabe duda que el profesorado de matemáticas, pasados los primeros años de experiencia y adquiridos algunos conocimientos pedagógicos sobre el funcionamiento de la clase y el trato con los estudiantes, está en condiciones de hacer buenas preguntas sobre el contenido y desarrollo de la materia, aunque puede seguir resultando tarea complicada el "introducir preguntas que promuevan la participación, el contraste de perspectivas y el interés por la tarea. Por ello, la sólida formación inicial en contenidos matemáticos debe ir acompañada de la formación continuada en cuestiones pedagógicas que resalten cómo y con quien se discute, y no solo qué se discute" (Planas, N. 2011: 99-100).

Universidad Pontificia de Salamanca

5.1.4.- Las ciencias y la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas

En el informe EURYDICE (2011d: 7) sobre las matemáticas en la Unión Europea se afirma que la competencia matemática "se considera una de las competencias clave necesarias para el desarrollo personal, la ciudadanía activa, la inclusión social y la empleabilidad en la sociedad del conocimiento (…) La competencia numérica, matemática y digital, así como la capacidad para comprender las ciencias, resultan vitales para la participación plena en la sociedad del conocimiento y para la competitividad de las economías modernas". La idea de que las ciencias naturales y las matemáticas están siendo aquejadas de dificultades en la enseñanza – aprendizaje en los países de la Unión Europea y también en otros pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) está verificada ampliamente en cuanto que disminuye el número de estudiantes que se matriculan en este tipo de estudios y entre los matriculados obligatoriamente en estos estudios en el nivel educativo correspondiente el porcentaje de fracaso (superior al 15 %) se considera excesivo. Esta idea es el factor que impulsó la elaboración de los dos Informes EURYDICE, el uno sobre las Ciencias y el otro sobre las matemáticas.

Esta trayectoria común que siguen las matemáticas y las diversas ciencias de la naturaleza viene de antiguo. Desde el siglo XVII las Matemáticas se instalan en el núcleo de la racionalidad, erigiéndose en el método por excelencia de todos los saberes que pretenden denominarse científicos y reclaman un estatuto de ciencia. Este carácter instrumental de las matemáticas a favor de las ciencias ha asegurado el progreso ininterrumpido de las ciencias y está ejerciendo de soporte sólido al desarrollo tecnológico actual. Las matemáticas constituyen el esquema básico del método científico y de sus normas de aplicación en las diversas áreas científicas; han elaborado el lenguaje propio de la ciencia, en que expresa las conclusiones logradas y las leyes científicas demostradas, colaborando con las ciencias en la construcción de modelos de organización, interpretación y análisis de las ciencias.

Desde hace unas pocas décadas tuvo lugar una escisión en el ámbito matemático, una especie de ruptura, más de tipo organizativo que de investigación, entre las matemáticas teóricas y las matemáticas aplicadas, llegando a la creación de departamentos diferentes, con entidad administrativa propia. Esta situación, en mi parecer, no parece que vaya a ser duradera, en cambio se están dando pasos para organizar estudios conjuntos con las ciencias físicas, químicas, geológicas y biológicas

Universidad Pontificia de Salamanca

desde las matemáticas aplicadas. Para la profesora Planas, avanzar en el desarrollo de procedimientos de enseñanza-aprendizaje que favorezcan la construcción del conocimiento integrado sería muy positivo, pero a ello se oponen obstáculos de diversa naturaleza: la interpretación del currículo escolar en función de la diversidad de materias; el conocimiento escolar responde más a una concepción multidisciplinar que no a una fórmula interdisciplinar; la separación de áreas de conocimiento crece desde la perspectiva cultural y epistemológica.

A pesar de que la realidad objetiva es de separación y la vivencia de los obstáculos es contundente, la profesora Planas asegura que "se están produciendo iniciativas prácticas con metodologías de experimentación que pretenden acercar las áreas escolares de matemáticas y ciencias (…) La conexión entre matemáticas, ciencias y realidad puede contribuir a modificar la percepción negativa de las matemáticas que tienen muchos estudiantes. El hecho de darse cuenta de que en clase de Matemáticas se puede aprender a comprender mejor el movimiento de las ruedas de una bicicleta, a reconocer cuando un alimento está en mal estado, o bien a hacerse una idea del tamaño de organismos implicados en la aparición de enfermedades, es un estímulo para estudiantes y profesorado" (Planas, N., 2011: 119-120).

5.1.5.- La diversidad y la enseñanza – aprendizaje de las Matemáticas

La universalización de la educación obligatoria en países desarrollados supuso una gran conquista vinculada a la lucha por la materialización de los derechos humanos. No obstante, la sociedad exige que una educación para todos, sea también una educación de calidad para todos. Desde esta filosofía surge la atención a la diversidad como el principio que reconoce las diferencias de los alumnos en el proceso de aprendizaje, donde inciden tanto factores personales como ambientales. Entre los posibles factores que originan la diversidad destacan los de tipo personal como los intereses, las motivaciones, los estilos cognitivos, las capacidades y los ritmos de aprendizaje. Entre los factores ambientales se destacan generalmente los recursos sociales, materiales y culturales, la actitud de la familia respecto del alumno, las relaciones con los grupos de pertenencia y referencia así como las estimulaciones recibidas.

Universidad Pontificia de Salamanca

La atención a la diversidad como principio y el reconocimiento de las diferencias que manifiestan los alumnos exige, a su vez, la oferta de una respuesta educativa igualmente diferenciada. A grupos heterogéneos ha se responder una educación y una práctica educativa también heterogénea. La atención a la diversidad es abordada en la Ley Orgánica de Educación (LOE) 2/2006, de 3 de mayo: 1) En su *Preámbulo* son varias las ocasiones en las que hace referencia a la atención a la diversidad: "se trata de mejorar el nivel educativo de todo el alumnado, conciliando la calidad de la educación con la equidad de su reparto" (…) "*La atención a la diversidad se establece como principio fundamental que debe regir toda la enseñanza básica, con el objetivo de proporcionar a todo el alumnado una educación adecuada a sus características y necesidades".*

La legitimidad de la atención a la diversidad se justifica en la LOE en su título preliminar, desde una doble perspectiva: 1) desde la perspectiva de los principios (LOE, Art. 1): a) La *calidad de la educación para todo el alumnado*, independientemente, de sus condiciones y circunstancias. b) *La equidad, que garantice la igualdad de oportunidades*, la inclusión educativa y la no discriminación y actúe como elemento compensador de las desigualdades personales, culturales, económicas y sociales, con especial atención a las que deriven de discapacidad. c) *La flexibilidad para adecuar la educación a la diversidad* de aptitudes, intereses, expectativas y necesidades del alumnado, así como a los cambios que experimentan el alumnado y la sociedad. 2) Desde la perspectiva de los fines (LOE, Art. 2)**:** a) El pleno desarrollo de la personalidad y de las capacidades de los alumnos. b) La educación en el respeto de los derechos y libertades fundamentales, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad. c) La educación en el ejercicio de la tolerancia y de la libertad dentro de los principios democráticos de convivencia y la prevención de conflictos y la resolución pacífica de los mismos. d) La formación en el respeto de la pluralidad lingüística y cultural de España y de la interculturalidad como un elemento enriquecedor de la sociedad.

En cuanto a las medidas para atender a la diversidad, que establece la misma ley son muy variadas y responden a diferentes orígenes: unas provienen del centro, otras pueden hallar respuesta inmediata en la programación y otras medidas de atención se dedicarán a alumnos con necesidades específicas de apoyo educativo. Establecido este marco general interesa poner de manifiesto lo específico de la enseñanza de las

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas en relación con la diversidad o heterogeneidad de los alumnos del aula, obviamente significa que el profesor de matemáticas ha de estar preparado, "tener conciencia de las diversidades posibles y de su impacto en la cultura del aula y de su relación con el rendimiento matemático del alumnado" (Alsina y Planas, 2008).

El reto no está en que cada profesor ha de estar preparado en todos los posibles estilos culturales que pueden darse en una clase de nuestras sociedades abiertas, ni en elaborar una amplia diversidad de materiales para la circunstancia de la diversidad sin límites que se ubica en el planeta, mas bien "el reto es aprender a crear un ambiente de aula donde los propios alumnos den a conocer sus estrategias y expliquen sus dificultades para empezar a entender otras estrategias distintas. Desde la perspectiva del profesorado, se trata de entender que los principales factores de riesgo en la atención a la diversidad son los de tipo educativo, por delante de los asociados a las historias individuales y sociales de cada estudiante. El ambiente de aula es un factor básico en la generación de dificultades durante el aprendizaje matemático y en la aparición de trayectorias de abandono" (Planas, N.,136-137).

La atención a la diversidad desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, exige la correcta contextualización de la enseñanza matemática mediante la operativización de los criterios de significatividad, reflexividad e interdisciplinariedad que son otras tantas formas de atención a la diversidad, es decir, en la medida en que el aprendizaje matemático no está bien contextualizado, fluirá por el cauce del discurso abstracto, dificultando las expresiones de los alumnos y si el aprendizaje matemático no se elabora sobre la reflexión y la discusión, se instalará en el formato de la lección magistral impidiendo la participación activa y la manifestación de las diferencias. Según Nuria Planas "la enseñanza de las matemáticas que no está, en parte, contextualizada, que no busca la reflexión y que no está conectada con otras áreas, está más lejos de atender a la diversidad. Para avanzar en este sentido, naturalmente no basta con las respuestas y propuestas de un único profesor. Vuelve a ser preciso el trabajo en equipo entre profesorado de distintos cursos y materias, y con distintos itinerarios profesionales (…) Es importante tener todo esto en cuenta porque una de las finalidades básicas de la educación obligatoria del siglo XXI es enseñar la diversidad y, por ello, el profesorado está obligado a planificar esta enseñanza desde todas las áreas, también desde Matemáticas" (Planas, N., 2011: 137).

Universidad Pontificia de Salamanca

5.1.6.- Dimensión tecnológica de la didáctica matemática.

Para la Catedrática experta en la educación de las matemáticas, Celia Hoyles, de la Universidad de Londres, es obvia y necesaria la aportación tecnológica en la enseñanza de las matemáticas: "Quiero resaltar que la investigación basada en diseños experimentales puede llegar a tener un papel clave en la educación matemática, más allá del propio experimento y su evaluación. Este tipo de investigación debería tener un papel más explicito en la práctica profesional cotidiana del profesor. (…) La investigación basada en diseños experimentales debería desempeñar un papel central en los programas de formación, ya que esto ayudaría a prestar atención al conocimiento matemático que los profesores necesitan hacer operativo en sus clases" (Hoyles, C., 2012: 140) [156]. La profesora aporta dos sugerencias más de interés para el uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. La primera se refiere a la complejidad del uso de los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas: "Lograr una comprensión más robusta de la complejidad asociada al uso de ordenadores en contextos de práctica matemática con propósitos colectivos" y como segunda conclusión afirma la necesidad de integrar la investigación en la formación profesional del profesor de matemáticas "desarrollando innovaciones a corto, medio y largo plazo que incluyan el uso de tecnología, junto con estrategias para implementarlas" (Hoyles, C., 2012: 140). Sin embargo en la Unión Europea, según los datos disponibles sobre el uso de los ordenadores se puede afirmar que "su uso no está extendido en las clases de matemáticas. Esto sucede tanto en países donde el currículo nacional menciona específicamente el uso del ordenador para la enseñanza de esta asignatura como en aquellos en los que su utilización no es obligatoria ni recomendada" (EURYDICE, 2011d: 70).

La didáctica, en su dimensión práctica, es una ciencia tecnológica de aplicación en el ámbito educativo, que actualmente se beneficia de los grandes avances que las nuevas tecnologías están introduciendo en los espacios de la didáctica. La didáctica incorpora una serie de características que le vienen desde la tecnología que suele definirse por los rasgos o notas siguientes:

La racionalidad: que las decisiones de actuación han de tener justificación

[156] Celia Hoyles es Catedrática del Instituto de Educación de la Universidad de Londres y Directora del National Centre for Excellence in the Teaching of Mathematics y es especialista en el uso de la tecnología en los procesos de la enseñanza de las matemáticas.

Universidad Pontificia de Salamanca

científica.

Que sea sistemática, es decir, los elementos que intervienen en el proceso son considerados en sí mismo y en relación con los demás en la búsqueda de una misma finalidad.

La tecnología por definición es planificadora evitando conscientemente cualquier forma de improvisación.

La tecnología pretende unas metas claras y definidas, es decir, si se planifica es porque existen objetivos claros a priori.

Control o evaluación: se revisa si los objetivos se consiguen de acuerdo a la planificación establecida.

Eficacia: su forma de actuar tiene mayores posibilidades de resolver los problemas que otras alternativas.

Optimización: rentabilizar al máximo los recursos y los elementos que intervienen en el proceso didáctico" (Sarramona, 1990: 14).

Para concluir, la profesora Celia Hoyles, en cuanto se refiere al uso de las tecnologías, destaca dos retos excelentes: "Idear metodologías sistemáticas para diseñar y evaluar estas innovaciones (tecnológicas) a lo largo del tiempo y en entornos distintos de práctica. Investigar procesos de aprendizaje de conocimientos matemáticos en nuevos contextos y con nuevas audiencias" (Hoyles, C., 2012: 148).

5.1.7.- A modo de síntesis.

Unas pocas ideas sobre la didáctica de las matemáticas, que surgieron en la década de los años setenta del siglo pasado, mantienen su actualidad: La necesidad de seguir explorando el área de la didáctica de las matemáticas y a la conveniencia de aproximar los estudios matemáticos a otros saberes científicos de la naturaleza, empezando por la física (Piaget, J. y otros, 1978: 332). Se constata esta arbitraria separación todavía en la actualidad, como algo legalmente establecido desde el mismo currículo escolar, que se considera como un conjunto multidisciplinar pero no interdisciplinar.

Son aspectos destacados en la enseñanza de las matemáticas la *apuesta por las innovaciones metodológicas*, que como hemos ya mencionado han de tener posibilidades de sostenibilidad. Estas innovaciones pueden estar apoyadas por el avance de investigaciones sobre los procedimientos metodológicos que se practican en aula y que puede llevar a cabo el profesor. Las experiencias del *aprendizaje reflexivo debieran estimular avances significativos en el diálogo entre profesor y alumnos*, que si proviene de la voluntad participativa de los estudiantes pudiera ser una fuente de abundantes

Universidad Pontificia de Salamanca

iniciativas y apoyos de mejoramiento del proceso de enseñanza - aprendizaje. También sería interesante *reforzar viejos vínculos con otras áreas matemáticas, con otros campos de la ciencia* que traerían al escenario matemático nuevas y distintas metodologías de experimentación y también sería de interés *aproximar las matemáticas al discurso lingüístico*, puesto que las habilidades matemáticas dependen de la comprensión lectora de los estudiantes. No debiera quedar ausente de las preocupaciones por mejorar la enseñanza de las matemáticas algunas *dimensiones del contexto en que discurre la vida de los estudiantes*. La situación económica, cultural y territorial en que se ubica la familia del estudiante tiene una decisiva influencia en el aprendizaje de las matemáticas y de otros saberes. Mejorar la comunicación en el aula y mejorar de la práctica de la enseñanza y el aprendizaje por el sistema de formular preguntas, esperar respuestas e introducir a partir de éstas el análisis y la discusión tan conveniente en clase de matemáticas. Dos aspectos más tienen incidencia directa en la enseñanza de las matemáticas: *la diversidad y los recursos tecnológicos*. La atención a la diversidad desde la perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, implica una pertinente contextualización de la enseñanza de la materia mediante la utilización de criterios significativos, reflexivos e interdisciplinares que son modos eficaces de atención a la diversidad. Por lo que se refiere al apoyo tecnológico en la enseñanza de las matemáticas destacaría la comprensión de la complejidad asociada al uso de las TIC en la de práctica enseñanza de las matemáticas y la necesidad de integrar la investigación en la formación tecnológica del profesorado de matemáticas.

5.2.- APROXIMACIÓN CONCEPTUAL AL APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Los aprendizajes son el resultado de procesos cognitivos individuales mediante los cuales se asimilan informaciones (hechos, conceptos, procedimientos, valores), se construyen nuevas representaciones mentales significativas y funcionales (conocimientos), que luego se pueden aplicar en situaciones diferentes a los contextos donde se aprendieron. En la sociedad del conocimiento, cada persona ha de asimilar una base de conocimientos rigurosos y estrategias eficaces; tiene que saber qué pensar y cómo actuar ante las situaciones relevantes a lo largo de la vida; hacerlo desde criterios

Universidad Pontificia de Salamanca

razonables y susceptibles de crítica; ser sensible a las exigencias cambiantes de los contextos; desarrollar el pensamiento reflexivo, crítico y creativo[157].

La simple superación de "saber algo más", puede constituir un cambio del potencial de conducta como consecuencia del resultado de una práctica o experiencia. Aprender no consiste únicamente en adquirir nuevos conocimientos, también es aprendizaje consolidar, reestructurar o eliminar conocimientos que ya poseemos. El aprendizaje implica cambios en la estructura física del cerebro, de su organización funcional, una modificación de los esquemas de conocimiento o de las estructuras cognitivas de los aprendices y se consigue a partir del acceso a determinada información, la comunicación interpersonal (con los padres, profesorado, compañeros...) y la realización de determinadas operaciones cognitivas. Los asuntos a tratar en este capítulo son los que siguen a continuación se refieren a la definición del aprendizaje, sus características y algunas aportaciones teóricas al aprendizaje.

5.2.1.- Definición de aprendizaje

Aunque no existe una definición del aprendizaje aceptada universalmente, sin embargo podemos adelantar algunas aproximaciones interesantes para esclarecimiento del término, como cambios duraderos más en los mecanismos de conducta que no un cambio de la conducta, puesto que ésta se ve influenciada por muchos factores además del aprendizaje. Algunos autores acentúan este aspecto para que se diferencie claramente el aprendizaje de la actuación que puede entenderse como algo momentáneo o esporádico, lo que "interesa transmitir es que el aprendizaje causa un cambio estable" (Domjan y Burkhart, 1990:32). Otros autores como Shunk (1997), identifican el aprendizaje como un cambio perdurable en la conducta o en la capacidad de conducirse de manera dada como resultado práctico de concretas formas de experiencia. En este aspecto, el sentido de cierta permanencia aparece como consustancial al hecho del aprendizaje. Kimble (1971) y Beltrán (1984) también inciden en el aspecto de que el

[157] "En la actualidad se ha producido un desplazamiento en el sentido de llevar los modelos y las teorías del aprendizaje hacia el reconocimiento de la importancia de los procesos intermedios, especialmente los cognitivos, lo que pone en dificultades a la tradicional Psicología del aprendizaje frente a los nuevos enfoques de la Psicología cognitiva" (Mayor, J., 2009: 746. *La actividad humana*. Madrid: editorial Complutense).

Universidad Pontificia de Salamanca

aprendizaje es un cambio más o menos permanente de conducta que se produce como resultado de la práctica. En general, los especialistas aceptan de forma explícita o implícita los tres criterios señalados del aprendizaje: un cambio en la conducta o en la potencialidad de la conducta, un cambio producido por algún tipo de práctica o ejercicio y un cambio duradero. Esto equivale a decir que el aprendizaje es una variable hipotética, un constructo invisible que enlaza dos variables –práctica y ejecución- dejando en la oscuridad la naturaleza de los procesos de aprendizaje.

En la sociedad del conocimiento, la educación ha de enfrentar el gran reto de nuestro tiempo, que Delors (1996) sintetizó en su famoso informe a la Comisión Europea en aprender a conocer, aprender a querer y sentir, aprender a hacer, aprender a convivir, aprender a ser. En este tipo de sociedad los cambios más obvios afectarán al ámbito educativo: se enseñará y se aprenderá a aprender, a fin de capacitar a que el individuo construya el diseño de su propia formación, insertándola en su currículo profesional. La educación tiene planteadas exigencias múltiples, crecientes, complejas y hasta contradictorias. "En la sociedad del conocimiento, la tensión hacia el aprendizaje no se reduce a la necesidad individual de aprender, dada su originaria limitación, sino que se asienta en la radicalidad de la misma naturaleza humana que, como afirma Aristóteles, al comienzo de su Metafísica *'todos los hombres tienden por naturaleza a saber'* y por ello el hombre debe primariamente saber" (Altarejos et al., 2003, 55).

La adquisición de conocimientos exige interés, capacidad, esfuerzo, y recursos, pero es algo valioso y progresivamente se constituye en elemento diferenciador entre los individuos y entre los pueblos. Se requiere transmitir un volumen cada vez mayor de información, generada en la sociedad de la información y exigida en la sociedad del conocimiento. Se exige ofrecer criterios y orientaciones para no perderse en esa ingente cantidad de información. Se exige aprender en diferentes contextos, ni puede limitarse a un espacio temporal del ciclo vital de la persona. Es obligado aprender a lo largo de toda la vida y cada ciudadano ha de asimilar conocimientos rigurosos y estrategias eficaces, que le permitan pensar y actuar responsablemente a lo largo de la vida: actuar desde criterios racionales y razonablemente sensatos, con capacidad crítica y sensibilidad a los cambios del medio, que le faciliten el desarrollo de un pensamiento reflexivo y creativo. El aprender a conocer es una exigencia para responder, de forma pertinente, a las demandas humanas y sociales de la sociedad cognitiva, también es

Universidad Pontificia de Salamanca

condición para el desarrollo pleno como persona, para el ejercicio satisfactorio de las capacidades humanas, para el uso productivo del saber y dar sentido a la vida[158] .

El aprendizaje consiste también en dotar a cada persona de competencias y criterios que le permitan comprender el mundo cambiante que le rodea y comportarse solidaria y responsablemente. El aprendizaje educativo, en general, ha de proporcionar a todos los seres humanos la libertad de pensamiento, sentimiento, imaginación y creatividad, que necesitan para dar sentido a su vida y alcanzar las cotas más altas posibles de bienestar y felicidad. El profesor García clarifica esta idea mediante la metáfora de la educación como viaje y se expresa en los términos siguientes: "La educación es un viaje interior desde el nacer hasta el morir. El desarrollo del ser humano se ha de dar en todas las potencialidades personales, intelectuales, efectivas, morales, estéticas, sociales, etc.; en todos los contextos, de familia, trabajo, ocio, etc.; y a lo largo de todas las etapas del ciclo vital" (García, 2009:39). También es deseable el aprendizaje sobre uno mismo, sus pensamientos y sentimientos, sus motivaciones y afectos. Las teorías de la mente son imprescindibles incluso en el aspecto profesional para aquellos que se desarrollen en profesiones que tienen que ver con otras personas y sus comportamientos.

También en esta sociedad se debe aprender a convivir, cada vez más se observa la imperiosa necesidad del aprendizaje para la convivencia. Como afirma Emilio García [159], entre otros objetivos, el derecho a la paz es siempre prioritario y también en el siglo XXI, como condición básica para el desarrollo y bienestar personal y social. Es también objetivo prioritario de la educación desarrollar la propia identidad del estudiante y comprender y valorar la personalidad de los demás.

[158] "Aprender a conocer es una exigencia para responder a las demandas prácticas y profesionales de la sociedad cognitiva; pero también es condición imprescindible para desarrollarse con más plenitud como persona, ejercitar las capacidades humanas, disfrutar del saber, dar sentido a la vida. Aprender a conocer supone ejercitar todas las capacidades de la mente: los procesos de atención, percepción, memoria, razonamiento, pensamiento crítico, creatividad, resolución de problemas, lenguaje, motivación, afectividad" (García, 2009:35).

[159] "El descubrimiento, reconocimiento y respeto del otro se logra en paralelo a la conformación de la propia identidad personal. Es objetivo prioritario de la educación desarrollar la propia identidad a la vez que comprender y valorar la personalidad de los demás. Si la familia, escuela, trabajo, medios de masas fomentan actitudes de respeto, tolerancia se están previniendo comportamientos violentos" (García, 2009: 38).

Universidad Pontificia de Salamanca

Para Mayer (1988) el aprendizaje implica tres dimensiones: la adquisición de respuestas, la adquisición de conocimiento y la construcción de significado. Como adquisición de respuestas está ligado al enfoque conductista y domina los años cincuenta. En cuanto adquisición de conocimientos, el aprendizaje queda ligado al enfoque cognitivo que ha dominado el período de los años cincuenta a los sesenta del siglo pasado. Por último, el aprendizaje como construcción de significados, constituye el cambio de los años setenta y ochenta, en el que se concibe al estudiante como un ser autónomo que autorregula sus procesos cognitivos y tiene en sus manos el control del aprendizaje. En el apartado dedicado a la exposición de los diferentes enfoques teóricos tendré oportunidad de explicar estas perspectivas con mayor extensión.

5.2.2.- Características del aprendizaje

El aprendizaje conlleva ciertas implicaciones conductuales, que producen una verdadera transformación en el ser humano. Sin embargo, para que se produzca estos fenómenos de transformación que, en realidad son las consecuencias del aprendizaje, me parece que resulta del mayor interés profundizar en la idea de conocer las características del fenómeno del aprendizaje que permiten incidir en el cambio de la conducta del ser humano. Aprender es una compleja actividad humana de mayor envergadura que el mero recuerdo o memorización de la información habida.

a) Actividades

El aprendizaje actual exige, entre otras, las siguientes actividades humanas [160]: 1) *Conocer la información y el conocimiento disponible* y seleccionarlo (hay mucha información a nuestro alcance: libros, TV, prensa, Internet...) en función de las necesidades del momento. 2) *Analizar, organizar, interpretar y comprender* los conocimientos pertinentes a la situación y aprender a seleccionar lo que puede interesar al objetivo propuesto en la maraña de informaciones existentes. 3) *Sintetizar* la información y los nuevos conocimientos para, integrados con los saberes previos, lograr su "apropiación" e integración en los propios esquemas de conocimiento. 4) *Aplicar* la información y los conocimientos a las situaciones conocidas y de posible aplicación.

[160] Estos cuatro tipos de actividades, que se consideran a continuación, se corresponden con los 6 niveles básicos de objetivos que, según su complejidad cognitiva, considera Bloom (1979): conocer, comprender, aplicar, analizar, sintetizar y valorar.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) Asuntos

El aprendizaje siempre implica asimismo algunos asuntos de notable interés para su comprensión, entre los que han de mencionarse los siguientes: 1) *La recepción de datos*, que supone un reconocimiento y una elaboración semántico-sintáctica de los elementos del mensaje (palabras, iconos, sonido) donde cada sistema simbólico exige la puesta en juego actividades mentales distintas. 2) *La comprensión de la información* recibida por parte de los estudiantes que, a partir de sus conocimientos anteriores, sus intereses (que dan sentido para ellos a este proceso) y sus habilidades cognitivas, analizan, organizan y transforman la información recibida para elaborar conocimientos. 3) *Una retención* a largo plazo de esta información y de los conocimientos asociados que se hayan elaborado. 4) *La transferencia del conocimiento* a nuevas situaciones para resolver las preguntas y problemas que se plateen.

c) Factores a considerar

Para realizar los correspondientes aprendizajes son necesarios tres factores básicos: 1) *Inteligencia*, *otras capacidades* y *conocimientos previos (poder aprender).* Para aprender nuevas cosas hay que estar en condiciones de hacerlo: disponer de las capacidades cognitivas necesarias para ello (atención, interés, proceso...) y de los conocimientos previos imprescindibles para construir sobre ellos los nuevos aprendizajes. También es necesario poder acceder a la información necesaria. 2) *Motivación (querer aprender):* para que una persona realice un determinado aprendizaje es necesario que movilice y dirija en una dirección determinada la energía necesaria para que las neuronas realicen nuevas conexiones entre ellas. La motivación dependerá de múltiples factores personales (personalidad, fuerza de voluntad...), familiares, sociales y del contexto en el que se realiza el estudio (métodos de enseñanza, profesorado...). Son datos contrastados de la experiencia que los estudiantes implicados en los procesos del aprendizaje son más capaces de definir sus objetivos formativos, organizar sus actividades de aprendizaje y evaluar los resultados del aprendizaje; se apasionan más por resolver los problemas (transfieren el conocimiento de manera creativa) y en comprender y avanzar autónomamente en los aprendizajes durante toda la vida. 3) *Experiencia (saber aprender):* los nuevos aprendizajes se van construyendo a partir de los aprendizajes anteriores y también requieren ciertos hábitos y la utilización de determinados instrumentos y técnicas de estudio: 3.1) *instrumentales básicas*: observación, lectura, escritura, 3.2) *repetitivas* (memorizando): copiar, recitar, adquisición de habilidades de procedimiento; 3.3) *de comprensión*: vocabulario,

Universidad Pontificia de Salamanca

estructuras sintácticas; 3.4) *elaborativas* (relacionando la nueva información con la anterior): subrayar, completar frases, resumir, esquematizar, elaborar diagramas y mapas conceptuales, seleccionar, organizar; 3.5) *exploratorias*: explorar, experimentar; 3.6) *de aplicación de conocimientos* a nuevas situaciones, creación; 3.7) *regulativas* (metacognición): analizando y reflexionando sobre los propios procesos cognitivos.

En el plano académico, el logro del aprendizaje, es decir, la obtención de la meta del proceso de enseñanza-aprendizaje exige todas estas características y factores, que ha de poner en juego el estudiante, sin embargo en cada factor también interviene el docente. Es el primero que ha de motivar y ha de presentar el material de forma comprensible; el profesor ha de relacionar los conocimientos con lo anterior y debe establecer una serie de estrategias para que el alumno pueda llegar a los objetivos prefijados. Estas estrategias se deciden a partir de la concepción que tenga el docente acerca del aprendizaje. Se pueden recoger una serie de aspectos que se integran en el proceso del aprendizaje: adquisición de información, comprensión de esta y transferencia de lo aprendido (Méndez, 2011: 165).

5.2.3.- Aportaciones teóricas sobre el aprendizaje

Una teoría de aprendizaje es un conjunto de principios mediante los que se pretende explicar los cambios que tienen lugar en el comportamiento humano, proporcionando un conjunto de estrategias instructivas, estableciendo cómo y cuándo integrar y utilizar esas estrategias y previendo sus resultados. Durante el siglo XX han sido tres las escuelas que han tenido una mayor influencia en la educación: conductivismo, cognitivismo y constructivismo. A cada una de las cuales se solapa un marco conceptual del aprendizaje y la estrategia correspondiente a la práctica educativa. Desde la perspectiva filosófica destacan dos enfoques básicos que prevalecen en el decurso del desarrollo de la cultura y la ciencia desde la Grecia Clásica hasta la Modernidad: el racionalismo, para el que la razón es el origen del conocimiento (Platón, Descartes y Kant) y el empirismo, cuya fuente de conocimiento es la experiencia (Aristóteles, Hume, Locke). En el comienzo de los estudios psicológicos del aprendizaje, Wundt, W. puso en marcha los procedimientos experimentales para la adquisición y perfeccionamiento del conocimiento. A finales del siglo XIX, Titchener empleó los avances de Wundt y fundó el estructuralismo, combinación del asociacionismo con el método experimental, para el estudio de la estructura de los

Universidad Pontificia de Salamanca

procesos mentales, mediante la introspección. Como respuesta al estructuralismo, surge el funcionalismo, cuyo representante importante es William James. En 890 definió la conciencia como un proceso continuo antes que un agrupamiento de piezas separadas de información, cuya función era ayudar a los organismos a adaptarse a su ambiente. Dewey ya en el siglo XX defendía la imposibilidad de separar los procesos psicológicos en partes, necesidad de considerar la conciencia en forma holística. Dewey defendió siempre la importancia de la psicología para la educación y asumía la experimentación psicológica de aplicación a la vida cotidiana. En este contexto se produjo el ascenso del conductismo.

a) El conductismo se inició en 1913 con John B. Watson (1878-1958). Para el autor, la psicología debía ser el estudio del comportamiento de la mente, de esta forma la psicología habría de atenerse a las exigencias científicas y su objeto era el estudio de cómo los animales se ajustan a su ambiente, ofreciendo una respuesta para pronosticar el estímulo y su efecto, para predecir la conducta mediante el conocimiento de sus causas. En 1914 publica su primer libro, Behavior: An introduction to comparative psychology, en el que trata de demostrar el carácter científico de la psicología animal, porque cuenta con conocimientos experimentales suficientes. En 1919 amplió las técnicas a los estudios de psicología humana. Se le ha criticado el escaso énfasis que dio al aprendizaje para describir la conducta, aspecto que se había recalcado en los primeros años del conductismo. Sin embargo, este reduccionismo basado en la relación estímulo-respuesta ha servido para explicar la relación entre medio ambiente y comportamiento. A partir de estos supuestos, proliferan de 1930 a 1950 una “era de la teorías” entre los que destacaron Hull, Tolman, Guthrie y Skinner. Tolman, calificado como el iniciador del cognitivismo, defiende que entre estímulo y respuesta interactúan expectativas y creencias, propósitos y cogniciones. Guthrie formuló el principio de aprendizaje basado en la simple contigüidad estímulo-respuesta. Hull se convierte en el teórico del refuerzo, entendido como reducción del impulso, aunque también se ocupará del estudio de las variables intervinientes (Méndez, 2011: 168-170).

Skinner busca hacer una ciencia “objetiva” de la conducta e intentó analizar todas las variables como parámetros físicos. Entendía la psicología como una rama de la física y el comportamiento como un cálculo probabilística: “los humanos pueden hacer selecciones y desean hacerlas, significa simplemente que una situación en la cual hay dos o más respuestas igualmente probables puede ser aversiva, y que cualquier

Universidad Pontificia de Salamanca

comportamiento de toma de decisiones que fortalezca una respuesta y haga improbable otra, recibe refuerzo" (Skinner, 1974: 104). En otro lugar escribe "la probabilidad de respuesta es un dato difícil. Evitaremos tocar cuestiones discutibles, pasando de inmediato a una medición práctica: la frecuencia con que se emite una respuesta" (Skinner, 1969:73). Esta teoría hoy día es compartida por químicos tan eminentes como Atkins o físicos como Penrose. Killeen (1988) hizo un esfuerzo por mostrar cómo las leyes del aprendizaje no son sino una aplicación al ámbito de la conducta de las leyes que rigen el movimiento de los objetos en la mecánica newtoniana. Los estímulos para Killeen son configuraciones de energía medibles. Por consiguiente, en esta perspectiva se concibe el aprendizaje como un conjunto de conexiones entre los estímulos y las respuestas. El conocimiento es fruto de las asociaciones entre los estímulos que se captan. Se forman los reflejos condicionados por medio de mecanismos de estímulo-respuesta-refuerzo. Es el condicionamiento operante. Además se observa que las acciones que reciben estímulos positivos tienden a ser repetidas. "Toda consecuencia de la conducta que sea recompensante o, para decirlo más técnicamente, reforzante, aumenta la probabilidad de nuevas respuestas" (Skinner, 1969: 74)

El conductismo asumió dos principios del: el de equipotencialidad y el de correspondencia. El primero consiste en que las leyes físicas se aplican a todos por igual y el segundo, reflejo del principio de conservación de la energía, consiste en que la conducta debe ser un reflejo preciso de los cambios estimulares. El aprendizaje basado en este paradigma sugiere medir la efectividad en términos de resultados, es decir, del comportamiento final, por lo que está condicionada por el estímulo inmediato ante un resultado del alumno, con objeto de proporcionar un refuerzo de cada una de las acciones del mismo. A la vez, se desarrollan modelos de diseño de la instrucción basados en el conductismo a partir de los trabajos de otros autores que estructuran y secuencian los contenidos de la enseñanza [161].

---

[161] Críticas al conductismo: 1) determinados tipos de aprendizaje solo proporcionan una descripción cuantitativa de la conducta y no permiten conocer el estado interno en el que se encuentra el individuo ni los procesos mentales que podrían facilitar o mejorar el aprendizaje. ") Se critican los principios conductistas: el aprendizaje está condicionado por el estímulo, pero también se acepta de forma casi universal que existen otras muchas variables que afectan al aprendizaje. Es de experiencia cotidiana que a iguales estímulos no se obtienen modificaciones idénticas en la conducta de los sujetos debido a que el aprendizaje depende de múltiples factores. 3) Crítica a la concepción del aprendizaje: está aceptado que el aprendizaje tiene que ver con cambios conductuales, sin embargo, es una dimensión esencial en el aprendizaje la adquisición de conocimientos.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) El cognitivismo entiende el aprendizaje como el proceso de adquisición de conocimientos. Esta teoría surgió, con la crisis del conductismo, a partir de los años sesenta y cambia el modo de entender los procesos del aprendizaje. El aprendizaje pasa a ser considerado en términos de estructuras internas y el interés hacia los cambios conductuales se afianza como índices de procesos internos. En el enfoque cognitivo, el aprendizaje parece reducirse a la información, se pretende identificar, representar y justificar la cadena de procesos mentales que arrancan en la motivación y percepción de la información y terminan con la recuperación del material y su correspondiente realimentación. El profesor es un transmisor de conocimientos y el foco de la instrucción reside en la información, que se recoge en el currículum [162].

Los sistemas cognitivos no sólo responden al cambio actual sino también a los cambios pasados, por lo que para comprender el aprendizaje será necesario situarnos en una perspectiva histórica. Sin embargo, la psicología cognitiva se alejó de ese análisis histórico, puesto que, en ese caso, se reduciría a la información extraída de esos cambios por medio de cálculos estadísticos. En el funcionalismo computacional, la información es una medida puramente formal de la probabilidad de un suceso en presencia de otro, es una función matemática. La información requiere un código digital para realizar los cómputos. La psicología cognitiva necesita disponer de un código computacional. "El lenguaje proposicional es tan poderoso que podemos utilizarlo prácticamente para formular cualquier conducta, prediciendo cualquier resultado experimental o su opuesto. El sistema representacional humano no es limitado, pero el sistema representacional proposicional no tiene por qué serlo en principio" (Kosslyn y Pomerantz, 1977: 62)

[162] El pensamiento real es "un proceso, ocurre, deviene, en resumen, está en cambio continuo en tanto haya una persona que piense. A cada paso ha de tomar en cuenta el contenido…las formas son uniformes y en ellas puede tener cabida cualquier materia, sea la que fuere, no presenta atención al contexto. Por su parte, el pensamiento real hace siempre referencia a algún contexto. Tiene siempre origen en alguna situación inestable que queda fuera del pensamiento. La educación tiene que ver ante todo con el pensamiento tal como ocurre realmente en los seres humanos individuales. Su propósito es crear actitudes favorables al pensamiento eficaz. …el tratamiento formal no carece de valor educativo, a condición de que se lo ponga y mantenga en su lugar. Este lugar es el que se sugiere cuando se le da el nombre de producto. Propone formas dentro de las cuales se vierte el resultado del pensamiento real a fin de facilitar la comprobación de su valor" (Dewey, 1993: 78-79).

Universidad Pontificia de Salamanca

La teoría del procesamiento de la información está influida por los estudios cibernéticos de los años cincuenta y sesenta, presenta una explicación sobre los procesos internos que se producen durante el aprendizaje de forma análoga al comportamiento computacional. Considera la captación y el filtro de la información a partir de sensaciones y percepciones obtenidas al actuar con el medio, el almacenamiento momentáneo en los registros sensoriales y de entrada en la memoria a corto plazo, donde si se mantiene la actividad mental centrada en esta información, se realiza un conocimiento y codificación conceptual. La organización y almacenamiento definitivo en la memoria a largo plazo, donde el conocimiento se organiza en forma de redes. Desde aquí la información podrá ser recuperada cuando sea necesario.

c) La teoría del aprendizaje por descubrimiento formulada por Bruner, concibe el aprender como un proceso activo y social, en el cual los estudiantes construyen nuevas ideas basadas en el conocimiento actual. El estudiante selecciona la información, origina hipótesis y toma decisiones en el proceso de integrar experiencias en sus construcciones mentales existentes. El instructor ha de animar y motivar a los estudiantes a que descubran principios por sí mismos. Los maestros proporcionan las situaciones problemáticas que estimularán a los estudiantes a descubrir por sí mismos la estructura del material de la asignatura. En este caso, estructura se refiere a la información esencial. Los hechos específicos y los detalles no tienen por qué ser parte de la estructura. Bruner (1981) cree que el aprendizaje en el salón de clases puede tener lugar inductivamente (pasar de los detalles y los ejemplos hacia la formulación de un principio general). En el aprendizaje por descubrimiento, el maestro presenta ejemplos específicos y los estudiantes trabajan así hasta que descubren las interacciones y la estructura del material. El estudiante captará mejor las ideas si es capaz de jerarquizarlas.

En el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, el maestro organiza la clase de manera que los estudiantes aprendan a través de su participación activa. "El niño no podría lograr estos prodigios de adquisición del lenguaje si al mismo tiempo no tuviera una única y predispuesta capacidad para el aprendizaje del lenguaje" (Bruner, 1981: 21). Usualmente, se hace una distinción entre el aprendizaje por descubrimiento, donde los estudiantes trabajan en buena medida por su parte y el descubrimiento guiado por el

Universidad Pontificia de Salamanca

profesor que proporciona dirección [163]. En la mayoría de las situaciones, es preferible usar el descubrimiento guiado. Se les presenta a los estudiantes preguntas intrigantes, situaciones ambiguas o problemas interesantes. En lugar de explicar cómo resolver el problema, el profesor proporciona los materiales apropiados, alienta a los estudiantes para que hagan observaciones, elaboren hipótesis y comprueben los resultados.

Ventajas que Bruner señala como importantes: la independencia en los primeros años de la escuela; animar a los estudiantes a resolver problemas; un aprendizaje flexible y exploratorio; la curiosidad de los niños; minimizar el riesgo del fracaso y dar relevancia al aprendizaje. *Como aspectos destacados de la teoría,* Bruner apunta cuatro dimensiones: predisposición a aprender; estructurar los conocimientos para mejor asimilarlos; idear secuencias eficaces para presentar el material y establecer pasarelas de recompensas a castigos (Méndez, 2011: 172-173).

d) La teoría constructivista de Piaget. Se ha reiterado de variados modos que la *teoría constructivista,* en sentido estricto, no es una teoría, sino más bien un marco explicativo que integra aportaciones diversas en torno a los principios constructivistas. Esta concepción del aprendizaje y de la enseñanza parte del hecho de que la escuela hace accesible a sus alumnos aspectos de la cultura que son fundamentales para su desarrollo personal, no sólo en el ámbito cognitivo. Parte también de un consenso bastante generalizado, el carácter activo del aprendizaje, lo que lleva a aceptar que éste es fruto de una construcción personal, en la que no interviene sólo el sujeto que aprende.

En esta perspectiva el conocimiento es construido activamente por el individuo, ubicado en un contexto y basado en la interpretación de la experiencia y en las estructuras de conocimiento previas. Cuando los estudios se realizan desde una perspectiva que contempla la validez ecológica de sus resultados, se atiende a la naturaleza distribuida de la cognición. En entornos de aprendizaje naturales, los procesos y productos cognitivos se comparten entre los individuos, en un contexto poblado de intenciones, actitudes, ideas e instrumentos.

[163] Para resolver problemas, los estudiantes deben emplear tanto el pensamiento intuitivo como el analítico. El maestro *guía* el descubrimiento con preguntas dirigidas y proporciona retroalimentación acerca de la dirección que toman las actividades. La retroalimentación debe ser dada en el momento óptimo, cuando los estudiantes pueden considerarla para revisar su abordaje o como un estímulo para continuar en la dirección escogida. Se deben hacer referencias a los conocimientos adquiridos en otros momentos de forma asidua.

Universidad Pontificia de Salamanca

Los niveles cognitivos del constructivismo de Jean Piaget (1896-1980), constituye el paradigma explicativo dominante en los campos relacionados con el aprendizaje, el desarrollo y la educación. En este paradigma es el aprendiz quien toma la responsabilidad de construir significados, pero no en soledad sino a través de la interacción, tanto con el docente como con sus pares. Piaget presenta los siguientes niveles cognitivos:

De 0 a 2 años: Inteligencia práctica.
De 2 a 7 años: Inteligencia concreta.
De 7 a 11 años: Inteligencia lógica.
De 12 en adelante: Inteligencia abstracta o pensamiento lógico.

Según este enfoque, la manera de pensar de una persona está casi totalmente formada a los 16 años. Después de esta edad, las estructuras cognitivas no sufren modificaciones adicionales. Otros estudios, sin embargo, parecen demostrar que sólo después de los 21 años, una gran mayoría de personas logra el nivel de operaciones formales e incluso, algunos individuos pueden no llegar a este período nunca.

Los mecanismos de adaptación, según Piaget (1961), son dos: la asimilación y la acomodación. La adaptación es un doble proceso a través del cual la persona crea nuevas estructuras para relacionarse de forma eficaz con el mundo circundante e incluye tanto la asimilación como la acomodación, las cuales constituyen la esencia del comportamiento inteligente. *La asimilación es el entendimiento de un nuevo objeto*, experiencias o conceptos, dentro de un conjunto de esquemas actuales existentes, en los que incorporamos las percepciones de las nuevas experiencias. *La acomodación es el proceso por el cual se modifican las acciones para manejar nuevos objetos y situaciones*. Tratamos de modificar los marcos de referencia actuales a las características de las percepciones. Se considera que el objetivo más importante del aprendizaje en el proceso cognitivo es la comprensión, no los comportamientos observables que pueden medirse [164].

No solo el progreso de la asimilación es correlativo al de la acomodación, sino que hace posible la objetivación gradual de la inteligencia misma (Piaget, 1961: 310). La comprensión, como señalan Di Vesta y Rieber (1987), es un objetivo efectivo de la

[164] "La inteligencia constituye una actividad organizadora, cuyo funcionamiento prolonga el de la organización biológica, superándolo gracias a la elaboración de nuevas estructuras…si las estructuras sucesivas debidas a la actividad intelectual se diferencian entre sí cualitativamente, obedecen siempre a las mismas leyes funcionales"(Piaget, 1961: 306).

Universidad Pontificia de Salamanca

educación. Si el docente identifica las estructuras de conocimiento previo del aprendiz, puede evaluar y predecir la forma en que va a asimilar la novedad presentada. La esencia de estos supuestos es que el aprendizaje implica la asimilación de hechos como un proceso coadyuvante que, a su vez, promueve la construcción de estructuras plenas de uso y de significado.

La contribución más importante de las teorías del aprendizaje cognitivas y constructivistas para la educación consiste en sostener que el aprendizaje es un proceso activo, comprometido y pleno de significado. Winn (1990) sugiere que para el logro de una instrucción satisfactoria lo más importante es el monitoreo del proceso y la adecuación constante a los impredecibles cambios en el pensamiento y conducta de los estudiantes. Los aprendices deben ser activamente estimulados a integrar la nueva información en las estructuras existentes. El aprendizaje contribuye al desarrollo en la medida en que aprender no es copiar o reproducir la realidad. Para los constructivistas aprendemos cuando somos capaces de elaborar una representación personal sobre el objeto de la realidad o el contenido que se pretende aprender. Esto implica que el fin de aprehender no es una aproximación vacía, desde la nada, sino desde las experiencias, intereses y conocimientos previos.

En síntesis, desde esta concepción se asume que en la escuela los alumnos aprenden y se desarrollan en la medida en que pueden construir significados adecuados sobre los contenidos que configuran el currículum escolar. Esta construcción está compuesta por una aportación activa del alumno, sus conocimientos previos en una situación interactiva, en la que el profesor actúa de guía y de mediador entre el estudiante y la cultura, de esa mediación depende en parte el aprendizaje que se realiza. Los contenidos del aprendizaje se extienden a todas las capacidades en el desarrollo global del alumno. Desde la perspectiva del constructivismo de Piaget, el aprendizaje es fundamentalmente un asunto personal. Existe el individuo con su cerebro cuasi-omnipotente, generando hipótesis, usando procesos inductivos y deductivos para entender el mundo y poniendo estas hipótesis a prueba con su experiencia personal. El motor de esta actividad es el conflicto cognitivo. Una fuerza de la naturaleza llamada "deseo de saber" nos empuja a encontrar explicaciones al mundo que nos rodea. El individuo no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día a día como resultado de la interacción entre los aspectos cognitivos y sociales del

Universidad Pontificia de Salamanca

comportamiento y los afectivos. Esta concepción del aprendizaje es un elemento útil a la hora de crear dinámicas de equipo entre los profesores y de asesoramiento. No es un marco excluyente sino abierto a todas las formas de trabajar por parte de los docentes. Se parte de lo que se posee y entiende y, desde ese punto de partida se puede ir progresando.

e) La teoría del constructivismo social. El representante primero y más conocido fue el filósofo ruso Lev Vygotsky (1896-1934). A partir de él se han desarrollado diversas concepciones sociales sobre el aprendizaje. Para esta perspectiva, es fundamental considerar al individuo como el resultado del proceso histórico y social donde el lenguaje desempeña un papel esencial. Para Vygotsky (1978), el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, el medio entendido como algo social y cultural, no solamente físico. Rechaza los enfoques que reducen el aprendizaje a una simple acumulación de reflejos o asociaciones entre estímulos y respuestas. No niega la importancia del aprendizaje asociativo pero considera que es insuficiente. Acepta, como también constata Piaget, que la inteligencia pasa por diferentes estadios y la diferencia entre un estadio y otro no es problema de mera acumulación de requisitos sino que existe una estructura completamente distinta que sirve para ordenar la realidad.

Semejanzas y diferencias entre Lev Vygotsky y Jean Piaget: El conocimiento es producto de la interacción social y cultural, Piaget nunca negó la importancia de los factores sociales en el desarrollo de la inteligencia, si bien es verdad que no se centró en el estudio de estos aspectos. Vygotsky concibió al sujeto como un ser social. Desde sus concepciones alcanza a afirmar que los procesos psicológicos superiores se adquieren primero en un contexto social y se interiorizan. Esta interiorización es producto del uso de un determinado comportamiento cognitivo en un contexto social. Es la zona de desarrollo próximo que representa la gama de tareas que el estudiante no puede hacer solo. Las tareas que están por debajo de esta zona pueden ser llevadas a cabo de manera autónoma por parte del niño. Las tareas que están por encima de la zona de desarrollo próxima no las puede realizar incluso con ayuda.

Para Vygotsky el aprendizaje y el desarrollo constituyen un proceso dinámico e interactivo: el aprendizaje no es el desarrollo. Sin embargo, un aprendizaje debidamente organizado resulta del desarrollo mental y pone en movimiento una variedad de procesos de desarrollo que no serían posibles si no es por el aprendizaje. Así, el aprendizaje es una parte necesaria y un aspecto universal del proceso de desarrollar las

Universidad Pontificia de Salamanca

funciones psicológicas culturalmente organizadas y específicamente humanas. En otras palabras, el aprendizaje conduce al desarrollo; las experiencias que los niños tienen, influyen en su desarrollo. Por eso es importante que los maestros y los padres ofrezcan experiencias de aprendizaje de alta calidad a los niños.

La intersubjetividad se basa en la idea de que los individuos llegan a una tarea con sus propias formas subjetivas de darle sentido. Si discuten sus diferentes puntos de vista, el entendimiento compartido podrá alcanzarse. En otras palabras, en el curso de la comunicación, los participantes pueden llegar a un entendimiento mutuamente acordado o intersubjetivo. Muchas prácticas actuales, tales como el aprendizaje colaborativo, la solución conjunta de problemas, la preparación, la colaboración, la ayuda del mentor y otras formas de aprendizaje asistido están basadas en la teoría de Vygotsky sobre el desarrollo del aprendizaje (Méndez, 2011: 173 - 182).

Cuadro 5.1:Comparativos de las aportaciones sobre el aprendizaje de Piaget y Vygotsky

Posición de Piaget	Posición de Vygotsky
El cambio se promueve a partir del individuo.	El cambio se promueve a partir del medio social.
El pensamiento viene originado por la acción y precede al lenguaje.	Se construye el lenguaje en el exterior y luego el pensamiento en el individuo.
La educación genera desequilibrios cognitivos que causarán el mecanismo de aprendizaje, la equilibración.	La educación debe potenciar la zona de desarrollo próximo.
El sujeto construye sus significados de forma autónoma e incluso, a veces, autista.	Los significados proceden del medio social externo pero deben ser interiorizados.
El desarrollo precede al aprendizaje y lo explica.	El aprendizaje antecede y explica el desarrollo.
El desarrollo mental es un progresivo equilibrarse, un paso continuo de desequilibrio a equilibrio.	Existe una relación entre el nivel de desarrollo y la capacidad potencial del aprendizaje.
Propuso una psicología evolutiva. Establece un paralelismo entre adaptación al medio y conocimiento de la realidad.	Propuso la reorganización de la psicología para estructurar una teoría científica de la mente. Destaca el trabajo para realizar un salto cualitativo de lo biológico a lo social.

Fuente: Elaboración propia a partir de AA.VV. de la Escuela de Educación de la Universidad Central de Venezuela (2005) Tomado de Méndez, D., (2011). (Consulta 24/ enero/ 2013).

Universidad Pontificia de Salamanca

Como puede observarse, Vygotsky concibe, al igual que Piaget, la coherencia entre el aprendizaje y el nivel de desarrollo del niño, otro aspecto diferente es que Vygotsky señale el propósito de la educación en la identificación de las tareas en las que el alumno necesita ser ayudado. De ahí, propone que el aprendizaje se facilita en situaciones colectivas que promueven conductas de imitación, además de que la interacción con los compañeros facilita el aprendizaje por dos razones fundamentales: la necesidad de verificar el pensamiento surge en situaciones de discusión y la capacidad del niño para controlar su propio comportamiento nace en situaciones de discusión. En todo caso se requiere la interacción.

f) *La perspectiva de la asimilación de* Ausubel parte de la crítica al aprendizaje tradicional por su condición de memorístico. Entre los argumentos que emplea está que gran parte de la información degenera en memorismo pero este resultado no es inherente al método en sí mismo, sino al mal uso que se hace de él. Ausubel presentó por primera vez su teoría del aprendizaje significativo en 1962, con el título de *"Una teoría de la inclusión del aprendizaje y la retención significativos"*(1976), que fue gestando durante el apogeo del paradigma conductista (Méndez, 2011:180)

1) Para Ausubel el aprendizaje es significativo, es decir, constituye un proceso en el que se relaciona la nueva información con algún aspecto relevante existente en la estructura cognitiva de la persona. Sin embargo, el aprendiz debe elegir hacer esto. El profesor puede fomentar que lo elija mediante el empleo de algunas herramientas. Los requisitos del aprendizaje significativo son el conocimiento previo relevante del aprendiz, los materiales significativos y que el aprendiz decida utilizar el aprendizaje significativo y no el memorístico. Este aprendizaje produce cambios constructivos en las redes neuronales. El papel del profesor se ciñe a promover un tipo de aprendizaje y evitar el otro, además de seleccionar los materiales y evaluar el conocimiento previo. Manifiesta el autor que ha de evitarse el aprendizaje memorístico debido a que es más propenso al olvido y a las interferencias entre conceptos. En cambio el significativo construye la estructura cognitiva.

En cuanto a las características más importantes que Ausubel atribuye a este tipo de aprendizaje se han de mencionar las siguientes:

La inclusión, es decir, los conceptos que se aprenden se van vinculando con otros conceptos, más generales o previamente aprendidos.

Universidad Pontificia de Salamanca

La inclusión obliterativa: el olvido es un fenómeno de gran interés para la psicología de la educación, se ha llegado a la conclusión de que es rápido al aprender algo sin sentido. La tasa de olvido depende fundamentalmente del grado de significatividad asociado al proceso de aprendizaje. Al transcurrir el tiempo, la información puede incorporar atributos al concepto o a los conceptos inclusores, ahí se produce la inclusión obliterativa, los mensajes específicos no son recuperables pero las estructuras cognitivas permanecen y se han mejorado.

La diferenciación progresiva: a medida que va adquiriendo información con un grado de significatividad, las estructuras cognitivas van proliferando y la facilidad de adquirir nuevos conocimientos aumenta de forma rápida. Por tanto, cada vez la diferencia entre el aprendizaje memorístico y el significativo se hace mayor.

La reconciliación integradora: al modificar las estructuras cognitivas y relacionar los nuevos conceptos, se va realizando una integración de los nuevos conceptos ya que se van relacionando con los anteriores.

El aprendizaje supraordenado: al integrar los nuevos conceptos se realiza una jerarquía y se establece una ordenación de éstos dentro de los conceptos previamente adquiridos.

Organizadores previos: Ausubel propuso que antes de la unidad de instrucción más amplia se ofreciera un pequeño segmento de instrucción que fuera más general y abstracto. Esta instrucción sirve de organizador previo para que el aprendiz relacione el nuevo conocimiento con el que ya posee. Estos organizadores previos son una estrategia de instrucción. Dewey y Piaget habían reconocido que en la infancia el *conocimiento significativo* es consecuencia de la experiencia directa y el contacto con la realidad empírica. Una generalización indebida del empirismo ha llevado a consolidar la falsa idea de que en cualquier edad y bajo cualquier circunstancia el saber reflexivo, para ser significativo, debe apoyarse en la experiencia empírico-concreta.

Cuadro 5.2: Concepciones sobre los procesos de aprendizaje

CONCEPCIONES	LEYES, PROPUESTAS...
La perspectiva conductista. Wundt y Watson, B.F.Skinner, estudios psicológicos de Pavlov y Thorndike	- **Condicionamiento operante**. Aprendizaje = conexiones entre estímulos y respuestas. - **Ensayo y error con refuerzos y repetición**: las acciones con refuerzo positivo son repetidas.

Universidad Pontificia de Salamanca

sobre el refuerzo.	- **Se establecen asociaciones** entre estímulos. - **Enseñanza programada.** Los contenidos están muy estructurados y secuenciados.
Teoría del procesamiento de la información (Phye). Influida por los estudios cibernéticos de los años cincuenta y sesenta.	- **Captación y filtro** de la información a partir de las sensaciones y percepciones obtenidas. - **Almacenamiento momentáneo** en los registros sensoriales y entrada en la memoria a corto plazo. - **Organización y almacenamiento definitivo.** El conocimiento se organiza en forma de redes.
Aprendizaje por descubrimiento. J. Bruner	- **Experimentación directa** sobre la realidad. - **Aprendizaje por penetración comprensiva.** El alumno comprende lo que es relevante, las estructuras. - **Práctica de la inducción**. - **Utilización de estrategias heurísticas**. - **Currículum en espiral**: revisión y ampliación periódica los conocimientos adquiridos.
Aprendizaje significativo (D. Ausubel, J. Novak)	**- Condiciones para el aprendizaje:** significabilidad lógica (se puede relacionar con conocimientos previos), significabilidad psicológica (adecuación al desarrollo del alumno) y actitud activa y motivación. - **Relación de los nuevos conocimientos con los saberes previos.** - **Utilización de organizadores previos**. **- Diferenciación-reconciliación integradora** que genera una memorización comprensiva. **- Funcionalidad de los aprendizajes.**
Enfoque cognitivo. Psicología cognitivista. El cognitivismo (Merrill, Gagné...) aparece en la década de los sesenta.	**- El aprendizaje es un proceso activo.** El aprendizaje consiste en la adquisición y representación exacta del conocimiento externo. - **Condiciones internas**: motivación, captación y comprensión, adquisición, retención. - **Condiciones externas**: son las circunstancias que rodean los actos didácticos.
Constructivismo. J.	- **Considera tres estadios de desarrollo cognitivo**

Universidad Pontificia de Salamanca

Piaget Aprender es transformar el conocimiento. El constructivismo considera que *el aprendizaje es una interpretación personal del mundo.*	**universales**: sensoriomotor, estadio de las operaciones concretas y estadio de las operaciones formales. **- Construcción del propio conocimiento mediante la interacción** constante con el medio. **- Reconstrucción de los esquemas de conocimiento.** El desarrollo y el aprendizaje se produce a partir de la secuencia***:*** ***equilibrio - desequilibrio – reequilibrio***.
Socio-constructivismo. Basado en las ideas de Vygotski.	- **Importancia de la interacción social**. Aprender significa "aprender con otros". - **Incidencia en la zona de desarrollo próximo** Actualmente el **aprendizaje colaborativo y el aprendizaje situado,** todo aprendizaje tiene lugar en un contexto.

Fuente: Elaboración a partir de Pere Marqués http://www.pangea.org/peremarques.html . Tomado de Méndez, D. (2011). (Consulta: 24/ enero/ 2013)

5.2.4.- A modo se síntesis

En el precedente apartado se han tratado tres asuntos: definición, estructura y aportaciones teóricas sobre el aprendizaje. 1) La noción conceptual del aprendizaje se elaboró desde la perspectiva del cambio que se produce en la conducta o en la potencialidad de la conducta, cambio producido por algún tipo de práctica o ejercicio y cambio duradero. Esto equivale a decir que el aprendizaje es una variable hipotética, un constructo invisible que enlaza dos variables – práctica y ejecución - dejando en la oscuridad la naturaleza de los procesos de aprendizaje. En la sociedad del conocimiento, la educación ha de enfrentar el gran reto de aprender a conocer, aprender a querer y sentir, aprender a hacer, aprender a convivir, aprender a ser. En este escenario social los cambios más obvios afectarán al ámbito educativo, a fin de capacitar a que el individuo construya el diseño de su propia formación, insertándola en su currículo profesional. La adquisición de conocimientos exige interés, capacidad, esfuerzo, y recursos, pero es

Universidad Pontificia de Salamanca

algo valioso y progresivamente se constituye en elemento diferenciador entre los individuos y entre los pueblos.

2) En la estructura del aprendizaje se destacaron tres dimensiones: las actividades relevantes que se resumen en conocer información y conocimientos, analizar y organizar, sintetizar y aplicar. La otra dimensión se refiere a los asuntos que dan contenido al aprendizaje: la recepción de los datos, la comprensión de la información, la retención a largo plazo y la transferencia del conocimiento. Entre los factores del aprendizaje a considerar, me he fijado en la inteligencia para poder aprender, la motivación para querer aprender y la experiencia para saber aprender.

3) El último asunto tratado en este apartado primero del capítulo se centró en las teorías del aprendizaje. Únicamente se mencionarán, sin entrar en síntesis apresuradas, que podrían interpretarse como infravaloración a los autores que no es mi caso. Estimé, entre otras, que son aportaciones teóricas importantes: el conductismo y el cognitivismo, la teoría del aprendizaje por descubrimiento formulada por Bruner, la teoría constructivista de Piaget, la teoría del constructivismo social, cuyo representante primero y más conocido fue el filósofo ruso Lev Vygotsky y la perspectiva de la asimilación de Ausubel.

5.3.- EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En relación con el aprendizaje de las matemáticas en la actualidad y desde diferentes instancias se acentúa la importancia de que la enseñanza de las matemáticas se apoye en contextos cercanos al alumnado y a su entorno cotidiano, contextos que tengan sentido para el estudiante de matemáticas, no solo como exigencia motivadora de un aprendizaje colectivo, sino también "como medida correctora de un tratamiento tradicionalmente demasiado formalizado y descontextualizado de las matemáticas escolares (…) Escenarios con problemas, más que problemas sin escenario; entornos cotidianos, ambientes atractivos, realidades cercanas o ficciones sugerentes que susciten curiosidad en el alumnado (…) Este sistema de trabajo fomenta la cooperación, favoreciendo el aprendizaje colectivo y democratiza un poco la clase de Matemáticas, valorando las diferentes formas de resolver un problema y modificando el rol del profesor, que pasa de ser un mero transmisor de conocimientos a moderador,

Universidad Pontificia de Salamanca

dinamizador, intérprete y crítico de la situación" (Barreras, 2012: 69-70). Sería interesante aprovechar la gran dependencia que la juventud mantiene en la actualidad respecto de la música, para revitalizar el vínculo, que de antiguo vincula las matemáticas con la música. No en vano se atribuye a Pitágoras el mérito de haber sido el primero en observar que la buena armonía sonora entre las notas dependía de relaciones de proporción matemática no muy complicada. Entre los clásicos, "ha habido compositores como Bach, Bartók o Schönberg que han aplicado explícitamente las matemáticas en sus composiciones. Mózart, además de jugar con giros y simetrías en algunas obras, llegó a diseñar un método para la composición de minuetos, mediante lanzamiento de dados" (Jareño, 2012:72).

En la sociedad globalizada del conocimiento es obvio que se requieren conocimientos, pero también es necesario saber utilizar esos conocimientos en los contextos de la vida cotidiana, es decir, se necesita también aprender a hacer, una adaptabilidad a los contextos tan cambiantes en nuestras sociedades avanzadas. Se requieren nuevas competencias, en la sociedad actual se precisa tomar decisiones, evaluar procesos, introducir mejoras, entender los medios y la información que transmiten. Estamos sumergidos en un océano de información sobre cualquier cosa que sea necesaria y sobre muchas otras cosas que son perfectamente inútiles. En este aspecto, la sociedad actual está sesgada hacia la información icónica o en imágenes armonizadas. Teniendo en cuenta la gran afición de la juventud y de los adolescentes hacia la música, sería de interés aprovechar el actual contexto cultural, transido de imágenes armonizadas, para contextualizar el aprendizaje de las matemáticas. Esto requiere un tipo de atención, concentración, planificación, esfuerzo, distinto del requerido en el procesamiento de textos o en la resolución de ejercicios abstractos y problemas matemáticos descontextualizados. Resulta muy difícil que un alumnado, como el integrado en la enseñanza secundaria obligatoria, acceda a una cultura matemática si los profesores y los centros siguen un currículo de matemáticas descontextualizadas: "Deberíamos intentar plantear problemas o investigar situaciones con contexto, que desvelen la matemática oculta, que conecten con el entorno, que descubran las matemáticas de las ciencias, de la tecnología y del arte" (Jareño, 2012: 55).

Universidad Pontificia de Salamanca

5.3.1.- Experiencias de aprendizaje matemático: PISA

En este apartado trataremos de exponer algunas de las experiencias matemáticas que se han adquirido cierta consistencia en las publicaciones sobre la didáctica y el aprendizaje matemático, dan cuenta de resultados en torno a la temática que nos ocupa y tienen cierta relevancia en el área de la educación matemática. A veces se sintetizan resultados sobre el aprendizaje, en otras ocasiones sobre el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y a veces también se refieren a otras dimensiones relacionadas con el proceso del aprendizaje de las matemáticas. Iniciamos esta presentación de experiencias con la presentación de aspectos sustanciales sobre el aprendizaje de las matemáticas que incorpora el proyecto PISA. Seguirán los resultados relativos al proceso del aprendizaje matemático en el dominio de los problemas matemáticos verbales.

a) La perspectiva de PISA

El Proyecto PISA no se apoya en un currículo concreto, sin embargo se sustenta sobre un marco curricular, que se contiene en tres grandes capítulos: ¿por qué enseñar matemáticas?; ¿qué matemáticas enseñar? y ¿cómo enseñar matemáticas? (Rico, 2006:278 – 283)

En cuanto al *por qué se han de enseñar matemáticas*, PISA apunta a la razón última que afecta a la transmisión de la cultura matemática y que determina la sociedad de acuerdo con los objetivos que se marca en un momento histórico determinado. En términos generales, los objetivos suelen estar en consonancia con el nivel cultural, económico y tecnológico disponible y con los propósitos de desarrollo programados de cara al futuro. “El estudio PISA considera que el fin prioritario de la enseñanza de las matemáticas consiste en desarrollar la competencia matemática de los escolares. La funcionalidad del conocimiento matemático, su potencialidad para dar respuesta a los problemas y cuestiones, la competencia de los ciudadanos en el uso cotidiano, social y técnico es la finalidad que PISA considera y estudia” (Rico, 2006: 278).

Respecto de *qué matemáticas enseñar*, PISA estima que son varios los sentidos que puede tener esta materia que se enseña a millones de individuos, en todas las partes del mundo y a cuya función se dedican millares de personas, que cada día preparan el desarrollo teórico y argumental de unos conocimientos, a los que se acompañan de unos ejemplos en orden a la mejor comprensión de este saber, “constituido como herramienta para organizar los fenómenos del mundo natural, social y mental. Procesos tales como

Universidad Pontificia de Salamanca

pensar y razonar mediante conceptos matemáticos, argumentar y justificar, usar el lenguaje simbólico y formal para abstraer relaciones e inferir resultados se sustentan en la consideración funcional de los contenidos matemáticos" (Rico, 2006: 279). Este proceso se considera actualmente de insoslayable importancia para el desarrollo de los pueblos y para la propia ubicación satisfactoria de los individuos en la sociedad. Los conocimientos y habilidades a evaluar no se extraen de los currículos nacionales, más bien son elaborados por expertos que los seleccionan como más necesarios para el funcionamiento correcto de los adultos en su cotidiano devenir.

Por último, en el *cómo enseñar matemáticas*, PISA parte de la suposición de que aprender matemáticas ha de ser un objetivo básico de todo estudiante y el aprender matemáticas se identifica, en este proyecto, con la resolución de problemas, que es un planteamiento heredero de una fecunda tradición, que suele diferenciar una serie de fases en la resolución de los problemas:

Contextualización: el problema ha de situarse en un contexto de realidad.

Organización: el problema se organiza siguiendo pautas matemáticas

Abstracción: es necesario despegarse de la realidad contextual, mediante procesos hipotéticos sobre el problema, en orden a generalizar y formalizar.

Resolución: resolver el problema.

Dar sentido: proveer de significado a la solución en el marco de la realidad contextual (Rico, 2006: 269).

La secuencia de estas fases caracteriza la metodología para la enseñanza de las matemáticas, de cuya perspectiva deriva el modelo funcional del aprendizaje de las matemáticas en el proyecto PISA: primero, unas tareas que emergen de la realidad cotidiana, están contextualizadas y formulan preguntas que demandan respuesta; un segundo elemento, que entra en este modelo, se refiere a los procedimientos o *herramientas conceptuales* de que echar mano, en orden a elaborar las pertinentes respuestas que demandan las tareas. El tercer elemento es obvio: el proyecto PISA determina que los sujetos educandos, los estudiantes, se impliquen en la actuación y pongan en práctica los procesos pertinentes, para alcanzar los resultados proyectados. Esta movilización de los estudiantes ante las tareas y la utilización de las adecuadas herramientas, pone de manifiesto la competencia matemática de los alumnos imbricados en el proceso del aprendizaje y en la generación del conocimiento (Rico, 2006: 280).

Universidad Pontificia de Salamanca

b) Informes Pisa[165] y los resultados

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) [166] realiza cada tres años los informes PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos)[167] que evalúan la competencia lectora, matemática y científica internacionalmente en alumnos de 15 años y que llevan a cabo mediante una evaluación internacional. Cada tres años se centra en evaluar sobre todo una de las tres competencias. Así en el 2000,2009 se centró en la compresión lectora, en el 2003, 2012 se centró en la competencia matemática, 2006 y 2015 se centran y centrará en la competencia científica. Las áreas de contenidos matemáticos en este informe se agrupan: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, probabilidad. Los resultados de PISA se han presentado por medio de escalas con una puntuación media de 500 y una desviación típica de 100.

En cuanto a las matemáticas *establece 6 niveles de competencia matemática*, en los cuales intenta organizar a todos los estudiantes y distribuirlos según los niveles determinados, atendiendo a los conocimientos y competencias demostrados en la evaluación internacional, en este caso, que llevó a efecto el año 2009.

Establece 6 niveles de competencia, cuya descripción aparece en el Cuadro nº 2, que se inserta en la página siguiente.

Cuadro 5.3.- Descripción sintetizada de los niveles de competencia definidos en los informes PISA

NIVELES	DESCRIPCIÓN DE NIVELES DE COMPETENCIA
6	Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar la información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones, así como pasar de una a otra. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales

[165] ANEXOS. Cap. V: ANEXO IV, Informe PISA

[166] Organization for Economic Co-operation and Development

[167] Programme for International Student Assessment

Universidad Pontificia de Salamanca

5	Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	Los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones , argumentos y acciones
3	Los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieran decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	Los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una información directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	Los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que le son conocidos en los que esta presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Fuente: http://iaqse.caib.es/documents/aval2009-10/pisa2009-informe-espanol.pdf (consulta/ 22/ mayo/ 2013)

Descrito el contenido de los niveles competencia que usa PISA para evaluar las posiciones de los países, hechas las evaluaciones correspondientes, en relación con los participantes en las pruebas PISA del 2009, se ofrecen las medias correspondientes a los diferentes países y también sobre las Comunidades Autónomas que participaron. Los que más nos interesan pueden ser los siguientes:

En primer lugar las medias correspondientes a la competencia matemática y señalar el lugar que España ocupa en el concierto de las naciones europeas. En las pruebas de 2009 obtuvo de competencia matemática la *media* 483 puntos, cuando la Media de los países de la OCDE es de 488. Con mejor *media* que nosotros se

Universidad Pontificia de Salamanca

encuentran todos los países de la Unión Europea, a excepción de Italia, Grecia, Rumanía, Bulgaria, Letonia y Lituania. Todos los demás han obtenido una media superior a la nuestra en las pruebas de 2009.

Relacionando la media española con la *media* de las Comunidades Autónomas nos da el siguiente resultado: Castilla y León,514; Navarra, 51; País Vasco, 510; Aragón, 506; La Rioja, 504; Madrid, 496;, Cataluña, 496; Cantabria, 495; Asturias, 494;Galicia, 489. La media española es 483 e inferior a esta las restantes comunidades que han participado en la prueba PISA 2009.

En cuanto a los *niveles de rendimiento en competencia matemática* en los países participantes en PISA 2009, entre los que se encontraba España los resultados son los que siguen: España ocupa en el nivel >1 el lugar 9.1.; en el Nivel 1, el lugar 14.6; en el Nivel 2, el lugar, 23,9 ; en el Nivel 3, el lugar 26,6 ; en el Nivel 4, el lugar 17,7; en el Nivel 5, el lugar 6.7; en el Nivel 6, el lugar, 1.3. En posiciones superiores a la nuestra se colocan los países de la Unión Europea a excepción de Italia, Bulgaria, Rumanía, Grecia, Lituania y Luxemburgo

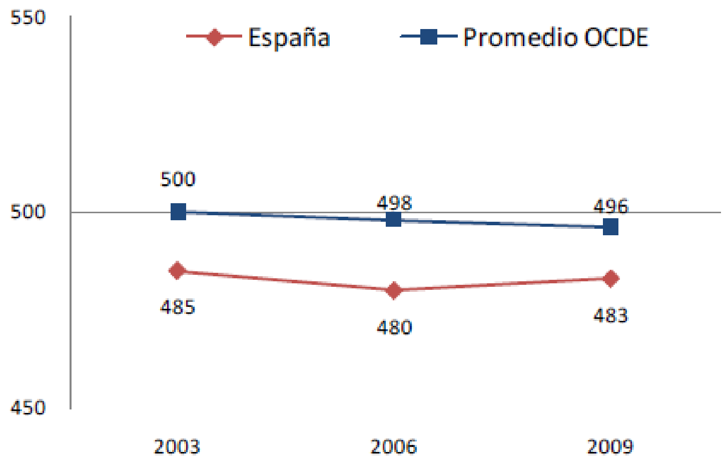
Cuadro 5.4.- Niveles de rendimiento en competencia matemática en las comunidades autónomas participantes en PISA 2009

CCAA	Nivel<1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
País Vasco	5,3	9,6	20,5	28,6	23,2	10,5	2,2
Navarra	5,5	9,6	19,5	27,6	24,3	11,3	2,1
Castilla y León	5,1	10,3	18,6	27,5	23,1	11,9	3,5
Aragón	6,8	11,3	20,5	25,1	22,0	10,9	3,4
Cataluña	7,4	11,7	23,4	27,1	20,0	8,6	1,8
Madrid	6,4	12,7	23,4	27,9	19,3	8,5	1,9
La Rioja	8,4	11,1	19,7	25,5	20,3	11,0	4,0
Galicia	6,9	13,4	25,1	27,6	20,0	6,2	0,7
Asturias	8,9	11,9	20,8	27,2	21,1	8,5	1,6
Cantabria	8,1	13,6	22,0	25,1	19,2	9,4	2,5
España	9,1	14,6	23,9	26,6	17,7	6,7	1,3
Murcia	8,0	16,3	26,7	26,4	17,0	5,2	0,4
Baleares	12,7	17,3	25,3	24,7	15,1	4,4	0,5
Andalucía	12,8	17,9	26,7	25,0	13,3	3,9	0,3
Canarias	18,1	25,2	27,5	20,1	7,7	1,3	0,1
Ceuta	25,6	22,3	23,4	17,9	8,9	1,6	0,2
Melilla	33,0	20,9	19,4	16,0	8,2	2,1	0,5
Total OCDE	9,3	15,5	22,7	23,5	17,3	8,9	2,8
Promedio OCDE	8,0	14,0	22,0	24,3	18,9	9,6	3,1

Fuente OECDE: Elaboración: Instituto de Evaluación, www.institutodeevaluacion.educacion.es ; Anexo 2, Tabla: 2.2. (Consulta/ 7/febrero/2013)

Cuadro 5.5.- Evolución de los resultados promedios OCDE y España en competencia matemática

Universidad Pontificia de Salamanca



Elaboración: INSTITUTO DE EVALUACIÓN. www.institutodeevaluacion.educacion.es

Fuente OCDE. PISA < www.pisa.oecd.org ; database, 2009. Vol. I, tabla 3.3. Informes españoles Pisa 2009 < http://pisa2009.acer.edu.au >; 2003 y 2006. http://iaqse.caib.es/documents/aval2009-10/pisa2009-informe-espanol.pdf ((Consulta/ 7/febrero/2013).

Comprobamos que los resultados de España nos gustaría que fueran mejores. En el área de Álgebra, en que he centrado la investigación de la tesis, analizando las diferencias curriculares de los diferentes países, con buena puntuación en álgebra, nos damos cuenta que en sus currículos se introducen los contenidos sencillos de álgebra en la enseñanza primaria. Ejemplos paradigmáticos son la República de Corea, Singapur, Finlandia, Estados Unidos y otros.

5.3.2.- La modelización matemática

En la historia de las matemáticas siempre se ha aceptado que este saber asume una finalidad instrumental, en virtud de la cual las matemáticas prestan a otras ciencias los instrumentos pertinentes para la descripción, la interpretación, el análisis y la predicción de los fenómenos del mundo natural y social y de los comportamientos humanos en la pluralidad de situaciones del mundo real. Esta reconocida "utilidad práctica de las matemáticas siempre ha ofrecido, y todavía ofrece, una de las mayores justificaciones en relación con el importante papel de esta materia en el currículo escolar" (Verschaffel, L., 2012: 27-28).

En términos generales, la modelización matemática se puede definir como la aplicación de las matemáticas en la resolución de situaciones problemáticas de la vida real. De un modo más específico, se puede prescindir del término de origen inglés, modelización y utilizar otro término de mejor uso en contextos más especializados

Universidad Pontificia de Salamanca

como el de modelo, que se define en términos de "esquema conceptual, susceptible de un tratamiento matemático, que interpreta o predice el comportamiento de un sistema en el que se desarrolla un fenómeno determinado" (Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1999: modelo, p.627). En el Diccionario de Matemáticas, Clapham remite a un problema del mundo real que pueden encontrar los físicos, los geólogos, un ingeniero, un economista o cualquier otra persona en sus condiciones normales de trabajo, en la vida cotidiana y "las matemáticas pueden ayudar a resolver el problema. Pero para aplicarlas es frecuentemente necesario llevar a cabo una abstracción, elaborando lo que se llama un *modelo matemático* del problema original del mundo real, que se corresponde aproximadamente con él" (Clapham, C., 1998: modelo matemático). A partir de estos significados, que le atribuyen los diccionarios especializados, se infiere ya que la mencionada modelización o *modelo matemático,* como preferimos denominarlo, implica una serie de operaciones, como la elaboración de hipótesis y simplificaciones, diseño de un cierto modelo matemático próximo a la situación problemática del mundo real, con el que a veces se podrá resolver la mencionada situación problemática del mundo real. De un modo más en detalle, Verschaffel establece seis fases sucesivas:

1) *Comprender* las claves de la situación problemática.
2) *Elaborar un modelo matemático* con los elementos clave de la situación.
3) *Trabajar con el modelo matemático* para identificar las implicaciones matemáticas de la situación problemática.
4) *Interpretar* los resultados de las operaciones computacionales.
5) *Valorar* si la interpretación matemática de la situación es apropiada y razonable.
6) *Comunicar la solución obtenida* respecto de la situación problemática original (Verschaffel, L., 2012: 28)

El autor centra su investigación en la crítica sobrevenida a los problemas verbales, como instrumentos de larga historia en el aprendizaje de las matemáticas. Las primeras argumentaciones críticas provienen de análisis filosóficos, epistemológicos y sociolingüísticos, que cuestionan la posibilidad de relacionarse las estructuras abstractas de las matemáticas con los fenómenos del mundo real. Un segundo tipo de argumentaciones se apoyan en trabajos empíricos, que resaltan las limitaciones derivadas del contexto de las variadas situaciones problemáticas de la realidad y ponen en peligro el ajuste con modelos y soluciones estandarizadas. El autor analiza algunos

Universidad Pontificia de Salamanca

de estos estudios empíricos que documentan el fenómeno de la *suspensión en la búsqueda de sentido*. Comenta otros estudios que valoran la perspectiva de la modelización y plantea en las consideraciones finales algunas implicaciones educativas de la investigación realizada (Verschaffel, L., 2012: 28).

"La primera implicación educativa básica para los autores de libros de texto y el profesorado de las distintas etapas es que se debe revisar el planteamiento regular al alumnado de problemas verbales en los que se contradigan manifiestamente alguno o algunos rasgos del mundo real" (Verschaffel, L., 2012: 39-40). Para el autor, esta observación ha de atender especialmente a advertir y explicar a los estudiantes la distancia o disonancia entre el problema escolar y la realidad a que se refiere el problema, a fin de que no se refuerce en la mente de los estudiantes la idea, que ya en alguna medida poseen, de que los problemas escolares nada tienen que ver con la realidad cotidiana que ellos viven. Si no se dan razones convincentes que expliquen esta distancia o alejamiento, los problemas verbales que se utilicen en clase, afectados por esta limitación, serán muy contraproducentes para el aprendizaje de las matemáticas, puesto que se consolida la idea de que las matemáticas no tienen utilidad práctica alguna y por tanto decaerá la motivación para estudiarlas y esforzarse en comprenderlas.

En segundo lugar el autor ofrece una perspectiva positiva para el aprendizaje matemático valiéndose de los problemas verbales. Sugiere que los problemas verbales que se usan en clase, en la mayor parte de los casos, están estandarizados tanto en los libros de texto como en libros de problemas, que suelen usar los profesores para poner estos ejemplos. Teniendo en cuenta la estandarización que les afecta, el autor sugiere la conveniencia o necesidad de completarlos con otros tipos de problemas en donde la relación entre la situación problemática y el modelo matemático, que se va a usar para su resolución, sea una relación claramente cuestionable o no surja por una deducción inmediata y evidente. Al enfrentar con claridad al alumno con problemas no estandarizados, que no obtienen la solución correcta, por la inmediata aplicación de las operaciones matemáticas conocidas, el alumno tendría que aprender a diferenciar unos casos de otros y reflexionar sobre cual fuere la operación matemática adecuada para resolver el problema. De esta manera los problemas verbales podrían mantenerse como elementos positivos del aprendizaje matemático, teniendo en cuenta como es obvio, que se impone cultivar el hábito de la reflexión sobre la relación entre la situación de realidad y el modelo matemático a aplicar (Verschaffel, L., 2012: 40).

Universidad Pontificia de Salamanca

5.3.3.- A modo de síntesis

Las experiencias PISA y las lecciones que pueden extraerse de estas pruebas internacionales para el estudio de las matemáticas en el contexto español constituyeron un especial objetivo de atención. Destacan tres asuntos de interés: El primero se refiere al estudio de las matemáticas, que para PISA es incuestionable, no solo por la tradición constante desde siglos, que hacen de las matemáticas un estudio de la mayor importancia para el conocimiento y comprensión de los espacios naturales, sociales y humanos. También es un conocimiento indispensable para el desarrollo de los pueblos y para la instalación satisfactoria de los individuos en el escenario social. En la sociedad del conocimiento, son muchos miles y millones de personas, dedicadas a la tarea de enseñar matemáticas, que cada día abren libros de matemáticas, preparan conocimientos, tareas, ejercicios y problemas para transmitirlos a niños, adolescentes, jóvenes y adultos que tienen necesidad de disponer de más y mejores conocimientos matemáticos cada día.

El segundo asunto que PISA trata de difundir y convencer es que las matemáticas son útiles y necesarias para comprender los asuntos de la vida cotidiana, por ello las matemáticas, en su condición de saber abstracto, necesitan contextualizarse, para despertar y avivar el interés del estudiante en orden al aprendizaje de las matemáticas. PISA considera necesario inculcar este racional y razonable convencimiento, para que los estudiantes desarrollen actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas y motiven su autoestima para el aprendizaje matemático. Por último PISA defiende que la comprensión matemática se manifiesta en la resolución de problemas matemáticos, de ahí que la evaluación matemática se debiera hacer siempre mediante los problemas que se le presenten a la consideración de los estudiantes para su evaluación. PISA, al hacer sus pruebas en tantos y tan diferentes países, con una cadencia fija de tres años y con la publicación de los resultados, está impulsando la mejora de los sistemas educativos de las matemáticas, aportando instrumentos de mejora de los procesos de la enseñanza-aprendizaje matemático y optimizando la imagen de las matemáticas que, a medio plazo, se traduce obviamente en la mejora del aprendizaje de las matemáticas.

Por último, se reivindica la importancia de los problemas verbales, que tienen una tradición milenaria, junto a la conveniencia de seguir utilizándolos en los estudios, en las clases, en los libros de texto y en los libros de problemas para uso de los profesores. El autor (Verschaffel, L., 2012: 27-41) plantea la defensa de estos

Universidad Pontificia de Salamanca

problemas de dos modos: desmontando la argumentación de aquellos críticos que desde las perspectivas filosóficas, sociolingüísticas y epistemológicas se empeñan en demostrar que las matemáticas, por su condición de saber abstracto, están incapacitadas para establecer relaciones explicativas con la realidad de los asuntos de la vida cotidiana que afecta al hombre. De manera positiva el autor sigue reivindicando el valor instrumental de los problemas verbales para la enseñanza de las matemáticas, siempre y cuando el profesor de matemáticas se comprometa a explicar y subsanar el aparente o real distanciamiento de los problemas escolares respecto de la realidad que viven los estudiantes.

5.4.- LA MOTIVACIÓN: TÉRMINO Y DEFINICIÓN

En este apartado del capítulo se tratan varios asuntos de notable interés, de tipo conceptual y teórico, cuya indagación se llevó a cabo mediante el análisis de fuentes documentales pertenecientes a autores de reconocido prestigio intelectual en el campo de las motivaciones. Se exponen de manera breve y precisa el significado y las dimensiones esenciales de los términos motivación y autoconcepto y su específica trascendencia en los estudios de la conducta humana. Esta elaboración conceptual se construye sobre las obras de los profesores Pinillos (1975), Castejón et al. (2010), González- Pienda et. al. (2002), Sampascual (2007) y de otros autores de rigurosos artículos e investigaciones empíricas. Se pretendió poner en evidencia *la estrecha relación entre las plurales fuentes de motivación y la conducta de los estudiantes investigados respecto del estudio de las matemáticas.*

El primer apartado se centra en la explicación del significado del término motivación acentuando aquellas dimensiones que lo definen, la dimensión de valor, la expectativa de éxito, que puede a su vez entenderse como objetivo o como metas y la dimensión emocional de especial significado en el proceso de la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas. El otro concepto al que se presta atención específica es el de *autoconcepto*. Señalados los diferentes significados que se le atribuyen, se identifica como una categoría conceptual y multidimensional, de contenido denso respecto del *binomio motivación – rendimiento escolar*. Desde este concepto de establecen fecundas conexiones con el rendimiento escolar en el estudio de las matemáticas.

Universidad Pontificia de Salamanca

El término *motivación* es un "constructo hipotético" que se refiere a un cúmulo de variables que tienen la virtualidad de provocar una conducta inmediata que puede orientarse a la persecución de un objetivo. Las mencionadas variables no son percibidas de forma inmediata, sino que han de rastrearse mediante el análisis de las conductas manifiestas del sujeto actuante (Melero, L., 2004:944). Con relativa frecuencia el término *motivación* se intercambia indistintamente con el de motivo, con el significado de algo eficaz para mover, en este caso, la conducta humana. Esta duplicidad terminológica está presente en el lenguaje usual y no está ausente en la literatura científica e incluso en la obra de un mismo autor pueden aparecer como términos de significado intercambiable. En una primera aproximación terminológica, puede afirmarse que "la palabra motivación, derivada del latín *motus*, igual que el vocablo emoción, designa en el lenguaje ordinario la raíz dinámica del comportamiento, esto es, aquellos factores o determinantes internos más que externos al sujeto, que desde dentro le incitan a la acción" (Pinillos, 1977: 503). Para este profesor se advierte desde el comienzo una cierta disonancia entre la explicación científica de la conducta y una psicología de los instintos[168]. En el ámbito de la psicología actual se atribuyen a los términos motivación y motivo significados algo diferentes: *la motivación* se entiende con preferencia como el proceso de la acción consciente que persigue un objetivo, mientras que el término *motivo* se reserva para el conjunto de inclinaciones, apetitos, opiniones o impulsos instintivos que pueden inducir una acción, es decir, el término motivo se reserva para el impulso o incentivo a la acción y motivación adquiere el significado de proceso de la acción orientada hacia un objetivo. Sin entrar en las frecuentes discusiones al efecto, en este caso nosotros utilizaremos el término *motivación* para explicar, con la mayor precisión que nos sea posible, ciertos problemas que se producen en el aprendizaje académico de algunos estudiantes y, más en concreto,

[168] "En este sentido se advierte una cierta contradicción entre una ciencia de la conducta, que hace de las respuestas una función de los estímulos y una psicología de la motivación que postula la existencia de determinantes interiores como impulsos e instintos. A decir verdad, luego ha resultado que la psicología conductista se las ha arreglado para asimilar las ideas homeostáticas de la biología, pero en un principio, esa oposición que apuntamos se dejó traslucir en la enconada polémica que el conductismo mantuvo contra la teoría motivacional de McDougall centrada, como se sabe, en la noción de instinto" (Pinillos, 1977: 503)

Universidad Pontificia de Salamanca

en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel educativo de la ESO[169]. No cabe duda sobre la utilización obvia y abusiva de la motivación para explicar por parte de padres, profesores y centros escolares algunos de los males del sistema educativo. Subyace a este lugar común una concepción de la motivación que no ha de reducirse, como afirma el profesor Maceiras, (2002: 258) a la "descripción o explicación de procesos físicos o psicológicos, puesto que va acompañada de exigencias reales y prácticas no desvinculables de la responsabilidad ética". Es evidente que la motivación de la conducta humana en modo alguno puede reducirse a la mera explicación de una realidad física ajena a la realidad humana, por muy sofisticada que ella fuere. Se trata de la dimensión motivadora de la conducta humana, en todo caso inmersa en un escenario esencialmente ético[170]. Teniendo en cuenta además la complejidad y el carácter multidimensional del concepto de motivación, se impone hacer algunas precisiones conceptuales sobre su significado y principales dimensiones que la integran.

5.4.1.- Dimensiones esenciales de la motivación

Desde la perspectiva de una *definición clásica de motivación*, podemos considerarla como un "conjunto de procesos implicados en la activación, dirección y persistencia de la conducta. Por tanto, el nivel de activación, la elección entre un conjunto de posibilidades de acción, concentrar la atención y perseverar ante una tarea o actividad son los principales indicadores motivacionales" (Valle, A. et al., 2002: 118).

[169] "Aprender matemáticas se ha convertido en una necesidad para desenvolverse adecuadamente en la compleja sociedad actual, donde los avances tecnológicos y la creciente importancia de los medios de comunicación hacen necesaria la adaptación de las personas las nuevas situaciones derivadas del cambio social. Es un hecho que, a partir de su utilidad e importancia, las matemáticas suelen ser percibidas y valoradas por la mayor parte de los alumnos como una materia difícil, aburrida, poco práctica, abstracta, etc., cuyo aprendizaje requiere una capacidad especial, no siempre al alcance de todos. Estamos firmemente convencidos de que estas creencias influyen en el hecho de que un porcentaje considerado de los suspensos en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) corresponda al área de matemáticas, materia en la que se concentra un elevado porcentaje de dificultades y fracasos académicos, convirtiéndose en un filtro del sistema educativo" (Gil, N. et al., 2006: 49)

[170] El profesor Maceiras afirma al respecto lo siguiente: "En efecto, 'darse un motivo' supone establecer una secuencia solo comprensible a partir de la implicación moral de un sujeto, que es la siguiente: la aceptación de un valor como preferente (por eso yo lo aduzco como motivo); la reivindicación de un derecho (son mis motivos); el reconocimiento del otro y de los otros, en cuanto que todo motivo va encaminado a hacer comprender y justificar una acción ante los demás; la evaluación del medio o contexto social en el que actúo, al prever que en él mis motivos serían aceptables" (Maceiras, 2002: 258)

Universidad Pontificia de Salamanca

Para los autores sobresalen *tres dimensiones principales* implicadas en la motivación académica:

1ª) *La dimensión de valor* que apunta a las razones o propósitos que el alumno pone en acción para conseguir algo que considera de importancia para él. Con independencia de su consecución, la valoración del objetivo propuesto desencadena una actividad orientada y este aspecto direccional nos ubica en el escenario educacional, de cómo acercar al alumno al proceso del aprendizaje de las matemáticas. La dimensión del valor atribuido a la actividad, según algunos autores, se especifica en cuatro aspectos: el *valor de logro* que especifica la importancia que atribuye el individuo a su tarea; el *valor intrínseco o interés* que apunta a la satisfacción que el individuo motivado obtiene de realizar la tarea; el *valor de utilidad* muestra las relaciones entre la tarea a ejecutar y las metas futuras que él persigue y el *valor de coste* implica el compromiso y esfuerzo a poner en ejecución desde las exigencias que presentan las diferentes tareas (Eccles. et al. 1983. Cita tomada de Valle, A. et al.2002: 119-120)

2ª) La dimensión "denominada *componente de expectativa* engloba las percepciones y creencias individuales sobre la capacidad para realizar una tarea (…) tanto las autopercepciones y creencias sobre uno mismo como las referidas a la propia capacidad y competencia se convierten en pilares de la motivación académica" (Valle, A. y otros, 2002: 118). El convencimiento de su propia capacidad y competencia se sobrepone con excesiva frecuencia a otros motivos y razones para realizar una determinada tarea. Según los autores, la mayor parte de las investigaciones sobre las metas y razones que integran las expectativas del alumno se han polarizado en dos tipos: *las metas de rendimiento* "se focalizan en la demostración de la competencia respecto de los otros" y las *metas de aprendizaje* "se centran en el desarrollo de la competencia y del dominio de las tareas, para incrementar su capacidad" (Valle, A. y otros, 2002: 121). En relación con las metas del aprendizaje, los autores indican que "están relacionadas positivamente con el interés y las metas de aproximación al rendimiento muestran relaciones positivas con el rendimiento académico y las metas de evitación del rendimiento se relacionan negativamente con el interés y con el rendimiento" (Valle, A. y otros, 2002: 121).

3ª) Variable afectiva y emocional. Además de las dimensiones mencionadas, valores y expectativas, la más importante parece ser la variable afectiva y emocional que apunta a las reacciones afectivas y emotivas y en general, "las reacciones afectivas que produce la realización de una actividad constituye otro de los pilares fundamentales

Universidad Pontificia de Salamanca

de la motivación que da sentido y significado a nuestras acciones y moviliza nuestra conducta hacia la consecución de metas emocionalmente deseables y adaptativas" (Valle, A. y otros, 2002: 119) .

Un estudio empírico llevado a cabo por los profesores de la Universidad de Extremadura Nuria Gil Ignacio, Eloisa Guerreo Barona y Lorenzo Blanco Nieto (2006) confirman el papel esencial de la dimensión afectiva en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Con anterioridad a la investigación empírica, otros informes científicamente rigurosos[171] habían puesto de manifiesto que la necesidad de emprender una simple y fácil tarea matemática, solucionar unos ejercicios o tener que resolver unos problemas matemáticos provocaban sentimientos de ansiedad, impotencia, miedo e incluso culpabilidad. Por ello resulta necesario "comprender y analizar cómo el estudiante, al aprender matemáticas y al interactuar con su entorno, interioriza determinadas creencias y valoraciones negativas o positivas hacia ellas y hacia él mismo como aprendiz, lo cual le va a generar éxitos y fracasos ante la consecución de los logros matemáticos. (…) En este sentido, entendemos que los altos índices de fracaso escolar en el área de las matemáticas exigen el estudio de la influencia de los factores afectivos y emocionales en el aprendizaje matemático, ya que pueden explicar la ansiedad que siente el alumno ante la resolución de problemas, su sensación de malestar, de frustración, de inseguridad, el bajo autoconcepto que experimenta, etc., que frecuentemente le impiden afrontar con éxito y eficacia las tareas matemáticas" (Gil, N. et al., 2006: 50). En el artículo que venimos comentando, los autores se decantan decididamente por fijar la atención en el análisis de los datos obtenidos en el test de motivación que evidencian la influencia de las condiciones afectivas para el "éxito y/o fracaso del aprendizaje matemático" con el objetivo de "promover actitudes y creencias positivas en el alumnado que redunden en la mejora del rendimiento y de las expectativas de logro hacia esta materia" (Gil, N. et al., 2006: 53).

Los autores de esta investigación empírica, en un breve apartado de conclusiones proponen una doble estrategia en consonancia con la finalidad manifiesta, a lo largo del artículo, de mejorar el rendimiento en el aprendizaje de las matemáticas. La primera estrategia consistiría en la elaboración de "programas de alfabetización emocional en educación matemática" con la intencionalidad de favorecer en el alumnado de

---

[171] El Informe Cokcroft (1985), había llegado ya, veinte años antes, a conclusiones semejantes a las de esta investigación.

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas el cambio hacia actitudes, creencias y emociones positivas hacia las matemáticas y su aprendizaje. La segunda estrategia propuesta por los autores consistiría en fomentar una mayor colaboración entre los orientadores y los profesores de matemáticas en el ámbito de los afectos, debido a la manifiesta influencia que ejercen sobre la calidad del aprendizaje matemático (Gil, N. et al., 2006: 63).

Se han hallado también suficientes coincidencias sobre la importancia de los factores emocionales como explicación parcial del fracaso en el aprendizaje de las matemáticas, en un excelente estudio empírico, llevado a cabo por los profesores de la Universidad de Valladolid, Santiago Hidalgo Alonso, Ana Maroto Sáez y Andrés Palacios Picos (2004:75-95) y publicado con el título *¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas.* En las conclusiones del mismo se deja constancia de lo siguiente:

“El rechazo a las Matemáticas es la consecuencia de la influencia sobre el alumno de variables de naturaleza cognitiva y emocional, muy frecuentemente entrelazadas, que nos recuerda la idea expuesta en Goleman de las dos mentes. El elemento vertebrador de este complejo sistema es la dificultad de las Matemáticas y la vivencia de dicha dificultad. De modo que estaríamos hablando de un mismo tema pero a dos niveles: la dificultad objetiva de las Matemáticas como disciplina y la manera subjetiva con que el alumno afronta esta dificultad. Ante un mismo problema, la vivencia puede ser un reto del intelecto que merece la pena o la ocasión enésima de fracaso que hay que evitar. Aunque en origen la situación objetiva sea la misma, la mente emocional de ambos alumnos desencadena situaciones reales diferentes” (Hidalgo, S. et al., 2004: 90).

Para los autores de esta investigación empírica, las dificultades objetivas que el estudio de las matemáticas presenta, se relaciona con el método matemático y la distinta manera que los alumnos tienen de reaccionar ante esa evidente dificultad. Para unos la dificultad del estudio de las matemáticas se considera que rebasa sus capacidades, que es una asignatura que requiere estrategias cognitivas de orden superior y su aprendizaje es percibido como algo acumulativo en que todo se relaciona con todo y las dificultades son a su vez igualmente acumulativas. Este modo de visionar el asunto lleva al alumno a asumir “la imposibilidad de superación lo que genera el rechazo y el aburrimiento, en un perfecto ejemplo de la relación entre lo cognitivo y lo afectivo. El alumno se siente indefenso, a disgusto, ante una materia de la que piensa que se requieren capacidades intelectuales que él no tiene. Sus atribuciones no pueden ser más peligrosas: si se

Universidad Pontificia de Salamanca

requieren capacidades intelectuales que yo no tengo y que no puedo conseguir, de nada vale el esfuerzo y el trabajo; atribución de causalidad que es el mejor pronostico del fracaso futuro" (Hidalgo, S. et al., 2004: 93).

Para otros alumnos, en cambio, la dificultad que presentan las matemáticas se percibe como un reto asociado al éxito, como consecuencia del esfuerzo y del estudio. Esta distinta visión fortalece el autoconcepto frente a la anterior, en que el rechazo de las Matemáticas va emparejado con autoconceptos bajos y con autoestimas no muy positivas en lo que a la percepción de competencias matemáticas hace referencia. Para los autores, "estamos en presencia de un alumno que, como ya hemos indicado, se *hace* en el rechazo a las Matemáticas y no *nace*, lo cual explicaría su aparición tardía a lo largo de la escolarización y en este proceso tiene mucho que ver la dificultad intrínseca de las propias Matemáticas" (Hidalgo, S. et al., 2004: 93).

5.4.2.- Autoconcepto: definición, contenido y estructura

En general suele afirmarse que el autoconcepto entra en la literatura teórica y empírica sobre la motivación en la década de los setenta, consolidándose claramente en la siguiente década de los ochenta del siglo veinte. Varios son los aspectos a dilucidar en relación con el concepto propuesto y sobre los que todavía el discurso científico psicológico no encuentra suficientes escenarios de consenso, si bien obtiene un amplio reconocimiento la utilidad que presta a la investigación motivacional de la conducta académica. No cabe duda que, dentro de las reflexiones sobre la motivación, *el autoconcepto* "se erige como un constructo de enorme capacidad predictiva con relación al rendimiento académico y con gran poder mediador entre las distintas variables motivacionales, que se contemplan en el funcionamento psicológico del proceso de aprendizaje" (Castejón, J. L., et al., 2010: 224). Es amplio el reconocimiento de que la percepción que tenemos de nuestras propias capacidades sobre un ámbito de la realidad, resultan muy favorables para afrontarla y obtener positivos resultados de nuestra intervención. El autoconcepto aparece de este modo como una construcción mental del modo como el individuo se percibe a sí mismo, cuya imagen estará integrada por variedad de elementos de autovaloración, de conocimientos, de experiencias y de las opiniones que sus referentes manifiestan sobre él. Tres aspectos vamos a considerar: discrepancias y coincidencias en torno a los términos para designar este constructo

Universidad Pontificia de Salamanca

motivador, su estructura y características y por último se explora el contenido del autoconcepto global.

a) Terminología y definición

Un primer núcleo de divergencia aparece ya en la terminología y en la definición del autoconcepto, tanto por la diversidad de términos al uso como por el diferente significado atribuido a los términos. Con frecuencia se observa que los términos de autopercepción, autorrespeto, autoconfianza, autoimagen, autoeficacia o autoestima se consideran de significado equivalente al constructo al que nos referimos. Es una cierta representación de sí mismo que no es innata, se va forjando a lo largo del tiempo, aunque con más acopio de integrantes adquiridos en las primeras etapas de la vida del sujeto. No aparece como algo adquirido de una vez por todas, sino más bien como algo dinámico, que se elabora y cambia a lo largo del tiempo. En todo caso en la sociedad globalizada del conocimiento, donde la imagen es un elemento omnipresente, habría de tomarse en consideración la identificación positiva o negativa que los individuos, desde su más tierna infancia, hacen con los personajes imaginarios o reales que las pantallas de la TV ofrecen con perfiles realzados, en todo tipo de programas, a los que el sujeto está expuesto. En la actualidad sería *rara avis* el individuo, niño o adolescente, joven o adulto, que se sustrae a esta influencia social, en la elaboración del propio autoconcepto.

En cuanto a la distinción entre *autoconcepto y autoestima*, los autores suelen interpretar el primero en términos más bien descriptivos[172] y la autoestima se la considera en términos de valoración o evaluativos. Desde esta perspectiva el autoconcepto podría definirse en términos de "conjunto de ideas, concepciones y opiniones organizadas que el sujeto tiene acerca de sí mismo, a la percepción del alumno acerca de su propia capacidad para llevar a cabo determinadas actividades y tareas escolares o la concepción que el alumno tiene de su capacidad para aprender o para rendir en una tarea académica determinada" (Castejón, J. L., et al., 2010: 225). La autoestima [173], en cambio, se polarizaría en la valoración personal y subjetiva de la

[172] El autoconcepto incluye "el conjunto de ideas que uno tiene sobre la clase de persona que es, y sobre las características y rasgos más importantes que posee" (Sampascual, G. (2007: 319) *Psicología de la educación.* Tomo I. Madrid: UNED).

[173] La autoestima consiste en las actitudes que el individuo tiene hacia sí mismo como resultado de la valoración que él mismo hace de su propio autoconcepto. La autoestima es, pues, un juicio sobre su valía

Universidad Pontificia de Salamanca

descripción que el individuo hace de sí mismo. La autoestima muestra el triunfo de la subjetividad en cuanto capacidad de cada ser humano para reconocerse origen responsable de sus actos intelectivos y volitivos, a la par que portador de experiencias intransferibles. La toma de conciencia de su propia subjetividad condujo en el tiempo a un humanismo inseparable de la reivindicación del libre albedrío y de la lucha por la ilustración. De este modo, las épocas históricas denominadas ilustradas – Atenas, Renacimiento, Ilustración – deben ser entendidas como impulsos educativos, más o menos profundos y generalizados, encaminados a hacer que cada individuo se autovalore y se responsabilice de sí mismo. Desde esta perspectiva se entiende que Kant responda a la cuestión de qué es la Ilustración, con la expresión de *atreverse a pensar por cuanta propia*.

Otra equiparación con el término autoconcepto se produce desde el término autoeficacia que define Bandura (1987: 391) como "el enjuiciamiento que hacen las personas de su capacidad para organizar y ejecutar cursos de acción requeridos para lograr los tipos de actuación designados", cuya terminología lo aproxima al concepto de motivación y en este sentido, el fortalecimiento de la autoeficacia, mediante la adecuada retroalimentación informativa, mantiene la motivación y mejora el desarrollo de habilidades y logros académicos (Mayor, J., 2009: 213). Aunque persisten notables discrepancias en las definiciones, sin embargo los autores insisten en que la "actual situación en el estudio del autoconcepto resulta sumamente prometedora en cuanto a los logros conseguidos mediante la investigación en este campo" (Valle, A. et al., 2002: 123). Castejón et al. (2010: 226) reconocen asimismo la presencia de las discrepancias respecto de la identificación de las dimensiones que integran el autoconcepto y su estructura, defendiendo en cambio una coincidencia generalizada en torno a una "visión jerárquica y multidimensional del autoconcepto".

b) Estructura y características del autoconcepto

Dos asuntos a considerar en este apartado que nos ayudarán a obtener un concepto más definido sobre el autoconcepto y nos disponen a mejor descubrir las relaciones entre el autoconcepto y el rendimiento escolar, aunque para ello antes

o competencia personal" (Sampascual, G. (2007: 319) *Psicología de la educación.* Tomo I. Madrid: UNED)

Universidad Pontificia de Salamanca

debiéramos, al menos mencionar, qué se puede entender por autoconcepto académico y no académico.

b.1.- Estructura. Para algunos autores, entre otros Sampascual, una forma de considerar la estructura del autoconcepto, sería partiendo de su concepción como conjunto de actitudes que el individuo tiene hacia sí mismo, distinguiendo en el autoconcepto, a semejanza de cualquier actitud, tres componentes: el cognitivo, el emocional o evaluativo y el conductual. Al esclarecimiento de estas dimensiones estructurales del autoconcepto dedicamos los párrafos que siguen, de acuerdo con el planteamiento de Sampascual.

1) La dimensión cognitiva está integrada por el "conjunto de percepciones, ideas u opiniones que el individuo tiene sobre sí mismo, independientemente de que sean verdaderas o falsas, objetivas o subjetivas, que le permiten definirse a sí mismo" (Sampascual, G., 2007:321).

2) La dimensión emocional o evaluativa se refiere a "los sentimientos favorables o desfavorables, que experimenta el individuo según sea la valoración que él haga de sus propias características. En los estudios sobre actitudes, se considera que éste es el componente más destacado" (Sampascual, G., 2007:321).

3) La dimensión conductual "es un componente activo que predispone a un comportamiento congruente con los componentes cognitivo y emocional. Las personas tendemos a obrar de acuerdo con nuestras ideas, según nos veamos más o menos capaces, de acuerdo con nuestros sentimientos" (Sampascual, G., 2007: 321).

b.2.- Características. En la elaboración de las características del autoconcepto, nos serviremos del planteamiento que lleva a cabo Sampascual en su obra *Psicología de la educación* (2007: 320 y ss): el autoconcepto es una *realidad organizada*; posee una *estructura multidimensional*, dispone de una *organización jerarquizada*, muestra *estabilidad* en sus dimensiones más generales e *inestabilidad* en las más específicas y, por último, es una *realidad con entidad propia*, no innata sino adquirida como fruto del aprendizaje. Sampascual se considera deudor intelectualmente, en cuanto a las características, de los autores Shavelson, Hubner y Stanton (1976) si bien establece su propia elaboración fijando las siguientes dimensiones del autoconcepto:

Universidad Pontificia de Salamanca

1) El autoconcepto es una realidad organizada, en cuanto que las experiencias que lo conforman se "organizan en categorías y tienen un significado personal" (Sampascual, G., (2007: 323), si bien el modo de organización es peculiar de cada uno y responde a las circunstancias y variadas experiencias que al sujeto afectaron en su periplo vital.

2) *El autoconcepto es multidimensional* [174], es decir,"es global y, poco a poco, con la edad y con la acumulación de experiencia se van diferenciando distintas facetas y dimensiones" (Sampascual, G., 2007:232).

3) El autoconcepto es una organización jerarquizada, puesto que las diversas dimensiones que integran el autoconcepto "se organizaban jerárquicamente, según su diferente nivel de generalidad. Las experiencias concretas que tiene un individuo (…) se organizan en dimensiones específicas, que a su vez dan lugar a otras dimensiones más globales hasta llegar al nivel más general" (Sampascual, G., 2007: 324).

4) El autoconcepto es una estructura que tiende a ser estable, es decir, las autopercepciones suelen tener cierta estabilidad y consistencia, aunque no por eso dejan de ser modificables. Como dice Castejón y Miñano (2010: 228) la estabilidad se concentra principalmente en las dimensiones más generales y la inestabilidad afecta primero a las más específicas.

5) El autoconcepto es una realidad aprendida. "Se aprende y modifica a través de las experiencias que el individuo tiene en los distintos ambientes en los que se mueve, y depende, principalmente, de sus experiencias de éxito y de fracaso en las tareas a las que se enfrenta" (Sampascual, G., 2007:325).

c) El autoconcepto global

En coherencia con el planteamiento que hemos hecho del autoconcepto, como realidad global integrada por autoconceptos específicos, los autores suelen distinguir en los alumnos cuatro específicas dimensiones del autoconcepto global: el académico, el

[174] El autor insiste en que "las percepciones y experiencias que de sí mismo tiene el individuo a lo largo de su vida se refieren a aspectos distintos de la persona y tienen lugar en distintas áreas o campos de actuación (familiar, laboral, escolar, deportivo, etc.), lo que determina la formación de autoconceptos específicos, distintos entre sí y del autoconcepto general, que cada vez se van haciendo más diferenciados" (Sampascual, G., 2007: 323-324)

Universidad Pontificia de Salamanca

social, el emocional y el físico. Los tres últimos se integran en el autoconcepto no académico.

c.1) Significado de estos autoconceptos

El autoconcepto académico se estructura en relación con el modo de actuar y comportarse el estudiante y de sus éxitos como estudiante de diferentes materias escolares, lengua, matemáticas, sociales, etc. "Su configuración depende, fundamentalmente, de la autopercepción de su propia valía o capacidad para desenvolverse en esas áreas, por un lado, y de las calificaciones que obtiene, por otro" (Sampascual, G., 2007: 323).

El autoconcepto no académico se configura en función de la percepción que el alumno tiene de sus cualidades físicas, de sus experiencias emocionales y de las relaciones que establece con los compañeros y personas significativas para él. Según el autor, las dimensiones esenciales del autoconcepto no académico son tres: "1) *el autoconcepto físico*, es decir, la percepción que el alumno tiene de su apariencia o aspecto físico; 2) *el autoconcepto emocional*, esto es, la percepción que tiene de sus sentimientos predominantes y 3) *el autoconcepto social* depende de cómo percibe y valora las relaciones que establece con sus compañeros y con otras personas significativas" (Sampascual, G., 2007:323).

c.2) Autoconcepto y rendimiento escolar

En términos generales puede afirmarse que los muchos estudios elaborados por eminentes psicólogos y pedagogos, sobre el autoconcepto y el rendimiento escolar, coinciden en el reconocimiento de estrechas relaciones entre las variables mencionadas, así como se hallan también bastantes puntos de desencuentro: "en un primer momento, su punto principal de desencuentro se centraba en la direccionalidad de la causación entre ambas" (Castejón y Miñano (2010: 228), alcanzando a una situación de consenso mediante "modelos de efectos recíprocos, según los cuales un primer autoconcepto afecta sobre el posterior rendimiento académico y este rendimiento afectaría al siguiente autoconcepto" (Castejón y Miñano (2010: 233).

Amezcúa y Fernández (2000) en un trabajo en el que estudian las diferentes dimensiones del autoconcepto en el rendimiento académico de los alumnos adolescentes, "señalan que el autoconcepto académico específico se comporta como el mejor predictor del rendimiento en esa área, mientras que el autoconcepto global no

Universidad Pontificia de Salamanca

obtiene significación estadística en la predicción" (cita tomada de Castejón y Miñano (2010: 228). En esta dirección Castejón se refiere a los estudios de González-Pienda et al. (2003) analizando las relaciones de las diferentes dimensiones del concepto global y el rendimiento académico, obteniendo resultados similares, en el sentido de que la variable académica del autoconcepto es la única significativa en relación con el rendimiento académico.

De los varios estudios empíricos llevados a cabo, los autores González-Pienda et al. concluyen que los resultados empíricos demuestran dos hechos fundamentales: "el más notable se refiere a que efectivamente el autoconcepto es fuente de motivación que incide directa y significativamente sobre el logro del niño. Pero, ya que una de las fuentes principales de información para la formación del autoconcepto es el resultado del comportamiento de los demás hacia uno mismo y el de la propia conducta, los resultados de aprendizaje escolar, necesariamente, tienen que incidir sobre el autoconcepto del estudiante, aunque pensamos que esta influencia no es directa y pasiva, sino resultado de una elaboración cognitivo-afectiva previa por parte de la dimensión del autoconcepto" (Gonzalez-Pienda et al., 1997: 5)

En el ámbito de las Matemáticas, algunas experiencias investigadoras muestran análisis sobre las relaciones entre las matemáticas y el autoconcepto, la eficacia y el rendimiento en esta área, por parte de estudiantes adolescentes y los resultados hallados en el área de las matemáticas "apoyan la existencia de dos componentes del autoconcepto: el referido a la propia competencia y el afectivo. De igual modo, la autoeficacia fue emparejada con la dimensión de competencia del autoconcepto en un único factor, siendo ésta la que obtuvo valores correlacionales y predictivos más elevados" (Castejón y Miñano, 2010: 231).

Con una orientación semejante hallamos la investigación de Hidalgo, S. et al., (2004) sobre la gran relevancia del *autoconcepto matemático* en los procesos de rechazo a las matemáticas. Afirman los autores que han identificado dentro de ese concepto general tres variables como más explicativas que el resto: *la percepción de competencias matemáticas, la percepción de capacidad para el cálculo mental y la dificultad percibida de comprensión.* "En todas ellas la dirección es la misma: el rechazo de las Matemáticas va emparejado con autoconceptos bajos y con autoestimas no muy positivas en lo que a la percepción de competencias matemáticas hace referencia. Se trata de alumnos que perciben sus capacidades cognitivas por debajo de sus compañeros, creen, por ejemplo, que operan mentalmente despacio y con errores y

Universidad Pontificia de Salamanca

que tendrán dificultad para entender las Matemáticas. Se consideran, así, malos para las Matemáticas y con problemas constantes para entenderlas" (Hidalgo, S. et al., 2004: 93). A renglón seguido los autores estiman que no tienen menos capacidad que sus compañeros, si bien han detectado mejores habilidades en los estudiantes que manifiestan gusto por las matemáticas. Los autores quieren dejar constancia de que están "en contra de esa imagen estereotipada, que para los estudiantes las Matemáticas es una asignatura difícil, pero no más rechazada que otras. Una asignatura, además, bien valorada por los alumnos en su utilidad, idea compartida por el entorno familiar, que apoyaría abiertamente este mensaje: difícil sí, pero útil" (Hidalgo, S. et al., 2004: 94).

5.4.3.- A modo de síntesis

Dos asuntos se han tratado: la motivación ha sido el primero y se definió como el término, que designa en el lenguaje ordinario la raíz dinámica del comportamiento. Desde la definición se apunta un concepto de gran complejidad, del mismo modo que es complejo el comportamiento humano. Se trata también de una categoría abierta a una pluralidad dimensional, como plurales son los comportamientos del ser humano.

Se consideraron tres dimensiones principales: 1ª) *La dimensión de valor* que apunta a la valoración del objetivo que se propone el estudiante, desencadenando una actividad orientada. Este aspecto direccional ubica al estudiante en el escenario de la educación: cómo acercar el alumno al proceso del aprendizaje de las matemáticas. 2ª) La *componente de expectativa* hace referencia a las autopercepciones o creencias propias o de otros referidas a la propia capacidad y competencia para realizar una tarea. Es un pilar interesante para el aprendizaje matemático. Este convencimiento de su propia capacidad se sobrepone con harta frecuencia a otros motivos para realizar una determinada tarea. 3ª) La dimensión *afectiva y emocional* apunta a las reacciones afectivas que produce la realización de una actividad, impregna de sentido y significado a las propias acciones y moviliza la conducta hacia metas emocionalmente deseables y adaptativas. Los estudios empíricos que hemos tenido a mano coinciden en que es la variable más importante de la motivación humana y especialmente para las matemáticas y entre adolescentes.

La definición y el análisis de la categoría del autoconcepto constituyen el tercer asunto de este apartado. Orillamos la definición valorativa de la autoestima y, partiendo de que el autoconcepto es un constructo de enorme capacidad predictiva en relación con el rendimiento académico y de gran poder mediador entre las distintas variables

Universidad Pontificia de Salamanca

motivacionales, nos inclinamos por definirlo como conjunto de ideas, concepciones y opiniones organizadas que el sujeto tiene acerca de sí mismo, de su propia capacidad para llevar a cabo determinadas actividades y tareas escolares o la concepción que el alumno tiene de su capacidad para aprender. Es una categoría siempre vinculada a la investigación y a los análisis empíricos del rendimiento escolar. Se especificaron su estructura, características, tipos y relaciones entre autoconcepto, rendimiento escolar y resultados matemáticos.

5.5.-CONTENIDO CURRICULAR DEL ÁLGEBRA EN EL PANORAMA ESPAÑOL E INTERNACIONAL

En la actualidad, el álgebra del currículo de la enseñanza secundaria obligatoria[175] suele entenderse como la parte de las matemáticas en que se concentra el estudio de relaciones, estructuras y cantidades no solo numéricas. Una primera consideración del álgebra nos lleva a pensar en el simbolismo como expresiones donde aparecen letras y números, donde las letras representan un valor determinado no conocido como en las ecuaciones, o representan un número cualquiera, que se sustituye por una letra con el fin de generalizar: por ejemplo, en las fórmulas del término general de una sucesión o en la expresión un polinomio, etc. Se asocia también el álgebra con la operatoria de estas expresiones, para conseguir otras equivalentes, siguiendo unas determinadas normas, por ejemplo, cuando resolvemos ecuaciones de primer grado, despejamos una incógnita para conseguir la solución, simplificamos fracciones algebraicas, sumamos términos semejantes de un polinomio o desarrollamos una identidad notable, etc. “Lo que esto significa es que, en álgebra, se calcula con cantidades indeterminadas, esto es, se suma, resta, multiplica o divide incógnitas y parámetros como si se conocieran, como si fueran números específicos” (Radford, 2010: p. 2). El álgebra contemporánea retiene de los tiempos pretéritos la base del

[175] Nota: Desde el punto de vista normativo, las matemáticas en general y el álgebra en particular, en el sistema educativo español, están regulados con todo detalle por la Ley Orgánica de Educación (3 de Mayo del 2006), publicada en el B.O.E. nº106 del 4 de Mayo del 2006 así como por una extensa serie de reales decretos, nacionales y autonómicos, específicos para cada comunidad autónoma, así como una serie de órdenes y resoluciones nacionales o comunitarias, en las que se detallan los aspectos más mínimos sobre el currículo establecido para cada etapa o curso y para cada asignatura en cuanto a los objetivos, contenidos, criterios de evaluación, metodología y competencias.

Universidad Pontificia de Salamanca

álgebra original, opera con números abstractos representados por letras, que la han engrandecido notablemente (López, A., 1997)[176]. El álgebra es una parte muy importante de las matemáticas, no solo en la enseñanza secundaria, sino en todo el currículo de matemáticas, desde primero de la ESO hasta segundo de Bachillerato, en cualquier modalidad y siempre por su carácter instrumental respecto de las otras ramas de las matemáticas: la *geometría*, con sus fórmulas de áreas y volúmenes; el *análisis*, con las funciones o la *estadística*, con su omnipresencia en las ciencias sociales. Es relevante la repercusión interdisciplinar del álgebra en las asignaturas de las ciencias de la naturaleza como la física, la química, la geología, la biología y en los actuales estudios científico-técnicos. El álgebra, que se imparte en la enseñanza secundaria obligatoria, comprende la resolución de ecuaciones y sistemas y tiene una plural aplicación en la vida diaria de las personas, por ejemplo, cuando se va al supermercado, es fácil encontrarse con ofertas de esta guisa: "si compras dos paquetes de galletas el segundo sale al 50%" o, con el fin de comparar precios de diferentes centros comerciales, resolvemos una ecuación sencilla para calcular el precio al que nos sale realmente cada paquete y si merece la pena. Seguimos la órbita de un satélite modelando su trayectoria mediante ecuaciones y a través de ecuaciones exponenciales seguimos la vida de una bacteria.

Aunque son conocidas algunas de las tareas del álgebra, no resulta fácil identificar el conjunto de actividades implicadas en las mencionadas tareas, como tampoco clasificar el pensamiento algebraico. Kieran (2007:14), apoyándose también en otros autores, clasifica las tareas algebraicas escolares en tres ramas, que gozan de cierta aceptabilidad:

[176] En la actualidad el álgebra "considera magnitudes de una naturaleza mucho más general que la de los números, y sobre estas magnitudes, estudia operaciones que son bastante análogas en sus propiedades formales a las operaciones ordinarias de la aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división (Ejemplo: la suma d vectores). Pero la generalización realizada en el álgebra es tal que el término magnitud pierde a menudo su significado y se habla con mayor generalidad de elementos sobre los que es posible realizar operaciones similares a las operaciones algebraicas usuales. Ejemplo: dos movimientos realizados uno a continuación de otro son equivalentes a un cierto movimiento único que es la suma de los dos. Entre los matemáticos más representativos de las nuevas teorías cabe destacar a Galois. Lo mismo que en el caso de la geometría, los nuevos conceptos del álgebra encuentran notables aplicaciones en el análisis, la geometría, la física" López, A, 1997: 32-33).

Universidad Pontificia de Salamanca

1) *Las generalizaciones* implican la formación de ecuaciones a través del enunciado de un problema, la expresión de fórmulas y patrones o las modelizaciones mediante series o secuencias numéricas o físicas que se repiten.

2) *Las transformaciones* implican los procedimientos y la operatoria con expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones y cálculo de valores numéricos de expresiones polinómicas. Aunque puedan parecer tareas rutinarias seguir un procedimiento, su justificación proviene de teoremas y axiomas de difícil demostración.

3) *La tercera categoría es la de global o meta-nivel*, lo que sugiere el uso de procesos matemáticos más generales. Se incluye en esta categoría la resolución de problemas no exclusivamente algebraicos, como son el estudio y la comprobación de generalizaciones (Godino, J.D. et al. 2012 p.7)

Está aceptado generalmente, por la comunidad de matemáticos, que uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico son los *procesos de generalización*. Dörfler (1991:84) equipara la abstracción con la generalización y ésta la vincula con el uso de variables o incógnitas, propias del lenguaje algebraico o de símbolos, que lleva al autor a concluir que "generalizar significa construir variables". En este sentido Radford (2003) y también Godino, et al. (2012: 8), al estudiar los tipos de generalización de patrones numérico-geométricos por estudiantes de secundaria, identifican la puesta en funcionamiento de dos tipos de generalización pre-algebraica: la *generalización factual* y la *generalización contextual*. En el primer tipo, generalización de procesos y procedimientos de resolución, el esquema permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación; lo general o lo indeterminado quedan sin nombrar. En cambio, las *generalizaciones contextuales* suponen un nivel más avanzado, aunque sin alcanzar el nivel de las generalizaciones simbólicas algebraicas. En este caso se generalizan no solo los procedimientos numéricos sino también los objetos y las acciones. "Van más allá del dominio de las figuras específicas y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos" (Radford, 2003: 65).

Según Kieran (1989: 165), hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad

Universidad Pontificia de Salamanca

para emplear y entender la notación algebraica con facilidad. Es por ello que cuesta mucho desarrollar cualquier demostración porque de pronto entran en un estado de ansiedad de no entender nada y que aquello es dificilísimo. Sin embargo, el uso de símbolos como un lenguaje para expresar generalizaciones, teorías y hacer demostraciones es un objetivo importante a conseguir, para que ellos mismos puedan entender y acceder al conocimiento científico-matemático que utiliza el lenguaje simbólico. "Por medio del simbolismo algebraico se proporciona una especie de *pauta* o *máquina herramienta* matemática que guía el cerebro tan rápida y certeramente hasta un objetivo como una plantilla guía la herramienta cortante de una máquina". (Alfred Hooper)

Existen tendencias, con notable grado de aceptación, que conciben la aritmética como parte del álgebra (Carraher y Schliemann, 2007: 698), o como un paso previo a la generalización y a los procedimientos algebraicos. Si no sabemos operar con números no sabremos operar con letras. En España, el álgebra hace su aparición, en 1º de la ESO, con la noción de incógnita o variable, simbolizando una cantidad desconocida con la letra “x”. Se define una operatoria, como la suma, resta, multiplicación o división de monomios, que en cursos posteriores se desarrollará de forma más compleja. También se inicia el proceso de aprendizaje y habilidad para traducir las relaciones entres datos de un enunciado de la vida real a una expresión algebraica. Al mismo tiempo se intenta generalizar desde la noción de identidad, es decir igualdades entre números, a lo que se llama una ecuación de primer grado, y la identificación de ecuaciones equivalentes. Se trata de que vean la utilidad de este tipo de estructuras a través del desarrollo de problemas en los que tenemos una variedad de enunciados más o menos cercanos a sus vidas. También en primero de la ESO se intenta que puedan llegar a la formulación de una función desde una tabla de valores, como una generalización de la relación entre dos magnitudes, la extracción de un patrón. La capacidad de abstracción es graduada y así en cursos posteriores se desarrollará con las ecuaciones de segundo grado y de más tipos, sistemas de ecuaciones e inecuaciones, problemas al respecto, operaciones de factorización de polinomios, fracciones algebraicas. En esta etapa se trabajarán también las sucesiones numéricas de las que se extrae el término general en función del lugar que ocupe en la serie.

Ante la posibilidad de introducir el álgebra en la enseñanza primaria, algunos autores manifiestan, como asunto previo, la exigencia de clarificar y delimitar con detalle y fundamento el nuevo enfoque, que está basado en los aspectos estructurales,

Universidad Pontificia de Salamanca

necesitando en consecuencia “no sólo una descripción y fundamentación, sino la determinación de medios para abordar los problemas de aprendizaje y de enseñanza relacionados con las nuevas tareas y competencias algebraicas, así como acciones concretas para la formación de profesores en este campo” (Godino, J. D. et al., 2012: 6). En consecuencia estos autores establecen un programa en cuatro etapas para clarificar la cuestión y en esta publicación únicamente se centran en el *análisis previo de aquellas cuestiones que se han de denominar algebraicas y cuales no tendrán esta denominación*, dejando el resto a siguientes elaboraciones. A pesar de que pueda haber partidarios de incluir el álgebra en la enseñanza primaria, sin embargo la cuestión está en los prolegómenos de clarificar los contenidos de esta nueva concepción del álgebra, las condiciones y recursos para su enseñanza y la formación del profesorado que pueda impartir en enseñanza primaria estos contenidos. Estos aspectos no están definidos todavía, ni existe un consenso al respeto en la comunidad de profesores de matemáticas implicados en la enseñanza de esta materia.

En las dos últimas décadas del pasado siglo, fueron frecuentes los estudios de los errores y en la detección de sus causas estructurales o coyunturales surgieron numerosas investigaciones centradas en la detección y clasificación de errores e identificación de los obstáculos que encuentran los alumnos al empezar a estudiar el álgebra. Kieran y Filloy (1989:236) presentan un resumen de las principales investigaciones relativas a los errores cometidos por los alumnos al resolver ecuaciones y problemas algebraicos y al pasar del ámbito estrictamente numérico al algebraico (Malisani, 1999: 2). Algunos investigadores de la escuela francesa de didáctica de las matemáticas han demostrado que algunas dificultades de los alumnos se pueden encontrar en los obstáculos detectados en la historia (Arzarello et al., 1994: 7-8). En el capítulo en que se muestran los resultados, tendremos oportunidad mostrar algunos de los errores más comunes que suelen cometer los estudiantes de la enseñanza secundaria obligatoria.

5.5.1.- El currículo del álgebra en algunas comunidades autonómicas

En el siguiente cuadro presentamos unos ejemplos de la legislación nacional y autonómica, relativa a las Matemáticas, de Castilla y León, Madrid y Andalucía.

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuadro 5.6.- Legislación nacional y de las comunidades autonómicas de Castilla y León, Madrid y Andalucía.

Leyes/Reales decretos/ Decretos/Ordenes/ Resoluciones	**Currículo/ Enseñanzas mínimas Primaria**	**Currículo/Enseñanzas mínimas Secundaria**	**Currículo/ Enseñanzas mínimas Bachillerato**
ESPAÑA	L.O.E. 3/5/2006 en el B.O.E. 106 del 4/5/2006 R.D.1513/2006 del 7/12/2006 en el B.O.E. 293 del 8/12/2006	L.O.E. 3/5/2006 en el B.O.E. 106 del 4/5/2006 R.D.1631/2006 del 29/12/2006 en el B.O.E. 5 del 5/1/2007	L.O.E. 3/5/2006 en el B.O.E. 106 del 4/5/2006 R.D.1467/2007 del 2/11/2007 en el B.O.E. 266 del 6/11/2007
CASTILLA Y LEON	D.40/2007 del 3/5/2007 en el B.O.C. y L. 89 del 9/5/2007	D.52/2007 del 17/5/2007 en el B.O.C. y L. 99 del 23/5/2007	D.42/2008 del 5/6/2008 en el B.O.C. y L. 111 del 11/6/2008
MADRID	D.22/2007 del 10/5/2007 en el B.O.C.M. 126 del 29/5/2007	D.23/2007 del 10/5/2007 en el B.O.C.M. 126 del 29/5/2007 R. del 30/9/2009 en el B.O.C.M. 250 del 21/10/2009	D.67/2008 del 19/6/2008 en el B.O.C.M. 152 del 27/6/2008
ANDALUCIA	LEA (ley 17/2007) del 10/12/2007 en el B.O.J.A. 252 del 26/7/2007 D.230/2007 del 31/7/2007 en el B.O.J.A. 156 del 8/8/2007 O. del 10/8/2007 en el B.O.J.A. 171 del 30/8/2007	LEA (ley 17/2007) del 10/12/ 2007 en el B.O.J.A. 252 del 26/7/2007 D.231/2007 del 31/7/2007 en el B.O.J.A. 156 del 8/8/2007 O. del 10/8/2007 en el B.O.J.A. 166 del 23/8/2007	LEA (ley 17/2007) del 10/12/2007 en el B.O.J.A. 252 del 26/7/2007 D.416/2008 del 22/7/2008 en el B.O.J.A. 149 del 28/7/2008 O. del 5/8/2008 en el B.O.J.A. 169 del 26/8/2008

En el Real Decreto (1513/2006) se establecen las horas de matemáticas de los tres ciclos de Primaria, los objetivos generales que se busca conseguir en cada etapa, los contenidos y criterios de evaluación por ciclos. Los contenidos de matemáticas de primaria se clasifican en cuatro bloques: números y operaciones; la medida: estimación

Universidad Pontificia de Salamanca

y cálculo de magnitudes; geometría; tratamiento de la información, azar y probabilidad. El álgebra ni en su contenido, ni en los objetivos, ni en los criterios de evaluación forma parte del currículo de primaria, sin embargo en los currículos de Castilla y León y Madrid aparece un criterio de evaluación en el tercer ciclo que introduce superficialmente la idea de ecuación y de incógnita:

"2. Completar, según corresponda, expresiones numéricas dadas, de la forma: a+¿=b; a–¿=b; ¿–a=b; ax¿=b; a:¿=b; ¿:a=b; donde a y b son números naturales cualesquiera menores o iguales que mil." (Decreto, 40/2007 del 3/5/2007 en el B.O.C. y L. 89 del 9/5/2007, p.9895 y Decreto, 22/2007 del 10/5/2007, en el B.O.C.M. 126 del 29/5/2007 p.47). (VER ANEXOS, cap. V, Anexo1: comparativa de contenidos curriculares)

En el ya mencionado Real Decreto (1631/2006) se establecen hasta las horas a impartir de matemáticas en la enseñanza secundaria obligatoria en general, así como los contenidos, criterios por curso, objetivos generales de secundaria y competencias. Los contenidos de matemáticas de secundaria se clasifican en 6 bloques:

1) Contenidos comunes,
2) Números,
3) Álgebra,
4) Geometría,
5) Funciones y gráficas y
6) Estadística y Probabilidad.

Mediante decretos y resoluciones, cada Comunidad Autonómica también concreta los contenidos de los currículos y las enseñanzas mínimas de matemáticas en secundaria, los cuales son muy similares, como no podía ser de otra manera, en unas y otras Comunidades (ANEXOS, Cap. V, ANEXO V, R. D. 1631/2006). En Madrid, por Resolución del 30 de Septiembre del 2009, para mejorar las pruebas de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) y las pruebas internacionales, se definen nuevos estándares de cada etapa del currículo. La Consejera de Educación ha establecido que se realicen las pruebas de conocimiento y destrezas indispensables, sin embargo "Los datos referidos a los resultados obtenidos en la materia de Matemáticas en dichas pruebas CDI en los dos últimos cursos, la última el 21 de abril de 2009, aconsejan la adopción de medidas para mejorar esos resultados. Para ello procede que se establezcan las pautas para fijar los conocimientos que todos los alumnos deben adquirir en cada momento de su progresión en el aprendizaje dentro de la Educación Secundaria Obligatoria, pues ello es beneficioso tanto para los centros, que tendrán guías para

Universidad Pontificia de Salamanca

organizar las enseñanzas de una manera coherente, sin perjuicio de la autonomía pedagógica que les asiste, como para los alumnos, los cuales, adquirirán los conocimientos adecuados a su grado de madurez sabiendo en todo momento qué es lo esencial" (Resolución de 30 de septiembre de 2009, Preámbulo introductoria). En esta Resolución se establece que las ecuaciones lineales se incorporen al currículo de 1º ESO y no en 2º ESO como se estableció en el currículo de enseñanzas mínimas.

La comunidad autónoma de Andalucía ofrece una presentación de la Ley Orgánica (2/2006), de 3 de mayo, *de Educación* (LOE) de forma diferente: los núcleos temáticos del currículo de secundaria, aunque no expresan competencias, son presentados como competencias y no como áreas de conocimientos que se trabajan y son como siguen (Orden del 10/8/2007 en el B.O.J.A. 171 del 30/8/2007 y Orden del 10/8/2007 en el B.O.J.A. 166 del 23/8/2007)

1. Resolución de problemas (transversal).
2. Uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (transversal).
3. Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas (transversal).
4. Desarrollo del sentido numérico y la simbolización matemática.
5. Las formas y figuras y sus propiedades.
6. Interpretación de fenómenos ambientales y sociales mediante funciones, gráficos, estadísticas y probabilidades.

Cada núcleo temático se trabaja desde las siguientes perspectivas: relevancia y sentido educativo, contenidos relevantes, interacción con otros núcleos temáticos y con las actividades; sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos; y criterios para la valoración de los aprendizajes.

Consultando los libros de texto, vemos que en 1º ESO se inicia a los estudiantes en lenguaje algebraico, expresiones algebraicas, se resuelven ecuaciones de primer grado y problemas. En 2º ESO además de repasar las ecuaciones de primer grado, aprenden a resolver ecuaciones de 2º grado y sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y resolución de problemas. Aparecen ya los polinomios, definiéndose operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias. Las igualdades notables son presentadas como una forma de resolver producto de binomios. En 3º ESO se vuelven a repasar los contenidos de los cursos anteriores, se estudian sucesiones, fracciones algebraicas y resolución de otro tipo de ecuaciones. Para el curso de 4º ESO opción B se estudia todo tipo de ecuaciones e inecuaciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

En la Comunidad de Madrid, además de las pruebas internacionales, se cuenta con unas pruebas propias de la comunidad, que se iniciaron en el año 2008, se hacen cada año en los meses de abril o mayo a los alumnos de 6º curso de Educación Primaria y de 3º ESO y se estiman de utilidad no solo para baremar el nivel de los alumnos de los diferentes colegios respecto de otros centros escolares, sino también para evaluar y reflexionar sobre los resultados logrados por los estudiantes de la Comunidad [177].

Tabla 5.1. Nota media sobre 10 de los resultados de las pruebas de las CDI en Madrid

	2008 (sobre 10)	2009 (sobre 10)	2010 (sobre 10)	2011 (sobre 10)	2012 (sobre 10)
Matemáticas	3,64	3,81	5,21	2,75	5,00
Ejercicios	4,61	4,36	4,99		5,63
Problemas	2,68	2,69	5,65		3,73

Fuente: www.madrid.org (Consulta: 16/enero/ 2013)

Del análisis de las preguntas y de los resultados de álgebra de estas pruebas con peores calificaciones tenemos una pregunta relativa a las igualdades:

Ejemplo 1:

CDI2009 Ejercicio 7- Son verdaderas o falsas las igualdades siguientes:

a) $\frac{5+10x}{5}=10x$ b) $(a-b)^2=a^2-b^2$

c) $8+8z=4(1+2z)$ d) $\sqrt{a^2+9}=a+3$

Resultados: BIEN: 8% REGULAR: 43% MAL: 49%

Ejemplo 2:

CDI 2009 Problema 1.- La madre de Laura y José ha pagado 122€ por un vestido y una sudadera que ha regalado a sus hijos. José protesta porque con lo que cuesta el vestido se podrían haber comprado dos sudaderas y habrían sobrado 17€.

A. Traduce la situación al lenguaje del álgebra mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, indicando con claridad el significado de las letras que empleas.
B. Calcula el precio del vestido y el de la sudadera.

Resultados: BIEN: 32% REGULAR: 5% MAL: 63%

[177] En los ANEXOS, CAPÍTULO V, en el Anexo 2 se muestran ejemplos de los ejercicios de Álgebra que se presentaron en las pruebas CDIS

Universidad Pontificia de Salamanca

En el transcurso del tiempo se ha pasado de hacer varias preguntas, para evaluar la habilidad y conocimientos del alumnado sobre ecuaciones, a solo la evaluación sobre la resolución de problemas sencillos de ecuaciones de primer grado, enfatizando aquellos problemas que puedan validar la competencia matemática, es decir, problemas que abarcan diferentes temas de conocimiento.

La Ley Orgánica (2/2006), de 3 de mayo, *de Educación*, establece que el Instituto Nacional de Evaluación Educativa, y los organismos correspondientes de las administraciones educativas colaboren en la realización de las Evaluaciones Generales de Diagnóstico (EGD) para obtener datos representativos, tanto del alumnado y de los centros de las comunidades autónomas, como del conjunto del Estado. Esta evaluación se centra en las competencias básicas del currículo y se realiza en 4º curso de Educación Primaria y 2º curso de ESO. Permite conocer la capacidad de los sujetos para aplicar en distintos contextos los conocimientos aprendidos, entender la realidad y resolver problemas prácticos [178]. Las competencias que evalúa son las siguientes:

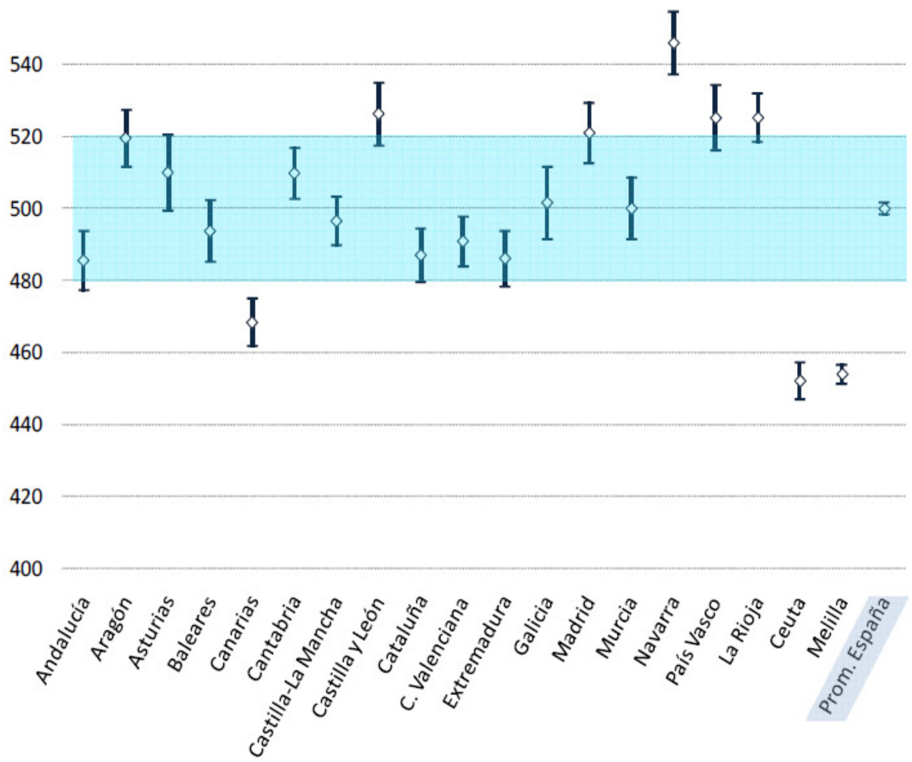
- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Competencia social y ciudadana.

En cuanto a la *Competencia matemática*, la investigación empírica muestra que hay seis comunidades autónomas cuyos promedios están situados entre 480 y 520 puntos, es decir, difieren en menos de 20 puntos del *Promedio España*. El promedio de seis comunidades autónomas no difiere significativamente de 520 puntos, y el de tres, de 480 puntos. La comunidad foral de Navarra presenta unos resultados promedios superiores significativamente a 520 puntos, en cambio otras se sitúan significativamente por debajo de los 480 puntos como se muestra con evidencia en el *Gráfico (6.1.),* que sigue.

[178] (http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e) (Consulta: 16/ enero/ 2013)

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 5.1.- Resultados promedio. Competencia matemática (Nota 13):



El gráfico precedente, respecto de las evaluaciones sobre competencias matemáticas se muestran resultados muy positivos en Navarra, País Vasco, La Rioja, Castilla y León, que se colocan por encima de la media española, mientras Ceuta y Melilla se descuelgan por debajo de los 460 puntos y Canarias se coloca en torno a los 470. En estas evaluaciones nacionales se establecen los niveles de competencias matemáticas, que se elaboran a partir de las competencias matemáticas fijadas en la legislación y con los resultados obtenidos se distribuyen los individuos y centros en unos determinados niveles. Los contenidos de estos niveles, a semejanza de cómo se procede en los Informes PISA se exponen en el cuadro 6.2., que sigue a continuación..

Cuadro 5.7.- Descripción de los niveles de competencias matemáticas

NIVEL	Lo que sabe y lo que sabe hacer el alumnado en cada uno de los niveles de rendimiento
5 643	***En el nivel 5, el alumnado además de conocimientos y destrezas del nivel anterior, es capaz de:*** -Utilizar técnicas y estrategias de resolución de problemas -Valorar la utilización de métodos de ensayo y error en la resolución de un planteamiento de ecuaciones de primer grado

Universidad Pontificia de Salamanca

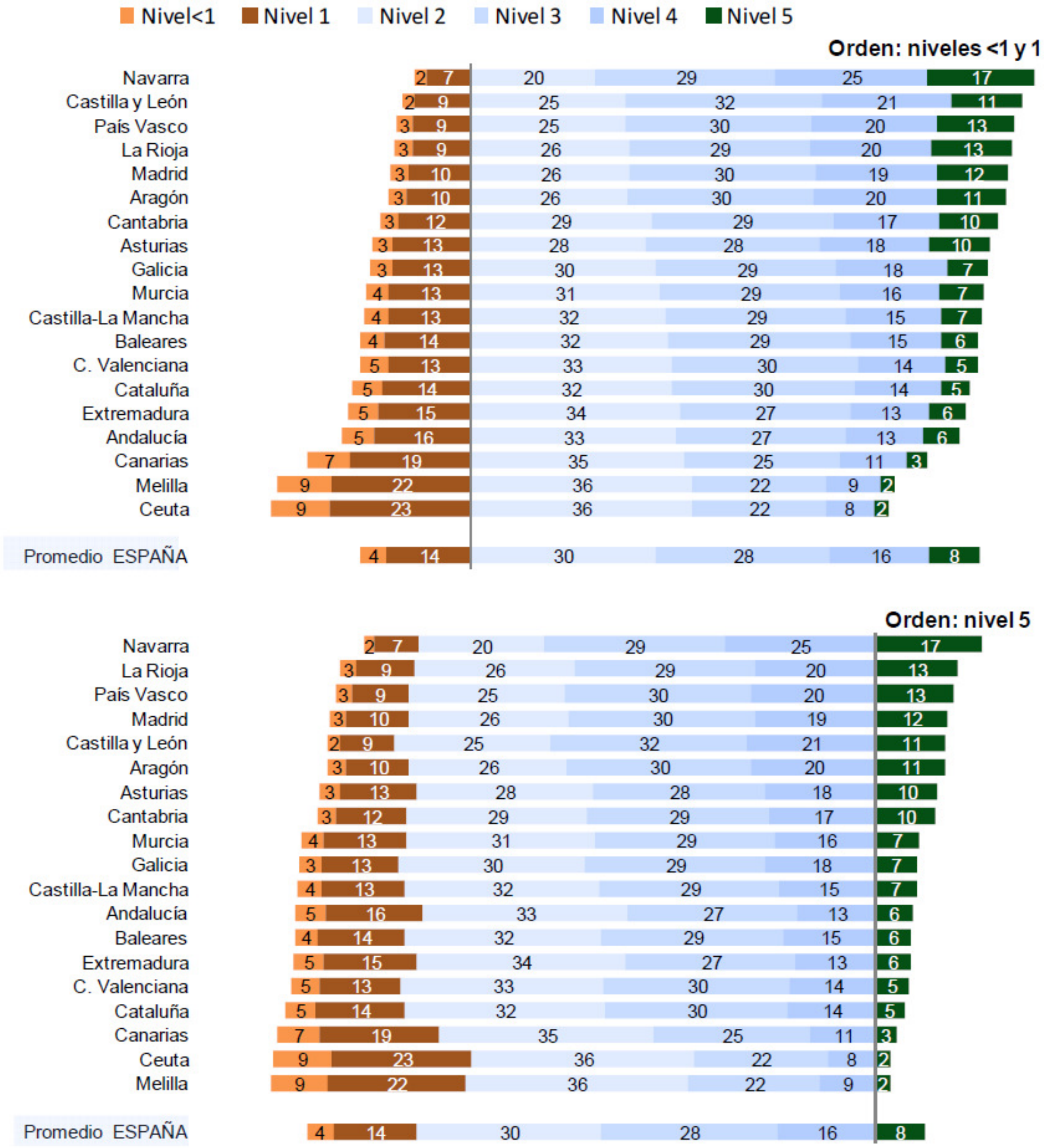
4 567	***En el nivel 4, el alumnado además de conocimientos y destrezas del nivel anterior, es capaz de:*** -Aplicar el conocimiento geométrico adquirido para describir e interpretar el mundo físico -Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas -Representar mediante vistas y perspectivas objetos y sistemas técnicos sencillos -Identificar relaciones de proporcionalidad numérica entre dos magnitudes
3 490	***En el nivel 3, el alumnado además de conocimientos y destrezas del nivel anterior, es capaz de:*** -Recoger y organizar la información obtenida. -Obtener valores a partir de relaciones funcionales. -Utilizar los conceptos básicos de la geometría para abordar situaciones y problemas de la vida cotidiana. -Enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. -Obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos. -Organizar informaciones diversas mediante tablas y gráficas.
2 413	***En el nivel 2, el alumnado además de conocimientos y destrezas del nivel anterior, es capaz de:*** -Utilizar, en la estimación o el cálculo de medidas, una precisión acorde con la situación planteada. -Comprender los conceptos implicados en el proceso de estimación o cálculo y la diversidad de métodos, que es capaz de poner en marcha. -Utilizar los números para resolver problemas de la vida cotidiana. -Estimar y calcular ángulos, longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos. -Utilizar los métodos estadísticos apropiados para realizar el análisis. -Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra, a partir de información previamente obtenida de forma empírica. -Diferenciar y comprender los conceptos de longitud, superficie y volumen. -Calcular longitudes y áreas y comprender los procesos de medida.
1 336	***En el nivel 1, el alumnado tiene capacidad para***: -Valorar la adecuación del resultado al contexto. -Diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios. -Aplicar los cálculos numéricos a una amplia variedad de contextos -Utilizar los números, sus operaciones y propiedades para transformar información. -Elegir la forma de cálculo apropiada, utilizando distintas estrategias. -Hallar valores relevantes a partir de los datos de una muestra. -Interpretar de forma cualitativa información presentada mediante tablas y gráficos. -Comprender el enunciado de los problemas a partir del análisis de un texto. -Utilizar las formas de proporcionalidad numérica para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. -Localizar y recuperar información explícita.

Fuente:
http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e
(Consulta 16/ enero/ 2013)

De acuerdo con los niveles precedentes, se obtiene la correspondiente distribución de las comunidades autonómicas, en relación con la competencia matemática, mediante los gráficos que se muestran a continuación.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 5.2.-Niveles de competencia matemática por comunidades en las pruebas de evaluación general de diagnostico del 2010 [179].



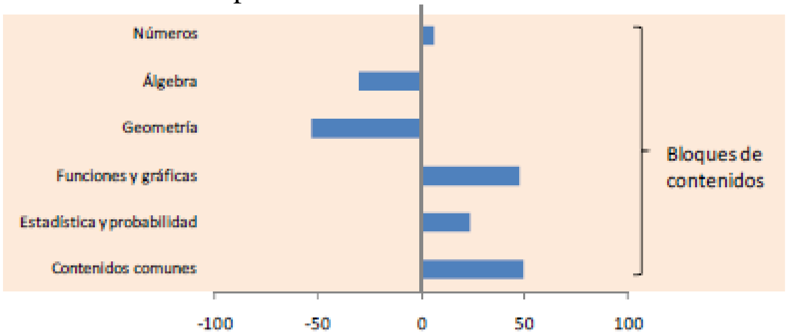
Fuente: http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consulta 17 – enero -2013)

[179] Se presentan dos gráficos de barras horizontales que incluyen los mismos datos, pero están ordenados con criterios diferentes. En el primer gráfico las barras se han situado de modo que se perciba la ordenación de los porcentajes por los niveles inferiores de rendimiento (niveles <1 y 1); en el segundo gráfico, según el nivel superior de rendimiento (*nivel 5)*

Universidad Pontificia de Salamanca

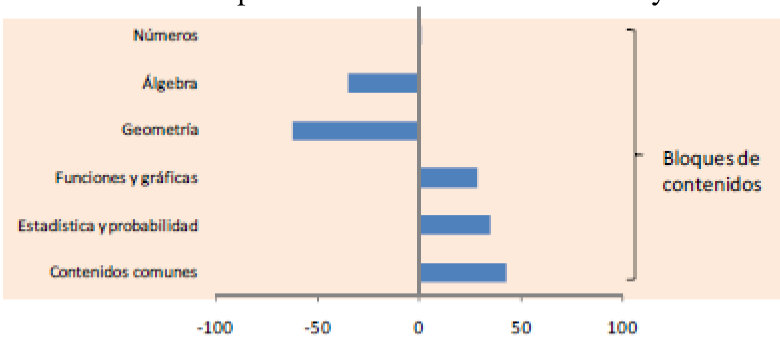
Por bloques de contenidos tenemos que el bloque de Álgebra y Números son los que obtienen los peores resultados en todas las comunidades. Ejemplo expresivo de tales resultados de las distintas comunidades autónomas son los gráficos que siguen:

Gráfico 5.3.- Competencia matemática en Andalucía



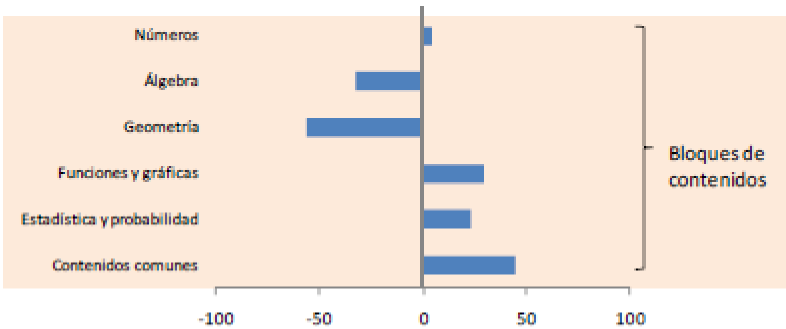
Fuente:http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consulta 22-Mayo-2013)

Gráfico 5.4.- Competencia matemática en Castilla y León



Fuente:http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consulta 22-Mayo-2013)

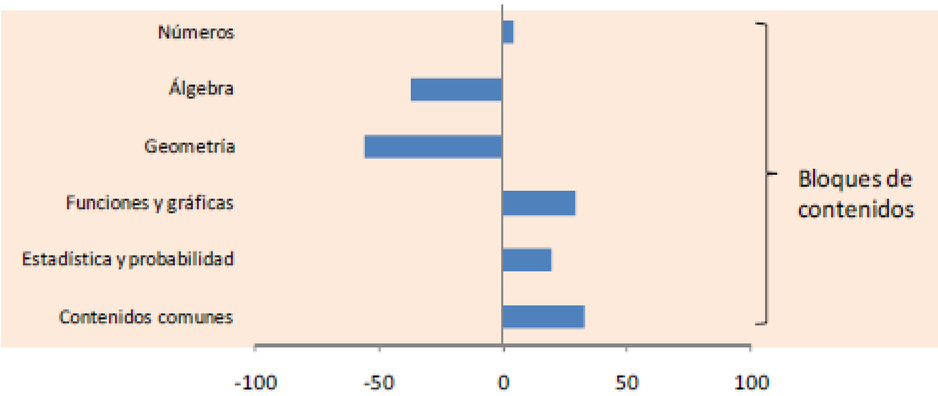
Gráfico 5.5.- Competencia matemática en Madrid



Fuente:http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consulta 22-Mayo-2013)

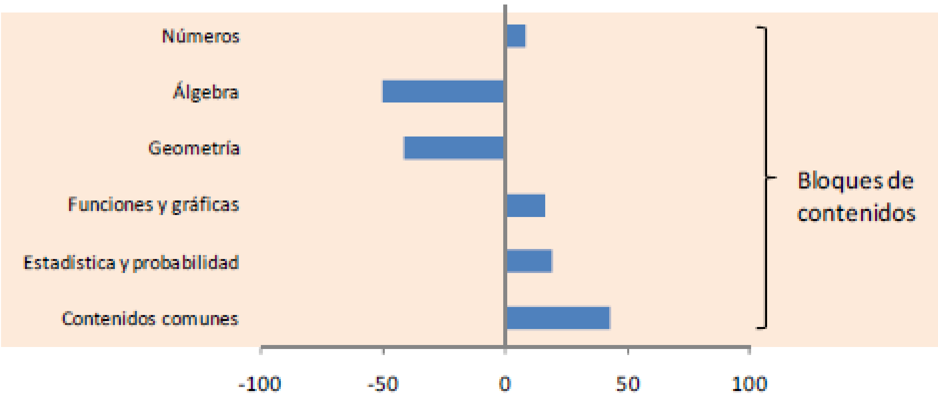
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 5.6.- Competencia matemática en Navarra



Fuente:http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consulta 22-Mayo-2013)

Gráfico 5.7.- Competencia matemática en País Vasco



Fuente:http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consulta 22-Mayo-2013)

5.5.2.- Resultados de las pruebas internacionales de TIMSS

La IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento en Educación)[180] es una asociación cooperativa e independiente formada por instituciones nacionales y agencias gubernativas dedicadas a la investigación y evaluación del rendimiento de los alumnos. Fundada en 1959, la IEA ha llevado a cabo numerosos estudios de evaluación internacionales basados en los currículos centrándose en dominios de contenidos y dominios cognitivos. Dos de los más antiguos y destacados son TIMSS (*Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias*)[181] y PIRLS (*Estudio Internacional de Progreso en Comprensión Lectora*); ambos evalúan el

[180]The International Association for the Evaluation of Educational Achievement

[181] Trends in International Mathematics and Science Study

Universidad Pontificia de Salamanca

rendimiento del alumnado en 4º curso de Educación Primaria (10 años) y también en 2º curso de ESO (14 años). Los dominios de conocimiento evalúa el informe TIMSS de 2º ESO (8º grado) son los siguientes [182]:

Números: números naturales, fracciones y decimales, enteros, razón, proporción y porcentaje.

Álgebra: modelos, expresiones algebraicas, ecuaciones/fórmulas y funciones.

Geometría: formas geométricas, medidas geométricas, situaciones y movimientos;

Datos y probabilidad: organizar y representar datos, interpretar datos y probabilidad [183].

La escala de rendimiento se estableció para tener una media de escala en 500 y una desviación estándar de 100. España participa en las pruebas de TIMSS en 4º grado, pero no lo hace en 2º ESO ya que realiza las pruebas PISA. Los mejores resultados en 4º grado son obtenidos por Singapur (606), Corea (605), Hong-Kong (602), China (591), Japón (585). Por encima de la media también se encuentran Finlandia (545), Inglaterra (542), Rusia (542), USA (541). España ocupó el quinto lugar con su media de 482 por debajo de países como Malta (496), Croacia (490), Nueva Zelanda (486) que están por debajo de la media TIMSS, que es de 500.

Los resultados mejores de TIMSS 2011 para el 8º grado (equivalente a nuestro 2º ESO) son también para los países asiáticos como Corea (613), Singapur (611), China (609), Hong-Kong (586), Japón (580), seguido de Rusia (539), Finlandia(514), USA (509), Inglaterra (507). Por debajo de la media aparecen Italia (498), Nueva Zelanda (488), países que estaban por encima de España en los resultados de TIMSS / 2011 en 4º grado de primaria. Respecto del conocimiento de Álgebra, los países con mejores resultados siguen siendo los asiáticos: China (628), Corea (617), Singapur (614), Japón (570) y Rusia (556), USA (515), Finlandia (492).

---

[182] Los Graficos de TIMSS / 2011 pueden verse en ANEXOS, cap. V, Anexo 3.

[183] TIMSS / 2011 Marcos de Evaluación, http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/inee-timss-2011.-marcos-de-la-evaluacion.pdf?documentId=0901e72b8127e807) (Consulta / 15 / enero/ 2013)

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 5.8.- Resultados por dominios de conocimiento[184] de TIMS / 2011 (8º grado)

Country	Overall Mathematics Average Scale Score	Number: Average Scale Score	Number: Difference from Overall Mathematics Score	Algebra: Average Scale Score	Algebra: Difference from Overall Mathematics Score
Korea, Rep. of	613 (2.9)	618 (2.6)	5 (1.2) ▲	617 (3.2)	4 (1.6) ▲
2 Singapore	611 (3.8)	611 (3.6)	0 (1.4)	614 (4.1)	3 (0.9) ▲
Chinese Taipei	609 (3.2)	598 (3.1)	−12 (1.0) ▼	628 (3.8)	19 (1.5) ▲
Hong Kong SAR	586 (3.8)	588 (3.7)	2 (1.2) ▲	583 (3.9)	−3 (1.2) ▼
Japan	570 (2.6)	557 (3.0)	−13 (1.6) ▼	570 (3.0)	0 (1.6)
2 Russian Federation	539 (3.6)	534 (3.2)	−5 (1.0) ▼	556 (3.7)	17 (1.7) ▲
3 Israel	516 (4.1)	518 (4.0)	2 (1.1)	521 (4.7)	5 (1.7) ▲
Finland	514 (2.5)	527 (2.4)	13 (1.1) ▲	492 (2.9)	−22 (1.5) ▼
2 United States	509 (2.6)	514 (3.0)	4 (1.0) ▲	512 (2.6)	2 (1.0) ▲
‡ England	507 (5.5)	512 (5.8)	5 (1.4) ▲	489 (5.7)	−17 (1.5) ▼
Hungary	505 (3.5)	510 (3.9)	5 (1.1) ▲	496 (4.0)	−8 (1.8) ▼
Australia	505 (5.1)	513 (5.4)	8 (0.9) ▲	489 (5.3)	−16 (1.6) ▼
Slovenia	505 (2.2)	511 (2.5)	6 (1.1) ▲	493 (2.6)	−12 (1.8) ▼
1 Lithuania	502 (2.5)	501 (2.5)	−1 (1.5)	492 (2.8)	−10 (1.5) ▼
Italy	498 (2.4)	496 (2.9)	−2 (1.7)	491 (2.7)	−8 (1.3) ▼
New Zealand	488 (5.5)	492 (5.9)	5 (1.2) ▲	472 (5.5)	−16 (1.2) ▼
Kazakhstan	487 (4.0)	479 (4.0)	−8 (1.8) ▼	506 (4.4)	19 (1.4) ▲
Sweden	484 (1.9)	504 (1.8)	19 (1.0) ▲	459 (2.2)	−26 (1.2) ▼
Ukraine	479 (3.9)	472 (4.1)	−7 (1.8) ▼	487 (4.4)	8 (1.6) ▲
Norway	475 (2.4)	492 (2.8)	18 (1.1) ▲	432 (2.7)	−43 (1.3) ▼
Armenia	467 (2.7)	474 (2.4)	7 (1.0) ▲	496 (2.8)	29 (1.1) ▲
Romania	458 (4.0)	448 (4.1)	−10 (1.7) ▼	477 (4.3)	19 (1.6) ▲
United Arab Emirates	456 (2.1)	459 (2.2)	3 (0.8) ▲	468 (2.2)	12 (1.3) ▲
Turkey	452 (3.9)	435 (3.9)	−18 (1.5) ▼	455 (4.2)	2 (1.2) ▲
Lebanon	449 (3.7)	451 (3.8)	2 (1.9)	471 (3.8)	22 (1.5) ▲
Malaysia	440 (5.4)	451 (5.8)	11 (1.2) ▲	430 (5.2)	−10 (1.3) ▼
1 Georgia	431 (3.8)	435 (3.5)	4 (1.5) ▲	450 (3.8)	19 (1.6) ▲
Thailand	427 (4.3)	425 (4.6)	−2 (1.0) ▼	425 (4.3)	−2 (1.2)
Ψ Macedonia, Rep. of	426 (5.2)	418 (5.1)	−8 (2.3) ▼	448 (5.3)	22 (2.3) ▲
Tunisia	425 (2.8)	431 (2.8)	6 (1.8) ▲	419 (2.9)	−6 (1.7) ▼
Chile	416 (2.6)	413 (2.9)	−4 (1.2) ▼	403 (3.6)	−14 (2.1) ▼
Ψ Iran, Islamic Rep. of	415 (4.3)	402 (4.9)	−13 (2.7) ▼	422 (4.3)	7 (1.9) ▲
Ψ Qatar	410 (3.1)	408 (3.4)	−1 (1.9)	425 (2.8)	15 (1.9) ▲
Ψ Bahrain	409 (2.0)	397 (1.7)	−13 (1.4) ▼	424 (1.7)	15 (1.2) ▲
Ψ Jordan	406 (3.7)	390 (3.8)	−15 (1.4) ▼	432 (3.9)	26 (1.1) ▲
Ψ Palestinian Nat'l Auth.	404 (3.5)	400 (3.4)	−5 (1.2) ▼	419 (3.3)	14 (1.6) ▲
Ψ Saudi Arabia	394 (4.6)	393 (4.8)	−1 (1.9)	399 (4.9)	6 (1.3) ▲
Ψ Indonesia	386 (4.3)	375 (4.8)	−11 (2.0) ▼	392 (3.8)	6 (1.3) ▲
Ψ Syrian Arab Republic	380 (4.5)	373 (4.0)	−7 (1.8) ▼	391 (4.9)	11 (2.8) ▲
Ж Morocco	371 (2.0)	379 (2.6)	8 (1.3) ▲	357 (2.7)	−15 (1.6) ▼
Ψ Oman	366 (2.8)	351 (3.0)	−16 (1.9) ▼	383 (2.8)	17 (1.4) ▲
Ж Ghana	331 (4.3)	321 (4.5)	−10 (1.8) ▼	358 (4.0)	28 (2.1) ▲

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

▲ Subscale score significantly higher than overall mathematics score

▼ Subscale score significantly lower than overall mathematics score

Ж Average achievement not reliably measured because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 25%.

Ψ Reservations about reliability of average achievement because the percentage of students with achievement too low for estimation does not exceed 25% but exceeds 15%.

See Appendix C.3 for target population coverage notes 1, 2, and 3. See Appendix C.9 for sampling guidelines and sampling participation notes †, ‡, and ‡.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because of rounding some results may appear inconsistent.

184 TIMSS / 2011 Marcos de Evaluación, http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/inee-timss-2011.-marcos-de-la-evaluacion.pdf?documentId=0901e72b8127e807 (Consulta / 15 / enero/ 2013)

Universidad Pontificia de Salamanca

En TIMSS / 2011 (Enciclopedia 1 y 2) se describen brevemente los sistemas educativos de los países participantes. Los países asiáticos tienen generalmente una incorporación del álgebra al currículo antes que España, a nivel de primaria. Lo que también sucede en USA que donde los estándares de la NTCM[185] (2000) recomiendan una incorporación del álgebra a los dos últimos cursos de primaria. Las investigaciones en didáctica del algebra y cuando incorporar el álgebra al currículo han sido canalizadas en dos alternativas: "Pre-algebra" donde se propone que se suavice el paso de la aritmética al algebra y "early algebra" que propone la introducción de contenido algebraico en las matemáticas desde los primeros años de primaria, que se fortalezca el estudio del álgebra.

Las numerosas y enriquecedoras investigaciones en didáctica del álgebra se han orientado desde el comienzo a cuál es la edad adecuada del alumno para poder entender, aprender los contenidos algebraicos, definir y caracterizar el pensamiento algebraico, investigaciones sobre los errores más comunes cometidos en las tareas del álgebra así como incorporar los recursos de las TIC para motivar, dar más sentido a lo aprendido y ayudar a la adquisición de habilidades algebraicas. Algunos trabajos de investigación sugieren que se trabajen habilidades y saberes algebraicos desde primaria para que este saber de las matemáticas fuera realizado de forma más secuencial en el tiempo y los alumnos estuvieran más preparados para los saberes de álgebra propios de la secundaria, sin embargo, sobre este aspecto, no hay todavía un consenso generalizado.

5.5.3.- A modo de síntesis

En el precedente apartado se han considerado las experiencias españolas y también algunos dados correspondientes a pruebas internacionales de consolidado prestigio. En cuanto a lo primero, la mención se extiende a los dos niveles de actuación: la experiencia nacional y el escenario autonómico. En cuanto a lo primero es obligada referencia a la legislación vigente, la LOE (2/2006), de 3 de mayo y el Real Decreto (1631/2006) en que se detallan minuciosamente contenidos, objetivos, criterios de evaluación, competencias, hasta las horas a impartir de matemáticas en la enseñanza secundaria obligatoria. Al estar transferidas a las Comunidades Autonómicas las

[185] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

Universidad Pontificia de Salamanca

competencias educativas de la ESO, la labor del Estado se reduce a señalar las grandes líneas de actuación, que ejecuta mediante la legislación correspondiente, como se ha hecho principalmente mediante la legislación nacional mencionada.

Como consecuencia de la transferencia de la gestión de la Educación Secundaria Obligatoria, son las Comunidades Autónomas las que están produciendo una cierta teoría sobre la enseñanza de las matemáticas en dos planos: el de normativas legales que producen las Comunidades y aquellas experiencias que impulsan en su ámbito de actuación en cuanto a dotación de nuevos recursos didácticos – videos, museos de matemáticas y de la ciencia, torneos nacionales de matemáticas y ciencias, dotaciones de TICs en las aulas – así como nuevos criterios de evaluación. Se percibe también cierto impulso a la formación específica y permanente del profesorado y se están impulsando pruebas generales en el territorio comunitario. Teniendo en cuenta que son 19 Comunidades Autónomas, que gestionan en España la ESO, nos ha parecido oportuno prestar atención a tres de ellas como representativas del conjunto autonómico. Los datos que se han mostrado se refieren a Andalucía, Castilla y León, Madrid y Navarra.

En cuanto al espacio internacional he reducido la actuación a mostrar los resultados de dos pruebas internacionales, de prestigio técnico indiscutible, PISA y TIMSS sobre los resultados de la enseñanza de las matemáticas, en diferentes escenarios, no solo para comparar nuestra situación con la de otros países de nuestra situación económica y política, sino también para interrogarnos sobre posibles causas del retraso en relación con los estudios del álgebra.

5.6.- COROLARIOS PEDAGÓGICOS PARA LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LAS MATEMÁTICAS

Algunos autores, al referirse a la enseñanza de las matemáticas, insisten en centrar sus recomendaciones en los problemas y de modo especial en la necesidad de comenzar siempre por los tipos más sencillos, cuyo objetivo no es tanto que manifiesten sus posibilidades en lo fácil cuanto sus capacidades para avanzar hacia lo más complejo, puesto que en matemáticas no son posibles saltos desde lo desconocido a lo que puede conocerse. Avanzar con seguridad por las sendas de las matemáticas significa no dejar atrás zonas desconocidas, ignoradas o no comprendidas. En este caso haría bien el

Universidad Pontificia de Salamanca

profesor de matemáticas no consentir que los alumnos, sin tener la comprensión, conocer los procedimientos y resolver los problemas de hoy, se dediquen a los de mañana sin haber entregado bien hechos los ejercicios y problemas de ayer (Martínez, J., 2000: 159-164).

En la enseñanza actual de las matemáticas, lo más valioso no es tanto el contenido de la materia del proceso de la enseñanza-aprendizaje, cuanto el alumno que aprende y que ha de ser enseñado. Por consiguiente, será obligado tomar en consideración su contexto de referencia, de donde suelen tomar las pautas y valores que pueden inspirar su comportamiento y el contexto de pertenencia en el que se ubica y donde recibió su primera socialización. Si antaño este contexto de pertenencia lo llenaba el círculo familiar y poco más, en la actualidad este contexto es mucho más complejo en su ideario y trasciende el núcleo familiar, en gran medida se nutre de los grupos de amigos con los que comparte el tiempo libre y el centro escolar, alcanzando asimismo a los medios de comunicación a los que se asoma diariamente. Es decir se trata de un contexto muy amplio y de enorme complejidad.

5.6.1.- Desde la didáctica.

Para enseñar bien, es obligado atender a las técnicas de enseñanza adecuadas al nivel evolutivo, a los intereses, y a otros aspectos emocionales como la autoestima. En la actual enseñanza de las matemáticas o de cualquier otro saber debería comenzarse por conocer y tener en cuenta las posibilidades y las peculiaridades del alumno. Desde este punto de vista y teniendo en cuenta además el alto grado de estructuración actual de las Matemáticas, en principio, el profesor ha de estar abierto a la variedad de procedimientos didácticos actualmente en uso y a la pluralidad de recursos de utilidad en la enseñanza de las matemáticas, puesto que se encontrará con estudiantes que trabajan mejor con programas individualizados y otros progresan más en los conocimientos matemáticos, siguiendo procedimientos cooperativos o tecnológicos (Ayala, C. et al., 1997: 129-132). En todo caso la mentalidad social del trabajo en grupo o en equipo está presente en las mentes de los adolescentes a quienes se les trata de enseñar matemáticas u otros saberes en el nivel de la enseñanza secundaria obligatoria. Un dato significativo: la palabra didáctica en la red se encuentra con más de quince millones de resultados en lengua española, igual que el término enseñar.

Un segundo aspecto que interesa puntualizar. El ser humano es un individuo que

Universidad Pontificia de Salamanca

nace con un equipamiento social básico, lo cual no obsta al hecho de que todos los seres humanos pasan por una etapa en la que son enseñados por otros, es decir, son socializados y formados para vivir productivamente en la sociedad, son ayudados para que aprendan los contenidos más necesarios acerca de la realidad humana, social y natural e incluso se les ayuda a desarrollar la personalidad en sus dimensiones más substanciales, su desarrollo físico, intelectual y afectivo. Comentando una obra de Arendt, la pedagoga noruega Inger Enkevist ratifica la necesidad de moverse en este contexto en el proceso educativo [186]. Esta senda tiene un largo recorrido histórico y, en consecuencia, son muchas y variadas las experiencias didácticas. Desde la antigüedad ya Platón estableció un sistema de enseñanza por medio del discurso que ha llegado hasta la actualidad, aunque se haya hecho más sofisticado.

Desde Weber (1977:20) no se cuestiona ya que la conducta humana es susceptible de estudio científico si bien la certeza de las conclusiones a que se llegue será distinta en los diferentes saberes y en el ámbito de la conducta humana tendrá una menor consistencia que las conclusiones obtenidas por el estudioso del mundo natural, donde imperan leyes universales y suficientemente fijas, aún siguiendo procedimientos equivalentes. La didáctica también tiene en lo educativo su perspectiva propia pero parcial. En el ejercicio didáctico o en el acto didáctico no sólo se entra en contacto con la pedagogía sino que también lo hace con otras ciencias educativas y por consiguiente la actuación didáctica ha de seguir con preferencia pautas de interdisciplinariedad. En el informe Delors se afirmaba que el educando debe aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a ser y aprender a convivir. De esta famosa propuesta parece inferirse que la didáctica tendrá relación con la psicología para saber cómo aprende el educando los conocimientos y los procedimientos; con la filosofía para captar como se comprenden los valores que conforman una esencial dimensión de la vida humana y con la sociología

[186] Arendt, sostiene que los niños no están siendo oprimidos cuando se les educa, sino que están aprendiendo lo que necesitarán pronto, en su vida de adultos. Además, cuando la autoridad del profesor desaparece, la autoridad se desplaza, por lo común en beneficio del alumno con más voluntad de ejercer el poder sobre sus compañeros. Una nueva teoría sobre el aprendizaje dice que sólo puedes aprender lo que has, de algún modo, manipulado tú mismo. El aprendizaje, que en principio cae en el terreno de lo teórico, ha pasado a ser algo práctico. Y como lo inmediatamente constatable es que lo que los niños hacen mejor es jugar, la conclusión es que deben aprender jugando, con lo que desaparece la línea divisoria entre el esfuerzo, el trabajo y el juego. Todo esto lleva a una práctica que no funciona. (…)Los niños necesitan estos conocimientos, ya que su tarea, forzosamente, será de la renovar el mundo manteniéndolo, adaptándolo y mejorándolo. En otras palabras, la conservación, la tradición y la autoridad dentro de la educación no tienen nada que ver con el conservadurismo político, y todo con el bienestar y la futura libertad y capacidad de actuar de los niños. (Enkevist, Inger, 2009. “Ana Arendt y la filosofía de la Educación”, en rev. La Ilustración Liberal, nº 41, otoño 2009. Madrid

Universidad Pontificia de Salamanca

para conocer el escenario social en el que se mueven los individuos y percibir los contextos en donde se recrea la vida cotidiana del educando. La específica finalidad de la didáctica se polariza prioritariamente en torno a dos tipos de actividades: enseñar y aprender. En nuestro caso esta ciencia debe servir para responder a cuestiones de ¿cómo enseñar mejor las matemáticas?, ¿para qué formar a los estudiantes de matemáticas? o también ¿qué mejora profesional necesita el profesorado de matemáticas de la ESO y de Bachillerato?. Las preguntas podían seguir derroteros semejantes: quiénes son nuestros estudiantes y cómo aprenden, qué matemáticas hemos de enseñar a los estudiantes de la ESO y qué implica la actualización del saber matemático y, especialmente, cómo y con qué medios realizar la tarea de la enseñanza de las matemáticas. Habría que prestar atención a asuntos como la selección y el diseño de los medios formativos que mejor se adecuen al contexto de interculturalidad e interdisciplinariedad, valorando la calidad del proceso y de los resultados formativos. En consecuencia, son abundantes los temas nucleares de esta ciencia referidos a la enseñanza de las diferentes disciplinas académicas, con sus teorías, modelos, metodologías y normas para desarrollar los procesos de enseñanza-aprendizaje. También es significativo el análisis de los factores que llevan al aprendizaje y a la comunicación didáctica, sin la cual no pueden producirse auténticos procesos de enseñanza-aprendizaje, que debieran culminar en una satisfactoria formación humana y social de los alumnos.

5.6.2.- Hacia el aprendizaje.

Con la didáctica participa en el proceso educativo el aprendizaje, que es un término usual en las experiencias cotidianas de nuestra vida y su presencia más frecuente todavía en el contexto formal de la escolaridad y la academia, con el significado vulgar de adquirir información. La actividad de informarse desencadena una serie de mecanismos y procesos básicos como la atención, el interés, la percepción, la memoria, el lenguaje y el pensamiento que permiten dar respuesta a la curiosidad intelectual innata al ser humano y configurar la concepción que el sujeto tiene de su entorno. El discurso educativo transitará por sendas convergentes que aproximan las distintas perspectivas del aprendizaje, a fin de elaborar una noción comprensiva y ajustada del sentido del aprendizaje matemático. En el contexto educativo, aproximación no significa acelerar el proceso del aprendizaje, como a veces puede entenderse, desde el uso de nuevos medios tecnológicos que tantas veces y con razón se reclaman. Sin embargo la enseñanza y el aprendizaje “no se pueden comprimir en sólo

Universidad Pontificia de Salamanca

días intensivos, ni fragmentar en capítulos, ni comprimir en fórmulas aisladas de la totalidad, ni suplir con fotocopias. Necesarios son la calculadora y el ordenador, pero ¿qué sujeto los usará?. La radicación de éste es directamente proporcional al tiempo empleado en pensar y al esfuerzo en discernir e integrar" (González de Cardenal, 2013).

Otra interesante perspectiva es que el aprendizaje implica la modificación o el cambio que se produce en el individuo cuando se éste aprende algo sobre una realidad, hasta el presente desconocida por el sujeto. En consecuencia, es posible detectar la modificación experimentada por el sujeto, comparando la situación previa y posterior al acto del aprendizaje. Las variaciones mencionadas pueden referirse a aspectos tan diversos como la adquisición de conocimientos, de habilidades, de actitudes o de estrategias de pensamiento. Para afirmar que se ha producido un aprendizaje se hace preciso constatar que ha habido una modificación relativamente estable. En este sentido quedan excluidos los cambios debidos a la propia maduración del organismo o aquellas alteraciones conductuales que pueden aparecer bajo el transitorio efecto de la fatiga, la habituación, el uso de determinados fármacos, drogas, etc. Desde la perspectiva del cambio, los resultados del aprendizaje pueden interpretarse como un apropiado indicador, entre otros, para medir los progresos del sistema educativo que constituye preocupación generalizada en los Estados de la Unión Europea como consta en un reciente informe de la Agencia Ejecutiva en el Ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural, 2012 que afirma lo siguiente: "La mayoría de los países utilizan los resultados que obtienen los alumnos en pruebas externas junto con la información obtenida en los procesos de evaluación escolar con vistas a hacer un seguimiento de sus sistemas educativos. En más de la mitad de los países europeos, los alumnos realizan pruebas nacionales de evaluación cuyo objetivo principal es llevar a cabo un seguimiento del rendimiento tanto de los centros como del sistema educativo" (2012:14).

5.6.3.- Motivados

Pese a las muchas críticas que, en su momento suscitó la metodología weberiana, no cabe duda que tiene una notable importancia en el área de los saberes educativos, humanos y sociales. Weber había comprendido la necesidad de avanzar en el descubrimiento de las múltiples y variadas motivaciones sobre las que se apoya la conducta humana, cuya riqueza y complejidad trasciende las limitaciones de los

Universidad Pontificia de Salamanca

procedimientos estadísticos [187]. El autor resaltó la importancia del estudio de situaciones concretas y singulares, por contraposición a las grandes generalizaciones, poniendo de relieve por una parte la inseparable conexión entre causalidad y significación en los comportamientos humanos y por otra la motivación, que permite la comprensión de los comportamientos humanos, aunque en ningún caso asimilable a la causalidad.

Entre otros objetivos, en este capítulo se prestó esmerada atención a la indagación y análisis de la conducta que unos específicos grupos de estudiantes de la ESO pusieron en práctica, en el estudio del álgebra correspondiente a las matemáticas del nivel de la enseñanza secundaria obligatoria. Para la mejor comprensión de esta conducta y de sus motivaciones, es obvia la necesidad de contar con probadas estrategias y sofisticados instrumentos, mediante los que se obtuvo la necesaria información. La indagación sobre las las motivaciones que animaban o desanimaban la conducta de los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas constituía un asunto de importancia incuestionable en la elaboración de la tesis. El conocimiento de los motivos que inspiran un determinado comportamiento posibilita la mejora de los procedimientos didácticos y la consecución de positivos resultados en el aprendizaje de las matemáticas.

Desde la experiencia contrastada se puede concluir que los estudiantes con quienes se llevó a cabo la investigación están instalados en unas óptimas coordenadas culturales y científicas para hacer importantes progresos en el estudio y aprendizaje de las matemáticas. Su motivación existencial de partida anida en un convencimiento profundo de que las matemáticas son el saber por excelencia, es la condición ineludible para seleccionar la senda que puede llevar al éxito económico y social, como es la elección de una carrera adecuada a las condiciones de la vida actual. Las matemáticas se interpretan no solo como condición sino como factor estructural de los futuros éxitos profesionales, sociales y económicos. Los estudiantes han interiorizado la creencia de

[187] "No se trata tanto de una vuelta a Weber como al 'espíritu del weberianismo'. Si bien Weber era un partidario cierto de la racionalidad científica del Occidente moderno, tenía una comprensión muy clara de lo que esto significaba para el estudio de los asuntos humanos: los fenómenos humanos no hablan por si mismos, sino que han de interpretarse. Así el meollo de la metodología de Weber consistía en una aclaración del acto de la interpretación. No obstante esta aclaración suponía algo más que áridas consideraciones metodológicas. También tenía una disposición moral y hasta humana. Se da un elemento existencial especial en el hecho de ser capaz de dedicar atención cuidadosa y paciente a los significados de las vidas de otras personas, a descifrar los significados internos de los fenómenos sociales" (Berger, P.L. y Kellner, H., (1985: 45). La reinterpretación de la sociología. Madrid: Espasa-Calpe).

Universidad Pontificia de Salamanca

que las matemáticas son absolutamente necesarias y útiles para la vida y, en consecuencia sus motivaciones están profundamente arraigadas y constituyen un impulso motivador de excelente calidad en el aprendizaje de las matemáticas. La situación se percibe consistente en cuanto está arraigada en el círculo contextual decisivo de su familia y de los grupos de amigos y compañeros, con los que diariamente ensaya su progresiva integración social. Los estudiantes se sienten apoyados y en perfecta sintonía en la valoración positiva de las matemáticas para la realización de sus ideales económicos, sociales y profesionales. Estos núcleos motivacionales tienen un impacto decisivo en el aprendizaje matemático, que no se reduce a las exigencias escolares sino que trasciende a la vida misma y es coincidente con una de las lecciones que PISA quería transmitir a la sociedad española, que las matemáticas son un saber tan necesario y útil que no puede menos de suscitar actitudes positivas en la ciudadanía para esforzarse en su aprendizaje.

Universidad Pontificia de Salamanca

5.7.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGENCIA EJECUTIVA EN EL ÁMBITO EDUCATIVO, AUDIOVISUAL Y CULTURAL, (2012). *Cifras clave de la educación en Europa 2012*. Madrid: red EURIDYCE y Secretaría General Técnica del MEC y D.

ALTAREJOS, F. y otros, (2003). *Retos educativos de la globalización*. Pamplona: Universidad de Navarra, Pamplona.

AMEZCÚA, J. A. y FERNÁNDEZ, E., (2000). "La influencia del autoconcepto en el rendimiento académico". En *Iberpsicología*, 5 (1).

ARON, R., (1970).*Las etapas del pensamiento sociológico*. Buenos Aires: Siglo Veinte.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G., 1994. *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche.* Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.

AUSUBEL, D. et al., (1976). *Psicología cognitiva. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

AYALA, C.I.; GALVE, J.L.; MOZAS, L. y TRALLERO, M., (1997).*La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales.* Madrid: CEPE.

BACHELARD, G., (1938). *La formation de l'esprit scientifique*, Librairie Philosophique, J. Vrin, París, 1986.

BANDURA, A., (1987). *Pensamiento y acción: Fundamentos sociales*. Barcelona: Martinez Roca.

BARRERAS, M., (2012). Mates en la vila, en la revista *Cuadernos de Pedagogía.* Marzo, nº 421, Barcelona, pp. 69-71.

BELTRÁN LLERA, J.A., (1984). Psicología de la educación: una promesa histórica. *Revista española de pedagogía (Madrid)* 41, 162, 523-544.

BERGER, P.L. y KELLNER, H., (1985). *La reinterpretación de la sociología*. Madrid: Espasa-Calpe.

BERMEJO, V., (Coord.), (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.

BLOOM, B.S. (1979). *Taxonomía de los objetivos educativos*. Alcoy: Marfil.

BOOTH, L.R., (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* (NFER-Nelson: Windsor, UK).

BROUSSEAU, G., (1983), 'Les obstacles epistémologiques et les probl`emes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Math´ematiques*, 4(2), 165-198.

Universidad Pontificia de Salamanca

BUTTO, C. y ROJANO, T., (2009). “Pensamiento algebraico temprano”, en *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Veracruz, México.

CAÑAL, P., (2000). El análisis didáctico de la dinámica del aula: tareas, actividades y estrategias de enseñanza. En PERALES, F.J. y CAÑAL, P. *Didáctica de las ciencias experimentales.* (209-238) Ed. Marfil. Alcoy.

CARBONELL, S., J.,(2008). *Una educación para mañana*. Barcelona: Octaedro.

CARRAHER, D. W.y SCHLIEMANN, A. L., (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007, v. 2, p. 669 - 705.

CASTEJÓN, J. L.; GONZÁLEZ, C.; GILAR, R. y MIÑANO, P., (2010). *Psicología de la educación*. Alicante: Editorial Club Universitario.

CLAPHAM, C., (1998). *Diccionario de Matemáticas.* Madrid: Oxford-Complutense.

CLAXTON, G., (1991). *Educar mentes curiosas.* Madrid: A. Machado libros.

COMENIO, J.A., (1632). *Didáctica Magna*. Madrid: Reus. Tomado de GER, tomo VII (1972). Madrid: Rialp.

DECRETO (22/2007) del 10/5/2007 en el B.O.C.M. 126 del 29/5/2007.

DECRETO (40/2007) del 3/5/2007 en el B.O.C. y L. 89 del 9/5/2007.

DELORS, J., (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid: Santillana.

DEWEY, J., (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Paidós.

DIVESTA, F. y RIEBER, L., (1987). “Characteristics of cognitive engineering”. *Educational communication and technology Journal(Bloomington)*, 35,4,213-230.

DOMJAN, M. y BURKHARD, B., (1990). *Principios de aprendizaje y de conducta.* Madrid: Debate.

DÖRFLER, W., (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.) *Mathematical Knowledge:* Its Growth Throught Teaching. Dordrecht: Kluwer A.P, p. 63 - 85.

DRIJVERS, P., (2003). “Learning algebra in computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter”, 2003, Tesis Doctoral Universidad de Utrecht.

DUBINSKY, E., (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

ECCLES, J.S.; ADLER, T.F.; FUTTERMAN, R.; GOFF, S.B.; KACZALA,C.M.; MEECE, J.L. y MIDGLEY, C., (1983). Expectancies, values and academic behaviors.

Universidad Pontificia de Salamanca

En J.T. Spence (Ed.) *Achievement and achievement motivation*. San Francisco, C.A.:W.H. Freeman.

ENKEVIST, I., (2009). "Ana Arendt y la filosofía de la Educación", en revista *La Ilustración Liberal*, nº 41, otoño 2009. Madrid.

EURYDICE, (2011d). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales*. Madrid: MEC y D, EACEA P9 Eurydice.

FERNÁNDEZ, A., (Coord.), (1996). *Didáctica general.* Barcelona: UOC.

GARCÍA, E., (2009). *Identidad profesional y responsabilidad moral del profesor*. En MACEIRAS FAFIÁN, M., *Investigación e innovación*. Salamanca: San Esteban.

GIL, N.; GUERRERO, E. y BLANCO, L., (2006). "El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas", en *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*, Nº 8, Vol. 4(1), pp.47-72. Universidad de Extremadura. http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/articulos/8/espannol/Art_8_96.pdf (Consulta 26/III/2013).

GODINO, J.D.; CASTRO, W.F.; AKÉ, L.P. y WILHELMI,M.R., (2012). "The nature of elementary algebraic reasoning". Bolema, Rio Claro (SP), V26, N42B P.483-511. (ISSN 0103-636X)

GONZÁLEZ DE CARDEDAL, O., (2013). "Dilaciones y memorias", en LA TERCERA del periódico ABC. Madrid: Diario ABC, Domingo, 12 de mayo.

GONZÁLEZ, A., (2004). *Evaluación del clima escolar como factor de calidad*. Madrid: La Muralla.

GONZÁLEZ, A., (2005). "Características técnicas de los instrumentos de medida desde la teoría clásica de los tests. Fiabilidad, validez". En MARTÍNEZ, C., Coord., *Técnicas e instrumentos de recogida y análisis de datos.* Madrid: UNED.

GOÑI, J. Mª., (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.

GOÑI, J. Mª, (Coord.), (2011).*Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.

GOÑI, J. Mª., (Coord.),(2011). *Didáctica de las matemáticas*. Barcelona: Graó.

HAKE, R., (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American journal of physics,* 66 (1), 64-74.

HAKE, R., (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American journal of physics,* 66 (1), 64-74.

Universidad Pontificia de Salamanca

HERBART, J. F., (1806). *Pedagogía general.* Madrid: la lectura.

HIDALGO, S., MAROTO, A. y PALACIOS, A., (2004). "¿Por qué se rechazan las matemáticas?. Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas". En *Revista de Educación*, núm. 334, pp. 75 – 95. Madrid: Secretaría General Técnica del MEC y D. En www.revistaeducacion.educacion.es Consulta 26/III/2013.

HOCH, M. y DREYFUS, T. "Structure sense in High School Algebra: the effect of brackets" En M. J. HØINES & A. B. FUGLESTAD (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.3 (pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

HOYLES, C., (2012). "Retos y reflexiones en torno al potencial de la tecnología en la educación matemática", en PLANAS, N., (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

INFORME COCKCROFT, (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.

JAREÑO, J. Y TURON, F., (2012). "La escala musical: armonía más fracciones", en la revista *Cuadernos de Pedagogía.* nº 421, Marzo, Barcelona, pp. 72-75.

JAREÑO, J., (2012). "La cultura matemática", en la revista *Cuadernos de Pedagogía,* nº 421, Marzo, Barcelona, pp. 51-55.

KIERAN, C., (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In NESHER, P. & KILPATRICK, J., (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

KIERAN,C., FILLOY YAGÜE, E., (1989). "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica" Enseñanza de las Ciencias 7(3), p229-240.

KIERAN, C. y FILLOY, E., (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. En revista *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), pág. 229 - 240.

KIERAN, C., (1989). The early learning of algebra: Astructural perspective. En: WAGNER , S.; KIERAN , C. (Eds.) (1989). *Research issues in the learning of algebra*. Reston, VA: NCTM y Lawrence Earlbaum, p. 163 - 171.

KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.), (1996). *Approach to algebra: Perpectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, p. 65 - 86.

KIERAN, K., (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER , F.

Universidad Pontificia de Salamanca

(Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning***,** Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007, p. 707 - 762. vol. 2.

KILLEEN, P. (1992).The reflex reserve. *Journal of the experimental analysis of behaviour (Indiana)* 50, 319-331.

KIMBLE, G. et al., (1971). Effect of choice on paired-associate learning. *Journal of experimental psychology (New Jersey)* 91, 1, 47-53.

KOSSLYN, S. M. y POMERANTZ, J. R., (1977). "Imagery, propositions and the form of the internal representations". *Cognitive Psychology (London)*, 9, 52-76.

LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, *de Educación*. BOE, núm. 106, (4 de mayo 2006).

LÓPEZ, A., (1997). *Fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

MACEIRAS, M., (2002). Perspectivas de la motivación. En *Revista de Educación*, número Extraordinario 2002: Educación y Futuro, pp.257-270. Madrid: Secretaría General Técnica del MEC y D.

MACGREGOR, M. (2004). Goals and content of an algebra curriculum for the compulsory years of schooling. In K.Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra*. *The 12th ICMI Study* (pp. 313-328). Boston: Kluwer.

MACGREGOR, M., & STACEY, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies inMathematics, 33*, 1-19.

MALISANI, E., (1999). "Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica.". En la *"Revista IRICE"* del "Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación" de Rosario –Argentina N° 13.

MARTÍNEZ, J., (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: CISSPRAXIS.

MASON, J., (1996). Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.;

MAYER, R.E., (1988). *Learning strategies: an overview*. En WEINSTEIN, C., E. GOETZ, & ALEXANDER, P. (Eds.), Learning and Study Strategies: Issues in Assessment, Instruction, and Evaluation (11-22). New York: Academic Press.

MAYOR, J., (2009). *La actividad humana. Un incierto camino entre la necesidad y la posibilidad*. Madrid: Editorial Complutense.

MCLEOD, D. B., (1989). "Beliefs, attitudes and emorions: new view of affect in mathematics education". En D. B. MCLEOD y V.M. ADAMS (Eds.), *Affect and*

Universidad Pontificia de Salamanca

mathematical problem solving: A new perspective, (pp. 245-258). New York: Springer-Verlang.

MEDINA, A. y SEVILLANO, M. (coords.) (1990). *Didáctica-Adaptación el currículum.* Madrid: UNED.

MELERO, L. (2004). "Motivación", en UÑA, O., *Diccionario de Sociología.* Madrid: ESIC.

MÉNDEZ, D. (2011). Didáctica de los conceptos básicos de la termodinámica, http://eprints.ucm.es/14722/ (Consulta 24 enero 2013)

NAVARRO HINOJOSA, R., (2007). *Didáctica y currículum para el desarrollo de competencias.* Madrid: Dykinson.

NORTON, S. & IRVIN, J., (2007). A concrete approach to teaching symbolic algebra. In J. Watson & K. Beswick (Eds.) *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, MERGA Inc. Retrieved: Dec. 20, 2007 from http://www.merga.net.au/documents/RP502007.pdf

ORDEN (del 10/8/2007) en el B.O.J.A. 166 del 23/8/2007.

ORDEN (del 10/8/2007) en el B.O.J.A. 171 del 30/8/2007.

PESTALOZZI, (1801). *Cómo enseña Gertrudis a sus hijos.* Madrid: La lectura.

PIAGET, J., (1961). *El nacimiento de la inteligencia del niño.* Madrid: Aguilar.

PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNÉ, J. ; THOM, R. y otros., (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza.

PINILLOS, J. L., (1977). *Principios de psicología*. Madrid: Alianza.

PLANAS, N., (2011). "Buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato", en GOÑI, J. Mª., (Coord.), *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.

PLANAS, N., (Coord.). (2012). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

RADATZ, H., (1980). Students´ Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics,* 1(1), pp.1-20.

RADFORD, L.,(2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning,* Vancouver, v. 5, n. 1, p 37 - 70, 2003.

RADFORD, L., (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education.*Vancouver, v. 12, n. 1, p. 1 – 19.

Universidad Pontificia de Salamanca

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES, (1999). *Diccionario Esencial de las Ciencias*. Madrid: Espasa Calpe.

REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.* BOE, núm. 293, 8 diciembre de 2006.

REAL DECRETO 1631/ 2006, de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* BOE, núm. 5, (5 de enero 2007).

RESOLUCIÓN de 30 de septiembre de 2009, *de la Dirección General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales, por la que se establecen los estándares o conocimientos esenciales de la materia de Matemáticas para los tres primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Madrid.* BOCM, núm. 250, de 21 de octubre de 2009.

RICO, L., (1995). "Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas". En J. KILPATRICK, J., GÓMEZ, P. y RICO, L. (Eds.), *Educación Matemática,* pp. 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

RICO, L., (2006). "Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas", en *Revista de Educación.* Madrid: Secretaría General Técnica del MEC. Número extraordinario 2006, pp.275- 294.

SAMPASCUAL, G., (2007). *Psicología del desarrollo y de la educación*. (Vol. II). Madrid: UNED.

SÁNCHEZ, J.C., (2008). "Conocimiento científico de la didáctica". En SÁNCHEZ HUETE, J.C. (coord.) *Compendio de didáctica general* (49-72). Madrid: Ccs.

SANMARTÍ, N., (2000). "El diseño de unidades didácticas". En PERALES, F.J. y CAÑAL, P. *Didáctica de las ciencias experimentales* (239-266) Alcoy: Marfil.

SANMARTÍ, N., (2002). *Didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria.* Madrid: Síntesis.

SARRAMONA, J., (1990). *Tecnología educativa: una valoración crítica.* Barcelona: CEAC.

SEVILLANO, M. L., (2007). *La evaluación de los procesos y productos tecnológico-didácticos.* En ORTEGA, J.A. y SEVILLANO GARCÍA, M. L. Nuevas tecnologías para la educación en la era digital. (367-384) Madrid: Pirámide.

SFARD, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Universidad Pontificia de Salamanca

SHUNK,D. (1997). *Teorías del aprendizaje.* México: Prentice-Hall.

SIERPINSKA, A., (1985). Obstacles Epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 6 (1).

SKINNER, B.F., (1969). *Cumulativer Record. A selection of papers.* New York: Appleton-Century-Crofts. Tomado de la edición en castellano (1985) Aprendizaje y comportamiento. Barcelona: Martínez Roca.

______ (1974). *Sobre el conductismo*. Barcelona: Planeta.

SOCAS, M., (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones a la investigación. En *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Vol. 77, julio 2011, págs. 5-34. <http://www.sinewton.org/numeros> (Consulta 19 enero 2013).

SOCAS, M., CAMACHO, M., HERNANDEZ, J., (1998). "Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria" . En Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, nº 32, pp 73-86.

SOCAS, M.M., (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Cap. V, pp. 125-154. En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Ed. Horsori. Barcelona.

STACEY, K, & CHICK, H., (2004). Solving the problem with algebra. In STACEY, K., CHICK,H. & KENDAL, M (Eds.),*The Future of Teaching and Learning of Algebra*. *The 12th ICMI Study* (pp. 1-20). Boston: Kluwer.

STACEY, K., & MACGREGOR, M., (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher, 90*(2), 110-113.

STACEY, K., & MACGREGOR, M., (1999). Taking the algebraic thinking out of algebra. *Mathematics Education Research Journal, 1*; 24-38.

TALL, D. O. & THOMAS M. O. J., (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125–147.

TIMSS /2011 Encyclopedia Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science. Volumen 1 y 2.

TIMSS 2011 International results in Mathematics. TIMSS&PIRLS International Study Center.

TITONE, R., (1986). *El lenguaje y la interacción didáctica: teoría y modelos de análisis.* Madrid: Narcea.

Universidad Pontificia de Salamanca

VALLE, A., NUÑEZ, J. C., RODRÍGUEZ, S. y GONZÁLEZ-PUMARIEGA, S., (2002). "La motivación académica", en GONZÁLEZ-PIENDA, J. A.; GONZÁLEZ, R.; NÚÑEZ, J. C. y VALLE, A., *Manual de Psicología de la Educación*. Madrid: Pirámide.

VERSCHAFFEL, L., (2012). "Los problemas aritméticos verbales y la modelización matemática", en PLANAS, N. (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

VIGOTSKY, L.S. (1978). *Mind in society: the development of higher psycological processes.* Cambridge: Harvard university press.

VIVES, J. L., (1948). *De disciplinis*. Vid. *Obras Completas*. Madrid: Lorenzo Riber.

WEBER, M., (1977). *Economía y Sociedad.* México: Fondo de Cultura Económica.

WINN, W. (1990). "Some implications of cognitive theory for instructional design". *Instructional Science (New York)*, 19, 1,53-69.

ZABALZA, M. A., (1990). *Fundamentación de la didáctica y del conocimiento*. Madrid: Narcea.

5.7.- VEWGRAFÍA:

INSTITUTO DE EVALUACIÓN. PISA 2009 Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE. Informe Español. Consulta el 12/02/2013 http://www.mcu.es/libro/docs/MC/Observatorio/pdf/PISA_espanol_2009.pdf

MULLIS, I.V.S., MARTIN, M.O., FOY, P., Y ARORA, A. "TIMSS 2011 International Results in Mathematics" (2012)Chestnut Hill, MA: TIMSS&PIRLS International Study Center, Boston College. Consulta el 12/02/2013 http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-results-mathematics.html

MULLIS, I.V.S., MARTIN, M.O., MINNICH, C.A., STANCO, G.M., ARORA, A., CENTURINO, V.A.S., & CASTLE, C.E. "TIMSS 2011 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science", Volumes 1 and 2 (2012). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

CAI, J., KNUTH, E.,"Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives". 2011 Springer

NORMATIVAS DEL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN DE MATEMÁTICAS. CASTILLA Y LEÓN. http://www.educa.jcyl.es/es/curriculo consultada el 12 de Febrero del 2013

Universidad Pontificia de Salamanca

NORMATIVA DEL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN DE MATEMÁTICAS. ANDALUCÍA.
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/averroes/impe/web/portadaEntidad?pag=/contenidos/B/ApoyoAlCurriculo/CurriculoDeAndalucia/ consultada el 12 de Febrero del 2013

NORMATIVA DEL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN DE MATEMÁTICAS, MADRID:
http://www.madrid.org/cs/Satellite?c=CM_InfPractica_FA&cid=1142674185195&idConsejeria=1109266187254&idListConsj=1109265444710&idOrganismo=1142287728226&language=es&pagename=ComunidadMadrid%2FEstructura&sm=1109266100977
consultada 22 Mayo 2013

INSTITUTO DE EVALUACIÓN MEC :
www.institutodeevaluacion.educacion.es

Pruebas cgdi 2010
http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consultada 22 Mayo 2013)

Resultados TIMSS/2011
http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/inee-timss-2011.-marcos-de-la-evaluacion.pdf?documentId=0901e72b8127e807. Consultada 22 de Mayo

Universidad Pontificia de Salamanca

IIª PARTE: MARCO EXPERIMENTAL

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 6
METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

C O N T E N I D O **PÁGS.**

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 6.- METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

Al comienzo de la tesis, en la introducción, se ha advertido que la tesis doctoral es una investigación no solo por exigencias legales, sino porque en la actualidad es el procedimiento establecido para la preparación de investigadores, tan necesarios para el desarrollo humano, social y económico de los pueblos y para fomentar el progreso tecnológico. La investigación es una cualidad natural, que acompaña indefectiblemente al hombre en su devenir histórico que, unida a una obvia capacidad humana para la exploración, encuentra una doble procedencia: La primera se vincula con la curiosidad innata del hombre, que le lleva a preguntarse por las cosas que trata de conocer (Ziman, 1986: 30-31), cómo y por qué sucede lo que sucede. La segunda "responde a la indigencia natural del hombre, al que la naturaleza no le ha dado un equipamiento instintivo tan acabado como a los animales, lo que le obliga a investigar y buscar solución a los problemas, dificultades y necesidades" (Sierra, R., 1991:27). En una primera aproximación la investigación implica una búsqueda de solución a problemas y puede afirmarse que, en un sentido genérico, la investigación es una actividad del hombre orientada a descubrir algo desconocido, que se configura como conjunto de actividades interdependientes que, cumpliendo con una serie de normas procedimentales, persigue alcanzar, mediante una serie de sucesivas fases, el objetivo propuesto al comienzo de la investigación. Ahora bien, para que la investigación sea una investigación científica, dicha búsqueda ha de llevarse a cabo, siguiendo unas determinadas normas o reglas, unos procedimientos establecidos en lo que se denomina el método científico. Tan solo como introducción a la metodología, he de considerar, de manera breve, la noción y características de la investigación científica.

En cualquier ámbito de la realidad que se trate, la investigación puede definirse en los términos de un proceso de "aplicación del método y técnicas científicas a situaciones y problemas concretos en el área de la realidad humana y social, para buscar respuesta a ellos y obtener nuevos conocimientos" (Sierra, 1991: 27-28). Desde esta perspectiva se infieren a cuatro rasgos principales que configuran la investigación científica: 1) *La investigación es un proceso*, esto es, un conjunto de actuaciones sucesivas, orientadas al descubrimiento de la verdad, en el campo científico de que se

Universidad Pontificia de Salamanca

trate. La calificación de la investigación como un proceso o conjunto de actividades, la distingue del método científico y de las técnicas, que son un conjunto de reglas o normas de actuación, mientras que la investigación se constituye por las actuaciones del sujeto o sujetos investigadores[188]. El conjunto de actividades imbricadas en la investigación tiene el carácter de actuaciones sucesivas (se considera como un proceso), que se concretan en una serie de fases, que suelen denominarse, planteamiento del problema, diseño de la investigación, recogida de datos e interpretación, análisis de los mismos e inferencia de conclusiones. 2) *La finalidad de la investigación* es hallar respuesta a los problemas planteados, en este caso, los elevados índices de fracaso en la enseñanza de las matemáticas. Se parte del supuesto del desconocimiento de la respuesta al problema, y nos proponemos ampliar el ámbito de nuestros conocimientos en el área de la enseñanza de las matemáticas. En otros casos sería la realidad científica, la social, la humana, la educativa, la filosófica u otras. *3) La investigación científica exige necesariamente la aplicación de los procedimientos*, las técnicas y los instrumentos científicos, de la manera más estricta que sea posible. *4º) La investigación debe referirse a problemas concretos,* es decir, lo más precisos y específicos que sea posible y reales, ya sean de tipo teórico o metodológico o empírico, como en este caso, referidos a la enseñanza de las matemáticas en los niveles de la ESO y que trato de realizar indagando en las posibles relaciones de influencia entre específicos procedimientos metodológicos y los resultados obtenidos del proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A la investigación de esos aspectos concretos que he determinado investigar responden como es obvio los objetivos de la investigación que he diseñado y elaborado a partir de la específica y actual bibliografía española y europea sobre los problemas que por doquier encuentra la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, la consulta con otros compañeros profesores de matemáticas y de ciencias y la generosa colaboración de la directora de la tesis.

[188] Ziman, J., (1986: 30) considera que "la estrategia de la investigación más efectiva, no obstante, es la *investigación intencional*, esto es, el estudio deliberado de las circunstancias que se consideran relacionadas con un hecho o idea existente. Esto suele encarnarse en una norma positiva consistente en formular *preguntas* específicas y buscar luego la información que se necesita para responder a ellas. De hecho, esta norma de actuación es tan característica de la labor científica, que a menudo se supone que los científicos tienen una actitud mental peculiarmente *interrogativa* que les hace ser personalmente escépticos incluso en cuestiones no científicas".

Universidad Pontificia de Salamanca

6.1.- Objetivos de la investigación

En coherencia con las motivaciones que acabo de precisar, en la tesis confluyen objetivos de variada naturaleza, aunque en gran medida sustentados por idéntico propósito pedagógico. La investigación se sitúa entre una dimensión más especulativa, centrada en argumentar la concepción de las matemáticas y sus procesos operativos, y otra estrictamente práctica basada en los datos obtenidos de las pruebas empíricas elaboradas en torno al proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y que se han aplicado a grupos de estudiantes de los cursos segundo y tercero de la enseñanza secundaria obligatoria (ESO), que coinciden con grupos de los estudiantes de matemáticas a los que se aplican la mayoría de las pruebas internacionales como las que lleva a cabo PISA, TIMSS y las que se están poniendo en práctica en algunas Comunidades Autónomas de nuestro país. A partir de la experiencia investigadora se proponen mediaciones didácticas para la transmisión escolar de la mentalidad matemática con el propósito de dotar a los alumnos de las consiguientes competencias operativas. Tal oscilación entre lo teórico y lo aplicado obliga a distinguir con claridad objetivos heterogéneos: aquellos que se dirigen a la comprensión de la propia lógica interna de la matemática entendida como ciencia, y aquellos otros derivados de las intenciones pedagógicas de la tesis [189]. A esta diversidad obedece la siguiente esquematización.

a) Objetivo fundamental

De acuerdo con el problema enunciado en el apartado anterior, el objetivo general y fundamental de la tesis es *investigar las relaciones entre métodos, recursos y técnicas escolares del profesor de matemáticas en los cursos de Enseñanza Secundaria Obligatoria y la comprensión alcanzada por los alumnos para dotarse de competencias suficientes, orientadas a solucionar los ejercicios y problemas fundamentales del álgebra. Estos ejercicios y problemas algebraicos han de orientarse a su vez a dotar de competencias a los estudiantes para comprender y resolver los problemas cotidianos de su vida diaria.* La concreción práctica de tal objetivo propone la renovación de criterios didácticos y procedimientos específicos para hacer eficaz los procesos de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en el nivel educativo señalado

[189] En la formulación de objetivos tengo en cuenta la exigencia metodológica de Visauta, que exige *claridad, concisión y precisión terminológica*, a partir de la siguiente cautela epistemológica: "el éxito de una investigación estriba en el logro de unos objetivos, que deben ser revisados en cada fase del proceso investigativo y cuyos resultados deben acomodarse a los mismos" (Visauta, B., 1989:99).

Universidad Pontificia de Salamanca

b) Objetivos específicos teórico/documentales

Como objetivos específicos encaminados a precisar los aspectos y dimensiones de las matemáticas que consideramos escolarmente más eficaces, proponemos los siguientes. 1) *Análisis y valoración crítica, desde diversas y complementarias perspectivas, de las metas, estrategias y retos que solicita la educación* de calidad en un mundo globalizado, atendiendo especialmente a las Teorías de la Educación actuales y valorando sus aportes al objetivo fundamental de nuestra tesis, que acabamos de enunciar. A partir de este contexto, me pareció fundamental clarificar brevemente la convicción antropológica según la cual la educación es un proceso global que afecta al ser humano en su totalidad, tanto en su perfeccionamiento biológico como en su desarrollo biográfico. Tal supuesto exige la preparación técnica adecuada a la sociedad global del conocimiento y la integración educativa de los derechos humanos y de valores básicos como la solidaridad y la tolerancia, que faciliten al ciudadano una vida personalmente satisfactoria, relacionarse productivamente con los otros y convivir con la diversidad y con los diferentes en la actual sociedad abierta y cambiante.

2) La revisión crítica de la mentalidad originaria de la matemática en la cultura de la Grecia Clásica, en cuyo contexto se articulan los procedimientos teóricos para exponer la interpretación matemática del cosmos, al tiempo que se formulan las primeras sistematizaciones del razonamiento y de la argumentación matemática. Tales concepciones griegas llegarán hasta el presente, no sólo en sus formulaciones teóricas, sino en sus aplicaciones prácticas, hasta tal punto que no ha dejado de sorprenderme cómo su saber teórico y especulativo se engarza en la realidad natural abriendo paso a las primeras manifestaciones de las matemáticas aplicadas. Como se verá en su momento, mi objetivo no se centró en aportar datos históricos, sino en determinar, analítica y reflexivamente, los supuestos de las primeras elaboraciones sistemáticas de la matemática racionalmente argumentada que, si bien fueron las primeras, resultaron perdurables y definitivas porque alcanzan a nuestros días.

3) Continuando el rastreo analítico reflexivo, aunque obligada por la brevedad, un tercer objetivo específico se enmarca en la reflexión sobre las coordenadas del movimiento científico que, tras las aportaciones algebraicas de la cultura árabe e hindú de ascendencia medieval, llegan al Renacimiento, pasan a la Ilustración y se concretizan en la racionalidad moderna. La mentalidad matemática de los siglos XVI y XVII se libera de servidumbres personalistas y de prejuicios filosóficos, de tal modo que la

Universidad Pontificia de Salamanca

Ciencia Moderna camina indisociable con leyes cuya validez universal y necesaria se hace dependiente de su formulación matemática. El objetivo que aquí pretendemos consiste en mostrar como las matemáticas se convierten en el único lenguaje científico con pretensiones veritativas, brindando objetividad lingüística a las metodologías empírico / analíticas basadas en procesos de inducción / deducción. De este modo, mi propósito se ha centrado en señalar la forma de cómo el razonamiento matemático se elevó a diseño metodológico y lenguaje científico exclusivos para cualquier saber que pretenda constituirse como ciencia.

Consciente del obligado carácter sintético de la exposición, el recorrido analítico desde la Ilustración hasta el escenario científico actual, con los modernos procedimientos de I+D+I, se propone dejar claro que el prodigioso avance de las ciencias y de la tecnología de nuestros días es un resultado del manejo operativo y de la aplicación de procedimientos matemáticos

c) *Objetivo psicológico: la motivación escolar*

Tal como lo hemos enunciado en el capítulo primero, el objetivo fundamental de nuestra tesis es de naturaleza esencialmente pedagógica, lo que demanda su precisión y concreción educativa. Así es porque entendemos que es imposible transmitir la comprensión de la mentalidad matemática y de sus procedimientos operativos sin la implicación psicológica, intelectiva y afectiva, del alumno. Es obvio que si los estudiantes se sienten motivados y estimulados para el estudio de las matemáticas, el éxito y los buenos resultados serán seguros. Por esta razón, se ha indagado en los objetivos de las motivaciones internas y externas, psicológicas personales, familiares y sociales que pueden dar razón del interés o desinterés de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, de lo que se trata en el capítulo cinco.

Sobre estos supuestos adelanto lo siguiente: las perspectivas actuales sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje, confirman unánimes el principio según el cual los alumnos deben responsabilizarse de la elaboración de sus propias estrategias cognitivas para dar sentido a lo aprendido. Pero no cabe duda que, además de dotarse de adecuadas habilidades cognitivas, el sujeto educando ha de poseer también estrategias motivadoras que animen su propio proceso de aprendizaje (Mayor, J., 2009: 213). Estrategias a las que debe atender cualquier investigación encaminada a la transmisión del saber, sin dar por supuesto que los alumnos están por sí mismos motivados al estudio, al esfuerzo, al

Universidad Pontificia de Salamanca

trabajo, a la lectura y al aprendizaje. El realismo educativo invita a prescindir de tan optimista ilusión.

Siguiendo la clásica tipología de motivaciones intrínsecas y extrínsecas, en general los expertos suelen afirmar que la actividad de los estudiantes depende de la "orientación motivacional que prime en un momento determinado; particularmente relevante para nuestro propósito es la sugerencia de que las personas intrínsecamente motivadas pueden estar más dispuestas a realizar el esfuerzo mental implicado en el aprendizaje, lo cual permitirá que adopten un enfoque más deliberado y reflexivo frente a los problemas" (Mayor, J., 2009: 214). El discernimiento de los objetivos motivadores de valor, de expectativas de tipo emotivo o afectivo, abre la investigación de la tesis a un mejor conocimiento de la conducta que siguen los escolares en el estudio del álgebra y de las matemáticas en general. He tenido en cuenta la conducta generada tanto por factores internos, las dimensiones del autoconcepto, como por circunstancias exteriores al proceso del aprendizaje. Llevando a la práctica tales supuestos, se ha aplicado un test de motivación a los estudiantes con los que se realizó la experiencia investigadora.

d) *Objetivo operativo: las competencias del profesor*

Objetivo operativo de la tesis ha sido la valoración analítica de los conocimientos matemáticos y de las competencias específicas que ha de poseer el profesor de matemáticas en los niveles educativos de la ESO y del Bachillerato. Para la consecución de este objetivo se parte de un principio axial que sitúa al profesor como pieza clave de la enseñanza, en este caso de la enseñanza matemática. Su éxito o fracaso producirá inexorablemente el éxito o fracaso de la acción educativa correspondiente.

Los fundamentos sobre los que se construye este objetivo son de variada índole y proceden de diversas fuentes: los hemos localizado en experiencias y recomendaciones de los órganos competentes de la Unión Europea y en las sucesivas normativas, leyes, decretos y órdenes ministeriales del Gobierno español. Asimismo se han tenido en cuenta las resoluciones de algunas Universidades Españolas, además de valorar los resultados de la experiencia contrastada de autores representativos.

e) *Objetivos empírico analíticos*

Objetivo esencial de naturaleza cuasi-experimental, ha sido la investigación empírica que he diseñado, elaborado y cuyos resultados presento como comprobación de la relación causal entre la metodología de la clase y los resultados obtenidos en el

Universidad Pontificia de Salamanca

proceso de la enseñanza – aprendizaje de la prueba matemática realizada. Su estructura práctica se articuló sobre variados procedimientos y recursos ensayados en la dinámica de la clase.

El primero basado en la forma de docencia tradicional, que se apoya en la explicación clara y precisa del profesor, la recreación de lo explicado mediante su plasmación en la pizarra, el uso del libro de texto como complementario de la explicación del profesor y la subsiguiente tarea de los ejercicios que sobre el asunto explicado lleven a cabo los alumnos.

El segundo procedimiento metodológico se sustenta en el uso intensivo de las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) como soporte relevante de apoyo a la explicación en clase.

El tercero, suele denominarse modelo cooperativo, se organizó como tarea o actividad de la enseñanza-aprendizaje en grupo, dando la mayor relevancia a la interacción grupal, de acuerdo a las teorías didácticas para la organización y funcionamiento de personas asociadas para una actividad común.

Nuestros objetivos se proponen precisar y determinar el grado de proximidad o diferencia de los resultados académicos según cada una de las metodologías, las variables en cada una de ellas, el sentido de las variaciones que pueden mostrar los resultados, y la satisfacción de los alumnos respecto a los modelos propuestos y seguidos en las clases.

f) Objetivos pragmáticos educativos y sociales[190]

Los objetivos que acabo de enunciar, tanto por lo que atañe a la concepción teórica de la matemática como a su aplicación y transmisión escolar, llevan implícitos propósitos que trascienden la finalidad puramente formal de una investigación argumentada, como es una tesis, porque tienen *consecuencias pragmáticas* que alcanzan al ámbito educativo y social, como las que señalo desde las tres perspectivas siguientes.

Desde un punto de vista pedagógico, los objetivos de la tesis pretenden contribuir a la creación de un ámbito académico más grato y eficaz en el que los estudiantes encuentren *motivaciones para estudiar* y comprender la significación que ha de atribuirse a la competencia matemática en el escenario educativo y en el contexto social y a su papel en relación con las demás materias. En tales supuestos se sustenta el

[190] Entiendo por *pragmático* aquellos efectos y cambios que en la realidad se pretenden alcanzar mediante la argumentación discursiva de la tesis.

Universidad Pontificia de Salamanca

interés social de la tesis, que veo confirmada por mi propia experiencia como profesora de Matemáticas, en la que he percibido las reiteradas sensaciones de frustración por parte del alumnado. Estas me han llevado a reflexionar sobre las constantes dificultades que los estudiantes encuentran para la comprensión del cálculo y sus aplicaciones, lo que me ha obligado a buscar nuevos procedimientos para perfeccionar mis propias estrategias didácticas, entre las que cuento con el progresivo uso de las nuevas tecnologías en el proceso enseñanza-aprendizaje que han de incorporarse como soporte para el desarrollo de habilidades específicas.

Desde la perspectiva didáctica, los objetivos que hemos fijado se proponen ensayar nuevas alternativas de procedimientos metodológicos, la progresiva utilización de los nuevos recursos didácticos que permitan *mejorar los procedimientos docentes de los profesores, las actitudes de aprendizaje de los alumnos y la dinámica de la clase* en cuanto se refiere a la necesaria presencia de las matemáticas en la cotidianeidad de sus vidas y a su papel en los currículos educativos.

Desde la perspectiva cognitiva, los objetivos se orientan a contribuir, en la medida de mis posibilidades, a potenciar las capacidades mentales del alumno, ya que la adecuada transmisión de los procesos matemáticos tiene como resultado la formación en competencias inductivas, deductivas y argumentativas, habilitando para la aplicación empírica de contenidos puramente mentales. Se justifica así la contribución de los objetivos de la tesis a formar criterios para una *educación integral* que no podrá ser ajena, incluso en sus aspectos éticos y sociales, a una racionalidad lógicamente compresible y compartible, como la que se deriva del aprendizaje matemático, tal como lo planteamos en la tesis.

Con la elaboración de esta tesis he tenido también presente mi personal y legítimo objetivo de alcanzar el grado y título de Doctor, así como la conveniencia de sumar mi modesta aportación a la reflexión general que ha surgido en la Unión Europea [191] que finalmente parece haber tomado conciencia de la dificultad que entraña la enseñanza de las matemáticas en los niveles educativos de primaria, secundaria y

[191] En el Prólogo al Informe sobre *La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales,* la Comisaria de Educación, Cultura, Multilingüismo y Juventud de la Comisión Europea afirma lo siguiente: "El informe revisa las políticas nacionales orientadas a reformar el currículo de matemáticas, a fomentar métodos pedagógicos y de evaluación innovadores, y a la mejora de la formación inicial y permanente del profesorado. En él se hace un llamamiento a favor del diseño de políticas globales para la enseñanza de las matemáticas, basadas en un seguimiento continuado y en los resultados de las investigaciones. Asimismo, el Informe aboga por políticas integrales de apoyo al profesorado, por un interés renovado en las diversas aplicaciones del conocimiento matemático y de las habilidades para la resolución de problemas" (Vassiliou, A.,2011: 3)

Universidad Pontificia de Salamanca

bachillerato. Tal reconocimiento impone la responsabilidad pedagógica de la investigación, a la que he querido sumarme, para ir mejorando los procedimientos metodológicos y didácticos más adecuados para la comprensión y aplicación de la matemática.

6.2.- Los grupos investigados

Los grupos de alumnos sobre los que se proyectó la investigación son todos los estudiantes de segundo y de tercer curso de la ESO de dos colegios privados de Madrid. El curso segundo de ESO estaba integrado por 94 estudiantes, organizados en tres grupos: el grupo A de 33 alumnos, el grupo B de 31 y el grupo C de 30. El curso de tercero de la ESO estaba también organizado en tres grupos: el grupo A contaba con 33 alumnos, el grupo B lo formaban 31 alumnos y el grupo C lo constituían 32 alumnos. La organización de los grupos la habían realizado los Colegios correspondientes al finalizar la enseñanza primaria y al comienzo de la ESO. Se busca que sean grupos uniformes no solo por la edad (el 94 % de segundo tienen 13 años y los de tercero, el 95 % tienen 14 años) sino también atendiendo a las calificaciones. En este caso, tanto los estudiantes de tercero como los de segundo obtuvieron una media de 7 en las calificaciones de matemáticas del curso precedente.

Al inicio del capítulo siguiente, en que se muestran los resultados obtenidos se hace contextualización de estos estudiantes, es decir, una descripción más cuantitativa que cualitativa, aunque también se muestra información cualitativa sobre este conjunto de estudiantes, sus familias, los estudios de sus padres y madres y sus ocupaciones profesionales, por lo que no estimo necesario repetir aquí estos datos. La razón básica de la selección de estos grupos de estudiantes es que fueron lo que me permitieron en los colegios, lo que agradezco y porque eran los que solicité, dado que los estudiantes de 3º y de 2º de la ESO coinciden con el tipo de estudiantes con los que se hacen las pruebas internacionales PISA y TIMSS y con estos están proyectando pruebas también algunas Comunidades Autónomas en nuestro país. Esto facilita las posibles comparaciones, que son deseables para el progreso científico.

No se hizo muestra, sino que las pruebas de la investigación se correspondieron con el universo de los alumnos de tercero (96 estudiantes) y segundo (94 estudiantes) en sus respectivos colegios, por lo que no correspondía hacer muestras al respecto.

Universidad Pontificia de Salamanca

6.3.- Instrumentos de recogida de datos

Dos tipos de cuestionarios o test fueron utilizados para recoger la información que se consideró necesaria para el contraste y verificación de los objetivos de que se ha partido en la investigación. Son datos primarios generados en la investigación con los estudiantes. En la búsqueda de los instrumentos que provean de la pertinente información de otros contenidos de la investigación, como las motivaciones, que pudiera calificarse de diseño cuasi-experiemental[192], se buscaron instrumentos ya verificados y publicados y otros, como el cuestionario de conocimientos que fue diseñado y elaborado por mí.

6.3.1.- El test de motivación[193]

Con este instrumento se pretendió captar el conjunto de factores y circunstancias, internas y externas al proceso de enseñanza – aprendizaje que suelen estimular o desanimar a los estudiantes. Con el test de motivación que se aplicó al comienzo del proceso de enseñanza – aprendizaje específico para la investigación de la tesis se recababa su general disposición para el estudio de las matemáticas y, la aplicación del test al final de la experiencia investigadora permitía medir el efecto producido por la experiencia cuasi experimental de la investigación. A fin de diferenciar los resultados obtenidos, mediante la cumplimentación de estos test, denominaremos al de comienzo Pretest y al del final Posttest.

Este test se recoge en el anexo a este capítulo, no es original mío, se ha elaborado a partir de un test verificado y publicado por los profesores de la Universidad de Extremadura (Gil, N.; Guerrero, E., y Blanco, L., 2006) y publicado[194] en la *Revista*

[192] "En las investigaciones *cuasiexperimentales*, el investigador puede variar deliberadamente los niveles de la variable independiente para poder ver los efectos que causa dicha variación en la variable dependiente, pero no ejerce el grado de control característico del método experimental. Muchas variables quedan sin controlar. (…) En muchas situaciones educativas el investigador encuentra obstáculos para ejercer el grado de control que requieren los experimentos estrictos (…)Los diseños *cuasiexperimentales* más empleados en el ámbito educativo suelen ser los *diseños de grupos no equivalentes*, cuando el investigador pretende analizar relaciones de causalidad y puede manipular la variable independiente, pero a diferencia de la metodología experimental, se ve obligado a partir de grupos ya formados de una manera natural, como pueden ser las clases de un colegio. Los distintos diseños se originan al combinar el número de grupos que intervienen y la posibilidad de aplicar *pretest-postest* (como se hizo en la tesis) o un solo postest" (Latorre y otros, 2005: 154-155).

[193] El Test de Motivación puede verse en ANEXOS, capítulo 6, Anexo I.

[194] Gil, I., N., Guerrero B.,E. y Blanco, N.,L. (2006). "El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas", en Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa, Universidad de Extremadura, ISSN. 1696-2095. Nº 8, Vol. 4 (1) 2006, pp. 47-72. En el apéndice se publica el test con el título *Cuestionario sobre Creencias y Actitudes acerca de las Matemáticas*.

Universidad Pontificia de Salamanca

Electrónica de Investigación Psicoeducativa, como *cuestionario sobre creencias y actitudes acerca de las Matemáticas* Constaba de 53 cuestiones con cuatro posibilidades de respuesta (muy de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo y muy en desacuerdo). He tomado ese modelo y hechas unas leves correcciones, se aumentó en un caso a cinco las posibilidades de respuesta y en otra investigación se la dejó en las cuatro básicas, para forzar a los estudiantes a decidirse y tomar postura. Se le añadieron las últimas quince preguntas (de la pregunta 53 a la 67), algunas de las cuales sobre metodología de otro test, del cual ya se había probado la fiabilidad y validación.

La escala de Likert utilizada en los test de 2º de la ESO es: 1. Muy en desacuerdo; 2. En desacuerdo; 3. Indiferente; 4. De acuerdo y 5. Muy de acuerdo. Como alumnos de poca edad, se pensó que podrían mostrar más indecisión y antes de que dejar la pregunta sin contestar, se les brindó la posibilidad de elegir la opción 3 Indiferente. En la cumplimentación de este test a los estudiantes de 2º curso, aconsejada por la profesora del curso, se le dio una maquetación diferente a través de una tabla de 67 filas y 6 columnas. La primera columna iría la pregunta y las otras siguientes irían las respuestas.

Pregunta	1	2	3	4	5

Estas ligeras modificaciones introducidas obligaron a hacer la prueba de validez del test, tal como se muestra en el capítulo de resultados, con lo que se supera una posible impugnación del mismo.

Con posterioridad a la recogida de la información y teniendo en cuenta el número elevado (67) de preguntas, se estimó que *los resultados podían mostrar con mayor claridad su significado argumental respecto de los objetivos buscados, si se agrupaban las preguntas por temáticas afines en torno a unos contenidos más significativos*, que denominamos dimensiones o indicadores, sin que ello fuere obstáculo para que en todo caso se ofrecieran los resultados obtenidos, correspondientes a algunas pregunta seleccionadas por su directa relación significativa con el sentido del indicador. Estas preguntas se muestran mediante gráficos, colocadas a continuación de la tabla correspondiente al indicador respectivo. Las diez cuestiones en que se agruparon las preguntas del test de motivación son las que siguen: la utilidad de las matemáticas para la vida, las motivaciones de parte de los familiares, los

Universidad Pontificia de Salamanca

procedimientos metodológicos y recursos, los recursos didácticos de clase, el profesor como agente de motivación, otras motivaciones, opiniones de los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas, la autoestima y las emociones de los alumnos, la valoración del esfuerzo y del trabajo en el aprendizaje y las imágenes positivas o negativas sobre las matemáticas.

Tabla 6. 1.- Indicadores resultantes de la agrupación de las preguntas del test de motivación

	DIMENSIONES MÁS SIGNIFICATIVAS	**Nº. DE LAS PREGUNTAS**
1º	Necesidad y utilidad de las matemáticas	1, 2, 5, 9, 12, 36, 38, 40, 63
2º	Influencia de familiares, amigos/as y compañeros/as hacia las matemáticas	13, 31, 32, 33, 34, 57
3º	Metodología y recursos	6, 24, 47, 58, 59, 61, 62
4º	Los recursos de la motivación en las clases de matemáticas	23, 42, 43, 53, 54, 55, 66
5º	El profesor como agente de motivación en el estudio de las matemáticas	14, 15, 25, 26, 27, 29, 30
6º	Otras motivaciones para el aprendizaje matemático	28, 56, 60, 67
7º	Opiniones y exigencias del aprendizaje matemático	3, 4, 7, 8, 22, 52
8º	Autoestima y emociones en el aprendizaje de las matemáticas	17, 18, 19, 20, 45, 46, 48, 49, 50
9º	Actitudes de interés, esfuerzo y constancia	10, 11, 16, 21, 44, 51, 64, 65
10º	Opiniones positivas y negativas sobre las matemáticas	35, 37, 39, 41

Universidad Pontificia de Salamanca

Entre las tablas y gráficos se intercalan breves textos escritos que tienen la función de señalar y acentuar las tendencias más significativas que he hallado. En el anexo correspondiente a este capítulo experimental se insertan los test de motivación con los resultados obtenidos mediante su aplicación, al comienzo y al término de la experiencia investigadora, correspondiente a los cursos 2º y 3º de la ESO. Como se ha mencionado en el párrafo anterior el criterio de agrupamiento de las preguntas se hizo por temáticas afines en torno a los contenidos más significativos. La tabla que a continuación se presenta, ofrece el modo como quedaron agrupadas las sesenta y siete preguntas en torno a las diez cuestiones más relevantes. Las preguntas agrupadas en cada indicador quedan señaladas en la tabla precedente [195].

6.3.2.- Test de conocimientos

El test o cuestionario de conocimientos sobre ecuaciones de primer grado, segundo grado y sistemas de ecuaciones comprendía una serie de ejercicios y problemas que integraban la materia básica explicada en las clases durante la experiencia investigadora[196]. Teniendo en cuenta que la mayor parte de la materia se había dado ya en el segundo curso, el cuestionario de conocimientos se pasó en los tres grupos del curso de tercero y del curso segundo, al comienzo de la investigación y al final. Se recogieron por escrito las respuestas de los alumnos a las cuestiones planteadas, ejercicios y problemas, mediante los cuales se obtuvieron los resultados correspondientes a los conocimientos algebraicos aprendidos, en relación con los distintos procedimientos metodológicos empleados en la impartición de las clases y que se intentaba contrastar. Aunque siempre son mejorables los procedimientos y se pueden complementar con otros artificios, en mi parecer, sin embargo, *los instrumentos empleados* fueron elaborados con el mayor esfuerzo, responsabilidad y contrastada fiabilidad. Siempre los estimé adecuados para recoger la información necesaria y suficiente sobre el objetivo propuesto y de este parecer fueron también los profesores que explicaron la materia en el aula. Se trataba de técnicas contrastadas para recoger el tipo de información necesaria, permitieron la suficiente precisión en las mediciones, se

[195] Nota: Los resultados del Test de motivación de segundo y de tercer curso, pueden verse en ANEXOS, capítulo 6, Anexo II

[196] Nota: El cuestionario de conocimientos con la materia explicada a los estudiantes durante la experiencia investigadora, organizada según las sucesivas clases impartidas está contenida en los ANEXOS, capítulo 6, en el Anexo III. En este anexo están también los resultados de las preguntas.

Universidad Pontificia de Salamanca

pasaron a los estudiantes en un clima de libertad, voluntad de colaboración y anonimato, el mismo día y a la misma hora, que aseguran la validez de las respuestas halladas.

La ponderación de los ejercicios y de los problemas en las calificaciones puede ser interpretable, si bien, estimo que la interpretación hecha tiene suficiente validez y fiabilidad, se ha hecho siguiendo los criterios para corrección de ejercicios y para evaluación propios de los Centros escolares en que se llevó a cabo la experiencia investigadora, que eran sustancialmente coincidentes con los seguidos en el departamento al que la doctoranda estuvo vinculada durante tres años, impartiendo esta materia y coincidieron con estos criterios los profesores doctores de ciencias a los que he tenido oportunidad de consultar. Tanto la investigación como los procedimientos aplicados, la corrección, la evaluación y la interpretación de los resultados obtenidos no ha creado problemas éticos o académicos de cualquier índole (Lininger et al.,1978: 21). El modelo de test previo y posterior de conocimientos puede verse en el anexo III de este capítulo.

a) La exposición de la metodología y otras circunstancias. La exposición metodológica no causó retraso alguno en los estudiantes a excepción del grupo cooperativo que necesitó más tiempo. En los grupos que siguieron el *método tradicional* (3º B y 2º B), la explicación sobre el funcionamiento se hizo con brevedad y precisión. En las clases de los grupo (3ºC, 2º A y 2º C) que siguieron el *método TIC*, en las que se emplearon recursos audiovisuales, se dieron breves y concisas explicaciones sobre el objetivo general de la investigación y su coherencia con las nuevas metodologías de la información y la comunicación. El grupo que siguió el *método cooperativo* (3ºA), obviamente necesitó más tiempo para poder terminar la materia ya que la clase no estaba acostumbrada a seguir este procedimiento. Los grupos de 3ºB y 3ºC tenían el mismo profesor de matemáticas y un profesor distinto impartía las matemáticas en el grupo 3ºA. En segundo curso pasa lo mismo: un profesor se ocupa de los grupos 2ºA y 2ºC y otro profesor imparte matemáticas en el grupo 2ºB.

En el 2º curso no se experimentó con el procedimiento cooperativo: los profesores que impartían las clases de matemáticas consideraron que los estudiantes de ese curso no tenían suficiente madurez para desarrollar el aprendizaje cooperativo. La investigación experimental se llevó a cabo con todos los alumnos de tercer curso y de segundo curso de la ESO. Tanto en un caso como en otro, el colectivo investigado se

Universidad Pontificia de Salamanca

corresponde con el universo a estudiar, por lo que no caben referencias a los aspectos muestrales.

c) La especificación de los contenidos en orden a su distribución por cursos para la organización de las sucesivas clases se presenta a continuación en dos cuadros, con los que se muestra el ajuste de la materia al nivel académico de los estudiantes, con los que se proyectó la investigación. El primero que se presenta, ***cuadro 1***, se destinó a los estudiantes del curso segundo de la ESO y el siguiente, ***cuadro 2***, se destinó a los estudiantes del curso tercero de la ESO.

Cuadro 6.1.- Diseño teórico de la organización de las clases de 2º ESO

DISTRIBUCIÓN DE CONTENIDOS	
Clase 1ª	Test previo de motivación y presentación de la investigación
Clase 2ª	Test previo de conocimientos y explicación de la investigación
Clase 3ª	Recordar los contenidos de ecuaciones de primer grado
Clase 4ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 1er grado
Clase 5ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 1er grado
Clase 6ª	Teoría de Ecuaciones de 2º grado incompletas
Clase 7ª	Teoría de Ecuaciones de 2º grado completas
Clase 8ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 9ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 10ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 11ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 12ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 13ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 14ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 15ª	Test final de conocimientos: ejercicios y problemas de álgebra
Clase 16ª	Test posterior de motivación

Elaboración propia

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuadro 6.2.- Diseño teórico de la organización de las clases de 3º ESO

DISTRIBUCIÓN DE CONTENIDOS	
Clase 1ª	Test previo de motivación y presentación de la investigación
Clase 2ª	Test previo de conocimientos.
Clase 3ª	Recordar los contenidos de ecuaciones de primer grado
Clase 4ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 1er grado
Clase 5ª	Ecuaciones de 2º grado incompletas y completas
Clase 6ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 7ª	Resolución de ejercicios y problemas de ecuaciones de 2º grado
Clase 8:ª	Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas
Clase 9:ª	Resolución de ejercicios y problemas de sistemas
Clase 10ª:	Resolución de ejercicios y problemas de sistemas
Clase 11ª	Resolución de ejercicios y problemas de sistemas
Clase 12ª	Resolución de ejercicios y problemas de sistemas
Clase 13ª	Test final de conocimientos: ejercicios y problemas de álgebra
Clase 14ª	Test posterior de motivación

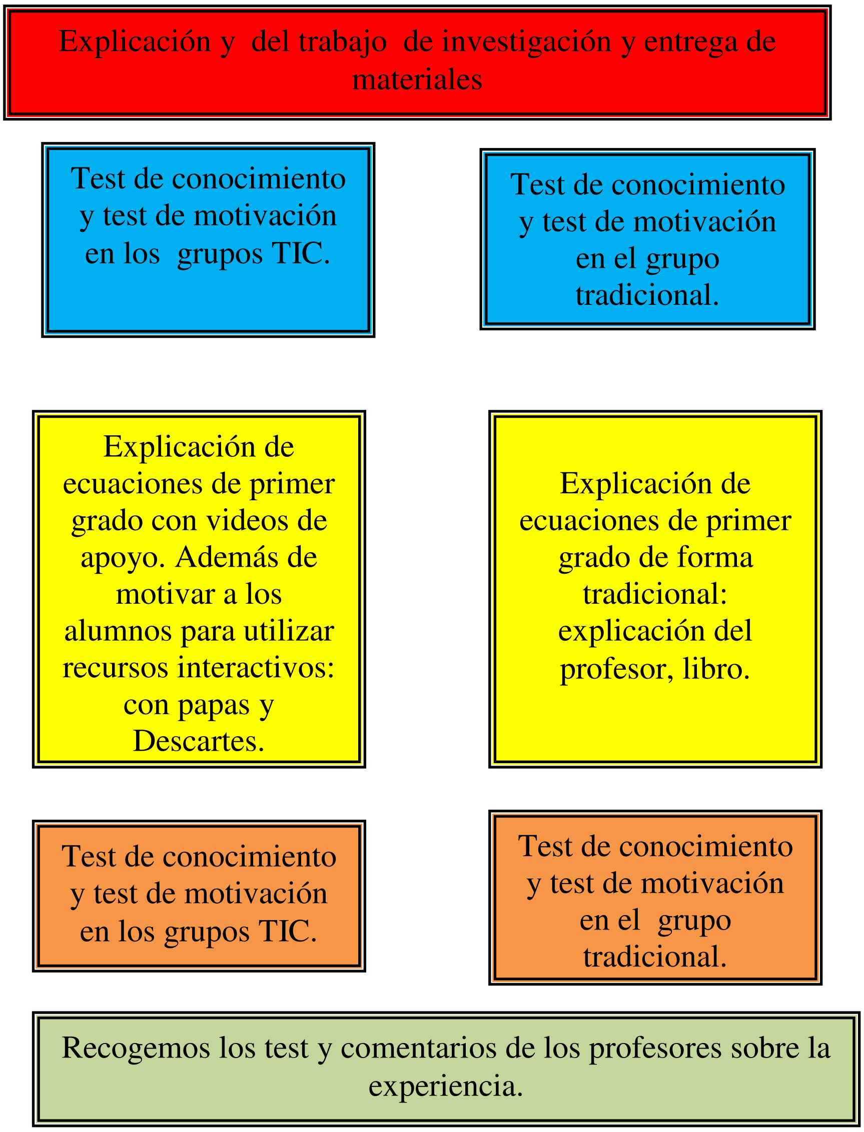
Elaboración propia

6.4.- Delimitación temporal de las actividades.

El calendario de fechas correspondiente a la actividad investigadora no es coincidente en los dos cursos. Expongo primero el cronograma del curso segundo y a continuación se mostrará el de tercero.

Universidad Pontificia de Salamanca

6.4.1.- Cronograma del curso segundo de la ESO



Las fases de la experiencia investigadora del segundo curso fueron como sigue:

- Una reunión con el profesor de 2º ESO para explicar en qué consistía el trabajo y entregarle los materiales: el test de motivación, el test de conocimientos y un dosier con materiales, propuestas, direcciones de internet comentados donde encontrar recursos, además de un manual de cómo hacer un trabajo con Descartes.

- El profesor selecciona dos grupos al azar para ser los grupos TIC, 2ºA y 2ºC. Comenta que llevar tres grupos con diferentes metodologías no es plausible y que selecciona las Tic para incorporar en dos grupos. El tercer grupo 2ºB será el

Universidad Pontificia de Salamanca

grupo de control. Los grupos son formados a final de primaria para que no haya grandes diferencias entre ellos, ni de números, ni de capacidades. Además solicita cambiar la maquetación del test inicial a forma de tabla. Nos comenta que por falta de tiempo sólo hará la experiencia en ecuaciones de primer grado.

- En los días 3 y 4 de diciembre se realizan los test de motivación y de conocimiento durante dos clases, una para el test de motivación y otro para el de conocimientos, en cada uno de los grupos después de motivar a los alumnos para que lo hagan de la forma más responsable.

- Durante el mes de diciembre y hasta el 13 de enero de 2013 se imparten las clases pertinentes poniendo videos durante las explicaciones e indicando a los alumnos las direcciones donde encontrarlos. Además se motiva, obteniendo puntos para la calificación, a los alumnos de los grupos tic para que en Navidades hagan una experiencia con Descartes después de haberles entregado un manual de cómo hacerlo.

- En Enero durante el 14, 15 y 16 realizan de nuevo los test de motivación y el test de conocimientos de ecuaciones de primer grado.

- A continuación me vuelvo a reunir con la profesora para que me dé los materiales y me comente la experiencia. Sus opiniones al respecto son positivas porque es algo que quería hacer y la facilidad de cómo hacerla y de los materiales lo ha hecho posible.

Universidad Pontificia de Salamanca

6.4.2.- Cronograma del curso tercero de la ESO

Explicación y del trabajo de investigación y entrega de materiales a los profesores

Test de conocimiento y test de motivación en grupo TIC.	Test de conocimiento y test de motivación en grupo tradicional	Test de conocimiento y test de motivación en grupo cooperativo
Explicación de ecuaciones de primer grado, de segundo y sistemas utilizando videos de Internet..	Explicación de ecuaciones de primer grado, de segundo y sistemas de la forma tradicional.	Explicación de ecuaciones de primer grado, de segundo y sistemas siguiendo la metodología cooperativa.
Test de conocimiento y test de motivación en grupo TIC.	Test de conocimiento y test de motivación en grupo tradicional	Test de conocimiento y test de motivación en grupo cooperativo

Entrega de los test de motivación y conocimientos previos y post y comentario de la experiencia con los profesores.

En el curso de tercero ESO, en cuanto a las fases de la experiencia investigadora, se sigue un esquema parecido al curso de segundo:

- Una reunión con los dos profesores de tercero ESO para explicar en qué consistía el trabajo y entregarle los materiales: el test de motivación, el test de conocimientos y un dosier con materiales, propuestas orientaciones, direcciones de internet comentados donde encontrar recursos, además de un manual de cómo hacer un trabajo con Descartes.

- Lo eligen al azar, y el profesor de tercero B y C escoge las Tic, que lo llevará a cabo en el grupo C, quedando el tercero B como grupo de control. El profesor

Universidad Pontificia de Salamanca

de tercero A asume experimentar con el procedimiento cooperativo. Como ya se ha consignado anteriormente, los grupos son formados a final de primaria o comienzos de secundaria, buscando la homogeneidad no solo de edad sino también de competencias para que evitar diferencias entre ellos.

- En los días 19, 20, 21 de Diciembre de 2012, durante las clases, se cumplimentan los test de motivación y de conocimiento, del comienzo de la experiencia investigadora, que luego se denominará. Esta operación se lleva a cabo en cada uno de los grupos después de motivar a los alumnos para que lo hagan de la forma más seria posible.

- Durante el mes de enero imparten las clases pertinentes poniendo videos durante las explicaciones e indicando a los alumnos las direcciones donde encontrarlos.

- En Febrero los días 14, 15 y 16 realizan de nuevo los test de motivación y el test de conocimientos, correspondientes a la finalización de la experiencia investigadora.

- A continuación me reúno de nuevo con los profesores para que me den los materiales y me comenten la experiencia. Sus opiniones al respecto son positivas porque es algo que querían hacer y la facilidad de cómo hacerla y de los materiales lo ha hecho posible. También me comentan que el grupo cooperativo necesitó más tiempo que el resto de los grupos, 4 sesiones más, ya que además de gestionar el aprendizaje hubo que enseñarles a trabajar en grupo.

6.5.- Variables procedimentales

La confluencia de temáticas de diversa naturaleza en la articulación de la investigación, impuso la exigencia de una doble metodología adecuada[197] a cada una de ellas:

a) Analítica e interpretación documental

Este procedimiento está fundamentado en el análisis crítico, en el contraste e interpretación de documentación bibliográfica sobre la que se argumenta el contenido

---

[197] Nota: En cuanto autores destacados en la metodología empírica hemos seguido principalmente a Sierra, R., (1991). *Técnicas de la investigación social*; Alvira Martín, F. (1984). *La investigación sociológica*; Visauta, B. (1989). *Técnicas de investigación social*; Latorre Beltrán, A. y otros (2005). *Bases metodológicas de la investigación educativa* e ISAMA, (1974). *Curso de técnicas de investigación social.*

Universidad Pontificia de Salamanca

de los capítulos más teóricos, en los que se pone de manifiesto la trascendencia científica de la mentalidad matemática. En cada capítulo he seguido el criterio de incorporar, tanto en el curso del texto como en notas, aquellos documentos y autores de reconocida autoridad en cada temática, citando donde era necesario obras fuentes, como hemos hecho al analizar y valorar la mentalidad matemática griega. El mismo criterio ha dirigido la argumentación en los demás capítulos, tanto en la temática estrictamente científica como en la de naturaleza pedagógica y psicológica, como la referida a la formación del profesorado. En la Bibliografía se recapitula la totalidad de la documentación y de los autores consultados e incorporados como aval de la propia argumentación y en las Referencias Bibliográficas, colocadas al final de cada capítulo, se muestran los autores y obras consultadas correspondientes a la temática del capítulo.

Debo señalar que he seguido una cautela hermenéutica exigible en la argumentación científica: la de contrastar críticamente opiniones y autores, de tal modo que no hemos suscrito opiniones o teorías sin la previa confrontación de puntos de vistas distintos, incluso divergentes. Esta es la razón por la que, en capítulos más teóricos, he debido ampliar la consulta con el propósito de *establecer un marco teórico bien fundamentado* y actualizado sobre dimensiones incuestionablemente relevantes de las matemáticas, de la educación matemática y del agente de la educación matemática, que he considerado como el principio axial de todo el sistema educativo de las matemáticas. Este conjunto fue trabajado como marco conceptual digno y soporte seguro de la investigación empírica. Disponer de fuentes documentales apropiadas y mostrar como se ha recogido e interpretado esa información era obligado cometido para dejar constancia de la destreza para manejar una técnica tan imprescindible en la investigación científica como son el análisis de las fuentes documentales. En todo caso estimo que la apoyatura documental sobre la que se elabora el discurso de los cuatro primeros capítulos es cuantitativamente relevante[198] y cualitativamente significativa. He de manifestar sobre este aspecto la utilidad y la complementariedad de las bibliotecas y librerías con la búsqueda de información en Internet, como queda significativamente especificado en las referencias bibliográficas consignadas al final de cada capítulo y en los Anexos que se adjuntan.

---

[198] Como resumen son 80 citas, en el primer capítulo, 40 en el segundo, 70 en el tercero y más de 50 en el cuarto, sin contar las citas tomadas de Internet.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) Pruebas empíricas: aplicación experimental

La metodología analítico experimental a la que se atuvo la selección, elaboración y formulación de los contenidos docentes, objeto de la experiencia investigadora, fueron preparados por mi, comunicados, explicados aceptados por los profesores a los que competía la práctica docente en clase. Con ellos se llegó a una situación de colaboración y de coincidencia sobre la extensión del calendario de las explicaciones en clase, la aplicación de los test inicial y final de motivación y de conocimientos, la selección de los contenidos y fechas para la evaluación final, así como la recogida de los cuestionarios de las mismas.

Todas estas circunstancias, establecidas previamente, fueron cumplidas rigurosamente por parte de los profesores del aula. Cumplida esta parte tuve en mis manos todo el material con los resultados habidos y mía es la autoría de toda la tarea realizada desde ese momento: discriminación, tabulación, organización, elaboración de cuadros y gráficos, descripción y explicación de las tendencias mediante breves textos escritos, redacción y elaboración de las conclusiones y propuestas que se presentan en la tesis son en todo caso y reitero obra exclusiva de la doctoranda.

En este caso concreto, la investigación se llevó a cabo al universo de estudiantes integrados en los cursos de segundo y tercero de la enseñanza secundaria obligatoria (ESO) y pertenecientes a dos colegios privados. Cada curso se componía de unos noventa alumnos organizados por el centro escolar, desde el comienzo de curso, en tres grupos siguiendo criterios de homogeneidad, que tuvimos oportunidad de verificarla con los datos obtenidos del test de motivación, de tal modo que los tres grupos obtuvieron una calificación media de 7 en matemáticas en el curso anterior. A los estudiantes de todos los grupos se les transmitió información sobre el significado de la investigación, su duración y objetivos para la mejora de la docencia y del aprendizaje, a fin de recabar su asentimiento y cooperación a la experiencia.

b.1.- Procedimientos metodológicos que han orientado la docencia de las matemáticas en los cursos de la ESO que se han investigado:

La investigación empírica realizada para la elaboración de esta tesis, se ha llevado a cabo mediante la aplicación de tres tipos diferentes de procedimientos metodológicos, *el método tradicional, el método cooperativo y el método TIC*, que en la

Universidad Pontificia de Salamanca

actualidad son objeto de estudio, de pruebas, de análisis y de plurales discusiones en el contexto internacional. Un gran número de las investigaciones actuales se han centrado en el estudio de los procedimientos metodológicos para la enseñanza de las matemáticas[199].

1º) Método tradicional. En este método la explicación clara, precisa y ágil del profesor mediante la exposición oral y la grafía desarrollada en la pizarra, constituye el elemento básico del proceso de la enseñanza-aprendizaje. Se complementa con la lectura del libro de texto por el alumno y con ejercicios propuestos por el profesor o seleccionados del libro de texto. El foco de la atención se pone sobre la actividad del profesor, que siempre ha de considerarse como el agente cardinal por excelencia en el proceso de la enseñanza y aprendizaje[200]. El rol del profesor se manifiesta en la explicación y clarificación de los contenidos. El texto se convierte en instrumento complementario, tanto para comprender y memorizar las formulas matemáticas como para aplicarlas a la realización de ejercicios o solución de problemas. Los grupos que siguieron esta metodología son el 2ºB y el 3ºB, que obviamente serán considerados como grupos de contraste.

2º) El método cooperativo se vincula al concepto de escuela activa en la que el profesor reduce su papel como transmisor de información [201]. Su papel es el de

---

[199] El Centro Nacional para la Excelencia en la Enseñanza de las Matemáticas (NCETM) de Inglaterra llevó a cabo un estudio, durante un año, denominado *Las Matemáticas importan* (Mathematics Matters) con el objetivo de identificar los métodos más apropiados para una enseñanza excelente de las Matemáticas y la conclusión es que "existen muchos tipos diferentes de aprendizaje y muchos métodos que podrían aplicarse en cada caso, apropiados para cada alumno y para el tipo específico de resultado del aprendizaje que se espera" (Swan et al., 2008:2). En la línea del NCETM, se puede citar la investigación de Hiebert y Grows en la que llegan a conclusiones semejantes: "diferentes enfoques metodológicos son válidos para desarrollar la comprensión de los conceptos matemáticos y lo que se denomina eficacia en las destrezas" (…) "uno de los enfoques metodológicos que funcionan mejor es una presentación clara y ágil de los contenidos por parte del profesor, acompañada de una serie de ejemplos que sirvan como modelo y que los alumnos realicen prácticas a continuación" (2009: 11). Otra investigación relevante es la de Slavin (2009) en la que se constata que "los métodos de enseñanza relacionados con el aprendizaje cooperativo son los que influyen en mayor medida sobre los resultados, aunque una formación permanente del profesorado, que mejore la gestión del aula y la motivación de los alumnos contribuye en gran medida al éxito" (EURYDICE, 2011d: 58). Otras investigaciones, (Hattie, 2009), insisten en "la información que reciben los alumnos sobre su proceso de aprendizaje puede realmente marcar la diferencia en la clase de matemáticas" (EURYDICE, 2011d: 58).

[200] "Los resultados de las investigaciones indican que no existe un único método adecuado para impartir la materia (matemáticas) y que los profesores necesitan escoger métodos apropiados y estrategias acordes con los temas tratados, con el tipo de alumnos y con el contexto de aprendizaje. Los datos procedentes de estudios internacionales indican que, en la práctica, se están manejando un gran número de enfoques pedagógicos. Sin embargo, para que los profesores sean capaces de proporcionar esta flexibilidad metodológica y seleccionar el enfoque o el método más apropiado en cada momento es esencial el acceso a una formación permanente eficaz" (EURYDICE, 2011d: 77-78)

[201] En esta metodología los alumnos trabajan en grupo, ya sea durante una clase, durante un número de clases o a lo largo de todo el curso, los alumnos tienen que ser responsables de sus tareas y deben tener

Universidad Pontificia de Salamanca

presentar y contextualizar los temas, acentuar los aspectos importantes o de difícil comprensión, destacar sus aplicaciones, motivar a los alumnos hacia su estudio, a modo de gestor de los grupos. En este procedimiento adquiere mayor valor la responsabilidad del estudiante, que ha de comprender la información a través de la interacción con los compañeros del grupo, en donde el docente ejerce de orientador y asesor del aprendizaje del grupo. Este modelo se basa en la existencia de un liderazgo participativo, la cultura cooperativa envolvente y el sistema de relaciones empático-colaborativas, apoyados en las tareas y actividades de naturaleza compartida (Medina, 2008: 61).

Para el logro de estos objetivos se distribuyó a los alumnos en grupos de 3 ó 4 y se les orientó y estimuló para el trabajo en equipo. En teoría, este enfoque puede adquirir diferentes modalidades de concreción. Entre las más frecuentes pudiera citarse el jigsaw, en el que a cada individuo se le asigna un tema que tiene que explicar a los restantes miembros del grupo. Desde esta modalidad se han hecho incursiones hacia el campo motivacional para medir el efecto de la metodología propuesta (Hänze y Berger, 2007; Gonzálvez et al., 2011). Otra modalidad del aprendizaje cooperativo es el aprendizaje en proyectos y el estudio de casos (Slavin, 1991) [202]. En Harvard desde principios de este siglo se experimenta con la modalidad de aprendizaje cooperativo denominada *peer instruction.* Consiste en que los alumnos se leen los contenidos previamente a la clase en que se van a tratar, responden a una serie de preguntas al empezar la clase y discuten sus respuestas con los compañeros. Después se les proporcionan las mismas preguntas, que se volverán a contestar con alguna diferencia de las previas, tras la discusión. En este procedimiento se introducen variables, como la explicación o no del profesor, en función de si las respuestas siguen siendo erróneas o acertadas en un porcentaje significativo (Méndez y García-Alonso, 2013:304).

Esta metodología parece tener un efecto positivo en el aprendizaje, ejerce una especial motivación sobre los estudiantes y dispone al alumno para asumir su responsabilidad, no solo respecto a su propio aprendizaje, sino también del de los

clara la interdependencia que existe entre ellos. En algunos casos es interesante que los alumnos primero resuelvan una tarea individualmente, para después discutir la solución de cada uno con el grupo. El profesor en algunos casos puede explicar a toda la clase durante unos minutos, pero no debe ser ésta la tarea que lleve más tiempo. Después debe proveer a los estudiantes del material necesario para trabajar en grupo y asimilar los contenidos de la clase. De esta forma, se están trabajando también contenidos actitudinales muy interesantes, como son escuchar, argumentar y reflexionar (Bará et al., 2007; Johnson y Johnson, 1999; Kagan y Kagan, 2009).

[202] Para este autor Slavin en el artículo de 2009, como se ha mostrado en la nota 4 de esta Introducción, afirma que el aprendizaje cooperativo influye en los resultados más que otros procedimientos, pero insistiendo que este buen resultado pende también de la formación del profesorado.

Universidad Pontificia de Salamanca

demás. Incluso en la actualidad se están implementando ciertas herramientas informáticas, de tal forma que el profesor, al organizar los grupos, coloque a los alumnos que tienen diferentes respuestas en el mismo grupo, para facilitar así la discusión. Este método de aprendizaje en grupo abre la acción comunicativa a una variedad de emisores –alumnos y profesor- y de receptores –alumnos y profesor-.

La metodología parece válida para trabajar contenidos tanto de tipo conceptual como procedimental, además del cultivo de actitudes favorables al trabajo en grupo. La metodología pudiera considerarse con proyección de futuro, en cuanto prepara directamente para la sociedad actual en la que los alumnos tendrán que acostumbrarse a trabajar en grupo, a entenderse, a no rehuir la propia responsabilidad de la acción colectiva. El grupo elegido para hacer la experiencia ha sido el 3ºA.

3º) Método TIC.- En esta modalidad metodológico/didáctica, se revalorizan de nuevo las explicaciones del profesor y disminuye la información prestada por el libro de texto al no considerarse como única fuente de contenidos y ejercicios. Las explicaciones se apoyan sobre la utilización de videos didácticos y material audiovisual disponible en Internet y de contenido acorde a la materia explicada en ese día o que se explicaba en la clase siguiente. En España existen centros administrativos vinculados al MEC, a la Junta de Andalucía o de Extremadura, así como a asociaciones e individuos particulares, profesores de universidad y de otros niveles, que proveen abundancia de materiales para hacer ejercicios y asimilar la teoría, sin necesidad de recurrir al libro de texto. Los estudiantes con los que se ha llevado a cabo la experiencia investigadora [203] son los del grupo de 3º C y los grupos de 2º A y 2º C.

*b.2.- Denominación de los grupos.***-** La denominación atribuida en la investigación a los grupos de 3º curso es la siguiente: el grupo 'A' siguió el método cooperativo y se le denominó *grupo cooperativo*; el grupo B siguió la metodología tradicional y se le denominó *grupo tradicional* y al grupo C que siguió la explicación del tema con videos y aplicaciones didácticos de Internet, se le denominó *grupo TIC*. En cuanto a la denominación atribuida a los estudiantes del curso 2º es la siguiente: los

[203] "No es posible afirmar que las TIC por sí solas contribuyan a mejorar el rendimiento en matemáticas, aunque sí es probable que funcionen para algunas tareas concretas y en contextos específicos. Los resultados de las investigaciones sobre métodos pedagógicos eficaces sugieren que los profesores deberían recurrir a una gran variedad de métodos y que, probablemente, las TIC debieran figurar en dicho repertorio. Los profesores eficaces deberían saber cómo y cuándo utilizarlas para sacarles el máximo partido" (EURYDICE, 2011d: 67).

Universidad Pontificia de Salamanca

grupos A y C, se les denominó *grupo TIC* y al grupo B se le denominó *grupo tradicional*.

6.6.- Conclusiones

A la operación de determinar y sintetizar el significado de la información recogida a lo largo de la investigación, los autores suelen denominarla con el término inferencia y se le atribuye el significado de reflexión serena y documentada acerca del sentido del fenómeno socio-educativo de la dificultad imbricada en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y las consecuencias que comporta. Las inferencias debidamente formuladas, ordenadas y redactadas, se convierten en una serie concatenada de propuestas que se denominan conclusiones. Las conclusiones obtenidas acerca del problema investigado y la validez de la investigación realizada depende tanto de la coherencia entre los objetivos propuestos y las conclusiones, como también del valor de las pruebas que se han manejado, es decir, del vigor demostrativo de la argumentación elaborada, desde los documentos analizados y desde la información empírica obtenida.

Sucede con harta frecuencia, que los juicios sobre el problema y los supuestos en torno a los que se ha tejido el discurso implicado en el estudio, *la enseñanza aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes de la ESO,* no rebasan el ámbito de las tendencias. Esta circunstancia siempre es previsible y se tuvo en cuenta, puesto que el estudio presentado se ocupa de los comportamientos implicados en el proceso educativo, que pertenecen al colectivo de los seres humanos, que gozan de libertad y los resultados de sus conductas no siguen pautas absolutamente fijas. El investigador cometería un grave error, si forzara los hechos para mostrar lo que realmente no se deduce del análisis de los datos recogidos. En el caso de unas conclusiones que, a modo de tendencias, se infieran, estimo que son científicamente válidas y rigurosas, aun cuando se centren únicamente en señalar las tendencias halladas, sin forzar los propios límites de sus significados.

En los manuales de metodología de la investigación social y de técnicas de investigación científica se mencionan los procedimientos de uso, unos más habituales que otros, para la correcta obtención de las conclusiones. Merecen tenerse en cuenta los procedimientos de la concordancia, de la diferencia y de la variación concomitante. Mediante la concordancia se orienta la búsqueda de conclusiones desde las circunstancias comunes que hacen semejantes los fenómenos. El procedimiento de la

Universidad Pontificia de Salamanca

diferencia, en cambio, rastrea las conclusiones desde las dimensiones diferenciales que definen los fenómenos objeto de estudio y, por último, el método de variación concomitante pretende conocer si los grados de variación en el resultado van acompañados, igualmente, de variaciones en los supuestos establecidos (ISAMA, 1974: lec.17, p7).

Un asunto metodológico e interesante al que ha de estar atento el investigador, en la evaluación de las conclusiones, se refiere a la necesidad de evitar aquellos peligros que pudieran cuestionar el sentido y el alcance de las conclusiones obtenidas. Como más frecuentes se presentan el sensacionalismo o la tendencia a presentar resultados, que llamen la atención; la complejidad que puede surgir tanto del desaliento como del aturdimiento en el investigador, ante el ingente volumen de datos usados en la investigación; los análisis superficiales e interpretaciones tendenciosas; la confusión entre los datos y las opiniones o creencias personales y hasta la excesiva confianza en los datos estadísticos. La llamada de atención sobre los precedentes supuestos tiene la obvia finalidad de salir al paso de posibles errores de interpretación, de defectos lógicos en las consecuencias deducidas de los resultados obtenidos así como de generalizaciones indebidas de las conclusiones (Sierra, R.,1991:163).

Una parte importante de la tesis se refiere a las conclusiones obtenidas. Teniendo en cuenta que la tesis trata principalmente del proceso de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, he querido llevar a las conclusiones las matemáticas y de ahí el uso de alguna fórmula matemática que nos ha permitido introducir las operaciones matemáticas de cálculo en las conclusiones. Estas breves reflexiones que ocupan el lugar primero, no tanto por su relevancia obviamente cuanto porque sirven de pórtico a las conclusiones halladas y a las propuestas presentadas.

6.7.- A modo de síntesis

Como resumen de lo recogido en este capítulo, en primer término diré que es un capítulo clásico, en el que se consignan los objetivos, los procedimientos y el universo o muestra con que se trabaja en la investigación. Dentro de cada uno de estos se especifican aspectos más o menos concretos en función de la investigación llevada a cabo. Atendiendo a los asuntos concretos, el capítulo se inicia con una breve entradilla en la que se resaltan las condiciones de una investigación científica como la tesis. Se les dio forma a los objetivos, que de alguna manera ya están elaborándose en cuanto se fija

Universidad Pontificia de Salamanca

el problema de la investigación, si bien su elaboración definitiva se consuma en el capítulo de metodología. Los objetivos en esta tesis no solo son hitos de orientación a la investigación empírica sino que enmarcan también el discurso que configura el marco teórico de la investigación. Los objetivos del conocimiento científico se pueden reducir al análisis, la explicación, la predicción y la actuación. Conocida una realidad el ser humano tiende a explicarla, es decir, a establecer las consiguientes relaciones entre los elementos que la integra, para responder con la mayor aproximación al por qué es como es esa realidad. Como he dicho con anterioridad no siempre es posible alanzar este pleno. En todo caso sigue siendo el horizonte que ilumina el camino del investigador. Desde esta actitud he elaborado los objetivos de la tesis que se recogen en este capítulo.

La investigación es una actividad que el ser humano pone en funcionamiento para recoger información sobre el asunto a estudiar en orden a poder explicarlo. El asunto en este caso está concentrado en el problema que se investiga en la tesis, en concreto, en concreto, partiendo de un convencimiento bastante generalizado del fracaso que afecta a la enseñanza-aprendizaje d e las matemáticas, he decidido concentrarme en analizar el fenómeno de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la ESO, a fin de aumentar mi conocimiento respecto del problema y de las varias dimensiones que puede tener el problema. Se ensayan algunos procedimientos, puesto que las investigaciones que sobre el fracaso escolar del aprendizaje matemático están produciéndose en la actualidad, apuntan a los procedimientos más que a otros condicionantes. Desde este punto de vista se trabaja con determinados procedimientos metodológicos y tecnológicos para profundizar en la explicación de los problemas que afectan al aprendizaje matemático en la ESO. Ubicados siempre en el ámbito de la realidad humana, en la búsqueda de las explicaciones se pensó con cierta cordura que había de explorarse el ámbito de las motivaciones, en donde muchas veces encuentra su explicación el comportamiento humano.

Desde esta perspectiva se prepararon los procedimientos metodológico y tecnológicos, diversas formas por las que discurrir el proceso de la enseñanza-aprendizaje, en orden detectar los problemas del aprendizaje y los instrumentos, test de motivación y cuestionario de conocimientos, que consideramos útiles para recoger amplia información sobre el asunto. Previamente se establecieron las circunstancias de contenido, de tiempo, de formas didácticas y de recursos que luego fueron seguidas con diligencia y rigor. Los resultados hallados son la mejor muestra de la planificación metodológica pretendida y, en mi parecer, conseguida con plena suficiencia.

Universidad Pontificia de Salamanca

6.7.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVIRA, F., (1982). "La perspectiva cualitativa y cuantitativa en las investigaciones sociales", Madrid: *Estudios de Psicología*, 11, 34 – 36.

___ (1984). "La investigación Sociológica", en SALUSTIANO DEL CAMPO, *Tratado de sociología 1*, Madrid: Taurus.

BARÁ, J.; DOMINGO, J. y VALERO, M., (2007). *Técnicas de aprendizaje cooperativo. Barcelona*. Barcelona: Taller de formación en la Universidad Politécnica de Cataluña.

COMISIÓN INTERMINISTERIAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA (CICYT), (2007). *Estrategia Nacional de Ciencia y Tecnología*, Madrid: Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT).

EURYDICE, (2011d). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales.* Madrid: MEC y D, EACEA P9 Eurydice.

GIL, I., N., GUERRERO, B.,E. y BLANCO, N., L. (2006). "El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas", en *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*, Universidad de Extremadura, ISSN. 1696-2095. Nº 8, Vol. 4 (1).

GONZÁLVEZ, V.; TRAVER, J. y GARCÍA, R., (2011). El aprendizaje cooperativo desde una perspectiva ética. Universidad de Navarra: *Estudios sobre Educación* 21, 181-197.

HÄNZE, M. y BERGER, R., (2007). Cooperative learning, motivational effects, and student characteristics: An experimental study comparing cooperative learning and direct instruction in 12th grade physics classes. Learning and instruction, 17, 29-41.

HIEBERT, J. y GROUWS, D., (2009). "Whinch teaching methods are mos effective for maths?", en Better: Evidence-based Education, 2 (1), p.10-11. Online : http://content.yudu.com/A1i1c9/BetterFall09US (Consulta: 8 de noviembre de 2012)

ISAMA, (1974). *Curso de técnicas de investigación social.* Madrid. Instituto de Sociología Aplicada de Madrid.

JOHNSON, D., y JOHNSON, R., (1999). Learning together and alone: Cooperative, competitive and individualistic learning. Boston: Allyn & Bacon.

KAGAN, S. y KAGAN, M. (2009). Cooperative learning. San Clemente: Kagan Publishing.

LATORRE, A., DEL RINCÓN, D. Y ARNAL, J., (2005). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Ediciones Experiencia.

Universidad Pontificia de Salamanca

LININGER, CH. A. Y WARWICK, D.P., (1978). *La encuesta por muestreo.* México: CECSA.

MAYOR, J., (2009). *La actividad humana. Un incierto camino entre la necesidad y la posibilidad*. Madrid: Editorial Universidad Complutense.

MEDINA, A. y SALVADOR, F. Coord., (2008). "Enfoques, teorías y modelos de la Didáctica", en *Didáctica General*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

MÉNDEZ, D. y GARCÍA-ALONSO, P., (2013). Cambio comunicativo en las nuevas metodologías didácticas. *Estudios sobre el mensaje periodístico,* 19, núm. especial marzo, 299-308. http://dx.doi.org/10.5209/rev_ESMP.2013.v19.42037

SIERRA, R., (1991). *Técnicas de Investigación social*. Madrid: Paraninfo.

SLAVIN, R. E., (1991). Synthesis of research on cooperative learning. *Educational leadership,* 48 (5), 71-81.

__, (2009). "What Works in teaching maths?", en Better: evidence-based Education, 2,1, 4-5 (Online). http://content.yudu.com/A1i1c9/BetterFall09US (Consultado el 8 de noviembre de 2012).

SWAN, M.; LACEY,P. y MAN, S., (2008). Mathematics Matters: Final Report. (Online): http://www.ncetm.org.uk/public/files/309231/Mathematics+Matters+Final/Report .

VASILIOU, A., (2011). "Prólogo", en *La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales.* Madrid: Secretaría General Técnica del MEC y D y EACA P9 Eurydice.

VISAUTA V., B., (1989). *Técnicas de investigación social.* Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

ZIMAN, J., (1986). *Introducción al estudio de las ciencias*. Barcelona: Ariel.

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 7
RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA SOBRE EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

CONTENIDO **PÁGS.**

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 7.- RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EMPÍRICA SOBRE EL ESTUDIO DE LAS MATEMÁTICAS

7.1.- RESULTADOS DEL TEST DE MOTIVACIÓN

En este primer apartado del capítulo siete se incluyen todos aquellos asuntos relacionados con los resultados obtenidos de la aplicación del Test de motivación. Para proceder de forma sistemática y con el mayor orden posible he organizado los asuntos del siguiente modo: *En el punto 7.1.1.-* se recogen los resultados relacionados con la aplicación del Test de Motivación al curso de segundo de la ESO. Se incluyen las pruebas de fiabilidad y validez, los datos sobre el contexto ecológico de estos estudiantes, los resultados obtenidos en función de las diez dimensiones del Test y las pruebas de las diferencias significativas. En el punto 7.1.2.- se presenta un breve resumen, *a modo de síntesis.* En el punto 7.1.3.- se recogen los resultados relacionados con la aplicación del Test de Motivación al curso tercero de la ESO. Se incluyen las pruebas de fiabilidad y validez, los datos sobre el contexto ecológico de estos estudiantes, los resultados obtenidos en función de las diez dimensiones del Test y las pruebas de las diferencias significativas. En el punto 7.1.4.- se elabora un subapartado *a modo de síntesis,* que se refiere a los resultados obtenidos de la aplicación del Test de Motivación a los estudiantes del curso tercero de la ESO

7.1.1.- Resultados de la aplicación del Test de motivación en el segundo curso de la ESO

Se abre aquí un apartado que tiene por objeto ofrecer los resultados obtenidos de la aplicación del Test de Motivación, al comienzo y al final de la experiencia investigadora, con los estudiantes del segundo curso de la ESO en relación con su nivel de motivación y actitud para el estudio de las matemáticas. Se contemplan en este espacio temático como la fiabilidad y la validez del instrumento – Test de motivación - en su aplicación, la contextualización del grupo, los datos sobre las dimensiones o indicadores medidos por el Test y las pruebas de las diferencias significativas.

Universidad Pontificia de Salamanca

a) Fiabilidad y validez

Recogidos los test de motivación realizados por los alumnos del segundo curso, se procede a la medición de la fiabilidad del test, entendiendo ésta como confiabilidad, el grado de consistencia interna y estabilidad de las puntaciones a lo largo de de sucesivos procesos de medición con el mismo instrumento. Para ello mediremos el alfa de Cronbach que es la estimación más segura de la consistencia interna definido como sigue:

$$alfa\ de\ Cronbach = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum \sigma_i^2}{\sigma_t^2}\right)$$

Donde no es la longitud del test, es decir, el número de preguntas que lo componen. σ^2_i es la varianza del ítem i, y σ^2_t es la varianza que muestran las puntuaciones totales en el test. Como unidad de análisis utilizaremos las puntuaciones obtenidas en el pretest y posttest en cada factor y en el total. Al establecer como unidad de análisis la clase "buscamos una forma de controlar y neutralizar las particularidades individuales" (Morales, P., 2009).

Hemos obtenido:

Alfa de Cronbach para el pretest=0,796

Alfa de Cronbach para el posttest=0,889

Se suele interpretar que un coeficiente alfa ha de ser igual o superior a 0.70 (Nunnally, 1978: 76), entonces puede afirmarse que el test tiene una fiabilidad suficiente.

"El concepto de fiabilidad es distinto del concepto de la validez. En el sentido más usual del término validez, un instrumento es válido si comprueba o mide aquello que pretendemos medir. Un instrumento puede ser válido, porque mide lo que decimos que mide y queremos medir, pero lo puede medir con un margen de error grande; con instrumentos parecidos o en mediciones sucesivas hubiéramos obtenido resultados distintos." (Morales, P., 2007: 4-6). Como ha quedado *explicado en el capítulo experimental* el test usado lo elaboré a partir de otro test verificado con estudiantes de la ESO, añadiendo algunas cuestiones tomadas de otro test también verificado que medía la motivación respecto de la metodología. En consecuencia se puede concluir que es un instrumento válido.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) Contexto individual y familiar

El colegio privado donde se nos permitió hacer la experiencia es un colegio de chicas de la zona norte de Madrid. A continuación damos una serie de tablas con los datos de contexto de cada grupo de segundo donde se realizó la investigación.

Tabla 7.1.1.- Número de estudiantes de cada grupo y la nota media del año anterior en matemáticas.

	2ºA Tic	2ºB – Cooperativo	2ºC – Tic
Nº de alumnas	33	31	30
Nota media	8	7	7

Tabla 7.1.2.- Calificaciones en Matemáticas el año anterior.

Notas	4	5	6	7	8	9	10	Totales
2ºA Tic	0 (0%)	0 (0%)	4 (13%)	11 (34%)	5(16%)	9 (28%)	3 (9%)	33(100%)
2ºB Coop.	0 (0%)	4 (15%)	10 (37%)	6 (22%)	1 (4%)	5 (19%)	1 (4%)	31(100%)
2ºC Tic	0 (0%)	4 (15%)	4 (15%)	7 (27%)	1 (4%)	7 (27%)	3 (12%)	30(100%)

Tabla7.1.3.- Edades de los estudiantes de 2º ESO en el pretest.

Edades	12 años	13 años	14 años	Totales
2ºA Tic	3 (9%)	30 (91%)	0 (0%)	33(100%)
2ºB Coop.	0 (0%)	31 (100%)	0 (0%)	31(100%)
2ºC Tic	2 (7%)	27 (90%)	1 (3%)	30(100%)

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 7.1.4.- Número de hermanos.

Nº hermanos	2ºA Tic	2ºB Cooperativo	2ºC Tic
1	1 (3%)	0 (0%)	0 (0%)
2	3 (9%)	5 (16%)	6 (20%)
3 ó 4	19 (58%)	9 (29%)	11 (37%)
5, 6 ó7	8 (24%)	14 (45%)	10 (33%)
8 o más	2 (6%)	3 (10%)	3 (10%)
Totales	33(100%)	31(100%)	30(100%)

Tabla 7.1.5.- Estudios del padre de los estudiantes de 2º ESO

	Sin estudios	Estudios Primarios	Forma-ción Profesio-nal	Diploma-tura	Licencia-tura	No contesta	Totales
2ºATic	0(0%)	0(0%)	2(6%)	14(42%)	17(52%)	0(0%)	33(100%)
2ºBCoo.	0(0%)	0(0%)	1(3%)	6(19%)	20(65%)	4(13%)	31(100%)
2ºC Tic	0(0%)	0(0%)	2(7%)	7(23%)	19(63%)	2(7%)	30(100%)

Tabla 7.1.6.- Estudios de las madres de los estudiantes de 2º ESO

	Sin estudios	Estudios Primarios	Forma-ción Profesio-nal	Diploma-tura	Licencia-tura	No contesta	Totales
2ºA Tic	0 (0%)	0 (0%)	4 (12%)	14(42%)	13(39%)	2 (6%)	33(100%)
2ºB Coo.	0 (0%)	0 (0%)	1 (3%)	8 (26%)	19(61%)	3(10%)	31(100%)
2ºC Tic	0 (0%)	0 (0%)	3 (10%)	13(43%)	13(43%)	1 (3%)	30(100%)

Tabla 7.1.7.- Profesión de los padres.

	2ºA –Tic	2ºB - Cooperativo	2ºC – Tic
Profesor	1 (3%)	2 (6%)	1 (3%)

Universidad Pontificia de Salamanca

Funcionario no docente	5 (15%)	4 (13%)	3 (10%)
Autónomo	6 (18%)	6 (19%)	7 (23%)
Trabajador por cuenta ajena	20 (61%)	12 (39%)	16 (53%)
Parado	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Jubilado	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Ama de casa	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Otros	1 (3%)	0 (0%)	1 (3%)
No contesta	0 (0%)	7 (23%)	2 (7%)
Totales	33(100%)	31(100%)	30(100%)

Tabla 7.1.8.- Profesión de las madres.

	2ºA - Tic	2ºB - Cooperativo	2ºC- Tic
Profesor	8 (24%)	4 (13%)	3 (10%)
Funcionario no docente	2 (6%)	1 (3%)	3 (10%)
Autónomo	5 (15%)	4 (13%)	5 (17%)
Trabajador por cuenta ajena	14 (42%)	7 (23%)	13 (43%)
Parado	0 (0%)	4 (13%)	0 (0%)
Jubilado	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Ama de casa	4(12%)	5(16%)	3(10%)
Otros	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
No contesta	0 (0%)	6 (19%)	3 (10%)
Totales	33(100%)	31(100%)	30(100%)

Todos los cuadros, tablas y gráficos que aparecen en este capítulo y en los que siguen son de elaboración propia y a la doctoranda incumbe el pláceme de los mejor logrados y también la corrección por los errores que se hayan deslizado en otros.

***c) Asignaturas favoritas al comienzo y al final de la investigación.* 2ºESO:**

Gráfico 7.1.1.a- Asignaturas favoritas: *Grupo TIC.* (2º A). Pretest

Universidad Pontificia de Salamanca

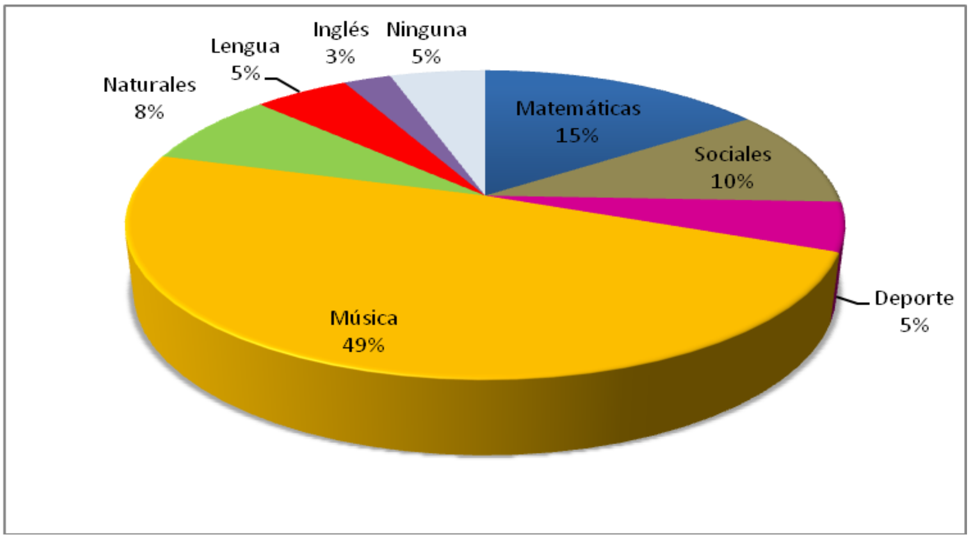
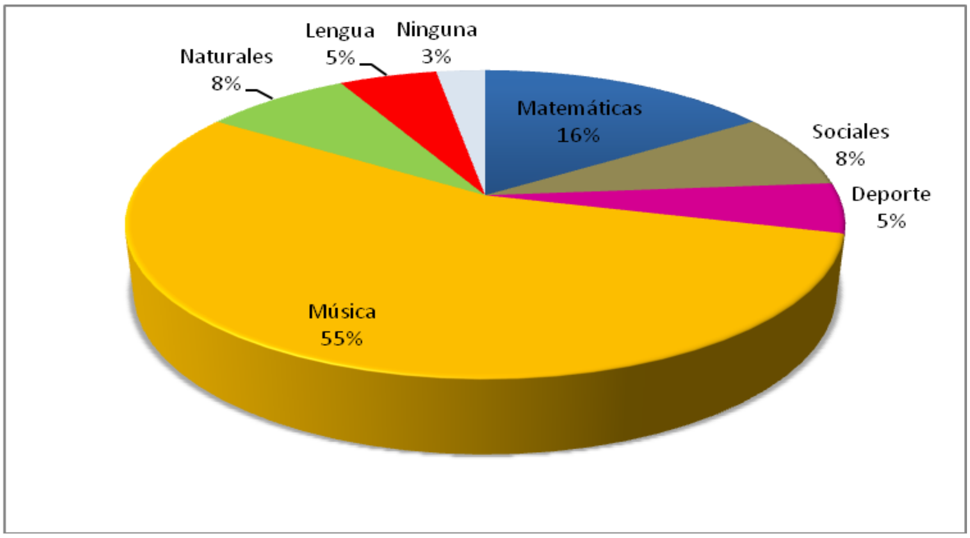


Gráfico 7.1.1.b- Asignaturas favoritas: *Grupo TIC*. (2º A). Posttest



En el caso del *grupo TIC* de segundo A de la ESO, el porcentaje de alumnos que les gustan las matemáticas permanece constante, no se perciben cambios entre el pretest y posttest. Destaca el exuberante entusiasmo por la música.

Gráfico 7.1.2.a- Asignaturas favoritas: *Grupo tradicional.* (2ºB). Pretest

Universidad Pontificia de Salamanca

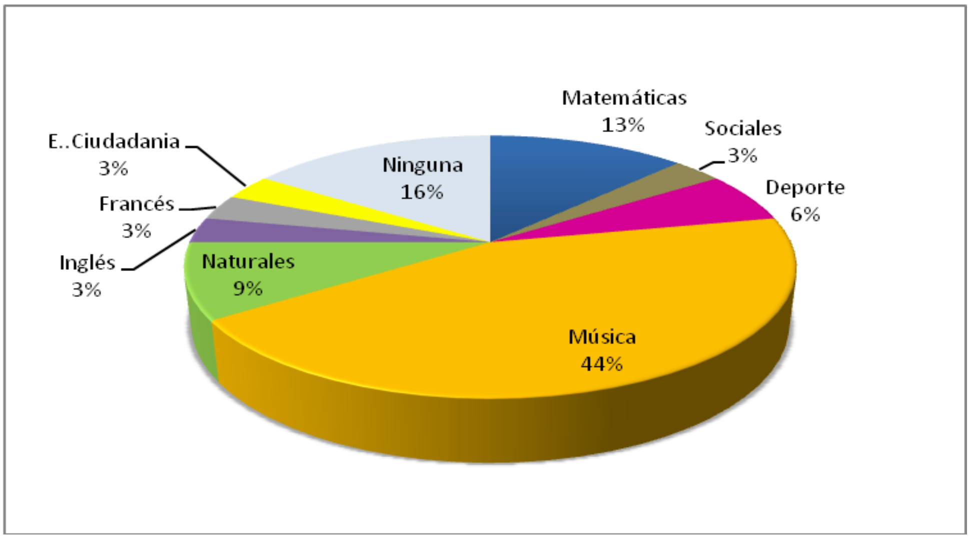
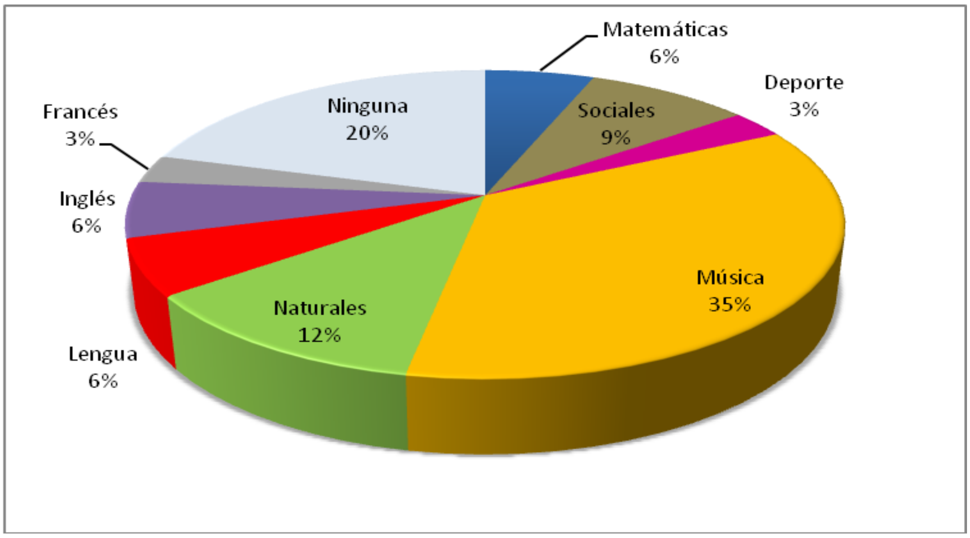


Gráfico 7.1.2.b- Asignaturas favoritas: *Grupo tradicional.* (2º B). Posttest



En el grupo que ha seguido la metodología tradicional, hay un cambio, del 13% que elegían la asignatura como preferida a un 6%. Los estudiantes claramente se han desmotivado respecto de las matemáticas, ante la metodología seguida. Sin embargo las ciencias naturales y sociales han subido en porcentaje. También en este grupo la música les atrae.

Gráfico 7.1.3.a- Asignaturas favoritas: *Grupo TIC*. (2º C). Pretest

Universidad Pontificia de Salamanca

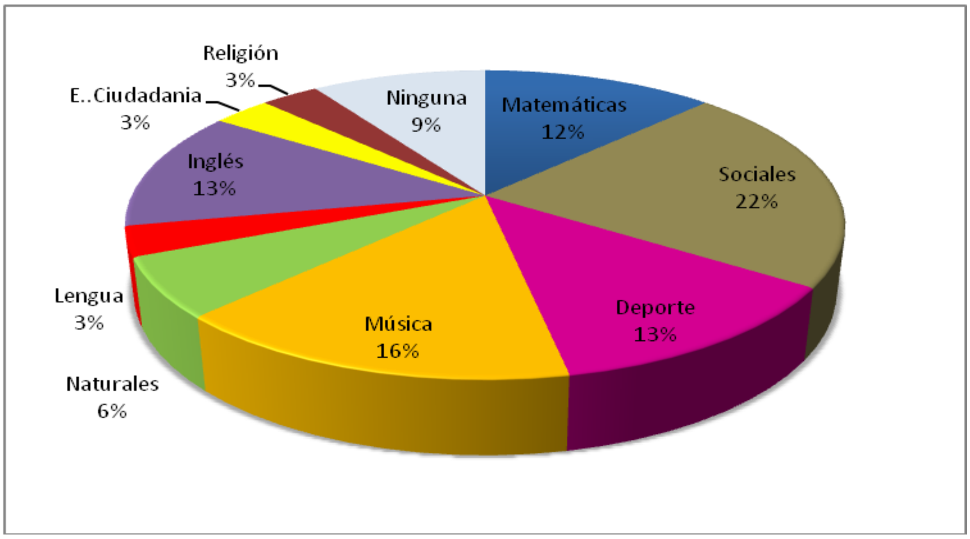
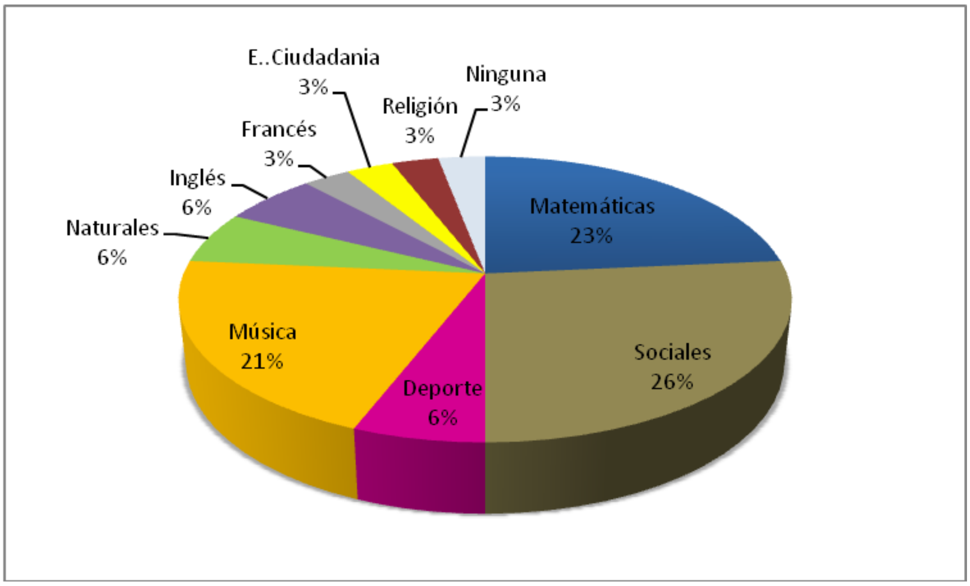


Gráfico 7.1.3.b- Asignaturas favoritas: *Grupo TIC*. (2º C). Posttest



En el caso del *grupo TIC* de segundo C de ESO, la elección de las matemáticas como asignatura preferida aumenta, casi duplicando el porceentaje: del 12% pasa al 23%. En este caso el uso de la metodología ha motivado positivamente a los estudiantes hacia las matemáticas. En términos generales, los estudiantes de segundo cuso de la ESO no se motivaron hacia las matemáticas, con excepción del *grupo TIC* de segundo C. En el grupo TIC de segundo A las matemáticas mantienen idénticos porcentajes en los dos test. Se percibe un escaso aprecio de la lengua española. El entusiasmo por la música es manifiesto.

d) Dimensiones de los resultados.

Universidad Pontificia de Salamanca

Como ya se explicó en el capítulo de metodología, de la agrupación de las preguntas afines por su significado, se han elaborado estas dimensiones para evitar la dispersión, con un test de sesenta y siete preguntas. En el análisis podrían percibirse mejor las cuestiones del test y los resultados obtenidos en el pretest y posttest mostrarían con más claridad los núcleos importantes de motivación en el estudio de las matemáticas.

Tabla 7.1.9.- Dimensiones resultantes de la agrupación de las preguntas

	DIMENSIONES MÁS SIGNIFICATIVAS	**Nº. DE LAS PREGUNTAS**
1º	Necesidad y utilidad de las matemáticas	1, 2, 5, 9, 12, 36, 38, 40, 63
2º	Influencia de familiares, amigos/as y compañeros/as hacia las matemáticas	13, 31, 32, 33, 34, 57
3º	Metodología y recursos	6, 24, 47, 58, 59, 61, 62
4º	Los recursos de la motivación en las clases de matemáticas	23, 42, 43, 53, 54, 55, 66
5º	El profesor como agente de motivación en el estudio de las matemáticas	14, 15, 25, 26, 27, 29, 30
6º	Otras motivaciones para el aprendizaje matemático	28, 56, 60, 67
7º	Opiniones y exigencias del aprendizaje matemático	3, 4, 7, 8, 22, 52
8º	Autoestima y emociones en el aprendizaje de las matemáticas	17, 18, 19, 20, 45, 46, 48, 49, 50
9º	Actitudes de interés, esfuerzo y constancia	10, 11, 16, 21, 44, 51, 64, 65
10º	Opiniones positivas y negativas sobre las matemáticas	35, 37, 39, 41

1ª Dimensión: Necesidad y utilidad de las matemáticas

Tabla 7.1.10.- Necesidad y utilidad de las matemáticas. Datos en porcentajes

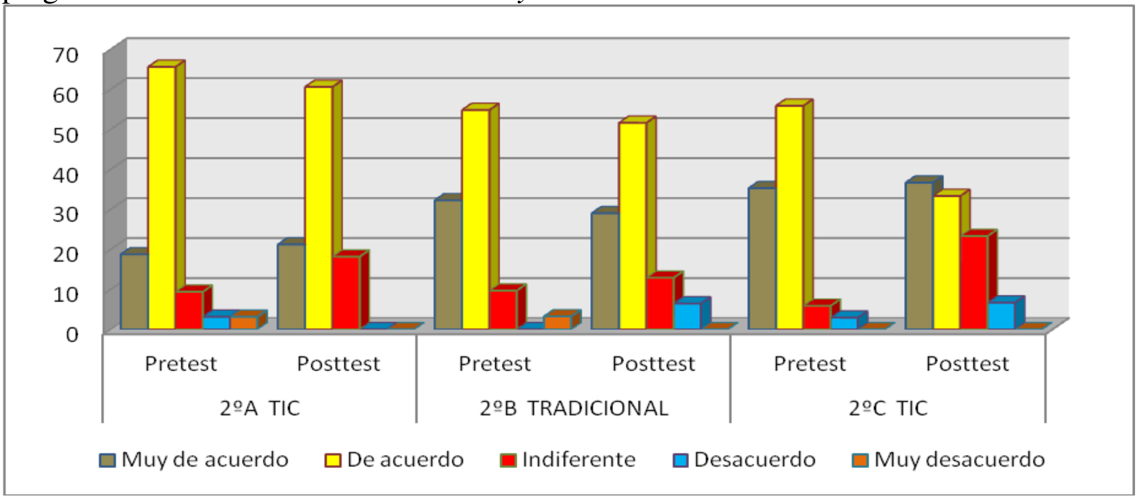
Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy de acuerdo	21,63	21,97	25,31	21,32	24,68	25,97
De acuerdo	36,95	34,09	31,04	43,85	42,73	36,30
Indiferente	26,92	32,07	30,35	27,98	16,64	24,86
Desacuerdo	11,38	9,60	7,31	6,02	11,51	9,52
Muy desacuerdo	3,12	2,27	5,99	0,83	4,44	3,35

En esta dimensión agrupamos las preguntas 1, 2, 5, 9, 12, 36, 38, 40, 63. Entre los alumnos de segundo la tendencia obtiene una polarización más moderada, con mayor polarización en los resultados del posttest del grupo tradicional. Una creencia tan extendida en estos estudiantes respecto de un asunto, que no es obvio, disminuye la influencia de las diferencias metodológicas. En los gráficos que siguen podemos observar la confirmación de los resultados en variadas relaciones. Los resultados de las preguntas 36 y 40 muestran la creencia de los estudiantes sobre que las matemáticas facilitarán el éxito en la vida y en la 63 la creencia de la utilidad para otras asignaturas como física y química.

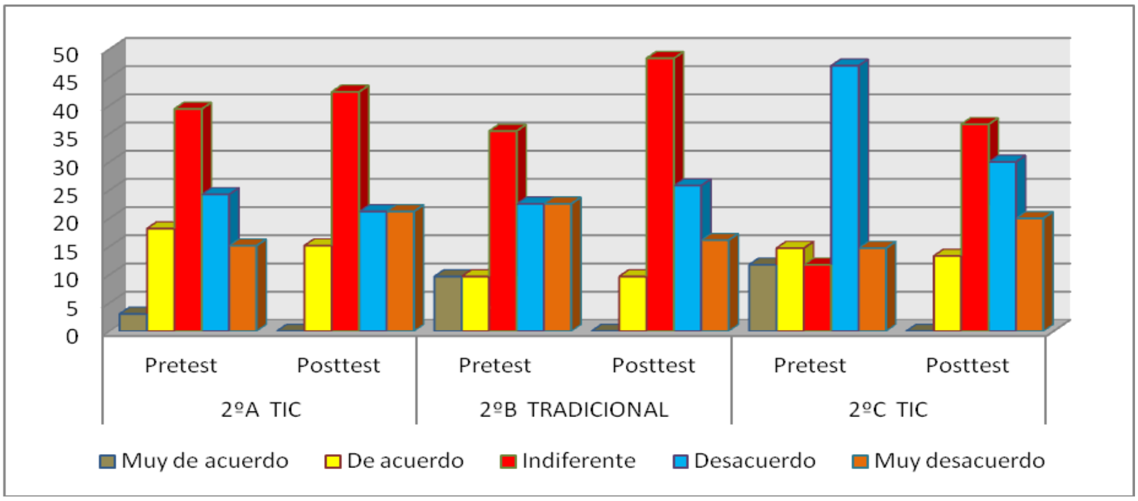
Gráfico 7.1.4.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de segundo ESO a la pregunta 1.- *Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.*



Los alumnos del segundo curso se mantienen en más del 50% en la tendencia de la utilidad de las matemáticas, con una ligera caída desde el pretest al posttest. En cambio este descenso de frecuencias es acusado en el grupo TIC de segundo C. En esta cuestión, podría aceptarse la influencia de las diferencias de edad.

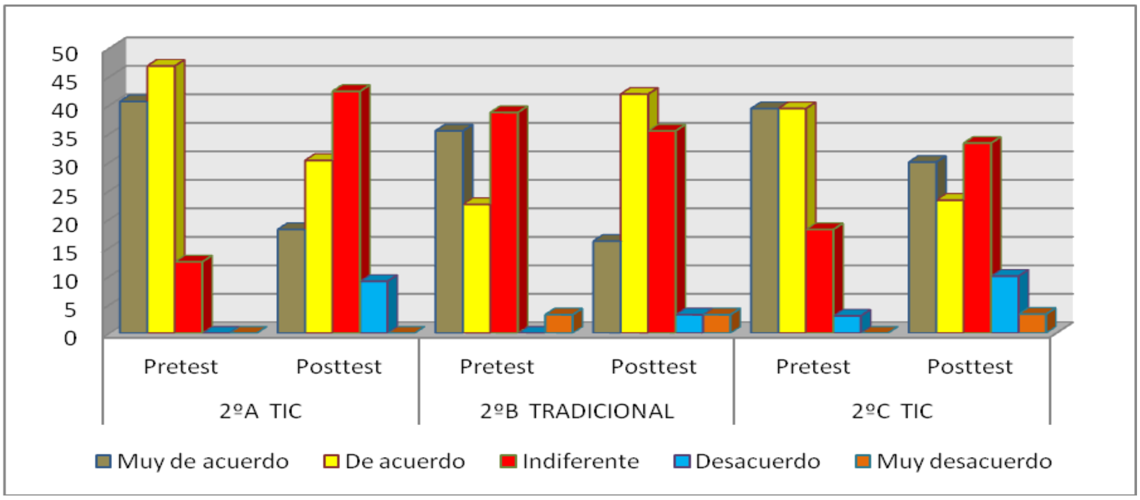
Gráfico 7.1.4.b) Resultados de segundo ESO a la pregunta 9 *Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.*

Universidad Pontificia de Salamanca



Aunque la respuesta de no saber qué contestar es muy generalizada, considerando las opciones contrapuestas del desacuerdo por un lado y del acuerdo por otro, se percibe que es mayor la tendencia a estar en desacuerdo y se incrementa en el posttest

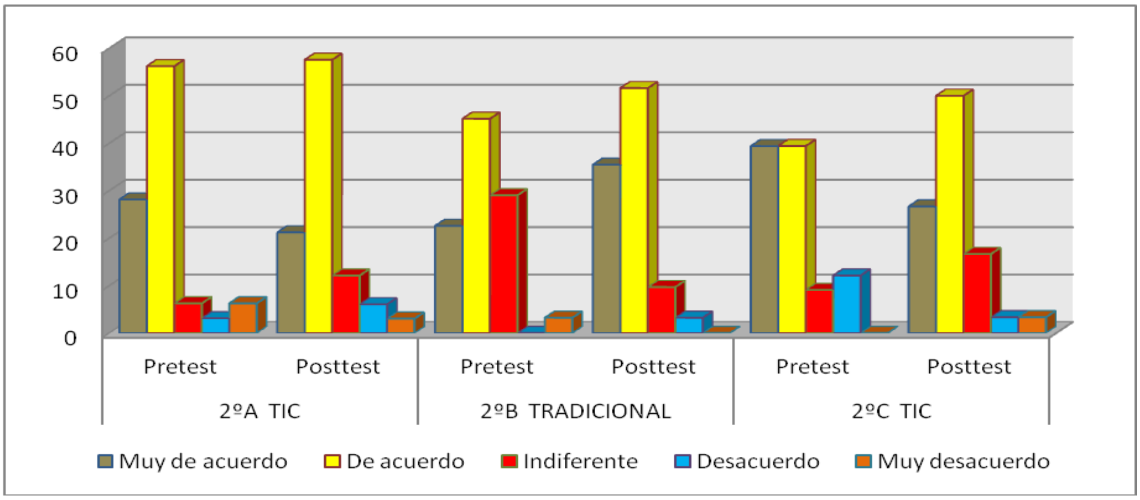
Gráfico 7.1.4.c) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 36 *Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas.*



En el curso segundo la tendencia es mayoritaria a estar de acuerdo, sin embargo, después de la experiencia investigadora, los dos grupos TIC bajan en porcentaje de frecuencias y sube el grupo tradicional. En todo caso, una mayoría muy alta de estudiantes considera importantes las matemáticas para obtener un trabajo bien remunerado.

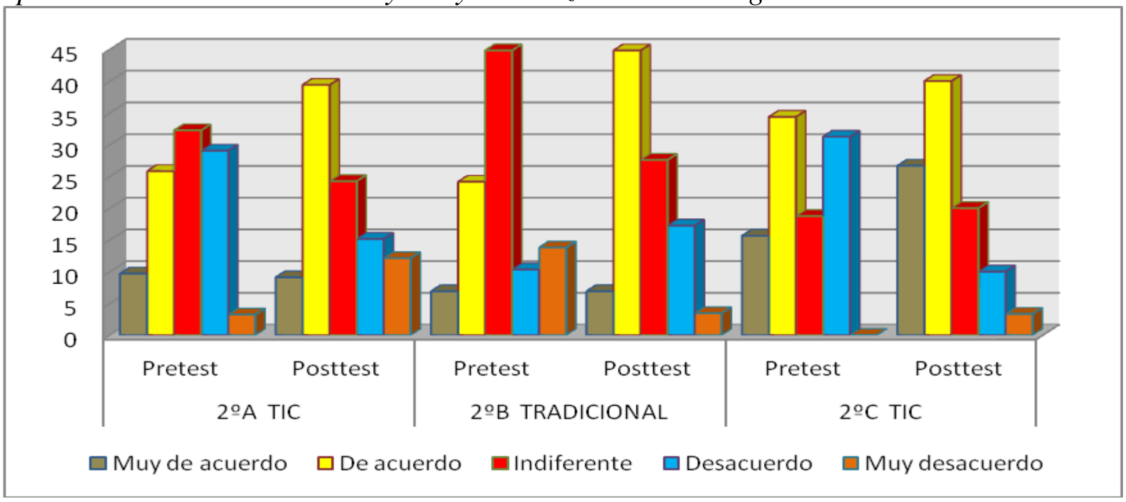
Gráfico 7.1.4.d) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 40 *Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.*

Universidad Pontificia de Salamanca



La tendencia obtiene una polarización de frecuencias muy altas en la respuesta de acuerdo: en segundo el 80% de los estudiantes considera que la materia es muy importante para sus estudios futuros, este porcentaje se mantiene casi invariable después de la experiencia.

Gráfico 7.1.4.e) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 63 *Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.*



Es mayoritaria la tendencia de acuerdo y sube el porcentaje de frecuencias en el posttest en los tres grupos, destacando el grupo tradicional.

2ª Dimensión: Influencia de familiares, amigos/as y compañeros/as hacia las matemáticas

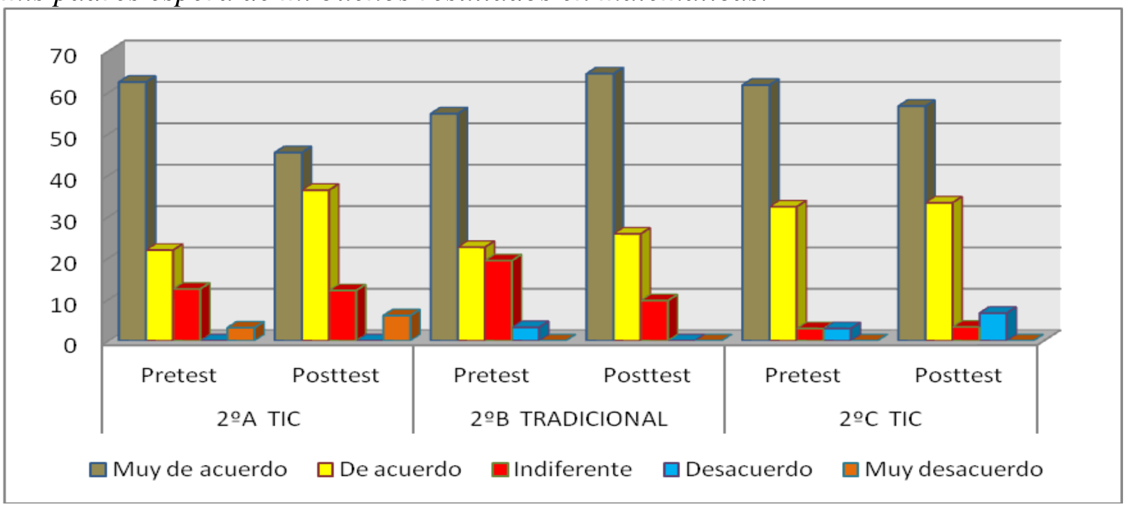
Tabla 7.1.11.- Influencias motivadoras de familiares, amigos y compañeros. Datos en porcentajes.

Universidad Pontificia de Salamanca

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	52,45	47,58	51,75	61,29	53,40	57,48
De acuerdo	16,53	21,82	14,33	16,77	16,67	17,75
Indiferente	16,93	16,97	15,37	12,26	8,30	12,07
Desacuerdo	4,47	5,15	5,61	6,45	9,51	4,70
Muy desacuerdo	9,62	8,48	12,94	3,23	12,12	8,00

Este indicador recoge los resultados obtenidos por el agrupamiento de preguntas 13, 31, 32, 33, 34, 57, mediante las cuales se expresan las opiniones de los estudiantes sobre las actitudes de ánimo de sus padres y de valoración de amigos y compañeros respecto del estudio de las matemáticas y de los resultados logrados. La tendencia indiscutible de los estudiantes del curso segundo expresa el positivo apoyo de familiares y la valoración positiva de amigos y compañeros. La tendencia ha recibido entre el 75% y el 85% de los apoyos. Se produce una práctica equiparación de resultados entre el test de inicio y el de final de la investigación luego es en un factor que estaría fuera de la influencia metodológica. Las diferencias halladas: ligeramente más altos los resultados del posttest en el grupo TIC de segundo C y el tradicional segundo B. A continuación a mostrar los resultados obtenidos en algunas de las preguntas.

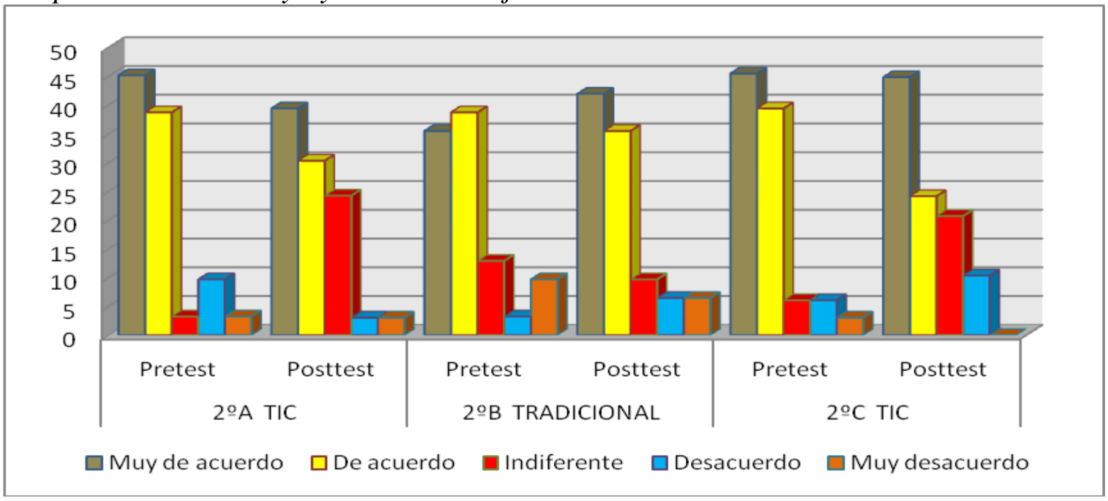
Gráfico 7.1.5.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 31 *Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.*



Considerando los resultados de de acuerdo y muy de acuerdo juntos y por otro lado en desacuerdo y muy en desacuerdo juntos es todavía más contundente la polarización de frecuencias en la tendencia positiva y suben los porcentajes obtenidos en el final de la investigación.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.5.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 34 *Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.*



Los alumnos de segundo valoran muy positivamente la ayuda de sus padres. La mayoría de los grupos rebasa el 80%. Después de la experiencia, las variaciones son al alza, aunque ligeras. La ayuda que prestan los padres en los ejercicios matemáticos es reconocida, formando la tendencia mayoritaria. Sin embargo, ese ánimo reconocido no parece que les motive tanto al estudio, como parece indicar la respuesta a la pregunta 57 que sigue.

3ª Dimensión: Metodología y recursos

Tabla 7.1.12.- Potencial motivador de los recursos metodológicos. Datos en porcentajes

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	28,96	15,15	21,05	17,47	23,20	12,78
De acuerdo	35,87	41,66	21,59	31,45	25,96	41,95
Indiferente	16,68	33,59	29,10	38,99	30,81	28,61
Desacuerdo	13,46	5,81	12,55	8,06	12,39	14,72
Muy desacuerdo	5,03	3,79	15,71	4,03	7,65	1,94

En esta dimensión agrupamos las preguntas 6, 24, 47, 58, 59, 61, 62. Este indicador de motivación indaga en la valoración de las nuevas metodologías y el uso de recursos. Entre los aspectos incluidos destacan el aprendizaje individual y su contrapunto el trabajo en grupo, alternativas al libro de texto, el uso del ordenador que comentaré en las preguntas que siguen.

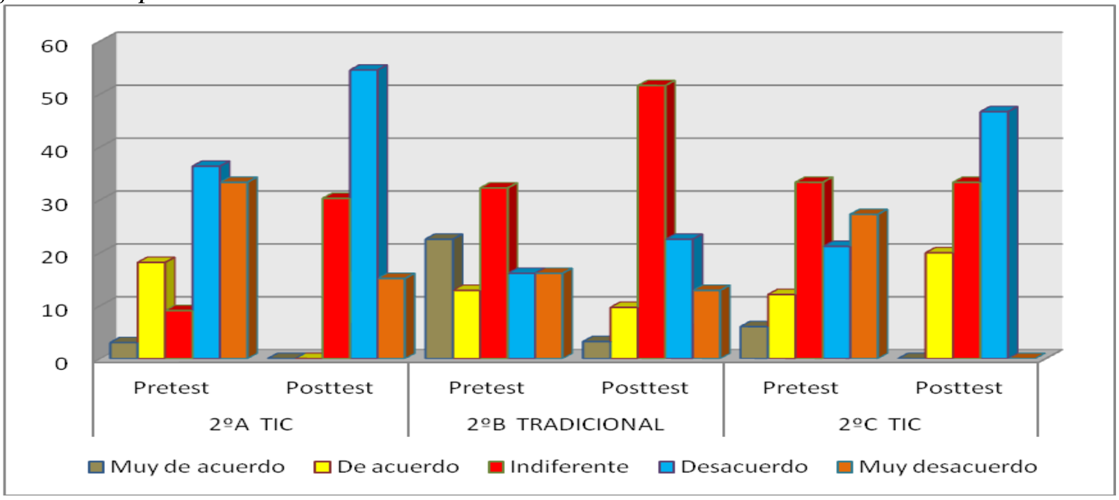
La tendencia y mejoría al final de la investigación es clara respecto del inicio de la investigación. La contundencia de los resultados avala la tendencia por la que se

Universidad Pontificia de Salamanca

decantan los investigados: el potencial motivador de la metodología. Es positiva la tendencia en los grupos TIC si bien el segundo C muestra una mejora de sus expectativas.

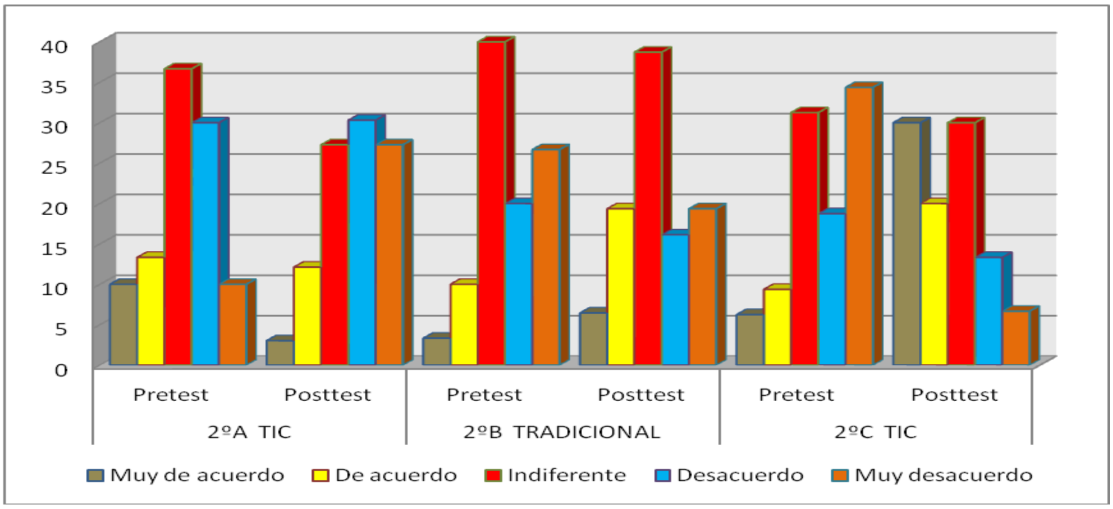
A continuación se presenta la exposición detallada de los resultados correspondientes a algunas de las preguntas en concreto que afianzan el sentido positivo de los resultados que se ha atribuido al uso cooperativo del trabajo.

Gráfico 7.1.6.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 6 *La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual.*



Todos los grupos se han decantado por esta tendencia creciente en desacuerdo. En esta edad es siempre importante los amigos y compañeros y las actividades que se puedan desarrollar con amigos suele ser una opción mayoritaria, pero en esta tendencia además están valorando el estudio juntas.

Gráfico 7.1.6.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 61 *Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.*



Universidad Pontificia de Salamanca

La pregunta 61 muestra unos resultados positivos de la valoración metodológica por parte de grupo TIC. En cuanto al uso de las TIC como recurso metodológico para

motivar el aprendizaje matemático, la tendencia es de rechazo en todos los grupos de segundo, antes y despues de la investigación, con la excepción del grupo TIC de segundo C que, despues de la investigación, se decanta por los recursos tecnológicos en un 50%, cuando al comienzo de la investigación había manifestado su acuerdo sólo en un 15%.

4ª Dimensión: Los recursos de la motivación en las clases de matemáticas

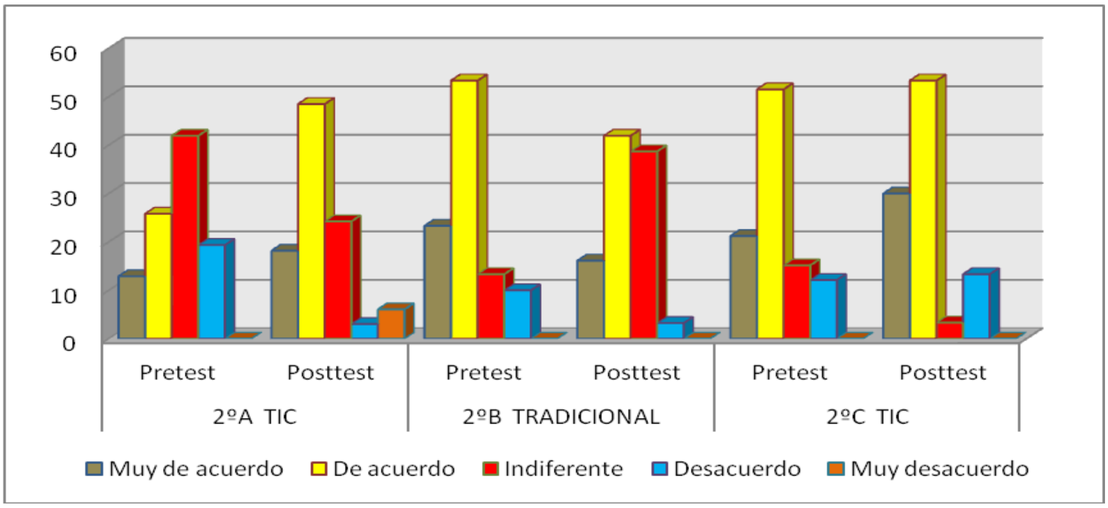
Tabla 7.1.13.- La motivación en las clases de matemáticas. Datos en porcentajes.

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,17	18,18	24,30	19,61	21,52	27,79
De acuerdo	33,10	28,41	33,93	42,64	40,71	38,35
Indiferente	23,53	34,85	25,79	28,04	21,95	23,92
Desacuerdo	15,13	10,48	10,23	8,23	10,92	7,42
Muy desacuerdo	13,07	8,08	5,75	1,48	4,90	2,52

En este indicador agrupamos las respuestas de las preguntas 22, 42, 43, 53, 54, 66. Este indicador comprende las preguntas sobre los procedimientos a que recurre el profesor, dentro de la dinámica de la clase, para animar el aprendizaje de las matemáticas: ejercicios que se relacionen con la vida cotidiana, evitar la pesadez y el aburrimiento, hacerlas más atractivas, hacer preguntas que animen a participar y eviten la distracción de los estudiantes. También recogen la actitud la valoración que hace el alumno de su propia actitud en clase. Las variaciones entre el pretest y posttest son escasas en porcentaje.

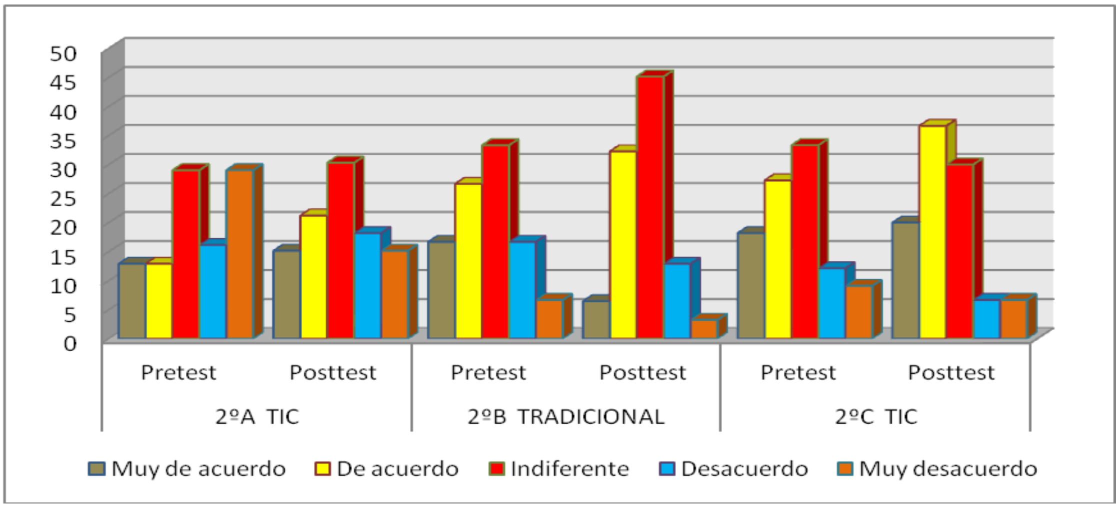
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.7.a) Resultados en porcentajes de segundo a la pregunta 53 *Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.*



La tendencia de de acuerdo con la valoración de la propia actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas alcanza los porcentajes más altos. Esta tendencia oscila entre el 40% y el 73% en el segundo curso. En los grupos TIC la polarización de frecuencias se eleva entre el pretest y el posttest. De los resultados se infiere la tendencia de que la atención y la participación motivan la comprensión de las matemáticas y que la motivación ayuda en esa actitud de trabajo.

Gráfico 7.1.7.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 54 *Me gustan las clases de matemáticas.*



Universidad Pontificia de Salamanca

El el nivel de satisfacción se vincula con la positiva motivación de los alumnos para el aprendizaje. La satisfacción por las clases de matemáticas en el curso segundo es tendencia dominante al final de la investigación, del del 35% al 56, si bien, al comienzo los porcentajes oscilan entre 24% y 45%. La satisfacción de las clases ha mejorado los resultados del grupo TIC de segundo C y A.

5ª Dimensión: El profesor como agente de motivación en el estudio de las matemáticas

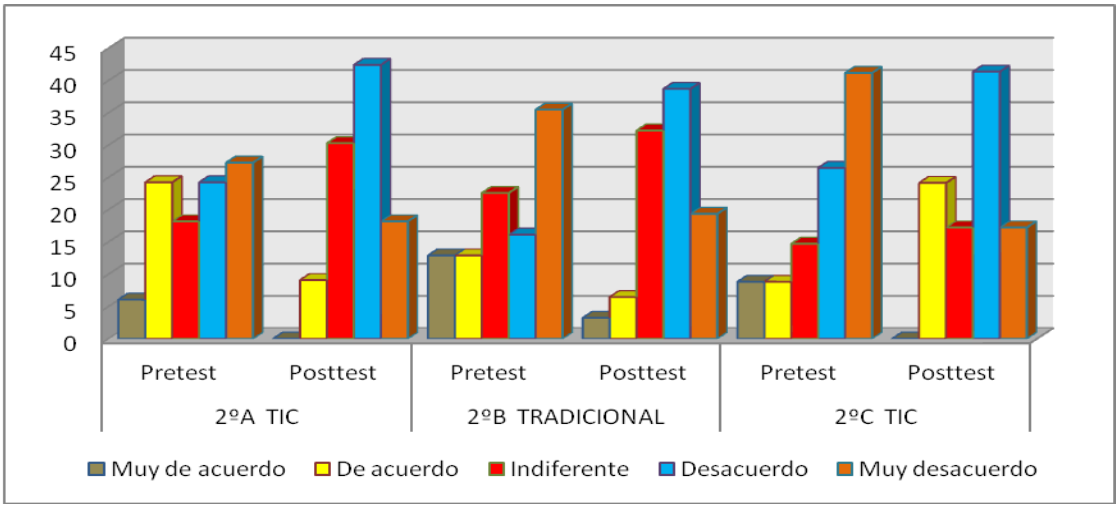
Tabla 7.1.14.- El profesor como agente de motivación. Datos en porcentajes.

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,85	19,05	24,25	23,50	34,44	34,20
De acuerdo	34,40	29,00	31,16	34,10	27,77	28,71
Indiferente	24,10	32,47	23,30	25,35	17,13	17,19
Desacuerdo	12,76	13,85	9,28	11,06	8,90	13,63
Muy desacuerdo	9,89	5,63	12,01	5,99	11,76	6,27

Este indicador agrupa las preguntas 14, 15, 25, 26, 27, 29, 30. El *profesor como agente de motivación*, es valorado con cierta generosidad en diferentes papeles: en sus relaciones con los alumnos, su actitud sobre la comprensión y el rendimiento que manifiesta el alumno, su disponibilidad para solventar dudas y superar dificultades, el concepto que el estudiante percibe que tiene de él el profesor y, por último el signo de sus relaciones con el profesor. Los datos de la tabla precedente, sintetizan los datos recogidos sobre los asuntos mencionados. A continuación presento algunos gráficos con los resultados de las preguntas concretas que permitirán identificar la positiva valoración del profesor como agente motivador es la tendencia dominante que obtiene los índices porcentuales más elevados, sin percibirse diferencias entre el pretest y el posttest. No se perciben variaciones desde el punto de vista metodológico.

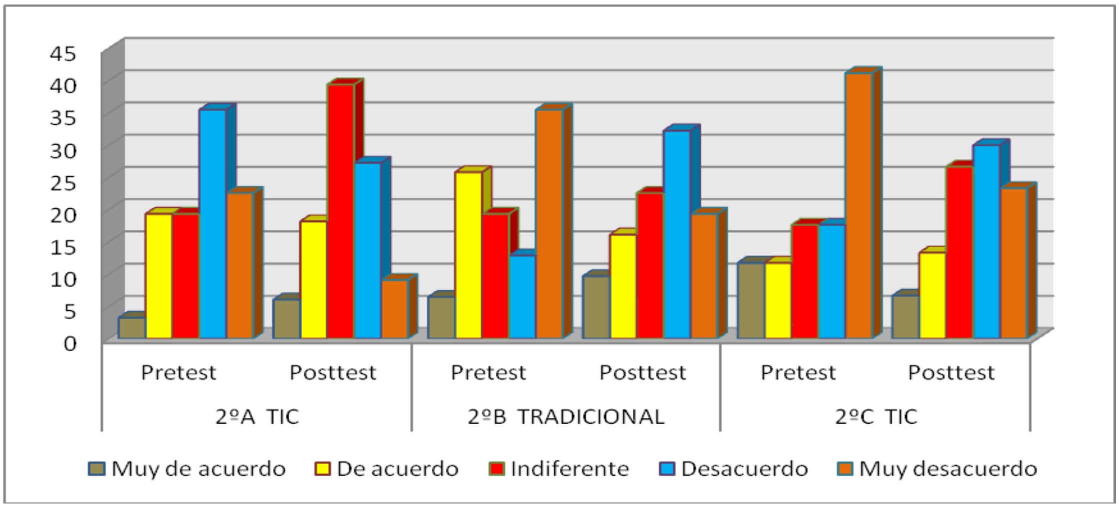
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.8.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 14 *Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí*.



Cuando se les pregunta acerca del papel del profesor las respuestas de los estudiantes de segundo, el desacuerdo es menor, pero siempre por encima del 50%. Respecto de la puntuación entre el pretest y el posttest, las diferencias son apreciables en los grupos TIC de segundo A y en el tradicional, no así en el grupo TIC de segundo C.

Gráfico 7.1.8.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 15 *Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.*

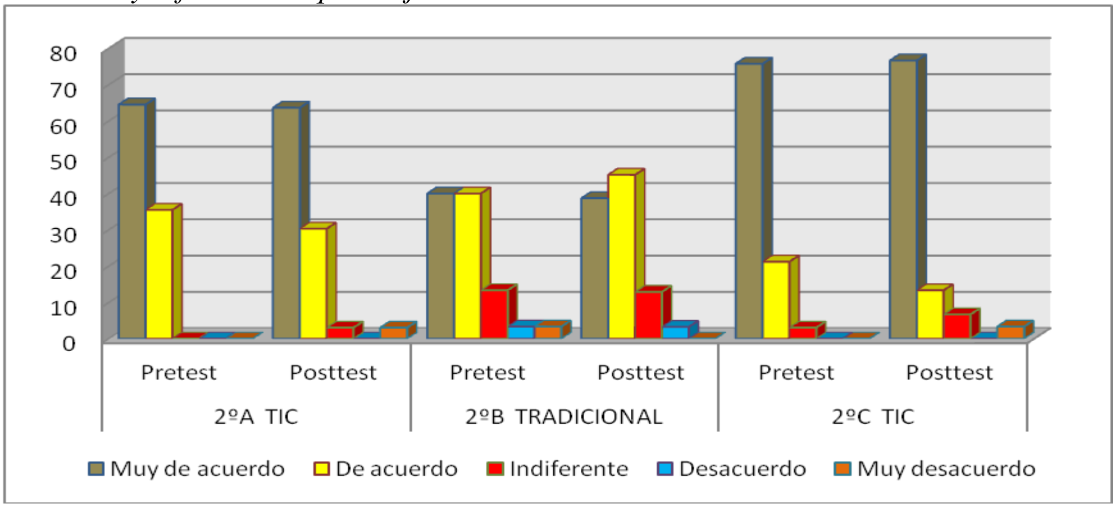


Los estudiantes están más motivados si el profesor está involucrado, en este caso se les pide la opinión acerca de si su rendimiento en matemáticas depende de la actitud del profesor hacia él. El desacuerdo de los estudiantes es manifiesto en el TIC de segundo A, aunque bajan ligeramente los porcentajes después de la investigación.

Universidad Pontificia de Salamanca

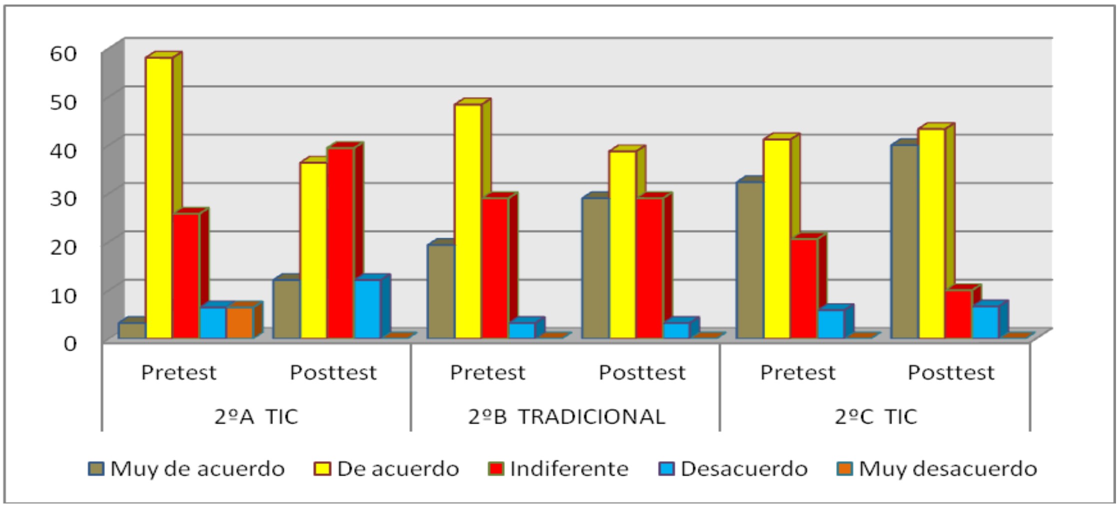
Los estudiantes de segundo apoyan la tendencia y los resultados de desacuerdo son superiores en todos los casos a los polarizados en acuerdos. Los acuerdos, negación de la tendencia, en los grupos de segundo curso obtienen porcentajes menores de 32 %. El cambio observado después de la experiencia puede significar que las metodologías han presentado a los alumnos otras formas de enseñar que tienen atractivo.

Gráfico 7.1.8.c) Resultados en porcentajes de 2º ESO a la pregunta 25 *Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.*



La valoración del profesor es muy buena, la disponibilidad se sitúa entre el 80% y el 100%. La variación entre el pretest y posttest es muy ligera, apenas perceptible.

Gráfico 7.1.8.d) Resultados a la pregunta 27 *Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias*.



La valoración positiva se ubica entre el 60% y el 84%. La insatisfacción se mueve entre el 3% y 12%. La tendencia obtiene una contundente valoración positiva.

Universidad Pontificia de Salamanca

No hay cambios muy drásticos, tanto la subida, TIC de segundo C, como la bajada de segundo A son porcentualmente inapreciables y se mantiene el tradicional.

6ª Dimensión: Otras motivaciones para el aprendizaje matemático

Tabla 7.1.15.- Otras motivaciones. Datos en porcentajes.

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	29,83	25,00	42,20	35,51	42,68	33,33
De acuerdo	37,12	48,49	26,02	40,12	39,91	47,50
Indiferente	23,32	18,94	18,29	20,33	12,86	10,83
Desacuerdo	6,48	5,30	10,15	0,81	4,55	6,67
Muy desacuerdo	3,25	2,27	3,34	3,23	0,00	1,67

En el indicador de *otras motivaciones*, se agrupan las preguntas (28, 56, 60, 67) y asuntos varios como, la propia valoración de su trabajo, la felicitación por los resultados. Las variaciones no se relacionan tanto con el uso de las metodologías, sino con el perfil del alumnado. Los resultados son de interés para los profesores que se preocupan por motivar con eficacia a sus alumnos.

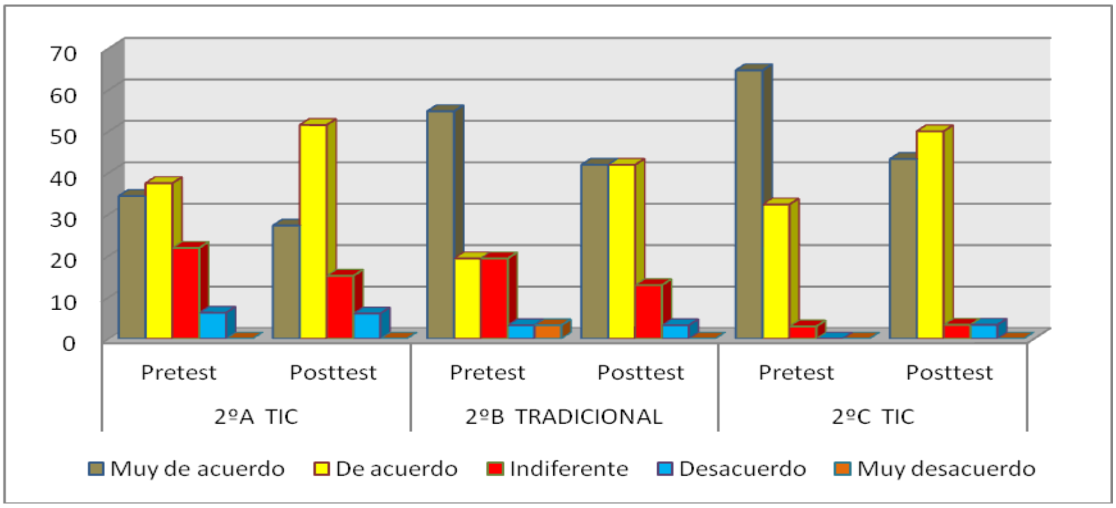
La tendencia dominante de valoración positiva, que se polariza en el *acuerdo* y *muy de acuerdo*, alcanza un nivel porcentual entre el 60% y el 80%. Esta polarización de frecuencias se mantiene desde el comienzo hasta el final de la investigación y las variaciones porcentuales son inapreciables.

En términos generales, se mantiene la motivación y la influencia de los procedimientos en niveles porcentuales muy altos. El análisis diferenciado de los variados asuntos incluidos en este indicador, ofrecerá un panorama de matices más significativos para la adecuada valoración del indicador.

A continuación mostramos las respuestas en porcentajes de las alumnas de segundo a algunas preguntas de esta dimensión.

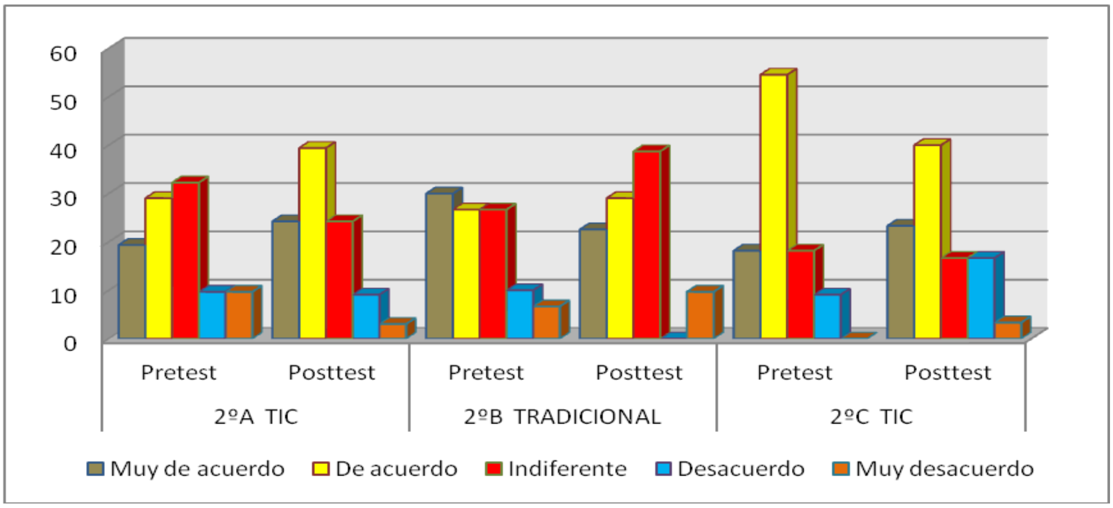
Gráfico 7.1.9.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 28 *Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.*

Universidad Pontificia de Salamanca



El entusiasmo y claridad expositiva del profesor motiva el gusto de los estudiantes por las matemáticas es la tendencia que afirman los estudiantes, entre el 75% y el 90%, lo que obviamente les dispone a un mejor aprendizaje y comprensión matemática. La influencia del profesor es notoria. La influencia metodológica se mantiene o sube ligeramente.

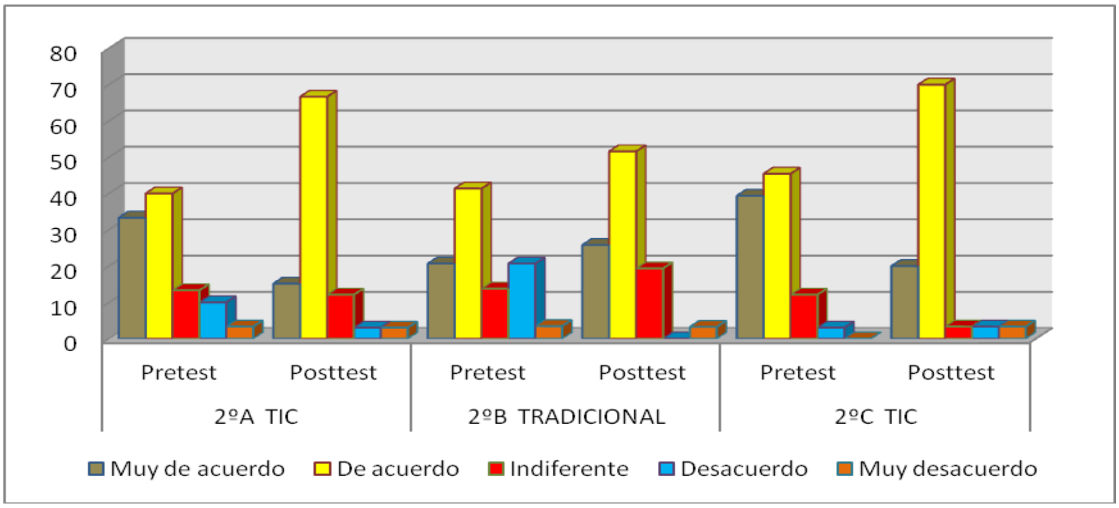
Gráfico 7.1.9.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 56 *Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.*



Los estudiantes de segundo se muestran influenciados por este aspecto y apenas hay variación del pretest al posttest incluido grupo TIC de segundo C En todo caso las tendencias obtienen unos índices porcentuales muy altos.

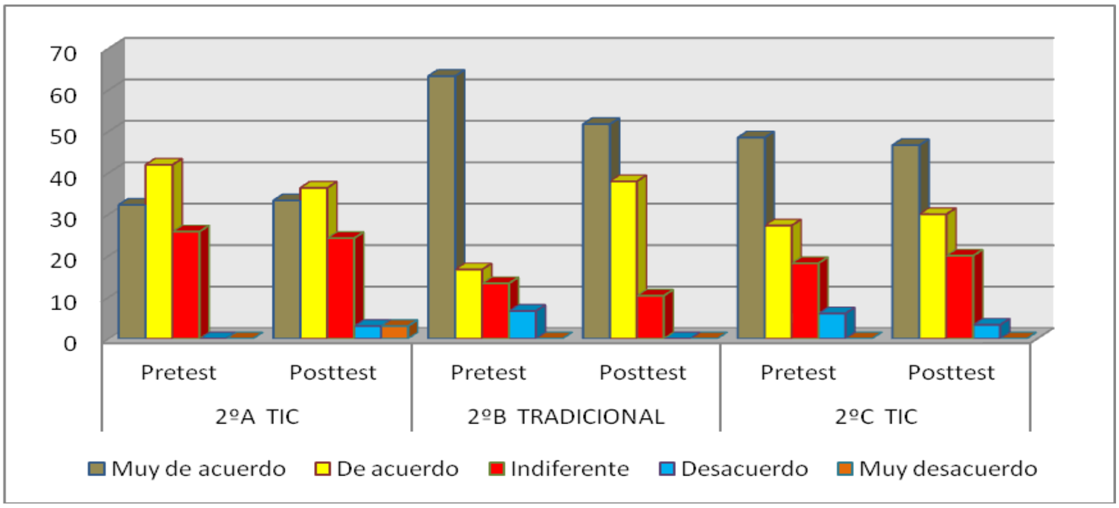
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.9.c) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 60 *Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.*



Los profesores de matemáticas suelen insistir a los alumnos la conveniencia de llevar ejercicios y problemas a casa en orden a ayudarles a avanzar en el aprendizaje de los contenidos. Los estudiantes de segundo curso prestan su acuerdo entre el 62% y el 90% antes de la investigación y estos porcentajes suben en todos los grupos al final de la investigación. Los estudiantes de segundo C que, después de la investigación, se polarizan en más del 90%.

Gráfico 7.1.9.d) Resultados en porcentajes a la pregunta 67 *Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.*



Entre el 70% y 80% de los estudiantes de segundo se sienten muy motivados cuando se les reconoce su trabajo. En segundo suben aunque ligeramente dos grupos y se mantiene el grupo TIC de segundo A. En consecuencia, el reconocimiento del trabajo es muy agradecido por parte de los estudiantes, tiene un efecto motivador indiscutible.

Universidad Pontificia de Salamanca

7ª Dimensión: Opiniones y exigencias del aprendizaje matemático

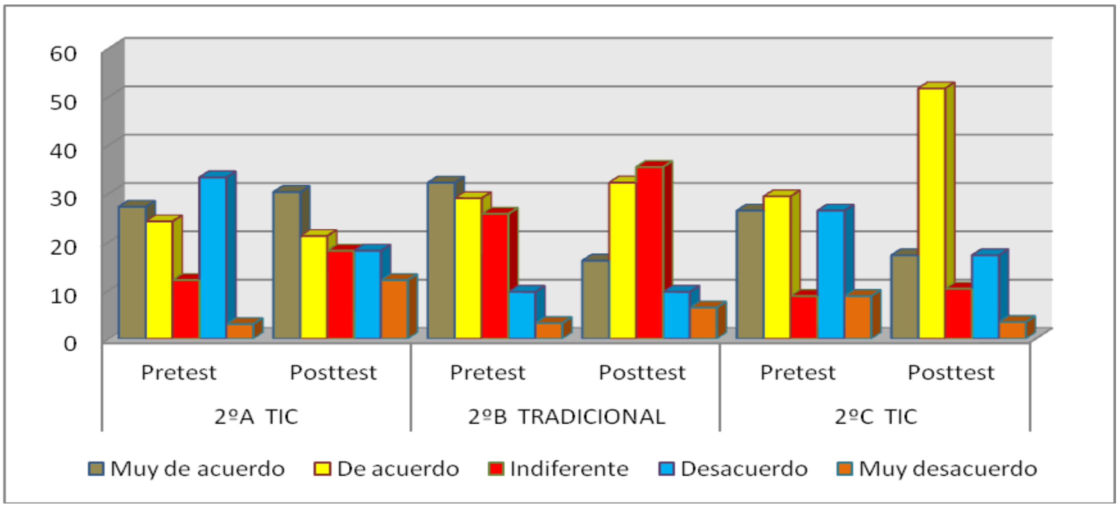
Tabla 7.1.16- Exigencias de los resultados sobre el aprendizaje de las matemáticas. Datos en porcentajes

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	27,61	24,75	25,04	21,51	30,66	24,73
De acuerdo	19,68	22,22	25,51	29,03	23,77	32,24
Indiferente	18,06	18,69	18,61	22,58	9,39	14,56
Desacuerdo	18,03	21,21	16,83	16,13	18,82	15,67
Muy desacuerdo	16,62	13,13	14,01	10,75	17,36	12,80

En esta dimensión agrupamos las respuestas de las preguntas: 3, 4, 7, 8, 22, 52. Se recogen las opiniones de los alumnos sobre los siguientes aspectos de orden valorativo: memorizar conceptos y fórmulas, los resultados y el procedimiento como alternativas de valoración preferente o también, si para resolver los ejercicios es más importante la perseverancia y el esfuerzo o la suerte. Al recoger en la tabla precedente los resultados de asuntos tan diversos, se produjo una relativa dispersión porcentual, que pudiera oscurecer el significado de los datos expuestos. En todo caso, la tendencia sobre el acuerdo y muy de acuerdo recoge porcentajes superiores al desacuerdo en todos los grupos, a excepción del grupo TIC de segundo A, cuyos resultados están bastante igualados entre el acuerdo y el desacuerdo. A continuación se muestran los datos correspondientes a cada cuestión y se obtendrán tendencias con sentido y significativas. En este indicador no parece que las metodologías y recursos utilizados tengan repercusión. En todo caso este indicador ofrece las respuestas de los alumnos a variadas cuestiones que son de interés al profesor para valorar su importancia.

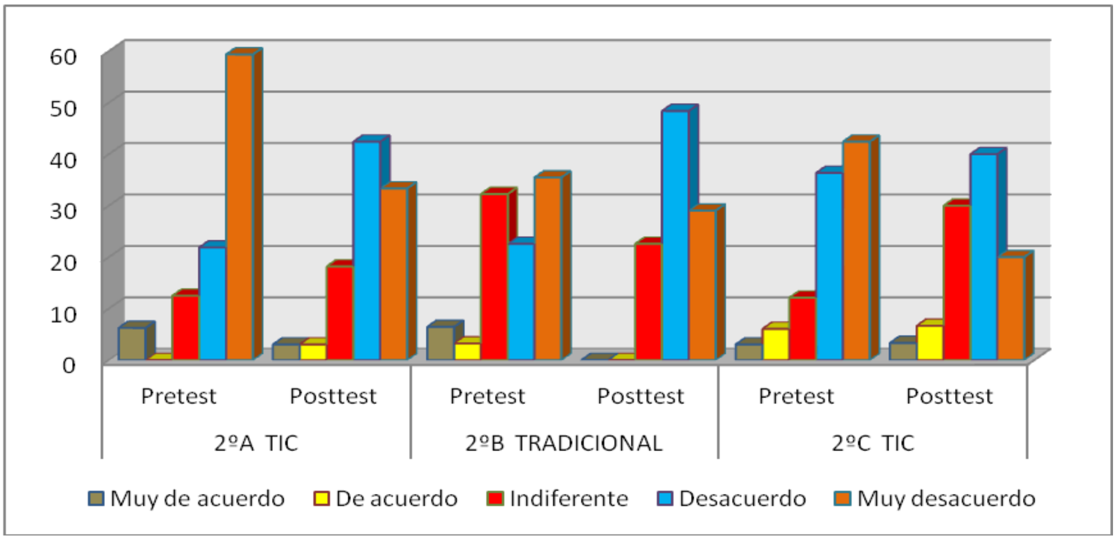
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.10.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 3 *En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.*



Ante la propuesta de que la memoria es fundamental en las matemáticas es la propuesta. La respuesta de los estudiantes fue manifestarse de forma contraria: en los tres grupos están de acuerdo en que memorizar conceptos, fórmulas y reglas es fundamental en matemáticas. Los porcentajes se mantienen después de la investigación, a excepción del grupo TIC de segundo C que se manifiesta a favor de la propuesta en el 68%. La edad en este asunto parece haber sido factor de cierta importancia respecto de las respuestas.

Gráfico 7.1.10.b) Resultados en porcentajes de segundo Eso a la pregunta 7 *El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido*.

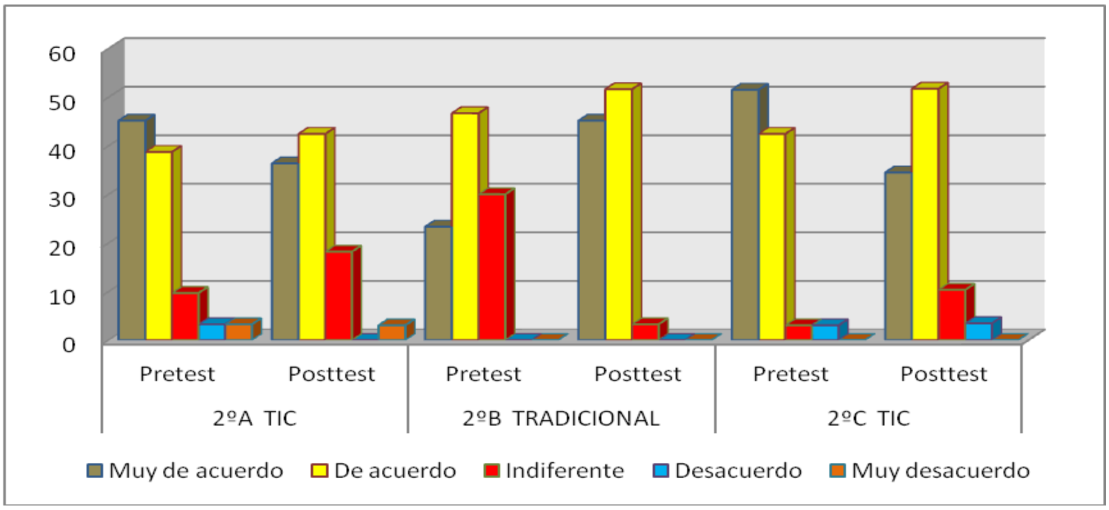


La pregunta señala como de más importancia los resultados que el procedimiento. Las respuestas de los estudiantes están en total desacuerdo con la propuesta, antes y después de la investigación, con porcentajes que superan el 50 %. La

Universidad Pontificia de Salamanca

tendencia por consiguiente para los estudiantes es que el procedimiento es más importante que el resultado. La tendencia esta sólidamente fundada por los resultados empíricos, así como la variedad procedimental encuentra apoyos empíricos suficientes.

Gráfico 7.1.10.d) Resultados en porcentajes de segundo Eso a la pregunta 52 *La resolución de los ejercicios exige esfuerzo, perseverancia y paciencia.*



Sobre las exigencias necesarias para resolver los ejercicios matemáticos, *esfuerzo, perseverancia y paciencia*, los alumnos de segundo reafirman esta tendencia con porcentajes que superan el 78% Los resultados son contundentes y la tendencia afirmada sin fisuras. Los datos son casi iguales antes y después de la investigación, por lo que también queda avalada la motivación metodológica. De esta general coincidencia no se excluye el grupo tradicional que en el post-test alcanza un índice porcentual del 100%.

8ª Dimensión: Autoestima y emociones en el aprendizaje de las matemáticas

Tabla 7.1.17.- La autoestima y las emociones en el aprendizaje. Datos en porcentajes.

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	13,99	13,56	19,18	15,51	15,21	13,67
De acuerdo	19,04	25,00	26,02	26,88	32,14	30,08
Indiferente	25,22	32,43	25,08	36,99	16,43	23,33
Desacuerdo	27,37	19,77	20,01	14,87	23,82	23,25
Muy desacuerdo	14,38	9,24	9,71	5,75	12,40	9,67

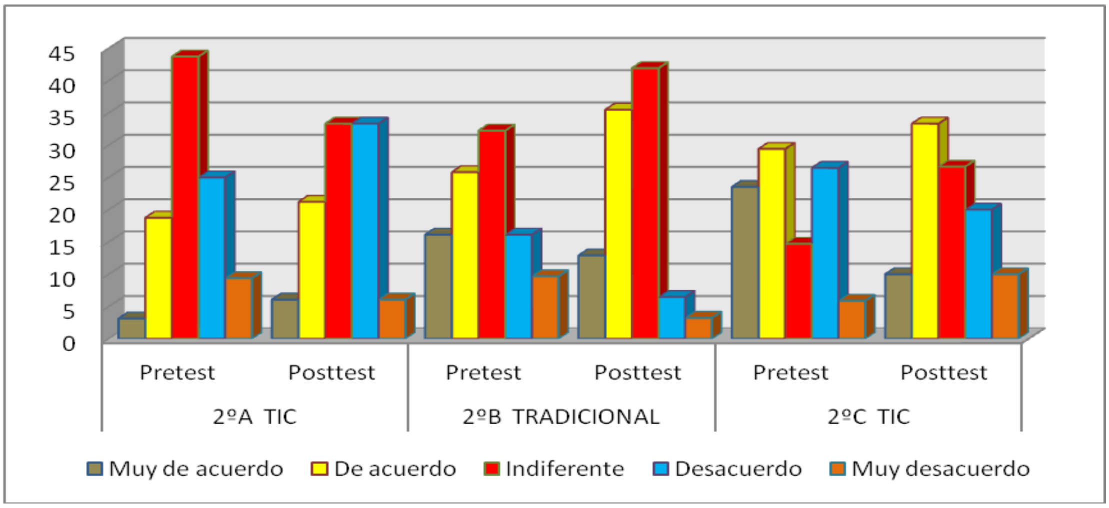
Esta dimensión agrupa las respuestas de las preguntas: 17, 18, 19, 20, 45, 46, 48, 49, 50. En torno al indicador de la autoestima se asocian los aspectos siguientes: la

Universidad Pontificia de Salamanca

autoconfianza, la capacidad para resolver los ejercicios, el crecimiento de la curiosidad intelectual, los espacios de inseguridad generados por el bloqueo que pueden experimentar los estudiantes en la resolución de ejercicios matemáticos y a una parte importante de los estudiantes no le van las sorpresas en la asignación de tareas con los ejercicios matemáticos. Las respuestas a estas cuestiones apuntan a emociones, sentimientos y sensaciones de los alumnos cuando han de enfrentarse a la resolución de los ejercicios matemáticos. El análisis desglosado referido a cada una de las cuestiones propuestas, nos puede dar un conocimiento más próximo a la realidad de las emociones, los sentimientos y las sensaciones.

En cuanto a la interpretación y análisis de los datos precedentes, teniendo en cuenta los variados supuestos enunciados no parece prudente aventurar interpretaciones. Lo primero que se percibe es la enorme dispersión entre las distintas variables, y al contar entre las alternativas de respuesta la *indiferente*, resolvió en este caso el 25% del problema. En todo caso procede el análisis de cada cuestión de forma separada, que descubrirá la verdadera intención de los investigados respecto de las cuestiones presentadas a su valoración.

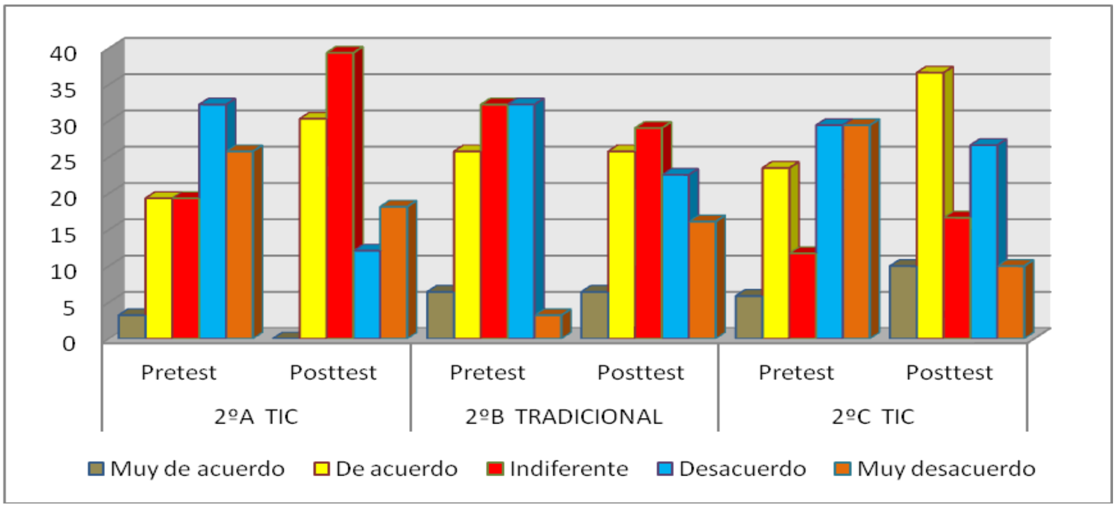
Gráfico 7.1.11.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 18 *Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.*



Los estudiantes afirman la propuesta de que la realización de los ejercicios aumenta su confianza. Los resultados de los grupos son como siguen: el grupo tradicional y el TIC segundo A no se deciden y se polarizan en la indiferencia. El grupo TIC segundo C se polariza en las rúbricas del acuerdo en el 52.94%. Es bastante incomprensible la polarización de frecuencias de los grupos TIC segundo A y tradicional.

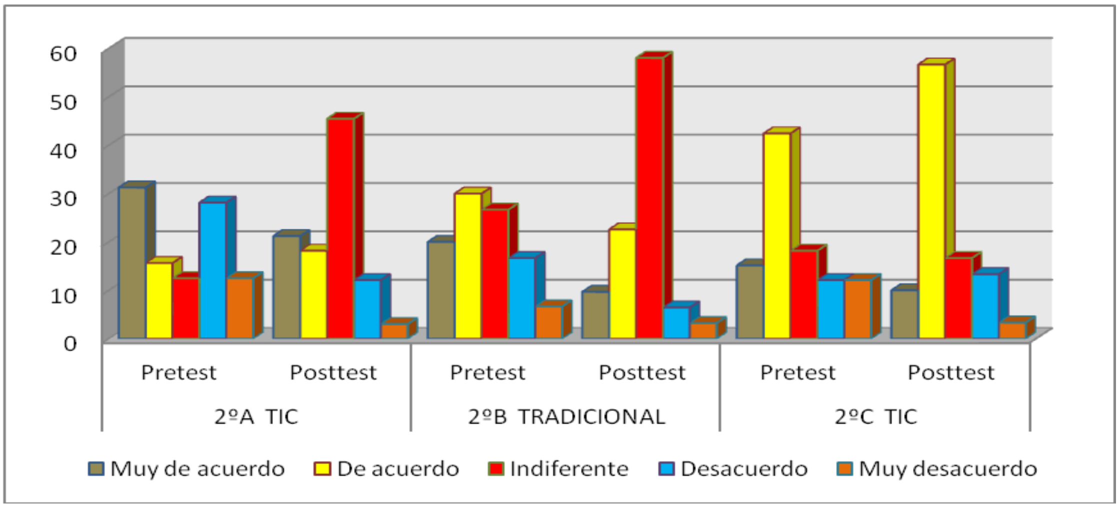
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.11.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 19 *Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.*



La tendencia manifestada en las rúbricas del desacuerdo es decreciente. La indiferencia recibe una fuerte polarización de frecuencias.

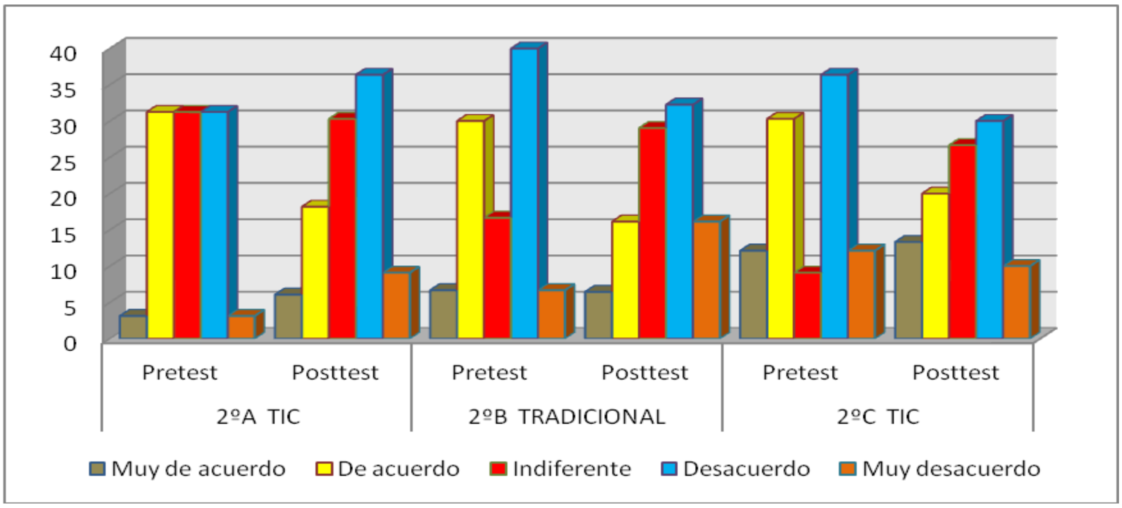
Gráfico 7.1.11.c) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 45 *Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.*



La curiosidad tal como se presenta en el texto responde al significado de la virtud del intelectual que busca conocer lo desconocido. Los estudiantes del curso segundo ESO se mueven en escenarios de gran dispersión, las tendencias no son tan relevantes y las frecuencias obtenidas en el posttest bajan respecto del pretest en dos grupos, a excepción del grupo TIC de segundo C.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.11.d) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 49 *Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.*



Ante la sensación de fracaso al no resolver los ejercicios matemáticos, las respuestas de los estudiantes son interesantes. Los grupos se instalan en la dispersión y la indiferencia y ninguna tendencia alcánzale 50%. En el grupo TIC de segundo A se reparte al 34,38 % entre el acuerdo y el desacuerdo al comienzo de la investigación y al final se polariza en el desacuerdo por el 36,37%.

9ª Dimensión: Actitudes de interés, esfuerzo y constancia

Tabla 7.1.18.- Interés, esfuerzo y constancia en el aprendizaje matemático Datos en porcentajes.

Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	20,91	10,44	23,13	19,30	18,44	13,16
De acuerdo	32,78	36,00	26,68	43,79	41,26	37,97
Indiferente	20,49	27,34	25,79	26,12	15,84	28,14
Desacuerdo	15,97	19,29	20,65	9,64	16,53	15,01
Muy desacuerdo	9,85	6,93	3,75	1,15	7,93	5,72

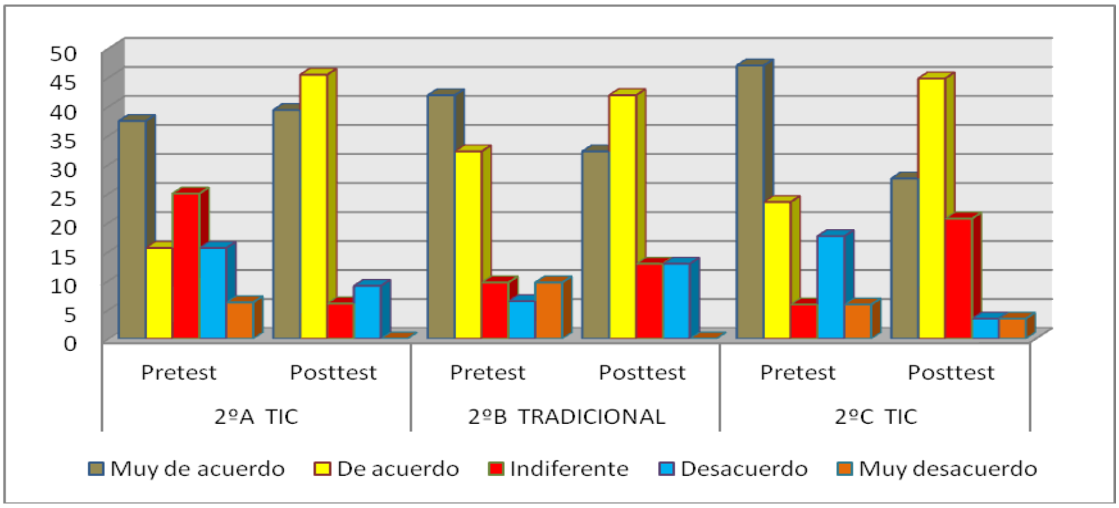
En esta dimensión se agrupan las preguntas: 10, 11, 16, 21, 44, 51, 64, 65. Si en el anterior indicador se prestó atención al área de los sentimientos y sensaciones, en este centramos el análisis en las dimensiones racionales de la motivación, que son aspectos integrantes de las dimensiones de valor y de expectativas que configuran el proceso motivacional. En concreto analizaremos a continuación y de forma separada cada una de las categorías que siguen: el tiempo absoluto y relativo que los estudiantes dedican al aprendizaje matemático, el interés que pone en la consecución del objetivo de resolver

Universidad Pontificia de Salamanca

los ejercicios de matemáticas. El interés exige no darse fácilmente por vencido. El esfuerzo es el trabajo dedicado al estudio y a los ejercicios y es una tarea no compulsiva, sino más bien apunta a la constancia y perseverancia.

La urdimbre tejida por estas dimensiones o aspectos racionales dará idea más aproximada de cómo se comportan los estudiantes investigados en la tarea del aprendizaje y cómo valoran su conducta al respecto y la de aquellos que presencian su trayectoria e intervienen esporádicamente o de forma más continuada, como se espera que ejerzan su rol los padres de los estudiantes. Veremos también las normas de medida que aplica a su comportamiento y a la de los otros que comparten con ellos las veredas de la vida cotidiana. En la urdimbre de estas cuestiones, la influencia más destacada no parece que fueran las metodologías cuanto la satisfacción con su propio trabajo. No aparece una tendencia clara al respecto.

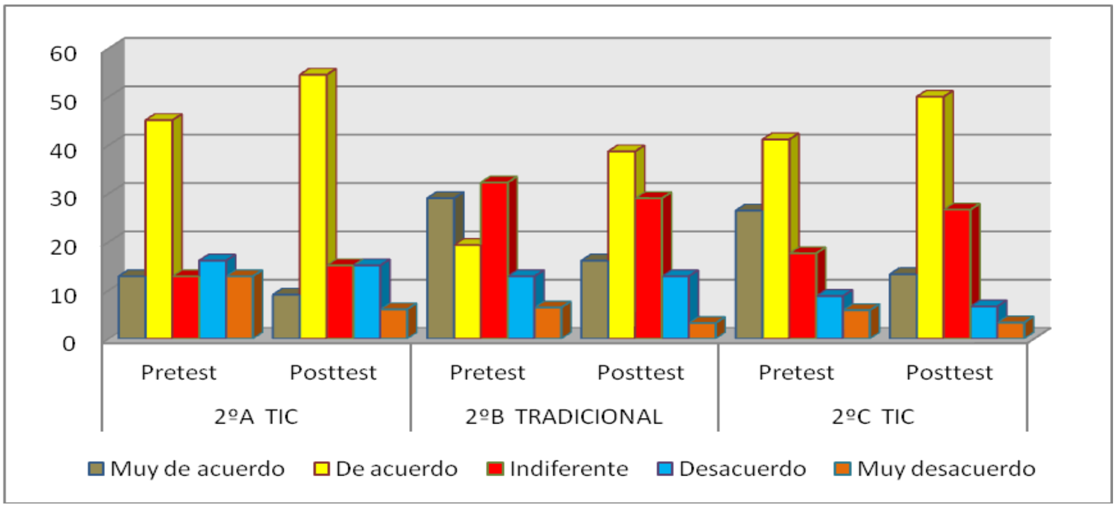
Gráfico 7.1.12.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 16 *Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.*



El tiempo es una categoría que impregna nuestro diario quehacer y nuestras actividades están permeadas por el tiempo. Los estudiantes del curso segundo de ESO muestran su apoyo a la tendencia base: en términos porcentuales entre el 53% y el 90% en el comienzo de la investigación. Los resultados del posttest varían según los grupos entre el 72% y el 85%.

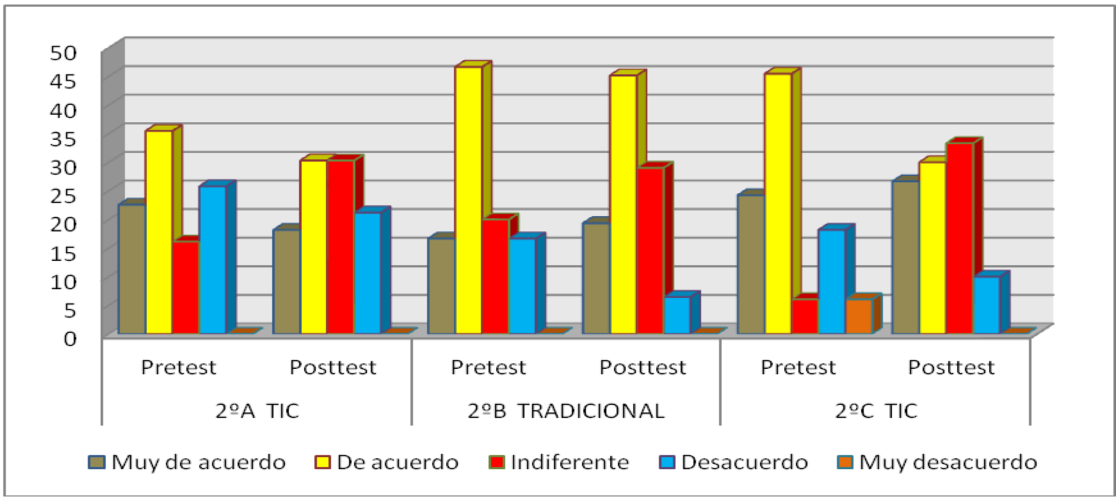
Gráfico 7.1.12.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 21 *Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.*

Universidad Pontificia de Salamanca



Los estudiantes están ampliamente conformes con que la recompensa acompaña normalment al esfuerzo realizado: Los estudiantes se adhieren a la tendencia, a más esfuerzo mejores resultados en el estudio matemático. Los tres grupos de los estudiantes del segundo curso de ESO se polarizan en esta orientación en más del 50%. Son escasas las variaciones porcentuales entre el pretest y el posttest.

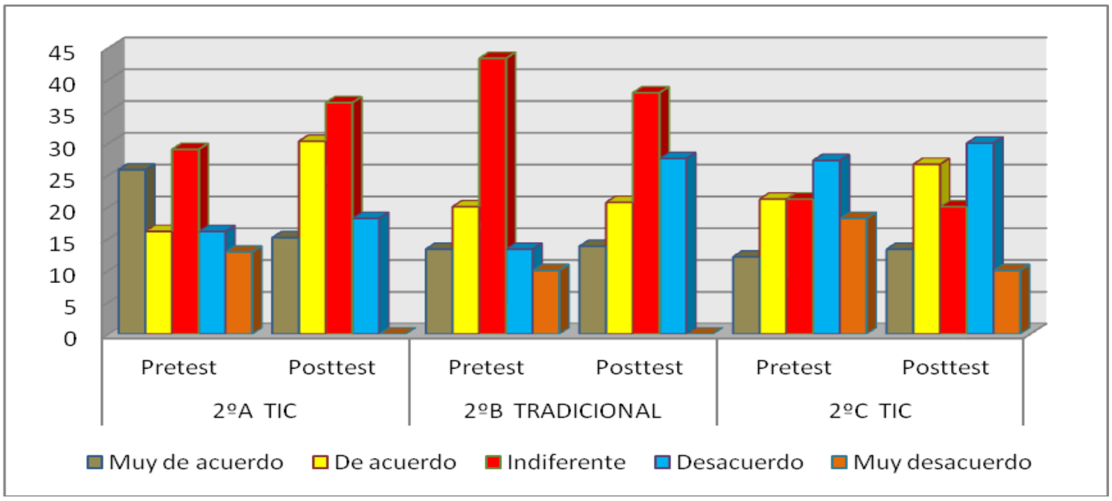
Gráfico 7.1.12.c) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 51 *Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.*



Se les pregunta por la constancia y perseverancia que desarrollan a la hora de resolver los ejercicios matemáticos, si lo intentan de nuevo al reparar que no han logrado la solución correcta o más bien se desaniman y lo dejan. No existen apenas diferencias entre las metodologías, sin embargo, hay acuerdo mayoritario de los tres grupos (entre el 50% y el 69%). Las variaciones porcentuales entre los resultados del pretest y posttest, decrecen ligeramente en los grupos TIC de segundo.

Gráfico 7.1.12.d) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 64 *A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas.*

Universidad Pontificia de Salamanca



Respecto de si dedica más tiempo al estudio de las matemáticas en casa, los estudiantes dan las siguientes respuestas: Acentuada polarización en la indiferencia (del 20% al 43%) sobre todo en el grupo tradicional. Le sigue el grupo TIC de 2º A por la senda de la indiferencia. En el TIC de segundo C los datos del pretest muestran mayor porcentaje en el desacuerdo (45%) que en el acuerdo (33%) y en los datos del posttest se reparten por igual las frecuencias del acuerdo (40%) y del desacuerdo (40%). No se descubre una tendencia clara de los datos expuestos.

10ª Dimensión: Opiniones positivas y negativas sobre las matemáticas

Tabla 7.1.19.- Imágenes positivas y negativas sobre las matemáticas. Datos en porcentajes.

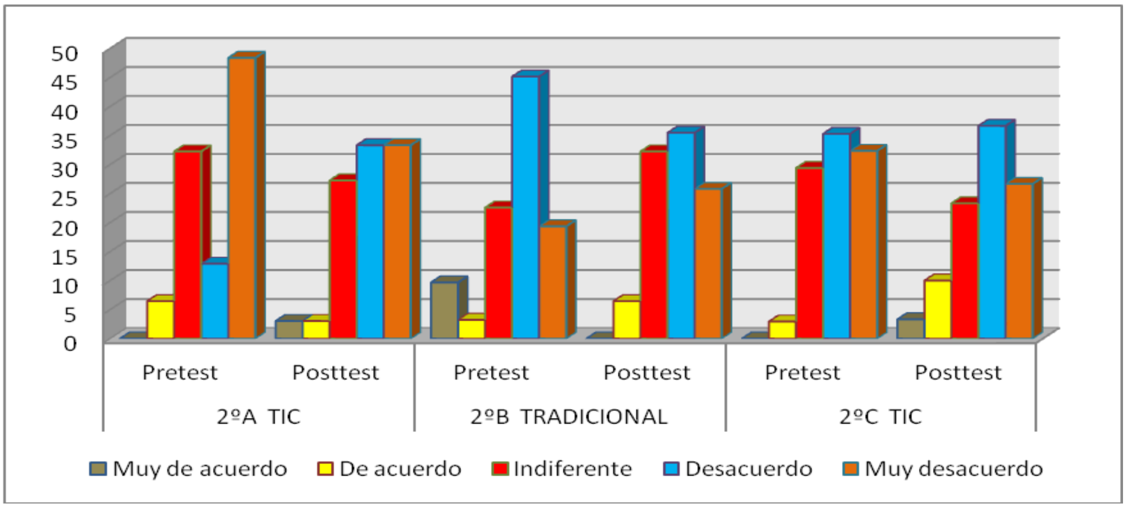
Alternativas	2ºA – TIC		2ºB – Tradicional		2ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	30,85	25,92	26,61	20,97	27,79	20,00
De acuerdo	21,98	19,77	25,81	29,03	28,52	31,67
Indiferente	25,25	28,95	22,58	34,68	20,99	21,67
Desacuerdo	13,33	19,20	11,29	10,48	11,34	15,83
Muy desacuerdo	8,59	6,16	13,71	4,84	11,36	10,83

En este grupo hemos recogido las respuestas a las cuatro preguntas siguientes: 35, 37, 39, 41. Algunas de estas preguntas se refieren a los estereotipos más comunes en torno a las matemáticas como, 'pasar' de las matemáticas, 'la gente que gusta de las matemáticas es un poco rara', 'las matemáticas son para cabezas inteligentes' o también la gente que 'no gastan el tiempo en resolver ejercicios'. Este tipo de prejuicios han constituido siempre un importante factor de control o influencia en las relaciones sociales. En este escenario educativo no parece haber influido las metodologías o/y recursos empleados.

Universidad Pontificia de Salamanca

Del análisis de los datos tomados en conjunto respecto de tales opiniones y prejuicios se infieren algunos aspectos de interés: la dispersión de los resultados es tónica destacada entre los estudiantes del segundo curso ESO. De la consideración de estos datos no se puede inferir significados muy concretos, que se manifestarán, en cambio, en el análisis de las preguntas concretas a realizar a continuación.

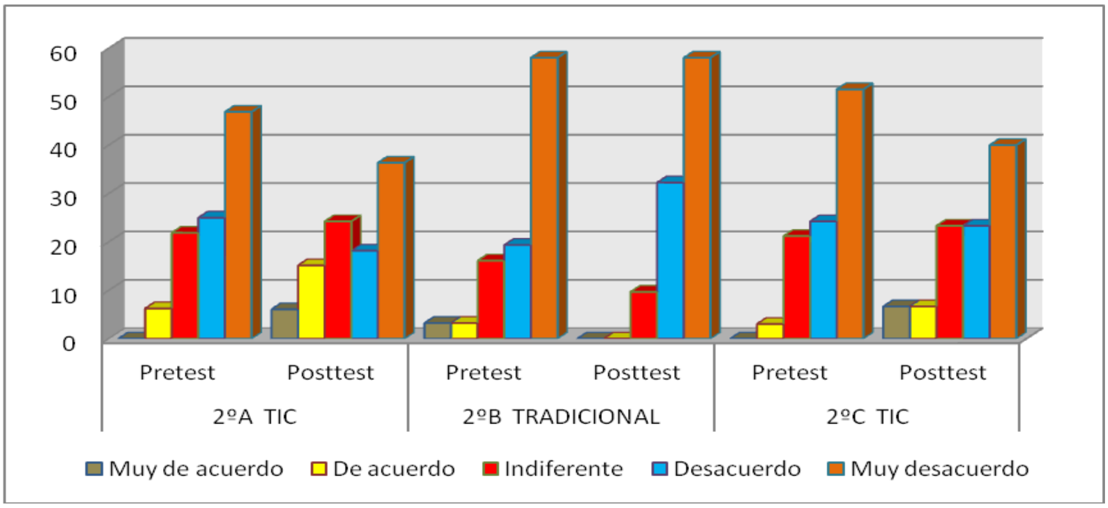
Gráfico 7.1.13.a) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 35 *Mis amigos/as pasan de las matemáticas.*



Se les cuestiona acerca de si sus amistades no están interesadas por las matemáticas y los alumnos, en su mayoría, están en desacuerdo con esta afirmación. No existen grandes diferencias entre los estudiantes de segundo ESO: todos se polarizan en las rúbricas del desacuerdo en porcentajes que oscilan entre el 60% y el 85%. En cuanto a los resultados en función de la metodología seguida, no son muy determinantes sin embargo tienden a elevarse los porcentajes en el posttest.

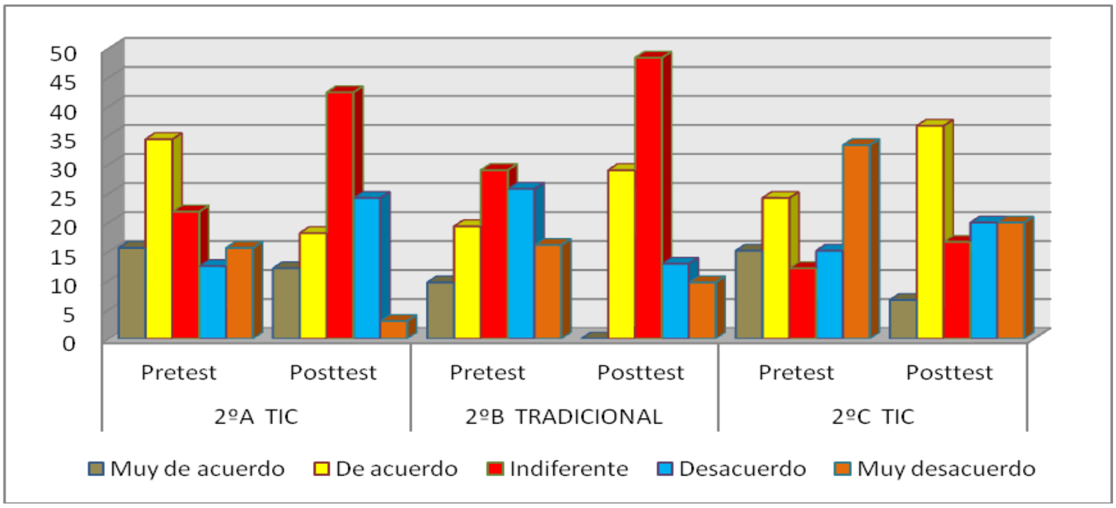
Gráfico 7.1.13.b) Resultados en porcentajes de segundo ESO a la pregunta 37 *La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.*

Universidad Pontificia de Salamanca



La propuesta de que las gentes que *gustan de las matemáticas suelen ser algo raras* constituye un estereotipo que rechazan los alumnos de segundo con absoluta contundencia, entre 67%, situándose definitivamente en la tendencia de que los interesados en las matemáticas no son gente extraña, son gente normal. Respecto de la evolución porcentual, del pretest al posttest, en el curso segundo ESO bajan los dos grupos TIC en más del 10% que la gente que se interesa por las matemáticas no es gente rara.

Gráfico 7.1.13.c) Resultados en porcentajes de segundo a la pregunta 39 *Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.*



El estereotipo de que las matemáticas son solo para personas inteligentes está muy extendido en ámbitos de gentes normales, pero también en círculos de personas culturalmente cultivadas y, hasta en escenarios de expertos en matemáticas, se usa un lenguaje trufado de términos que denuncian la idea de que las matemáticas exigen una inteligencia superior, de la que disponen unos pocos especialmente dotados. Esta elitista posición representa una idea muy generalizada, pero no deja de ser también un

Universidad Pontificia de Salamanca

estereotipo a rechazar. Esta es mi posición que no tiene por qué coincidir con la de los estudiantes.

La propuesta hecha en el test, aunque formulada en términos suaves, pienso que podía ser entendida correctamente por los estudiantes investigados. Partimos de este supuesto, en el comienzo del análisis de los resultados obtenidos. Los estudiantes de segundo ESO se identifican con la propuesta, de acuerdo o muy de acuerdo, en términos porcentuales, que superan el 50%. Por tanto el desacuerdo es, desde el punto de vista analítico que estamos haciendo, una posición minoritaria, pero significativa: en todos los grupos, tanto en el pretest como en el posttest se supera el 40% en segundo TIC C. En segundo curso ESO, su avance por las ecuaciones y problemas algebraicos y la consiguiente dificultad que ello entraña, puede que le hayan motivado a decantarse por el acuerdo con la propuesta, las matemáticas son para gente inteligente.

e) Diferencias significativas

Para comprobar las diferencias significativas entre las diferencias de motivación entre el pretest y posttest de los tres grupos vamos a utilizar el test Anova univariante que realizamos con el SPSS después de haber realizado las pruebas de normalidad y obtenemos una significación 0,522, luego no hay no podemos rechazar la hipótesis nula, no hay diferencias significativas

Variable dependiente: diferencias_motivacion

F	gl1	gl2	Significación
,656	2	89	,522

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.
a Diseño: Intersección+grupo

7.1.2.- A modo de síntesis

Como síntesis de la aplicación del test de motivación a los estudiantes de segundo curso de la ESO resaltaría los asuntos siguientes. En relación con el contexto recogería dos aspectos relevantes: en relación con la familia, en términos generales son individuos pertenecientes a familias fuertemente estructuradas, con un nivel cultural alto y con estudios superiores en su mayor parte. Muestran unos índices de empleo envidiables en las circunstancias actuales españolas y con empleos de nivel medio alto. Las madres están integradas en el marco laboral en porcentajes muy estimables. En cuanto a la calificación de las matemáticas correspondientes al curso anterior han

Universidad Pontificia de Salamanca

obtenido una muy estimable nota media de 7. En cuanto a las asignaturas preferidas no aparecen las matemáticas en los pretest, sin embargo parece que la metodología ha motivado positivamente a algunos estudiantes hacia las matemáticas, como es el caso del *grupo TIC* de segundo C. En el grupo TIC de segundo A las matemáticas mantienen idénticos porcentajes en los dos test. Se percibe un escaso aprecio de la lengua española y el entusiasmo por la música es manifiesto.

En cuanto al cuestionario que se pasó a los estudiantes de segundo curso, después de largas reflexiones y consultas numerosas con profesores de dicho curso y demás, se decidió por cinco alternativas de respuesta, las cuatro precedentes y en medio la alternativa *indiferente*. La razón de este cambio en el cuestionario de 2º curso, era la más temprana edad de los investigados y se pretendía con el artificio introducido no forzar la decisión de una manera o la contraria y que no dejaran la pregunta en blanco. A posteriori he visto que el asunto tuvo importancia, la calificaría de moderada, pero se dejó sentir en las respuestas de los estudiantes de segundo, donde los índices de dispersión en las respuestas era patente y cuando las cuestiones no les parecieron muy claras se refugiaron en la alternativa de la indiferencia, mermando las posibilidades de enriquecer las tendencias o de cuestionarlas, potenciando la dispersión. Dada la corta edad de los investigados estimo acertada la decisión de las cinco alternativas. A posteriori, estimo también como acierto el haber elaborado los diez indicadores o dimensiones, porque concentra en un cuadro distintas perspectivas de motivación que, de otra manera su dispersión restaría la manifestación de los impulsos motivadores.

En relación con los resultados de motivación los resumiría en cuatro aspectos que me parecen más decisivos: 1) Respecto de la necesidad y de la utilidad de las matemáticas se han manifestado socializados con el asunto y rotundamente a favor de que son los saberes más necesarios para hacer una buena carrera, para triunfar en la vida profesional y hasta para los asuntos ordinarios de la vida cotidiana. 2) Otros núcleo de motivación de importancia decisiva se nuclea en torno a la tarea del profesor, con el que mantienen buenas relaciones y del que aprecian el seguimiento que hace de su aprendizaje, sus esfuerzos para que participen en la dinamica de la clase y en hacer unas explicaciones adaptadas a ellos y su permanente disponibilidad. Introducir en el aula recursos tecnológicos ha sido de notable importancia motivadora. 3) Otra tendencia motivadora muy significativa e indiscutible para los estudiantes del curso segundo se manifiesta en el reconocido y positivo apoyo que le prestan los familiares y la valoración positiva de amigos y compañeros. La tendencia ha recibido entre el 75% y el

Universidad Pontificia de Salamanca

85% de los apoyos. La escasa variación de resultados entre el test de inicio y el de final de la investigación se puede deber también por los elevados porcentajes de los resultados. 4) Otros núcleos de motivación de cierta importancia se localizan en los aspectos emocionales o sentimentales vinculados al autoconcepto, la autoestima y a los aspectos más racionales del interés, el esfuerzo, el trabajo y la constancia en los estudios de matemáticas.

7.1.3.- Resultados de la aplicación del Test de motivación en el curso tercero

En este apartado se van a mostrar los resultados habidos de la aplicación del test de motivación a los estudiantes del curso tercero de la ESO sobre dos asuntos: el principal y prioritario que es el nivel de motivación que anima a estos estudiantes al aprendizaje de las matemáticas. Esta información se ha obtenido mediante la aplicación de un Test de motivación, cuyas características se han expuesto ya en el capítulo de metodología, en el apartado referido a los instrumentos de recogida de datos, por lo que no es necesario hacer mención ahora. Junto a este objetivo principal, se ofrecen otros aspectos complementarios como los datos contextuales y otros específicamente técnicos, como la fiabilidad y validez de la aplicación del Test y las diferencias significativas. El orden a seguir es la validez y fiabilidad, el contexto, las asignaturas preferentes, las dimensiones motivadoras y las diferencias significativas.

a) Fiabilidad y validez

Recogidos los test de motivación, cumplimentados por los estudiantes del curso tercero de la ESO, procedí a la medición de la fiabilidad del test, tomando como la unidad de análisis las diferencias entre la puntuación obtenida en el pretest y el posttest. Para ello se comprobó el alfa de Cronbach del pretest y posttest

Alfa de Cronbach pretest=0,870

Alfa de Cronbach postest =0,876

Luego estamos en unos niveles muy positivos de consistencia. Con respecto de la validez comentamos a igual que dijimos en el test de motivación de segundo que no es un test original sino ya uno probado y las preguntas añadidas también.

Universidad Pontificia de Salamanca

b) Contexto individual y familiar

El colegio donde se nos permitió hacer la experiencia investigadora es un colegio privado de Madrid. La experiencia va a ser llevada en los tres grupos del curso tercero de la ESO. Los grupos han sido organizados al terminar primaria, procurando que fueran homogéneos. Hay dos profesores que imparten la materia de matemáticas, uno que lleva el grupo 3ºC y 3ºB y el otro para el curso 3ºA. Para iniciar el estudio se ha preguntado a los alumnos en el cuestionario sobre su calificación en matemáticas, en el curso anterior, edad, número de hermanos y asignatura favorita. Se les preguntó sobre la situación laboral y de estudios de los padres y madres. De esta forma se pueden utilizar estos datos para enmarcar toda la información que se expondrá en este capítulo.

Tabla 7.1.20.- Número de alumnos de cada grupo y la nota media del año anterior en matemáticas.

	3ºA Cooperativo	3ºB – Tradicional	3ºC – TIC
Nº de alumnos	33	31	32
Nota media	7	7	7

Tabla 7.1.21.- Calificaciones en Matemáticas el año anterior

Calificación	4	5	6	7	8	9	10	Totales
3ºA Coop.	1(3%)	6(18%)	9 (28%)	6 (18%)	4 (12%)	3 (9%)	4 (12%)	33(100%)
3ºB Trad.	1(3%)	7(23%)	5 (15%)	4 (13%)	7 (23%)	4 (13%)	3 (10%)	31(100%)
3ºC TIC	1(3%)	6(19%)	5 (16%)	9 (28%)	5 (16%)	3 (9%)	3 (9%)	32(100%)

En cuanto a la calificación de matemáticas, la nota media es igual en ambos cursos, la distribución por notas también es similar.

Tabla 7.1.22.- Edades de los grupos en Diciembre 2012. Datos en porcentajes

Edades	13 años	14 años	15 años	Totales
3ºA Coop.	0 (0%)	31 (94%)	2 (6%)	33(100%)
3ºB Trad.	1 (3%)	29 (94%)	1 (3%)	31(100%)
3ºC TIC	1 (3%)	31 (97%)	0 (0%)	32(100%)

Realmente las edades de los alumnos corresponden al curso en el que se encuentran salvo 3 alumnos que repiten de tercero.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 7.1.23.- Número de hermanos.

Nº hermanos	3ºA Cooperativo	3ºB Tradicional	3ºC TIC
1	1(3%)	2(7%)	1(3%)
2	6(18%)	7(23%)	6(19%)
3 ó 4	13(40%)	10(30%)	14(44%)
5, 6 ó 7	9(27%)	9(30%)	8(25%)
8 ó más	4(12%)	3(10%)	3(9%)
Totales	33(100%)	31(100%)	32(100%)

Destaca el número de hermanos: menos de un 25% tienen cuatro o menos hermanos. La mayoría son familias numerosas con lo que puede conllevar de ruido en casa, también significa que pueden contar con la ayuda de hermanos mayores.

Tabla 7.1.24.- Estudios del padre de los alumnos de 3º ESO

	Sin estudios	Estudios Primarios	Formación Profesional	Diplomatura	Licenciatura	No contesta	Totales
3º A	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	3 (10%)	28 (84%)	2 (6%)	33(100%)
3º B	0 (0%)	0 (0%)	1 (3%)	2 (7%)	27 (87%)	1 (3%)	31(100%)
3º C	0 (0%)	2 (6%)	3 (9%)	1 (3%)	25 (79%)	1 (3%)	32(100%)

Tabla 7.1.25.- Estudios de las madres de los alumnos de 3º ESO

	Sin estudios	Estudios Primarios	Formación Profesional	Diplomatura	Licenciatura	No contesta	Totales
3º A	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	7 (21%)	24 (73%)	2 (6%)	33(100%)
3º B	1 (3%)	1 (3%)	1 (3%)	4 (13%)	23 (75%)	1 (3%)	31(100%)
3º C	1 (3%)	1 (3%)	4 (13%)	4 (13%)	21 (67%)	1 (3%)	32(100%)

Tabla 7.1.26.- Profesión de los padres de los alumnos de tercero ESO

	3ºA Cooperativo	3ºB Tradicional	3ºC TIC

Universidad Pontificia de Salamanca

Profesor	1 (3%)	3 (10%)	1 (3%)
Funcionario no docente	2 (6%)	1 (3%)	2 (6%)
Autónomo	5 (15%)	8 (26%)	5 (16%)
Trabajador por cuenta ajena	18 (55%)	17 (55%)	17 (53%)
Parado	0 (0%)	1 (3%)	0 (0%)
Jubilado	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Ama de casa	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Otros	5 (15%)	1 (3%)	5 (16%)
No contesta	2 (6%)	0(0%)	2 (6%)
Totales	33(100%)	31(100%)	32(%)

Tabla 7.1.27.- Profesión de las madres de los alumnos de tercero ESO

	3ºA Cooperativo	3ºB Tradicional	3ºC Tic
Profesor	5 (15%)	1 (3%)	4 (13%)
Funcionario no docente	2 (6%)	3 (9%)	2 (6%)
Autónomo	2 (6%)	3 (9%)	4 (13%)
Trabajador por cuenta ajena	8 (24%)	12 (40%)	9 (28%)
Parado	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Jubilado	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)
Ama de casa	10 (31%)	11 (36%)	8 (25%)
Otros	4 (12%)	0 (0%)	2 (6%)
No contesta	2 (6%)	1 (3%)	3 (9%)
Totales	33 (100%)	31 (100%)	32 (100%)

c) Asignaturas favoritas al comienzo y al final de la investigación. **3ºESO:**

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.14.a) Asignaturas favoritas: *Grupo cooperativo* (3º A) .Pretest

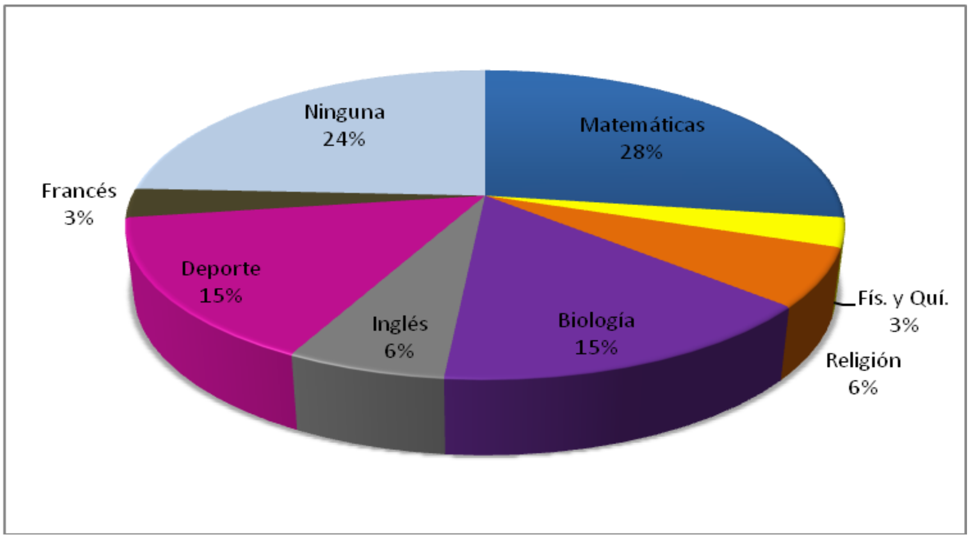
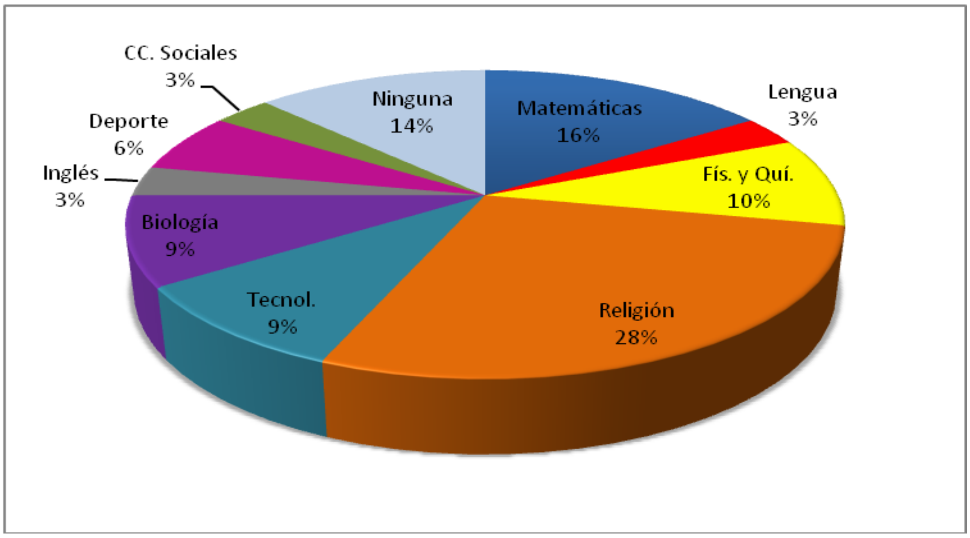


Gráfico 7.1.14.b) Asignaturas favoritas: *Grupo cooperativo* (3º A). Posttest



En el *grupo cooperativo*, se ha experimentado un cambio con la asignatura de matemáticas. Antes de la experiencia investigadora era elegida por el 28% de los estudiantes como la preferida, mientras que después sólo fue elegida por el 16%.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.14.b) Asignaturas favoritas: *Grupo tradicional*. (3º B). Pretest

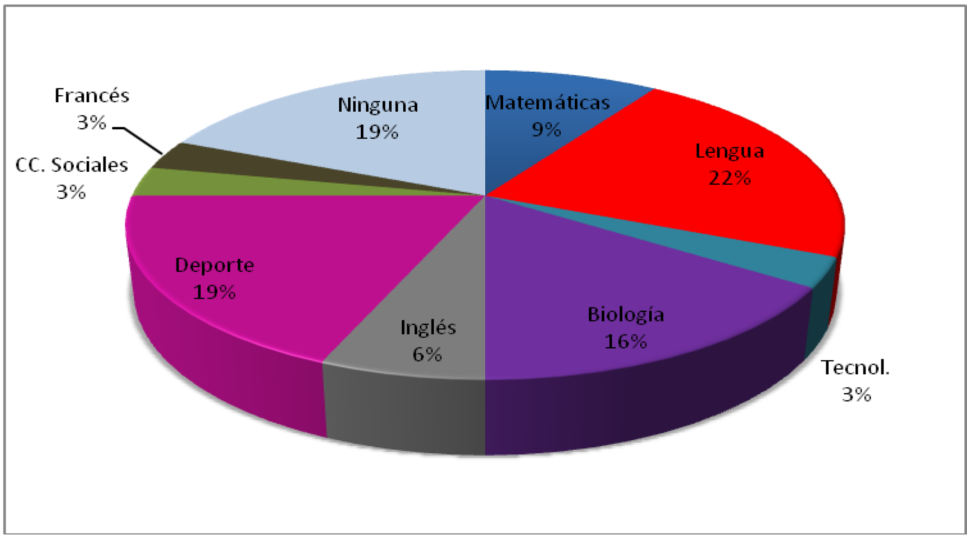
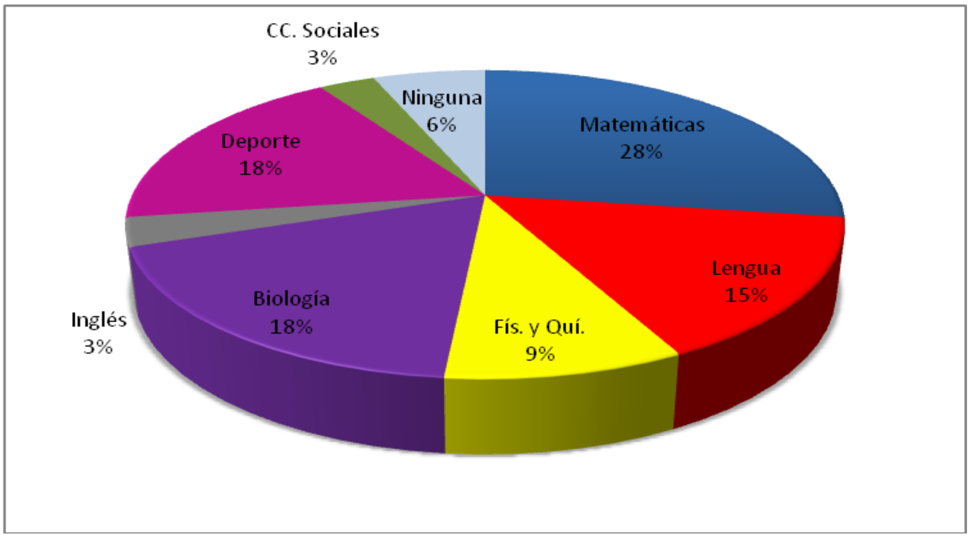


Gráfico 7.1.14.c) Asignaturas favoritas: *Crupo tradicional*. (3º B). Posttest



En el *grupo tradicional* el 9% elegía la materia de matemáticas como favorita, en cambio, después de la experiencia los alumnos la han escogido en un 28% de los casos, existe un aumento de motivación.

Gráfico 7.1.14.d) Asignaturas favoritas: *Grupo TIC.* (3º C). Pretest

Universidad Pontificia de Salamanca

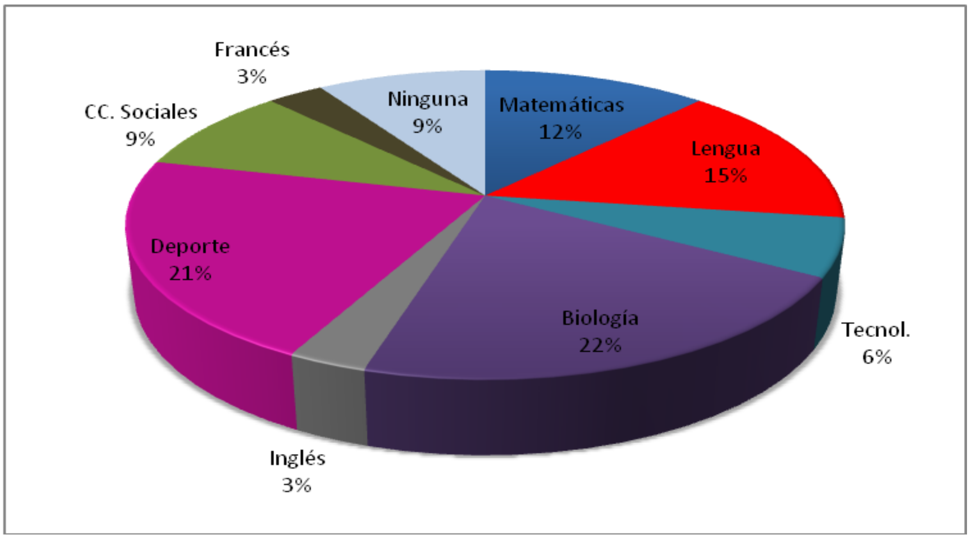
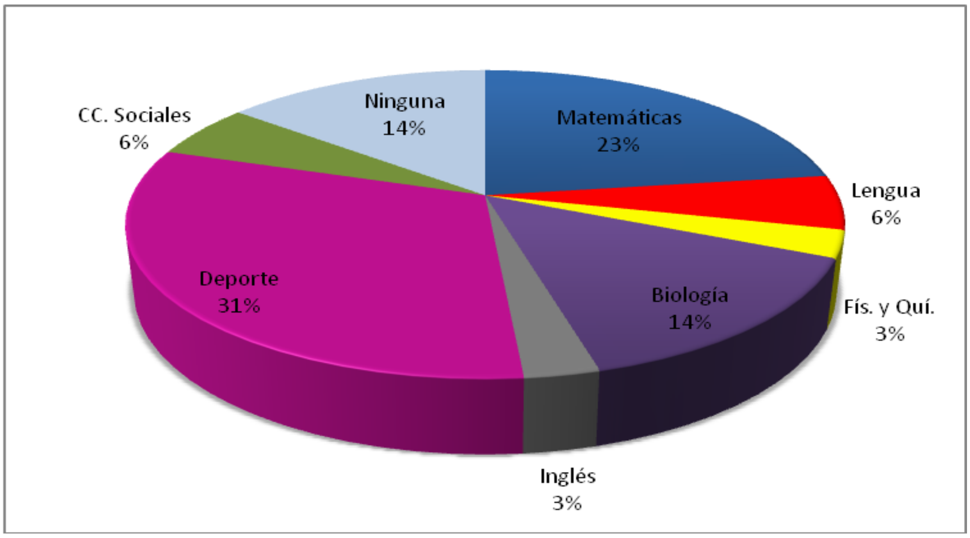


Gráfico 7.1.14.e) Asignaturas favoritas: *Grupo TIC*. (3º C). Posttest



En el *grupo TIC* los estudiantes han vsionado videos. Antes de la investigación, el 12% del grupo ha elegido como favorita las matemáticas ha pasado del 12%, después de la experiencia investigadora fue seleccionada por el 23%. Ha habido un cambio positivo.

En términos generales, en tercero son muchos los estudiantes que apuestan por la biología o el deporte como asignatura favorita. Cabe señalar el porcentaje de alumnos que consideran no tener ninguna asignatura favorita y el escaso aprecio por la lengua.

Universidad Pontificia de Salamanca

d) Dimensiones de los resultados

En el análisis de los resultados del test de motivación aplicado a los alumnos del curso de tercero ESO, se utilizó las mismas dimensiones que en el curso segundo, como es obvio, dado que el instrumento de motivación es el mismo.

1ª Dimensión: Necesidad y utilidad de las matemáticas

Tabla 7.1.28.- Necesidad y utilidad de las matemáticas. Datos en porcentajes

Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC - TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	33,38	34,95	24,97	26,40	31,59	27,69
De acuerdo	49,02	50,53	48,68	46,22	50,69	54,30
Desacuerdo	15,53	13,44	20,41	22,16	15,88	11,02
Muy desacuerdo	2,07	1,08	5,94	5,22	1,84	6,99

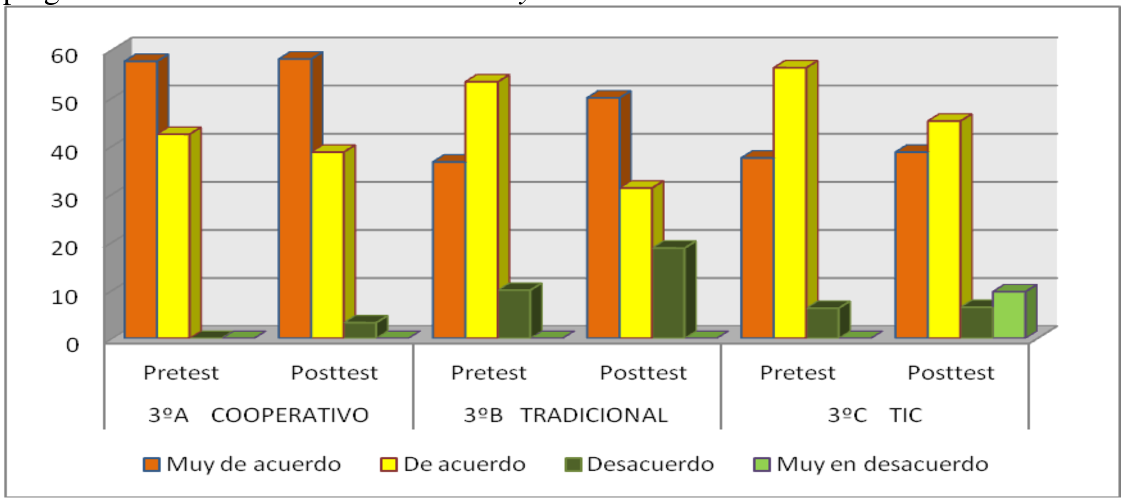
Este indicador recoge las preguntas: 1, 2, 5, 9, 12, 36, 38, 40, 63. Los contenidos de varias preguntas sobre la utilidad de las matemáticas para la vida, para el éxito profesional, social y económico. También se recoge la relación entre las matemáticas que se enseñan y las que se utilizan en la vida cotidiana y la relación de las matemáticas con otras asignaturas.

La información ofrecida en la tabla precedente no parece mostrar diferencias significativas entre los métodos didácticos, sin embargo expresan de forma contundente la utilidad y necesidad de las matemáticas para la vida, en tan elevados porcentajes que apenas queda margen para variaciones porcentuales respecto de la metodología, aunque se elevan entre el pretest y el posttest. La polarización en el acuerdo y muy de acuerdo es contundente entre los estudiantes de tercer curso, con más del 80% en el grupo Cooperativo y en el TIC.

A continuación mostramos las respuestas en porcentajes de los alumnos de tercero a algunos items en concreto:

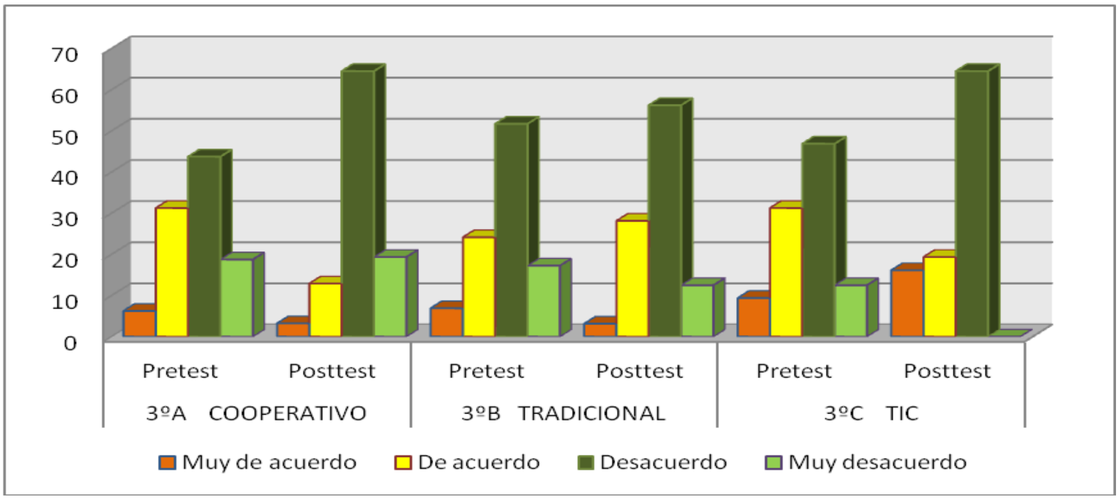
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.15.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 1.- *Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.*



Los estudiantes de los tres grupos de tercero se decantan con contundencia por la tendencia de que las matemáticas son útiles para la vida. En el grupo cooperativo se mantienen los altos porcentajes durante la experiencia investigadora, y disminuyen ligeramente en el grupo TIC de los alumnos de tercero.

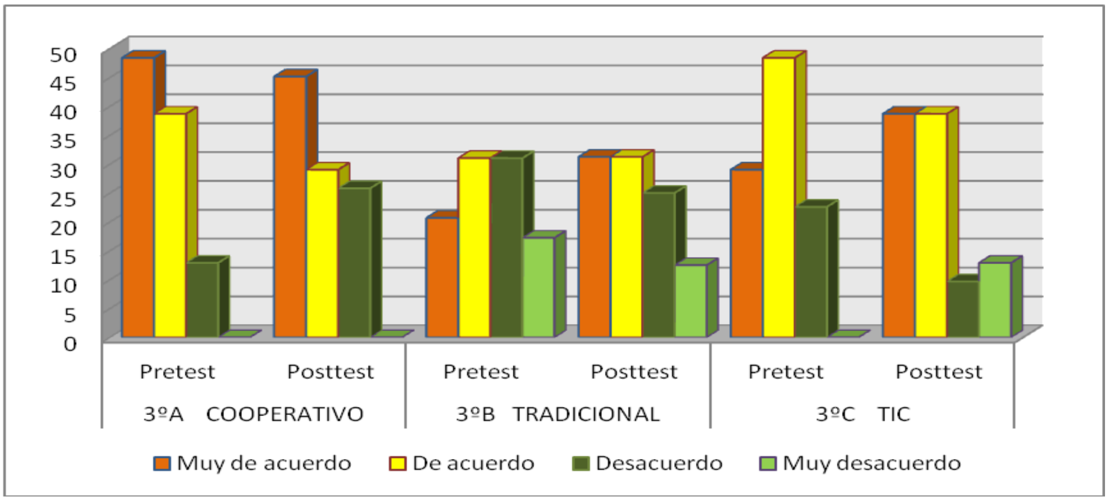
Gráfico 7.1.15.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 9 *Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.*



Los estudiantes de tercero, grupo cooperativo y TIC, se decantan con decisión contra la propuesta de la pregunta. La metodología o los contenidos escolares de álgebra guardan relación con las habilidades necesarias para afrontar la realidad. No parecen tan separadas de la realidad como se venían considerando los contenidos procedentes de las matemáticas. Los datos obtenidos en el posttest avalan esta tendencia en los dos grupos mencionados.

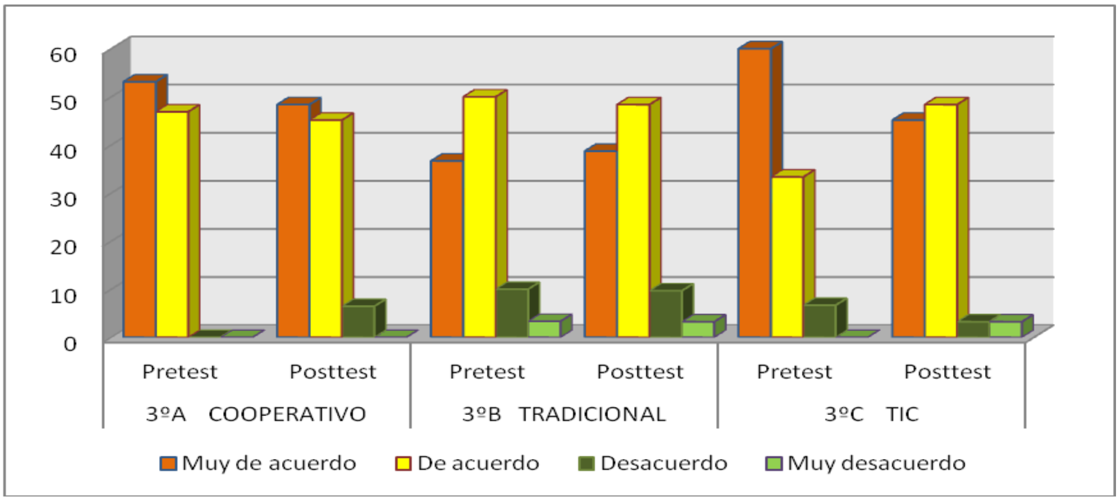
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.15.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 36 *Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas.*



En cuanto a la importancia que tiene las matemáticas a la hora de alcanzar una profesión bien remunerada, los alumnos tienen opiniones matizadamente dispares. En tercero la tendencia tiene consistencia en los grupos cooperativo y TIC y ésta se mantiene en los altos porcentajes que tenían en el pretest, subiendo levemente en el tradicional.

Gráfico 7.1.15.d) Resultados de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 40 *Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.*

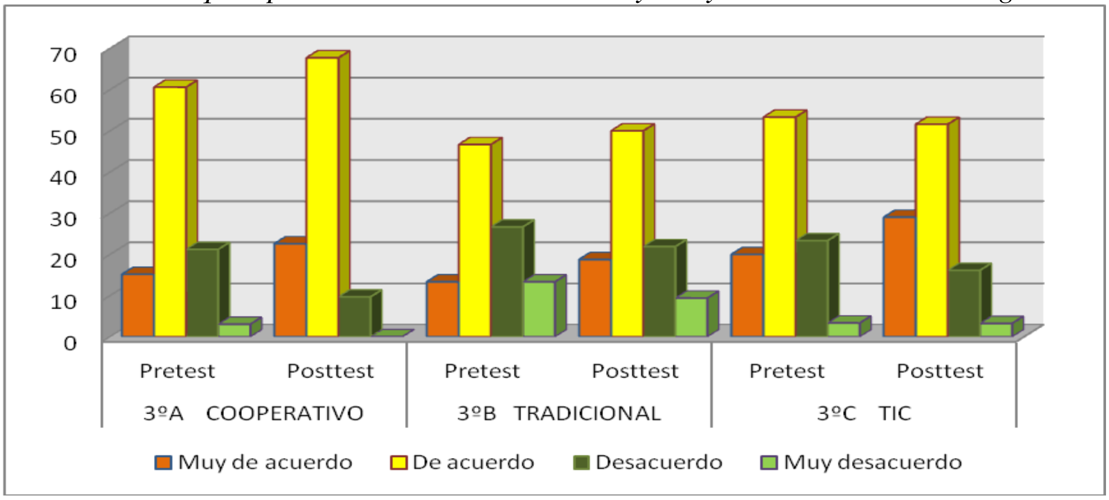


Cuando a los estudiantes se les cuestiona sobre la importancia de las matemáticas para tener éxito en los estudios posteriores, las dudas porcentualmente son mínimas. No se perciben cambios porcentuales entre el pretest y posttest.

Universidad Pontificia de Salamanca

La tendencia obtiene una polarización de frecuencias muy altas: en tercero el 80% de los estudiantes considera que la materia es muy importante para sus estudios futuros, este porcentaje se mantiene casi invariable después de la experiencia.

Gráfico 7.1.15.e) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 63 *Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.*



Los alumnos están convencidos que las matemáticas ayudan en el estudio de otras materias. En el cooperativo y en el TIC se observa, al final de la investigación, un aumento porcentual en la valoración de este aspecto mientras que en el grupo tradicional no varía.

2ª Dimensión: Influencia de familiares, amigos/as y compañeros/as hacia las matemáticas

Tabla 7.1.29.- Influencias motivadoras de familiares, amigos y compañeros. Datos en porcentajes.

Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	60,03	53,88	50,67	50,94	60,38	54,52
De acuerdo	24,13	32,90	28,33	27,25	20,46	29,03
Desacuerdo	10,97	9,03	14,33	16,50	11,16	14,84
Muy desacuerdo	4,87	4,19	6,67	5,31	8,00	1,61

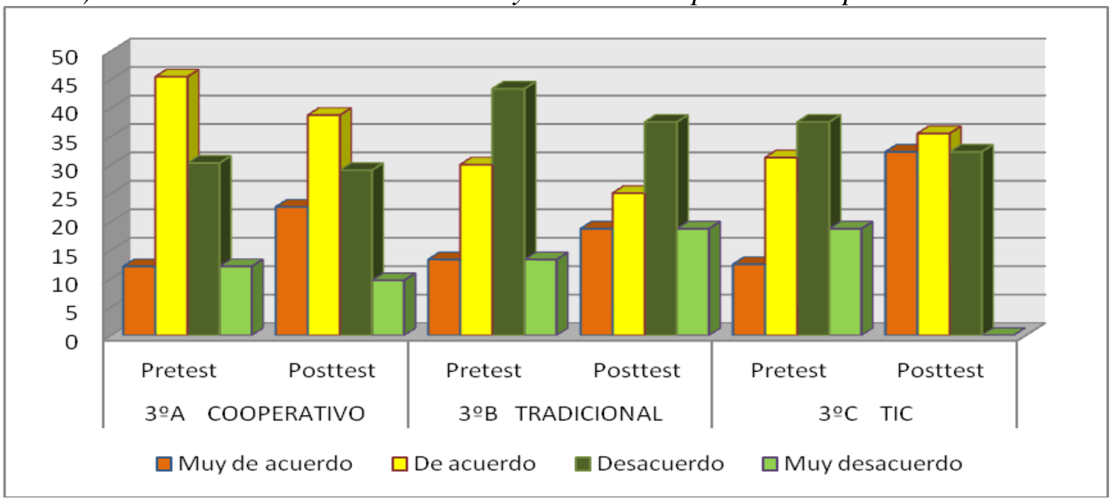
Este indicador recoge los resultados obtenidos por las preguntas 13, 31, 32, 33, 34, 57, mediante las cuales se expresan las opiniones de los estudiantes sobre las actitudes de ánimo de sus padres y de valoración de amigos y compañeros respecto del estudio de las matemáticas y de los resultados logrados. La tendencia positiva es

Universidad Pontificia de Salamanca

indiscutible entre el 75% y el 85%, expresa el apoyo incondicional de los familiares y la valoración positiva de los amigos y compañeros respecto de sus éxitos en el aprendizaje matemático.

Las diferencias entre los grupos no son significativas y las variaciones entre el pretest y posttest son muy ligeras. Está fuera de duda la fuerza motivadora de las familias, compañeros/as y amigos/as de tal modo que da la impresión de estar muy interiorizada y arraigada en su autoconcepto. El análisis de los resultados de algunas preguntas concretas puede facilitar mayor concreción de algunos aspectos.

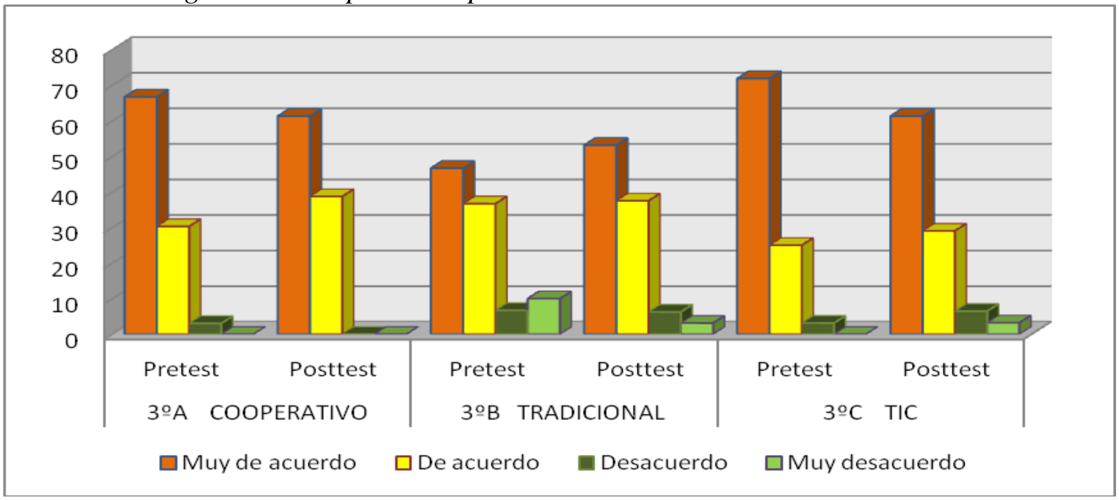
Gráfico 7.1.16.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 13 *El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirte más valorado/a y admirado/a por los compañeros.*



En relación con la pregunta acerca de si ser buen alumno de matemáticas conlleva una valoración positiva de los compañeros, la respuesta de los alumnos es afirmativa en el grupo cooperativo donde los porcentajes obtenidos al comienzo y final de la investigación son equiparables, ligerament más alto el porcentaje del posttest; en el grupo tradicional la tendencia recibe porcentajes igualados y en el grupo TIC crece la polarización de frecuencias en el posttest.

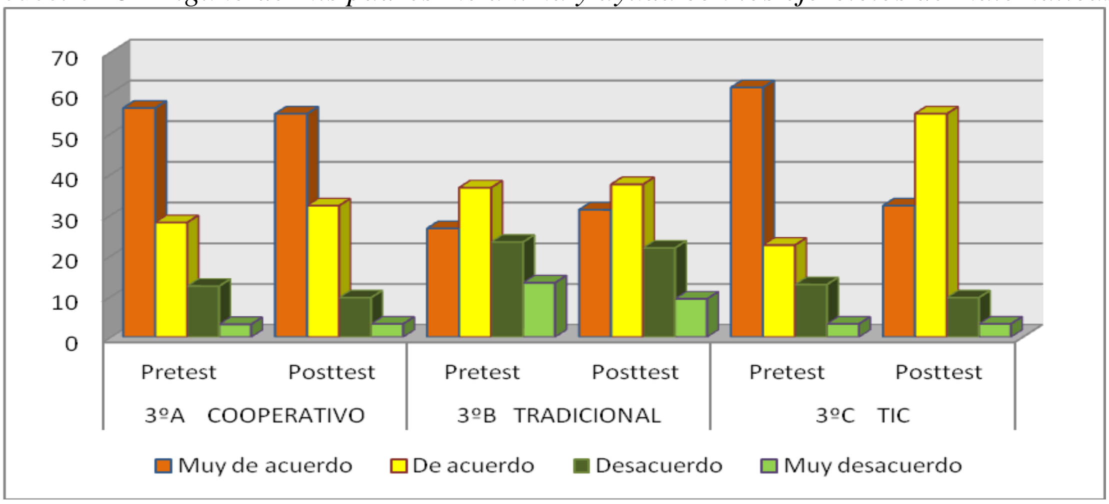
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.16.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 31 *Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.*



La tendencia es clara. Los alumnos manifiestan claramente que los padres están intersado por los resultados que obtengan en matemáticas. En el grupo cooperativo sube claramente y levemente en el tradicional. En el grupo TIC los porcentajes de comienzo y final son casi iguales.

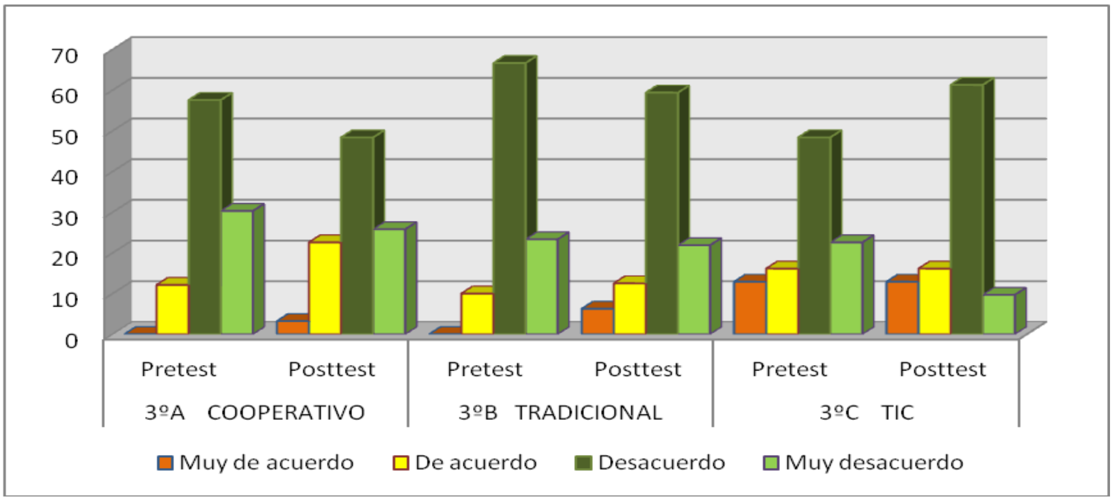
Gráfico 7.1.16.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 34 *Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.*



Los alumnos de tercero valoran muy positivamente la ayuda de sus padres. Los grupos cooperativo y TIC rebasan el 80%. Después de la experiencia investigadora, las variaciones son al alza, aunque ligeras. La ayuda que prestan los padres en los ejercicios matemáticos es reconocida, formando la tendencia mayoritaria. Sin embargo, ese ánimo reconocido no parece que les motive tanto al estudio, como parece indicar la respuesta a la pregunta 57 que sigue.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.16.d) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 57 *Estudio matemáticas porque mis padres son muy exigentes con la nota de mis exámenes.*



En la pregunta 57 se les presenta uno de los motivos externos habituales, muchos alumnos estudian porque sus padres son muy exigentes con las notas. Sin embargo, los estudiantes investigados ni se decantan por la propuesta de la pregunta ni varían de opinión entre antes y después de la experiencia. Declaran que no estudian por la presión de sus padres: esta es la tendencia mayoritaria, con porcentajes que oscilan entre el 73% hasta el 90% del grupo tradicional de tercer curso.

3ª Dimensión: Metodología y recursos

Tabla 7.1.30.- Potencial motivador de los recursos metodológicos. Datos en porcentajes

Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	24,78	29,30	15,34	17,38	24,05	19,72
De acuerdo	46,07	53,23	45,79	47,44	41,06	43,40
Desacuerdo	18,51	11,56	30,92	27,48	25,31	25,56
Muy desacuerdo	10,64	5,91	7,95	7,70	9,58	11,32

En este indicador recogemos las respuestas a los items 6, 24, 47, 58, 59, 61, 62. Este indicador de motivación indaga en la valoración de las nuevas metodologías y el uso de recursos. Entre los aspectos incluidos destacan el aprendizaje individual y su contrapunto el trabajo en grupo, seguridad en su trabajo, alternativas al libro de texto, el uso de las tecnologías y otras semejantes que comentaré en las preguntas que siguen.

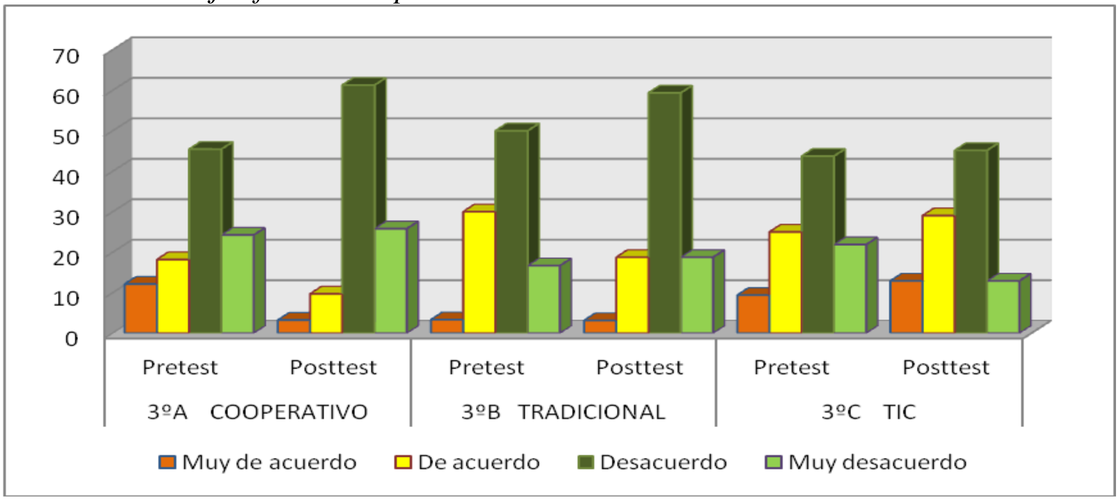
La tendencia es clara en los dos grupos. La mejoría al final de la investigación es clara respecto del inicio de la investigación. La contundencia de los resultados avala la tendencia por la que se decantan los investigados: el potencial motivador de la

Universidad Pontificia de Salamanca

metodología es significativo en el grupo cooperativo. El grupo TIC no mejora tanto pero es muy positiva.

A continuación se presenta la exposición detallada de los resultados correspondientes a las preguntas 24, 47, 59 y 62 que afianzan el sentido positivo de los resultados atribuidos al uso cooperativo del trabajo. La pregunta 61 muestra unos resultados muy significativos de la valoración metodológica por parte de grupo TIC.

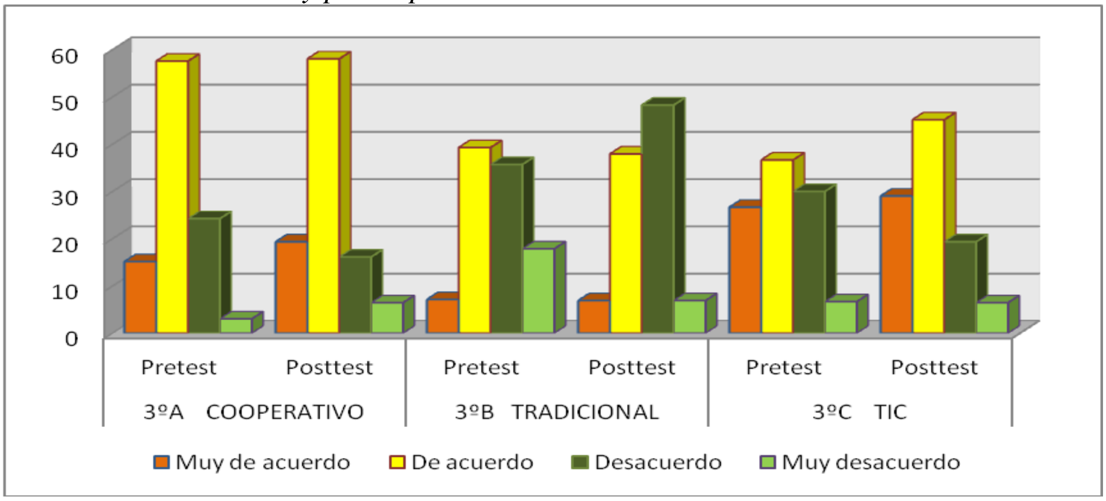
Gráfico 7.1.17.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 6 *La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual*.



En el grupo cooperativo de tercero se observa una contundente polarización, 87%, en contra de valorar como la mejor forma de aprendizaje el estudio individual. Todos los grupos se han decantado por esta tendencia , a excepción del grupo TIC. En los otros grupo se decantan por esta tendencia y aumentan los porcentajes al final de la investigación respecto de los resultados obtenidos en el pretest. En mi parecer la metodología seguida ha dado resultado y todos los grupos se decantan por la tendencia.

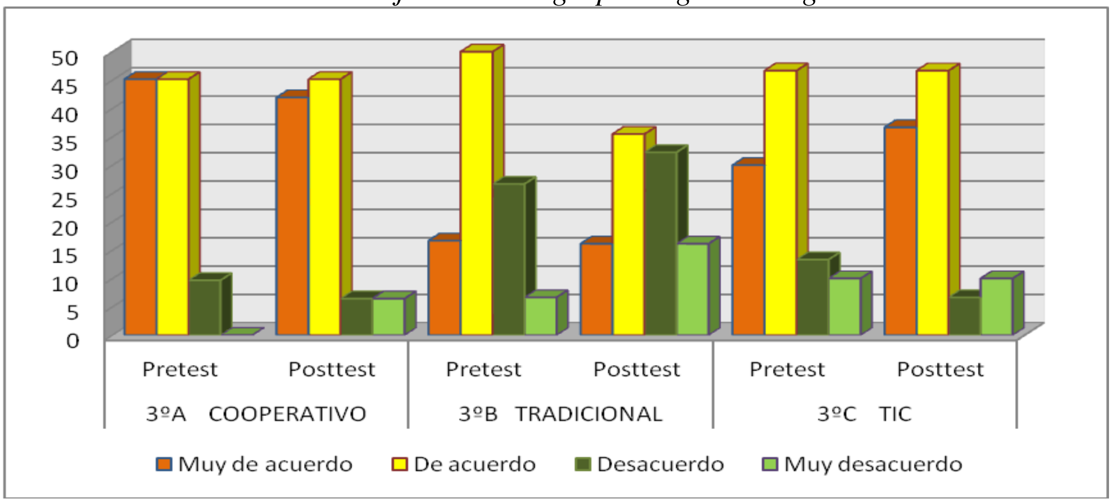
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.17.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 24 *Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase*.



La cuestión planteada confirma la tendencia anterior. Por el trabajo en grupo y la participación en la clase se decantan muy favorablemente el grupos cooperativo, favorablemente el grupo TIC, en porcentajes superiores al 75%. En ambos, al final de la investigación, se elevan estos porcentajes. El grupo tradicional se mantiene estable entre el comienzo y final de la investigación, sin decantarse por la tendencia.

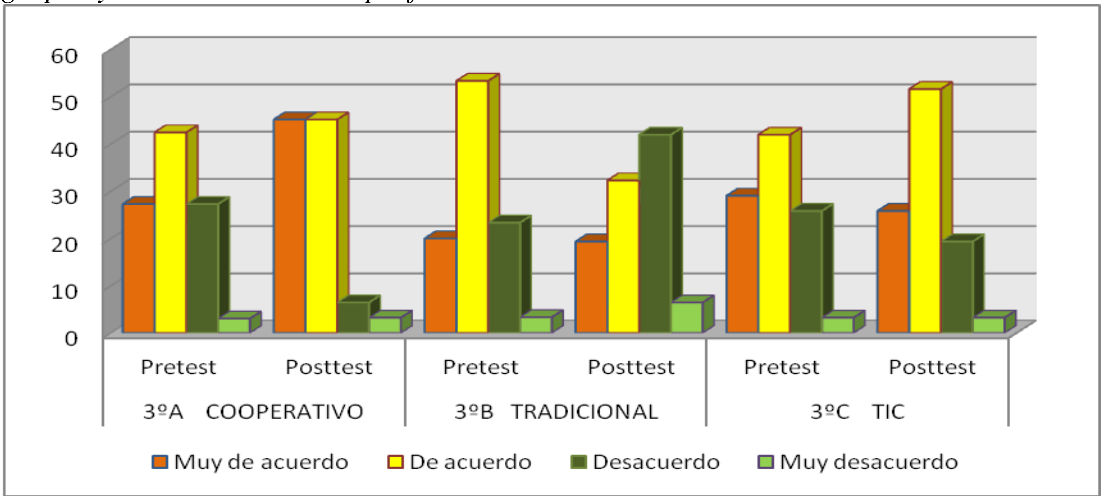
Gráfico 7.1.17.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 47 *Cuando resuelvo ejercicios en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a.*



Un tercer modo de plantear el mismo asunto. La tendencia por el trabajo en grupo es mayoritaria en todos los grupos. Los porcentajes oscilan entre el 51% del grupo tradicional hasta el 90% del grupo cooperativo. El avance porcentual desde el pretest al posttest es claro en el grupo TIC, se mantiene en el cooperativo, que superan el 87% y disminuye levemente en el tradicional. de tercero.

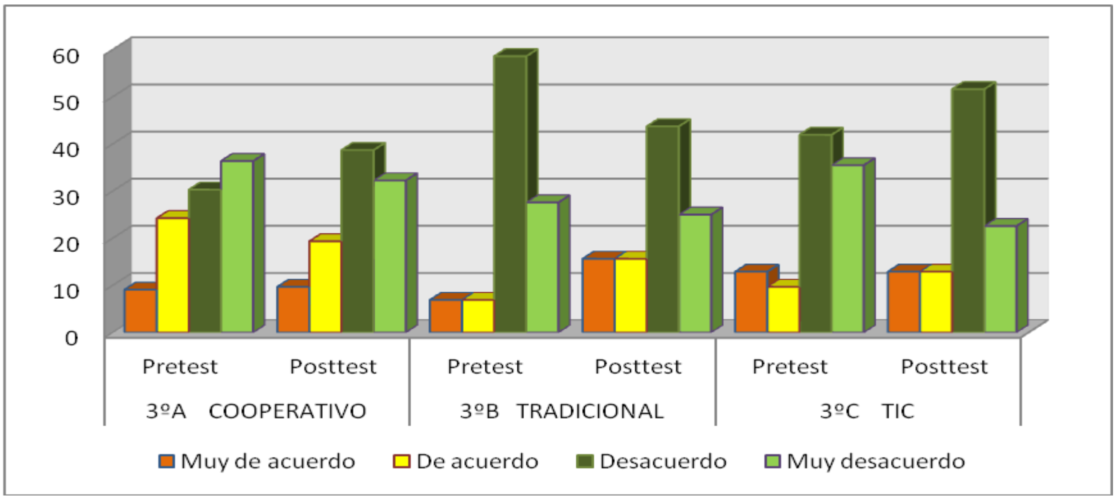
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.17.d) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 59 *Me entero mejor de la explicación cuando hacemos los ejercicios en grupos y no solo las hace el profesor.*



La cuestión del trabajo en equipo se presenta de nuevo a la valoración de los estudiantes investigados y la tendencia recibe el apoyo porcentual mayoritario en los tres grupos. Crece este porcentaje desde el pretest al posttest en los grupos cooperativo, del 79% al 90.32%; y en el TIC aunque con menor intensidad.

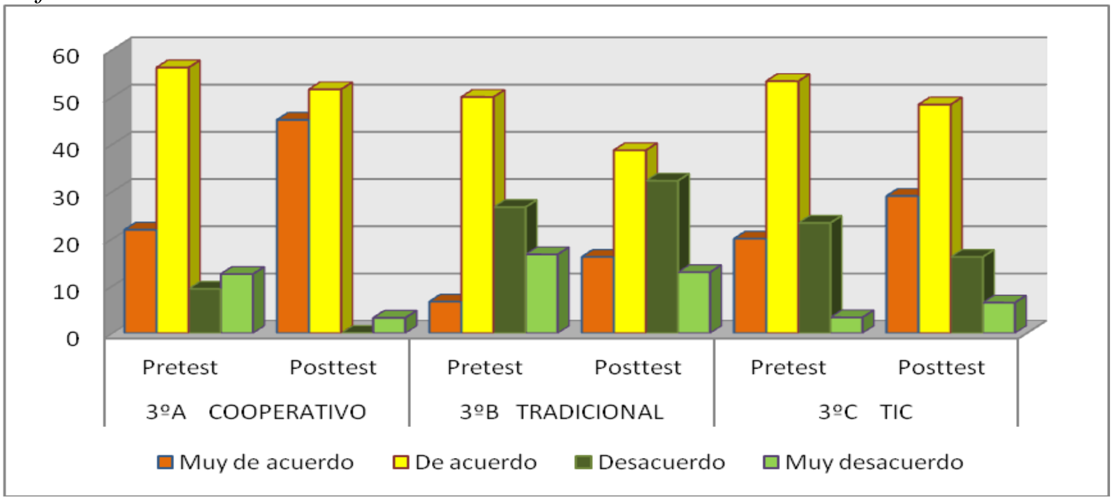
Gráfico 7.1.17.e) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 61 *Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.*



En cuanto al uso de las nuevas tecnologías y el ordenador como recursos metodológicos para motivar el aprendizaje matemático, la tendencia plenamente significativa es de rechazo en todos los grupos de tercero antes y despues de la investigación, a excepción del grupo TIC que experiementa un ligero retroceso porcentual del 77% en el pretest al 74% en el posttest.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.17.f) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 62 *Hacer ejercicios de matemáticas en grupos me ayuda a aprender y a disfrutar más de las clases de matemáticas.*



Como resumen general del apartado tercero Metodología y recursos, se puede concluir con toda contundencia la influencia de la metodología cooperativa en el aprendizaje matemático. Una vez más los estudiantes parecen muy sensibilizados para el trabajo en equipo.

4ª Dimensión: Los recursos de la motivación en las clases de matemáticas

Tabla 7.1.31.- La motivación en las clases de matemáticas. Datos en porcentajes.

Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	30,49	27,55	18,08	23,29	24,90	21,02
De acuerdo	62,48	61,29	50,97	45,21	47,05	52,92
Desacuerdo	5,74	9,68	17,06	23,02	23,54	18,51
Muy desacuerdo	1,29	1,48	13,89	8,48	4,51	7,55

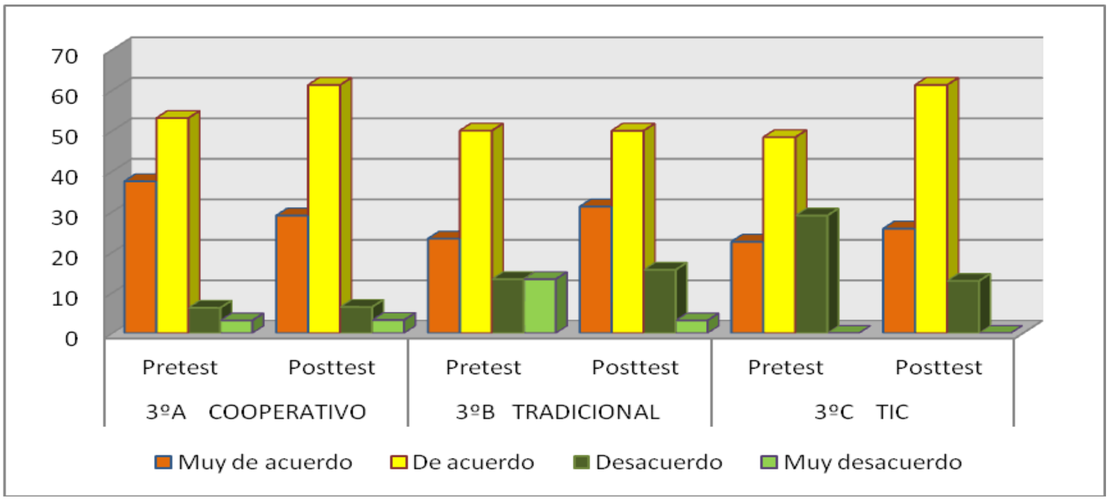
Este indicador recoge las respuestas a las cuestiones 23, 42, 43, 53, 54, 55, 66. Comprenden aquellas preguntas sobre los procedimientos a que recurre el profesor, dentro de la dinámica de la clase, para animar el aprendizaje de las matemáticas: ejercicios que se relacionen con la vida cotidiana, evitar la pesadez y el aburrimiento, hacerlas más atractivas, hacer preguntas que animen a participar y evitando la distracción de los estudiantes. Según los resultados, es la tendencia mayoritaria la positiva valoración de las clases de matemáticas con porcentajes contundentes, que oscilan entre el 70% y el 90%. Las variaciones entre el pretest y posttest son escasas en porcentaje.

A continuación se muestran los resultados correspondientes a las preguntas concretas y por consiguiente el análisis se adentra en áreas de explicación más seguras

Universidad Pontificia de Salamanca

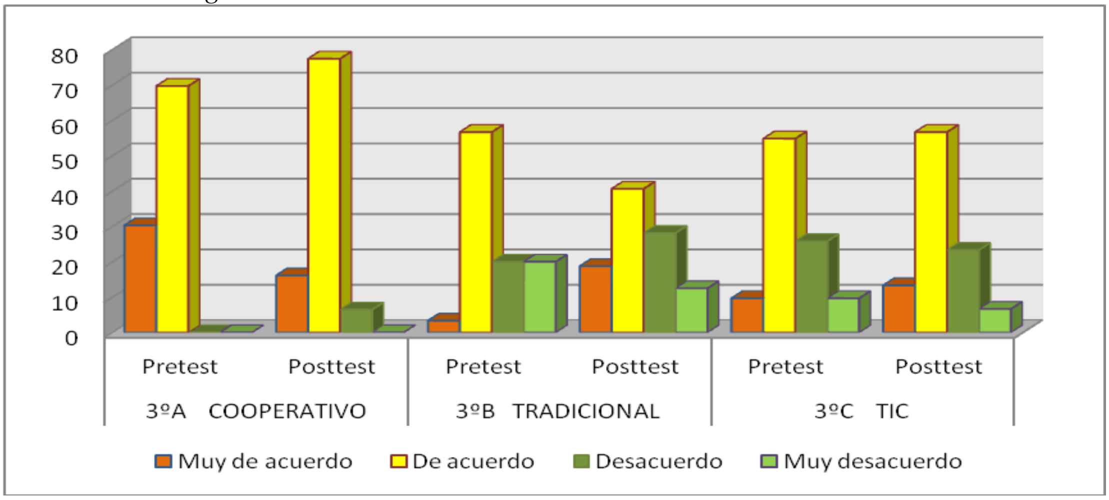
respecto de las motivaciones del aprendizaje matemático y de la influencia de las variadas metodologías en el proceso de la enseñanza-aprendizaje matemático.

Gráfico 7.1.18.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 53 *Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.*



La tendencia más relevante con índices porcentuales contundentes muestra la valoración de la atención en la clase y la participación y como ayuda esta actitud a la comprensión matemática. En todos los grupos la polarización de frecuencias se eleva entre el pretest y el posttest. De los resultados se infiere la tendencia de que la atención y la participación motivan la comprensión de las matemáticas son más relevantes los obtenidos en los grupo TIC y cooperativo.

Gráfico 7.1.18.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 54 *Me gustan las clases de matemáticas.*



Universidad Pontificia de Salamanca

El el nivel de satisfacción se vincula con la positiva motivación de los alumnos para el aprendizaje. La satisfacción por las clases de matemáticas es la tendencia dominante obteniendo una polarización de frecuencias que va del 71% en el grupo TIC al 100% en el cooperativo y el porcentaje se eleva del 71% en el pretest hasta el 90% del grupo cooperativo. Es clara la motivación metodológica enlos gruoos cooperativo y TIC.

5ª Dimensión: El profesor como agente de motivación en el estudio de las matemáticas

Tabla 7.1.32.- El profesor como agente de motivación. Datos en porcentajes.

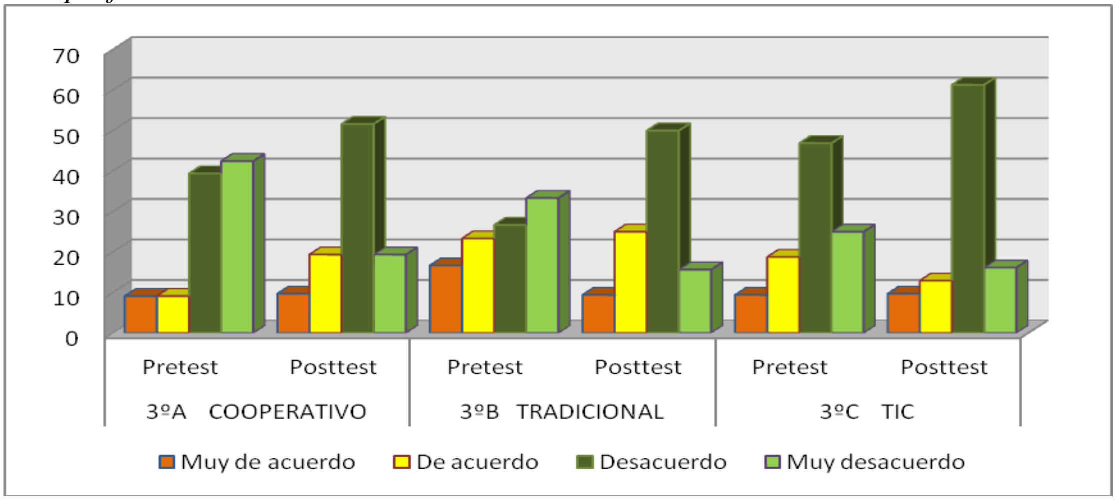
Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	37,23	37,43	15,52	16,07	30,36	24,55
De acuerdo	36,19	39,92	50,68	48,66	37,94	44,50
Desacuerdo	14,42	18,03	21,26	28,57	23,66	23,58
Muy desacuerdo	12,16	4,62	12,54	6,70	8,04	7,37

En esta dimensión agrupamos las respuestas a las cuestiones 14, 15, 25, 26, 27, 29, 30. El indicador mencionado, *el profesor como agente de motivación*, sintetiza variadas dimensiones del papel de profesor en relación con los alumnos como, las actitudes del profesor sobre la comprensión y el rendimiento que manifiesta el alumno, su disponibilidad para solventar dudas y superar dificultades, el concepto que el estudiante percibe que tiene de él el profesor y, por último el signo de sus relaciones con el profesor. Los datos de la tabla precedente, sintetizan los datos recogidos sobre los asuntos mencionados. Como en las tablas precedentes, a continuación se presentarán unos gráficos con los resultados de las preguntas concretas que permitirán identificar las tendencias con mayor precisión, pero antes señalaré las tendencias relevantes de esta tabla.

La suma de los resultados del acuerdo y muy de acuerdo, en el curso tercero configuran la tendencia dominante, la valoración positiva del rol de profesor de matemáticas, con porcentajes en el pretest desde 68% del grupo TIC hasta el 73% del grupo cooperativo. El porcentaje de frecuencias desde la perspectiva de los procedimientos apenas son perceptibles los cambios.

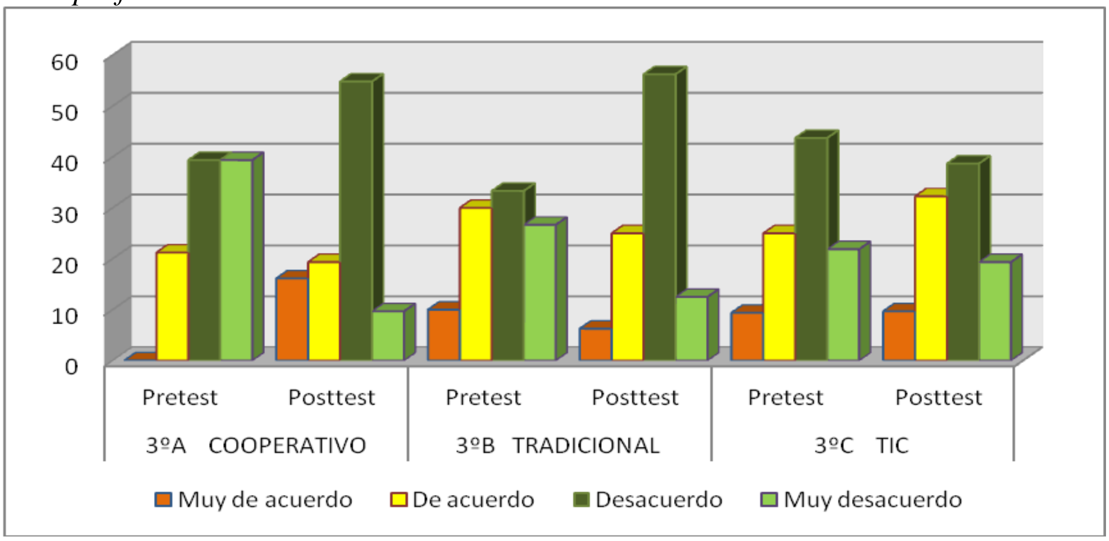
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.19.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 14 *Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.*



Cuando se les pregunta acerca del papel del profesor como p.e. si no entiendo las matemáticas es debido al profesor, los alumnos muestran que no están de acuerdo con esa afirmación en un 70% de los casos. El porcentaje de respuestas "desacuerdo" aumentan en todos los grupos del pretest al postest

Gráfico 7.1.19.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 15 *Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.*

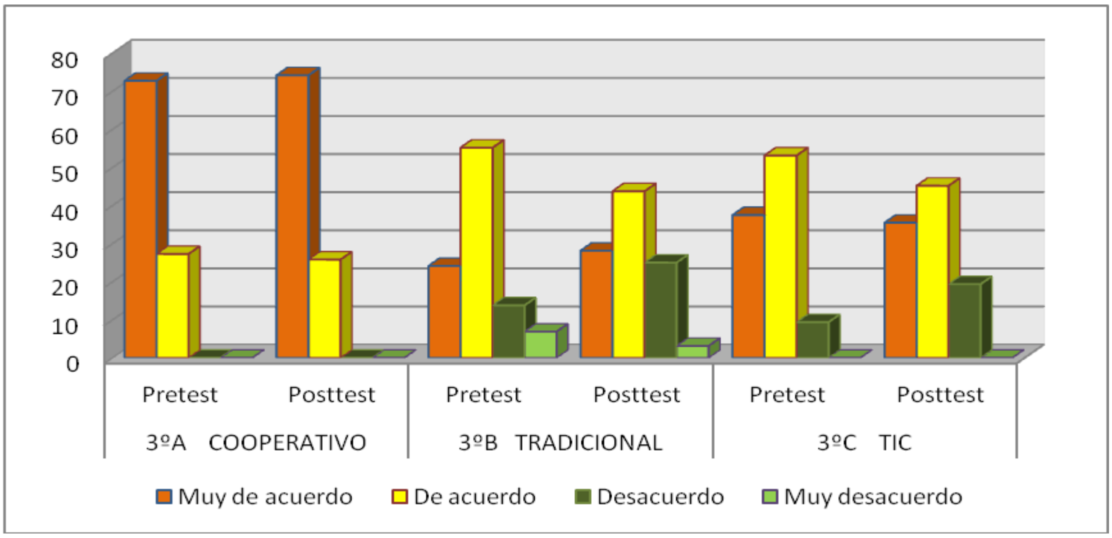


Los estudiantes están más motivados si el profesor está involucrado, en este caso se les pide la opinión acerca de si su rendimiento en matemáticas depende de la actitud del profesor hacia él. El desacuerdo de los estudiantes es manifiesto: el porcentaje de esta tendencia recibe entre el 57% del grupo TIC hasta el 78% del grupo cooperativo. El cambio observado después de la experiencia puede significar que las

Universidad Pontificia de Salamanca

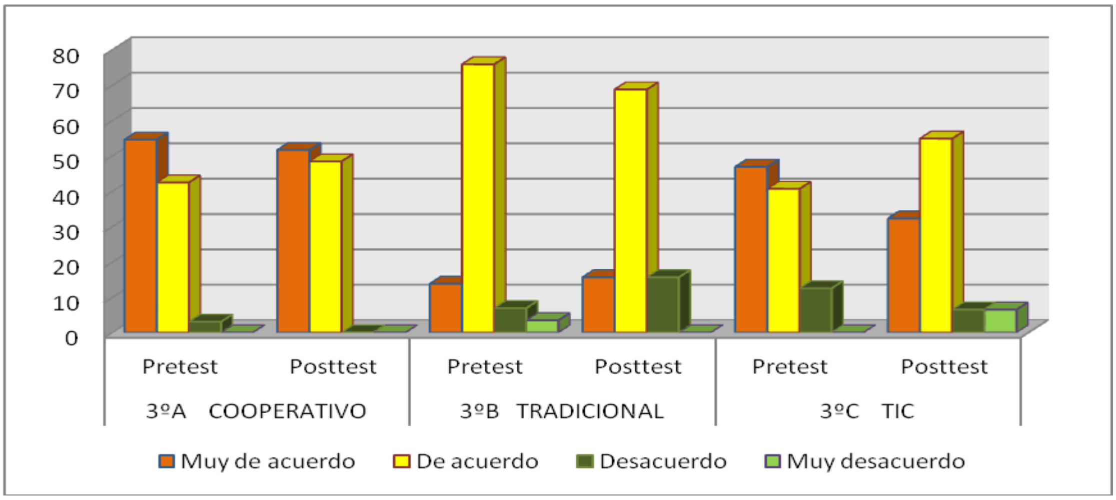
metodologías han presentado a los alumnos otras formas de enseñar que tienen atractivo.

Gráfico 7.1.19.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO al item 25 *Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase*



La valoración del profesor es muy buena, la disponibilidad se sitúa entre el 80% y el 100% en los dos cursos. La tendencia en el pretest y posttest, en porcentajes apenas varía, tan solo una caída del del 5% en el grupo tradicional y diez puntos en el TIC, quedando en el 80%.

Gráfico 7.1.19.d) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 27 *Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias*.



Valoran muy positivamente las relaciones con el profesor, entre el 86% y el 100%. La insatisfacción con el profesor oscila entre el 0% y el 15%. La tendencia

Universidad Pontificia de Salamanca

obtiene una contundente valoración positiva. La influencia se mantiene y sube del pretest al posttest.

6ª dimensión: Otras motivaciones para el aprendizaje matemático

Tabla 7.1.33.- Otras motivaciones. Datos en porcentajes.

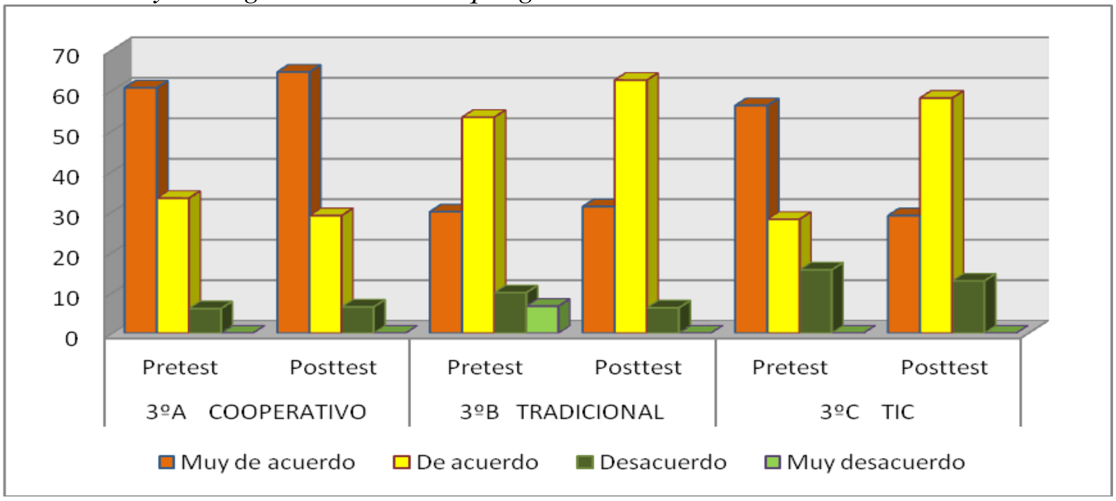
Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	46,97	46,78	26,67	25,00	38,66	34,06
De acuerdo	40,15	40,32	56,66	54,68	41,22	50,59
Desacuerdo	12,88	11,29	12,50	16,41	17,70	12,93
Muy desacuerdo	0	1,61	4,17	3,91	2,42	2,42

En este indicador se recogen las respuestas a las cuestiones 28, 56, 60, 67. En el indicador de *otras motivaciones*, se agrupan asuntos varios, algunos relacionados con el profesor, como la explicación de clase y la dificultad de los ejercicios, otros se refieren a la valoración de los ejercicios para casa y la felicitación por los resultados. Las variaciones no se relacionan tanto con el uso de las metodologías, sino con el perfil del alumnado. Los resultados son de interés para los profesores que se preocupan por motivar con eficacia a sus alumnos.

La tendencia dominante de valoración positiva, que se polariza en el *acuerdo* y *muy de acuerdo*, alcanza el 80% Esta polarización de frecuencias se mantiene desde el pretest y posttest y crece levemente en el grupo TIC. Las variaciones porcentuales son inapreciables. En términos generales, se mantiene el factor de motivación El análisis diferenciado de los variados ítems incluidos en este indicador, ofrecerá un panorama de matices más significativos.

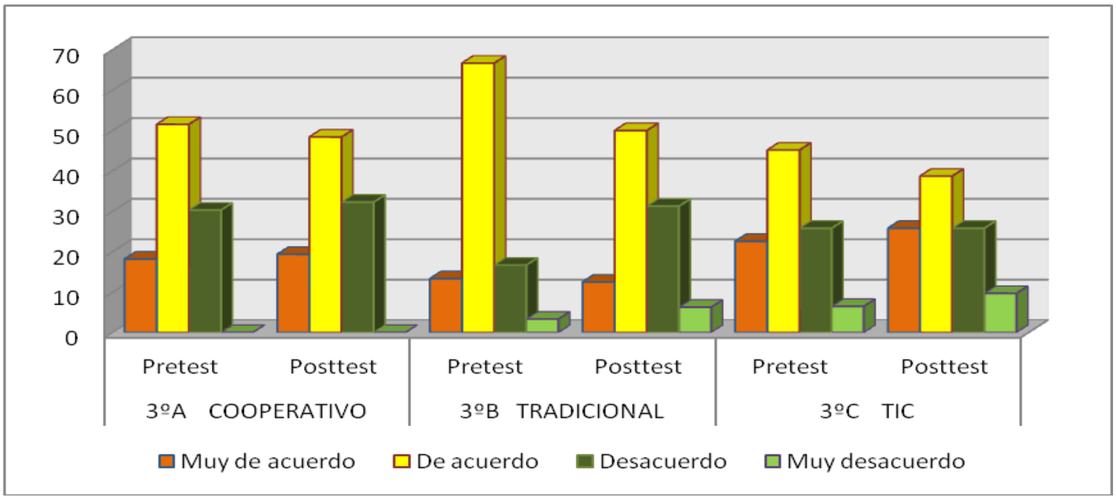
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.20.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 28 *Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.*



El entusiasmo y claridad expositiva del profesor motiva el gusto de los estudiantes por las matemáticas es la tendencia que afirman los estudiantes, entre el 75% y el 90% de ambos cursos, lo que obviamente les dispone a un mejor aprendizaje y comprensión matemática. La influencia del profesor es notoria. La influencia metodológica se mantiene o sube ligeramente.

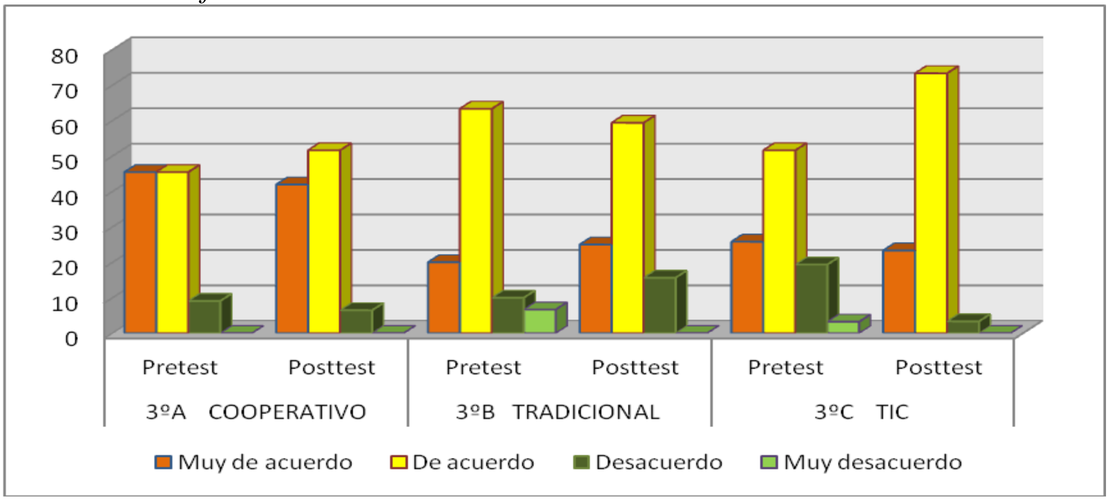
Gráfico 7.1.20.b) Resultados en porcentajes a los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 56 *Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.*



Bajan ligeramente los porcentajes de la tendencia "de acuerdo" y "muy de acuerdo", principalmente en el grupo tradicional. En todo caso las tendencias obtienen unos índices porcentuales muy altos, del 63% al 80%

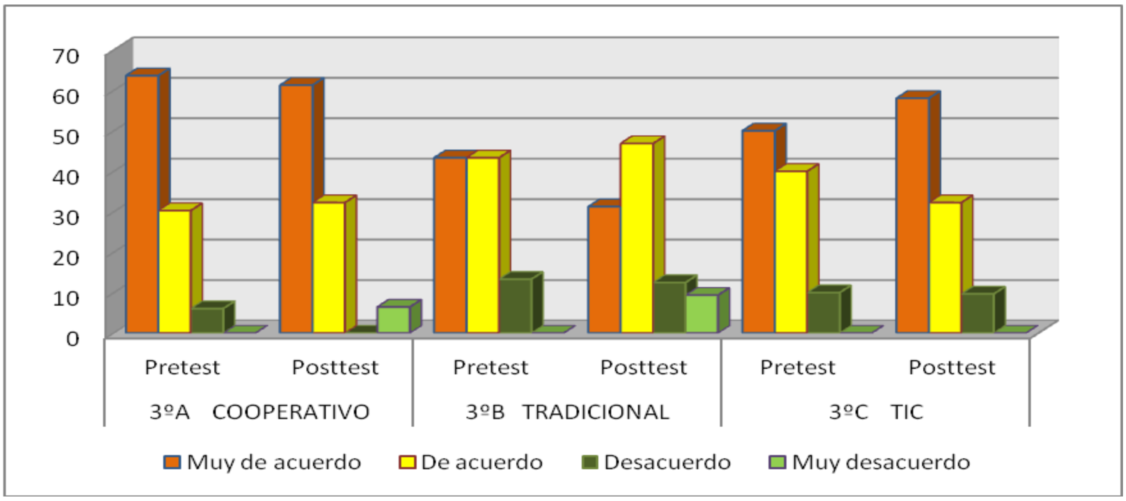
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.20.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 60 *Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.*



Los profesores de matemáticas suelen insistir a los alumnos la conveniencia de llevar ejercicios y problemas a casa en orden a ayudarles a avanzar en el aprendizaje de los contenidos. Los estudiantes prestan su acuerdo entre el 77% y el 90% en el pretest y del 84% al 97% en el posttest.

Gráfico 7.1.20.d) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 67 *Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.*



Los estudiantes del 78% al 93% se sienten muy motivados cuando se les reconoce su trabajo. Se mantienen los índices porcentuales del pretest al posttest. El reconocimiento del trabajo, es muy agradecido por parte de los estudiantes, tiene un efecto motivador indiscutible.

Universidad Pontificia de Salamanca

7ª Dimensión: Opiniones y exigencias del aprendizaje matemático

Tabla 7.1.34.- Exigencias de los resultados sobre el aprendizaje de las matemáticas. Datos en porcentajes.

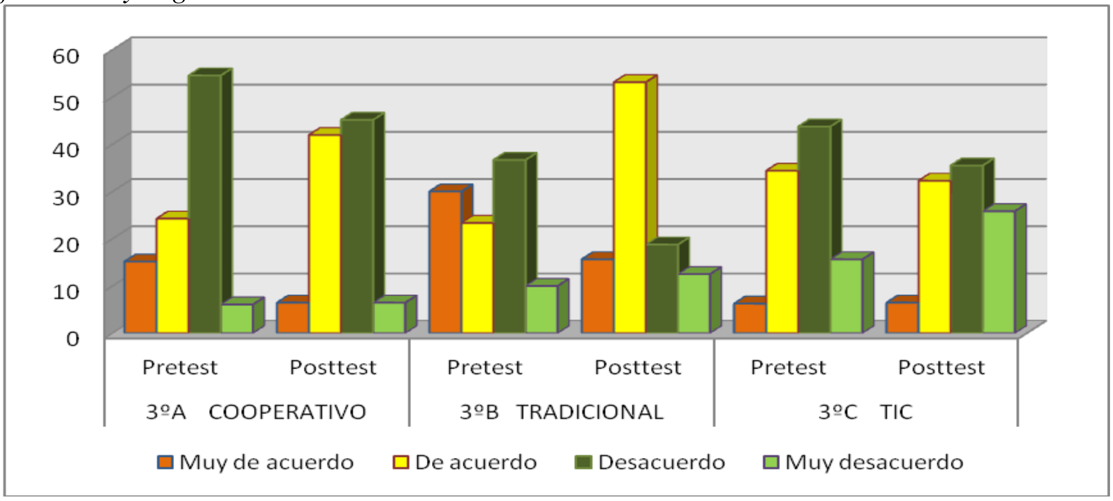
Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	30,38	7,53	24,04	26,56	26,29	26,34
De acuerdo	28,17	31,18	32,16	32,81	31,50	33,34
Desacuerdo	28,82	39,78	26,67	23,96	25,02	24,73
Muy desacuerdo	12,63	21,51	17,13	16,67	17,19	15,59

En esta dimensión agrupa las respuestas de las cuestiones 3, 4, 7, 8, 22, 52. En este indicador se recogen las opiniones de los alumnos sobre los aspectos de orden valorativo: memorizar conceptos y fórmulas, los resultados y el procedimiento como alternativas de valoración preferente al simple cálculo de soluciones o también, si para resolver los ejercicios es más importante la perseverancia y el esfuerzo o la suerte. Al recoger en la tabla precedente los resultados de asuntos tan diversos, se produjo una relativa dispersión porcentual, que pudiera oscurecer el significado de los datos expuestos. En todo caso, la tendencia sobre el acuerdo y muy de acuerdo recoge porcentajes superiores al 50% en todos los grupos, a excepción del grupo cooperativo que, al final de la investigación, se polariza mayoritariamente (61%) en el desacuerdo y muy en desacuerdo. Una explicación más rigurosa a este dato se hallará en el comentario a los resultados que el grupo cooperativo ofrece en la pregunta 3 del test.

En todo caso a continuación se muestran los datos correspondientes a cada cuestión y obtendremos tendencias con sentido y significativas. En este indicador no parece que las metodologías y recursos utilizados vayan a tener mucha repercusión. Este indicador ofrece respuestas de los alumnos a variadas cuestiones que son de interés al profesor para valorar su importancia.

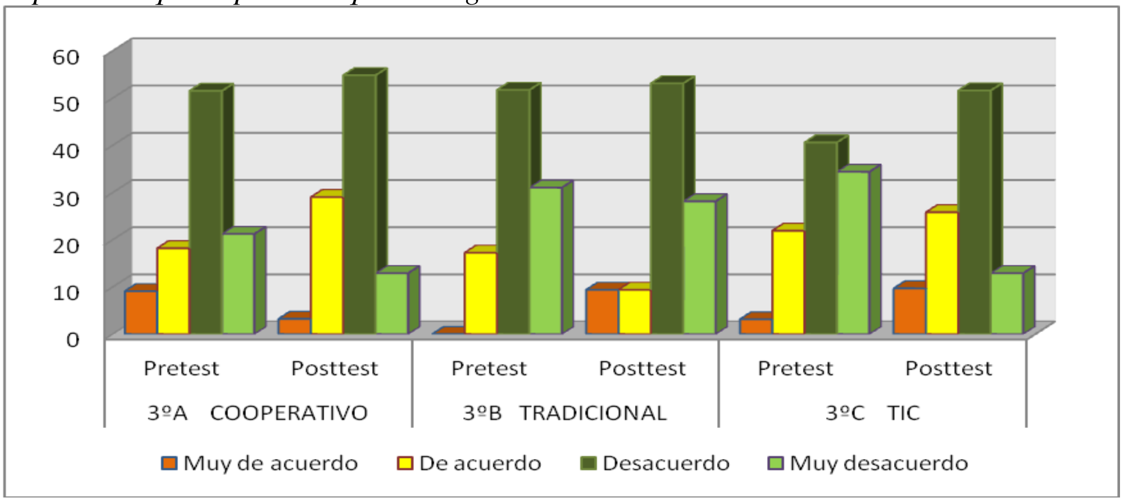
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.21.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 3 *En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.*



El uso de la memoria es fundamental también en las matemáticas es la propuesta. Respuesta de los estudiantes de tercero de la ESO: el grupo cooperativo y el TIC, se manifiestan en contra antes de la investigación, en torno al 60% y después en torno al 55%.

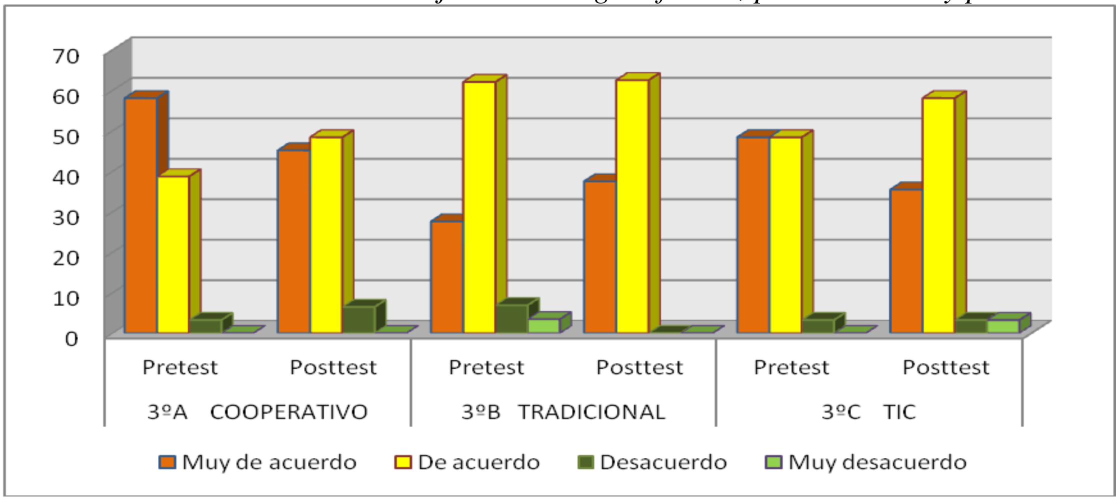
Gráfico 7.1.21.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 7 *El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido*.



La pregunta señala como más importante los resultados que el procedimiento. Las respuestas de los estudiantes muestran un total desacuerdo con la propuesta, en el pretest y posttest, con porcentajes que superan el 50 %. La tendencia, el procedimiento más importante que los resultados, está sólidamente fundada por los resultados.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.21.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la cuestión 52 *La resolución de los ejercicios exige esfuerzo, perseverancia y paciencia.*



Sobre las exigencias necesarias para resolver los ejercicios matemáticos, *esfuerzo, perseverancia y paciencia*, los alumnos se polarizan en torno a los 90%. Los resultados son contundentes y la tendencia afirmada sin fisuras. Los datos son muy semejantes en el pretest y posttest, por lo que también queda avalada la motivación metodológica.

8ª Dimensión: Autoestima y emociones en el aprendizaje de las matemáticas

Tabla 7.1.35.- La autoestima y las emociones en el aprendizaje. Datos en porcentajes.

Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	24,09	20,40	17,41	24,45	17,49	20,32
De acuerdo	41,23	38,55	41,32	44,14	41,84	41,21
Desacuerdo	27,49	32,26	29,51	22,50	30,07	29,92
Muy desacuerdo	7,19	8,79	11,76	8,91	10,60	8,55

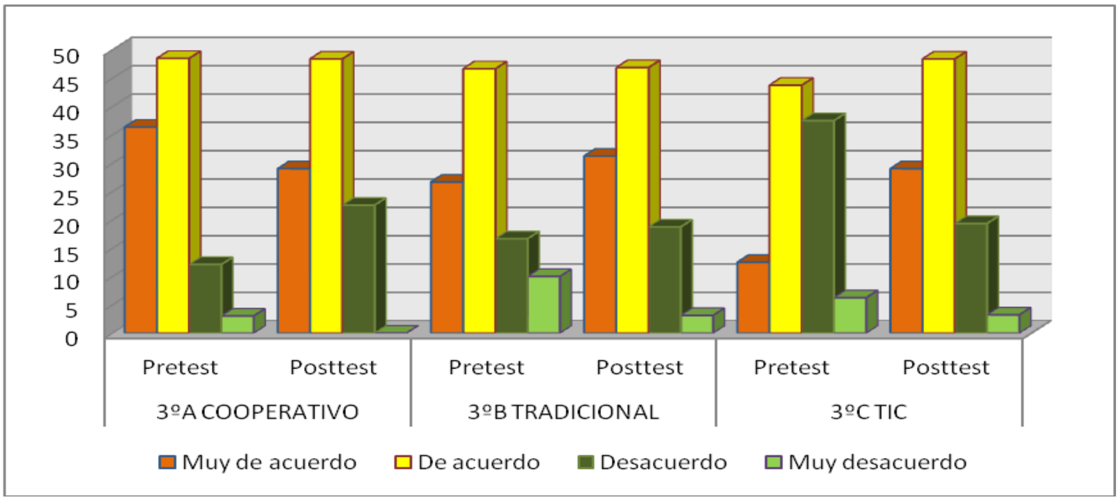
En este indicador agrupamos las respuestas a las preguntas17, 18, 19, 20, 45, 46, 48, 49, 50. En torno al indicador de la autoestima y se agrupan los aspectos de la autoconfianza, la capacidad para resolver los ejercicios, el crecimiento de la curiosidad intelectual, los espacios de inseguridad generados por el bloqueo que pueden experimentar los estudiantes en la resolución de ejercicios matemáticos y a una parte importante de los estudiantes no le van las sorpresas en la asignación de tareas con los ejercicios matemáticos. Las respuestas a estas cuestiones apuntan a emociones, sentimientos y sensaciones de los alumnos cuando han de enfrentarse a la resolución de los ejercicios matemáticos. El análisis desglosado, referido a cada una de las cuestiones

Universidad Pontificia de Salamanca

propuestas, ofrecerá un conocimiento más próximo a la realidad, en la medida en que es posible aproximarse a la realidad de las emociones y sentimientos.

En cuanto a la interpretación y análisis de los datos precedentes, teniendo en cuenta los variados supuestos enunciados se podrían aventurar, con la mayor cautela posible, algunas consideraciones. Las frecuencias polarizadas en las rúbricas del *acuerdo* y *muy de acuerdo* apunta la tendencia fundamental que luego hallaremos desglosada en el análisis de cada cuestión. Procede el análisis de cada cuestión de forma separada, que descubrirá la verdadera intención de los investigados respecto de las cuestiones presentadas a su valoración.

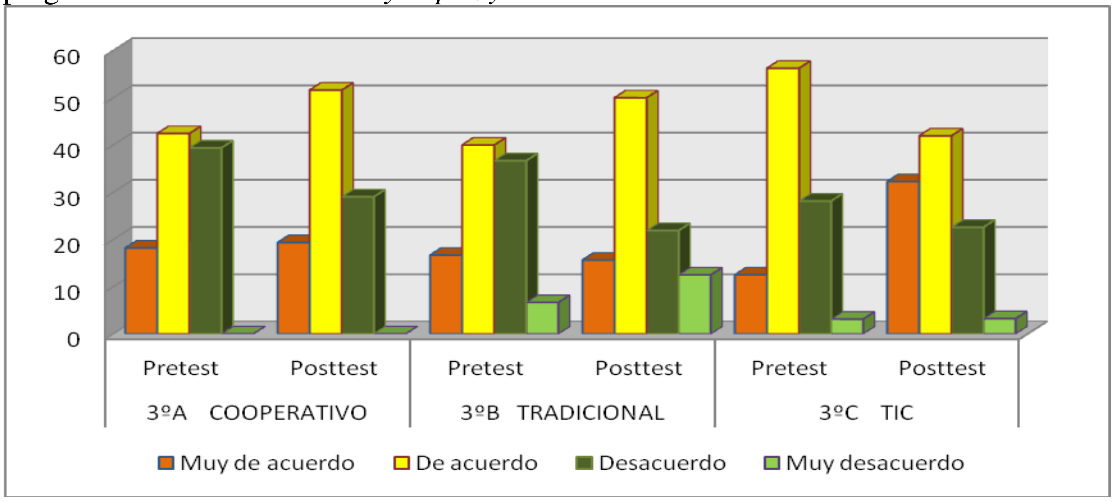
Gráfico 7.1.22.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 18 *Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.*



Los estudiantes afirman la propuesta de que la realización de los ejercicios aumenta su confianza. Esta tendencia en el curso de tercero de la ESO acapara más del 55% de las respuestas en los tres grupos. No hay muchas diferencias entre pretest y posttest

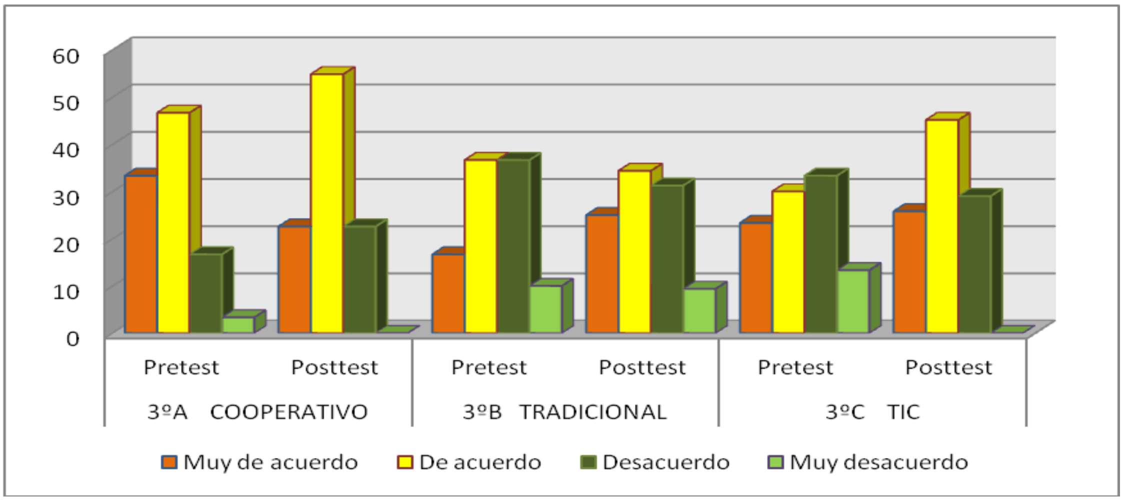
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.22.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 19 *Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.*



La tendencia expresada en la pregunta queda ampliamente demostrada por las respuestas de los estudiantes con porcentajes que van desde el 56% hasta el 74%. Merece atención del analista la notable polarización de las respuestas estudiantiles en el desacuerdo. En buena medida, la actitud responde, como es obvio, a la propia experiencia de las dificultades halladas en los cursos precedentes. A esto contribuye que las matemáticas es un saber acumulativo y por consiguiente las dificultades de ayer se duplican mañana y esta conciencia la tienen desde muy pronto los estudiantes de matemáticas.

Gráfico 7.1.22.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO la pregunta 45 *Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.*

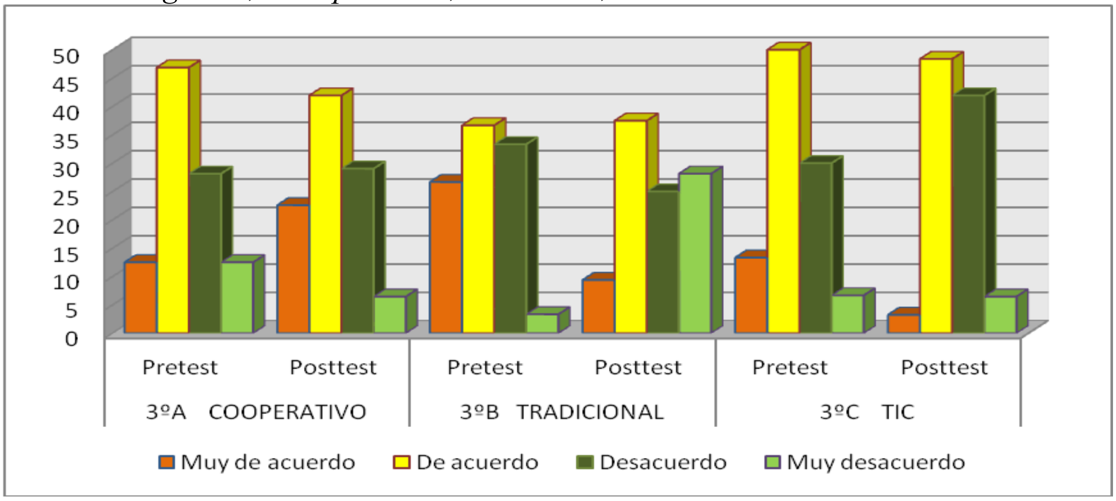


La curiosidad tal como se presenta en el test responde al significado de la virtud del intelectual que busca conocer lo desconocido. La tendencia está plenamente

Universidad Pontificia de Salamanca

avalada por los resultados obtenidos en el curso de tercero de la ESO: oscilan entre el 53% del grupo tradicional hasta el 80% del grupo cooperativo. La variable metodológica obtiene mayor número de frecuencias en el posttest en los tres grupos. Los alumnos del grupo TIC y del cooperativo aumentan notablemente su acuerdo, mientras que el tradicional se estanca, esto es interesante ya que es una forma de motivación intrínseca que les ayudará a obtener mejores resultados.

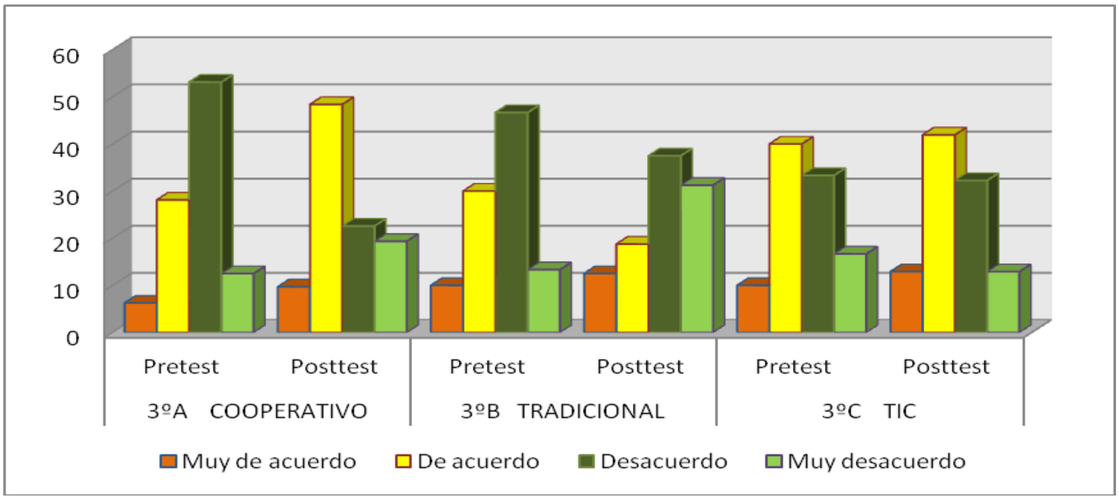
Gráfico 7.1.22.d) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 48 *Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un ejercicio empiezo a sentirme inseguro/a, desesperado/a, nervioso/a,….*



En el atasco crece la inseguridad del estudiante, los grupos de tercero proceden como sigue: Los tres grupos, cooperativo, tradicional y TIC, se decantan mayoritariamente por el acuerdo, el índice porcentual de los tres desciende de forma sensible en los posttest.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.22.e) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 49 *Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.*



Ante la sensación de fracaso al no resolver los ejercicios matemáticos, las respuestas de los estudiantes son dispersas pero interesantes. El grupo cooperativo en el inicio de la investigación se decanta por el desacuerdo (65%) y al final por el acuerdo (58%). El grupo tic al comienzo se reparte al 50% entre el acuerdo y el desacuerdo, al final opta por el acuerdo (54%). El tradicional se mantiene en el desacuerdo al principio y al final.

9ª Dimensión: Actitudes de interés, esfuerzo y constancia

Tabla 7.1.36.- Interés, esfuerzo y constancia en el aprendizaje matemático. Datos en porcentajes.

Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	22,15	24,72	12,42	20,54	22,13	22,12
De acuerdo	42,46	45,59	43,01	48,66	41,09	41,70
Desacuerdo	27,89	26,67	32,90	23,66	28,30	32,26
Muy desacuerdo	7,50	3,02	11,67	7,14	8,48	3,92

Este indicador recoge las respuestas 10, 11, 16, 21, 44, 51, 64, 65. Si en el anterior indicador se prestó atención al área de los sentimientos y sensaciones, en este centramos el análisis en las dimensiones racionales de la motivación, que son los aspectos que integran las dimensiones de valor y de expectativas que configuran el proceso motivacional. En concreto analizaremos a continuación y de forma separada cada una de las categorías que siguen: el tiempo absoluto y relativo que los estudiantes dedican al aprendizaje matemático, el interés que pone en la consecución del objetivo de

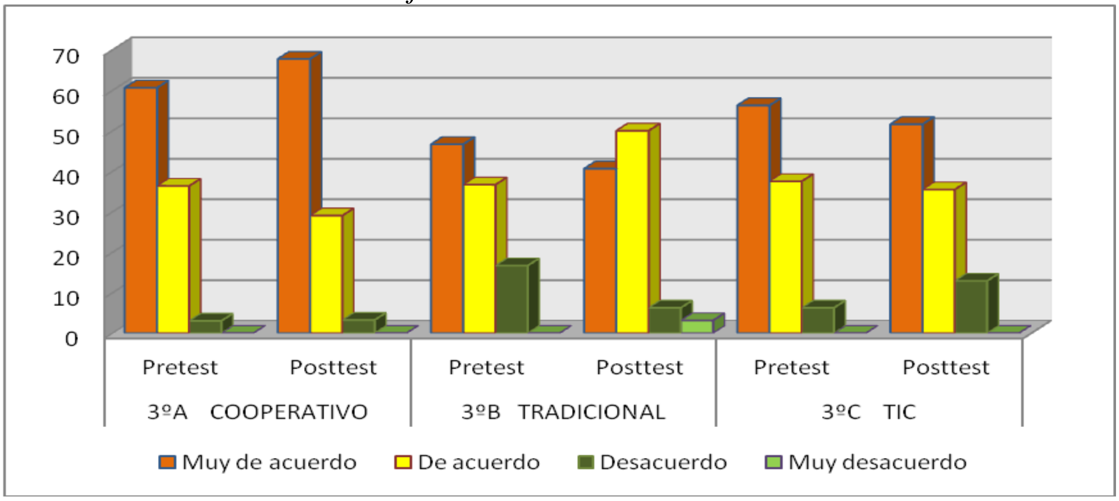
Universidad Pontificia de Salamanca

resolver los ejercicios de matemáticas. El interés exige no darse fácilmente por vencido. El esfuerzo es el trabajo dedicado al estudio y a los ejercicios. Es una tarea no compulsiva, sino más bien apunta a la constancia y perseverancia.

La urdimbre tejida por todas estas dimensiones o aspectos racionales nos dará una idea aproximada de cómo se comportan los estudiantes investigados en la tarea del aprendizaje y cómo valoran su conducta al respecto y la de quienes acompañan su trayectoria e intervienen de forma más continuada, como se espera que ejerzan su rol los padres de los estudiantes. Se podrá apreciar asimismo como aplica las normas de medida a su comportamiento y al de aquellos que comparten con él los escenarios de la vida cotidiana. Si analizamos en conjunto estas cuestiones, parece que la influencia más destacada no fueron las metodologías cuanto la satisfacción con su propio trabajo.

De los datos que presenta la tabla se infiere la presencia de una tendencia significativa que polariza un porcentaje de frecuencias de más del 60% entre los estudiantes de tercero de la ESO.

Gráfico 7.1.23.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 16 *Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.*

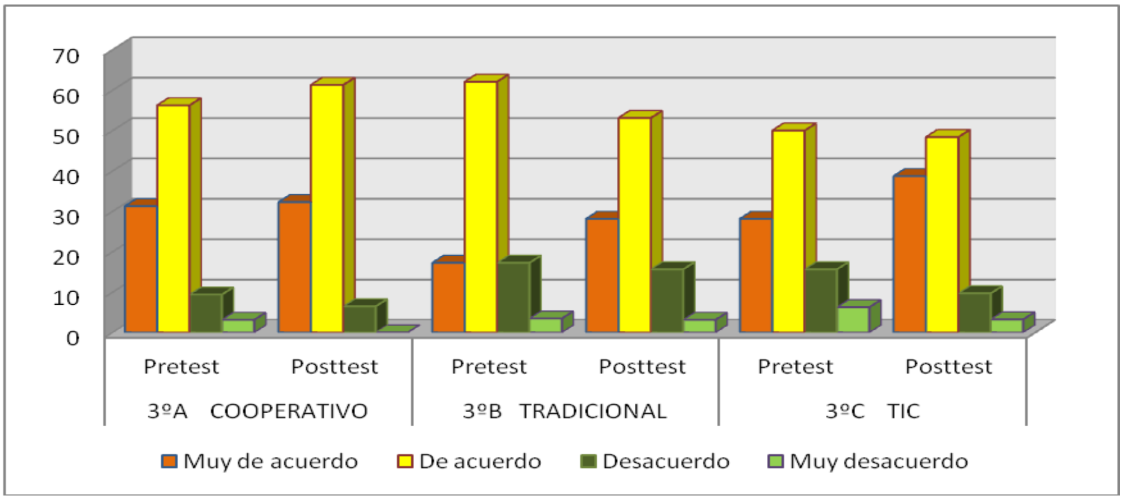


El tiempo es una categoría que impregna nuestro diario quehacer y nuestras actividades están permeadas por el tiempo. Los estudiantes de tercero asumen la tendencia básica, más tiempo dedicado a las matemáticas mejores resultados. El 90% de

los investigados muestran su acuerdo. Los porcentajes de comienzo y de final de la investigación presentan variaciones ligeras. Las posiciones de desacuerdo son irrelevantes.

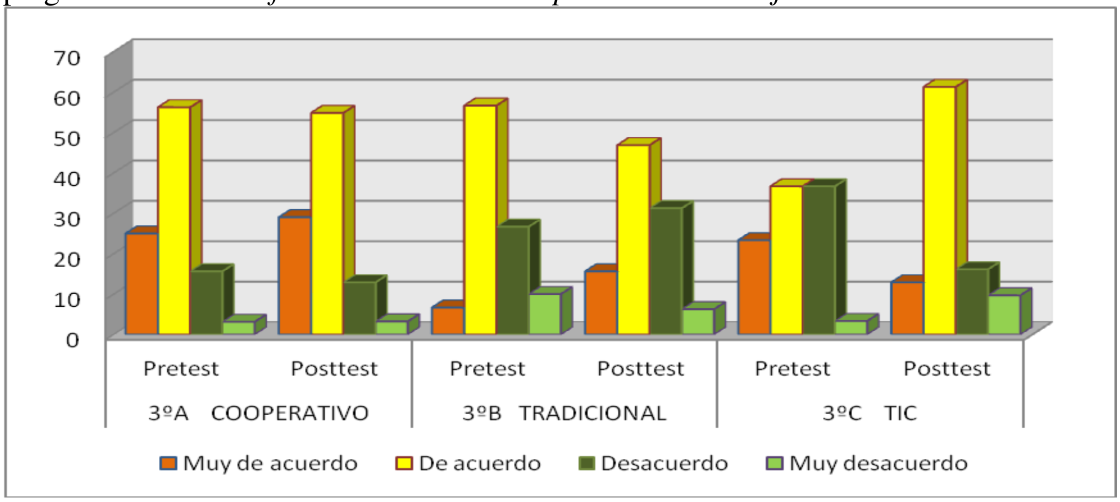
Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.1.23.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 21 *Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.*



Ante la recompensa del resultado por el esfuerzo realizado, los estudiantes de tercero están ampliamente conformes. Se adhieren a la tendencia, más esfuerzo en el estudio matemático resultados correctos y, en el apoyo a la tendencia básica, presentan índices porcentuales en torno al 80% en el comienzo de la investigación. Los datos del final son ligeramente más elevados en los tres grupo.

Gráfico 7.1.23.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 51 *Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.*

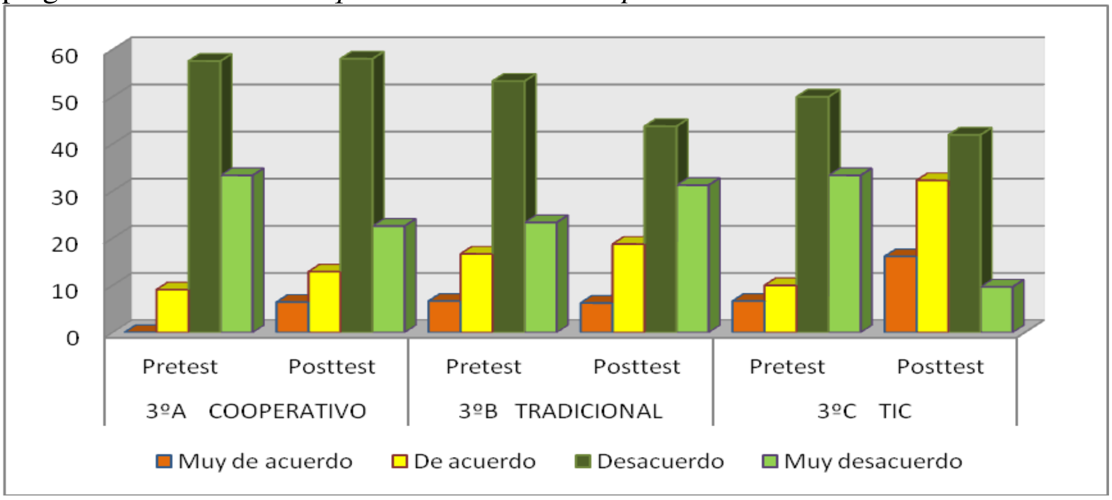


Se les pregunta por la constancia y perseverancia que desarrollan a la hora de resolver los ejercicios matemáticos, si lo intentan de nuevo al reparar que no han logrado la solución correcta o más bien se desaniman y lo dejan. De los resultados obtenidos de los estudiantes investigados de tercero muestran una mayoritaria conformidad (más del 60%) con la propuesta, manifiestan una constancia ejemplar.

Universidad Pontificia de Salamanca

Desde la perspectiva metodológica los resultados del final de la prueba obtienen unos índices porcentuales más elevados a excepción del grupo tradicional.

Gráfico 7.1.23.d) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 64 *A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas*.



Respecto de la propuesta que se le hizo en la pregunta, para los estudiantes la tendencia es diáfana: Se polarizan en el desacuerdo con la propuesta (entre el 51% y el 91%). La tendencia, desde la perspectiva del procedimiento, muestra un descenso significativo de frecuencias al final de la investigación, con relación al comienzo. En el grupo cooperativo decrece el 11% y en el grupo TIC del 83% al 51%. En el tradicional el descenso porcentual no es significativo: del 76% al 72%. De los datos ofrecidos, se infiere una conclusión extraña: es opinión generalizada que las matemáticas constituyen la materia académica más difícil, pero los estudiantes investigados no están de acuerdo en dedicarle más tiempo que a otras materias.

10ª Dimensión: Opiniones positivas y negativas sobre las matemáticas

Tabla 7.1.37.- Opiniones y estereotipos sobre las matemáticas. Datos en porcentajes.

Alternativas	3ºA – Cooperativo		3ºB – Tradicional		3ºC – TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	29,69	20,38	12,61	19,63	20,99	17,74
De acuerdo	37,97	45,56	41,16	33,04	44,60	40,32
Desacuerdo	27,75	28,41	36,98	34,75	26,16	32,26
Muy desacuerdo	4,59	5,65	9,25	12,58	8,25	9,68

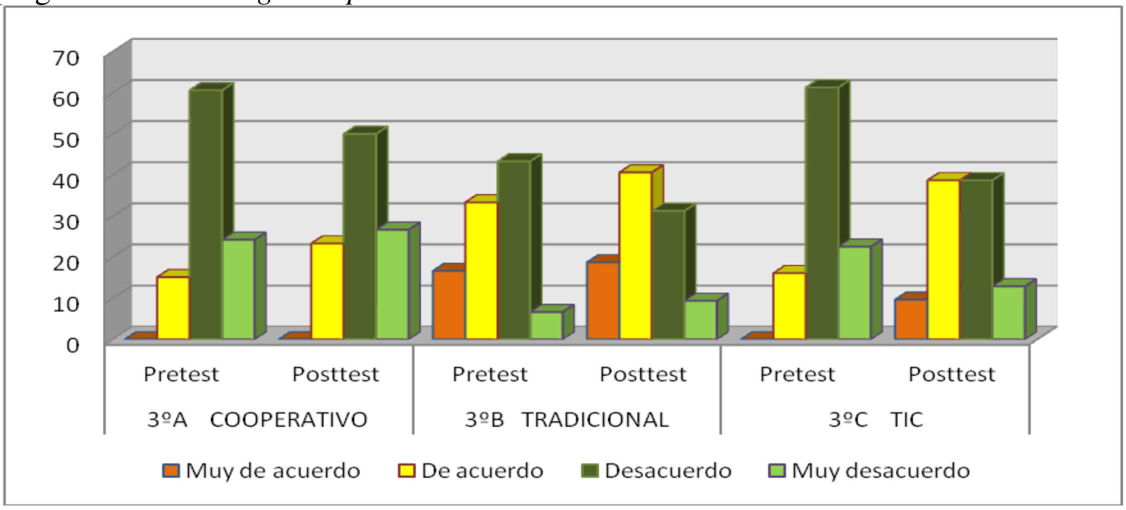
En este indicador recogemos las respuestas de las preguntas 35, 37, 39, 41. En este apartado se incluyen las respuestas recogidas de los alumnos a cuatro preguntas

Universidad Pontificia de Salamanca

sobre algunos de los estereotipos más comunes en torno a las matemáticas como, 'pasar' de las matemáticas, 'la gente que gusta de las matemáticas es un poco rara', 'las matemáticas son para cabezas inteligentes' o también la gente que 'no gastan el tiempo en resolver ejercicios'. Este tipo de prejuicios han constituido siempre un importante factor de control o influencia en las relaciones sociales aunque en este escenario educativo en que nos hallamos, no tendría por qué haber influido las metodologías o/y recursos empleados.

Del análisis de los datos tomados en conjunto respecto de tales opiniones y prejuicios se infieren algunos aspectos de interés: la dispersión de los resultados es la tónica presente en los estudiantes del curso tercero de la ESO, aunque los estudiantes se polarizan en porcentaje mayoritario en las rúbricas del desacuerdo. De la consideración de estos datos no se puede inferir cual sea su significado, que se manifestará con claridad en el siguiente análisis de las preguntas concretas.

Gráfico 7.1.24.a) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 35 *Mis amigos/as pasan de las matemáticas.*

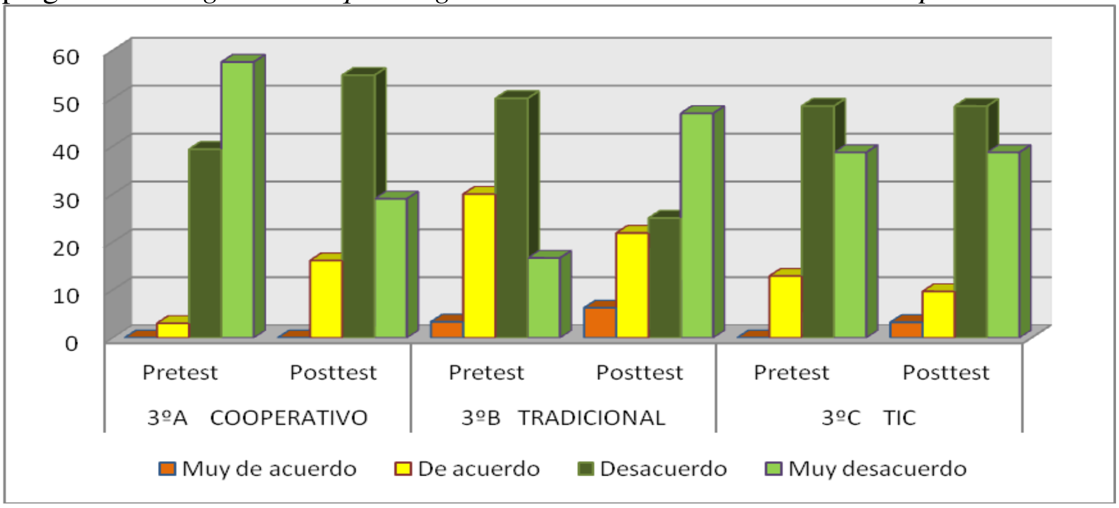


Se les cuestiona acerca de si sus amistades no están interesadas por las matemáticas y los alumnos, en su mayoría, están en desacuerdo con esta afirmación. No existen grandes diferencias entre los tres grupos, aunque la tendencia está más clara en el grupo cooperativo y TIC: ambos se polarizan en las rúbricas del desacuerdo en porcentajes que oscilan entre el 60% y el 85%. En el grupo tradicional, en términos porcentuales, en el comienzo de la investigación se reparten por igual (50%) entre el acuerdo y el desacuerdo y al final se decanta por el acuerdo en el 59%. La influencia de

Universidad Pontificia de Salamanca

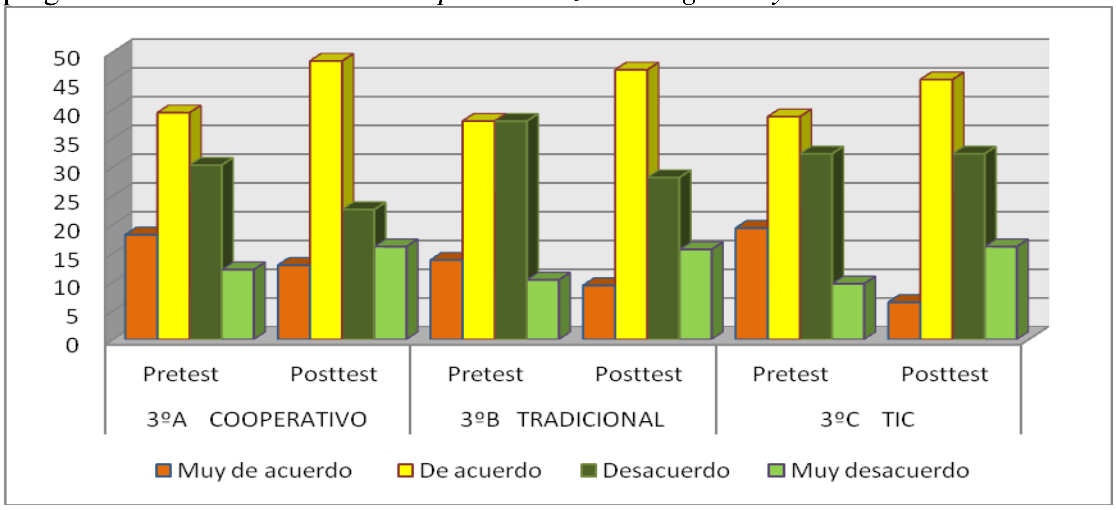
la metodología es significativa y del pretest al post-test tiende a bajar porcentualmente, a excepción del grupo tradicional ya mencionado.

Gráfico 7.1.24.b) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 37 *La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.*



La propuesta de que las gentes que *gustan de las matemáticas suelen ser algo raras* constituye un estereotipo que rechazan los alumnos de tercero con absoluta contundencia, entre 67% y el 97%, situándose definitivamente en la tendencia de que los interesados en las matemáticas no son gente extraña, son gente normal. Respecto de la evolución porcentual, del inicio al final de la investigación, baja el 13% el grupo cooperativo, se mantiene estable el TIC y sólo el grupo tradicional se reafirma con mayor firmeza (un 7% más), después de la experiencia, que la gente que se interesa por las matemáticas no es gente rara.

Gráfico 7.1.24.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero de la ESO a la pregunta 39 *Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.*



El estereotipo está muy extendido en ámbitos de gentes normales, pero también en círculos de personas culturalmente cultivadas y, hasta en escenarios de expertos en

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas, se usa un lenguaje trufado de términos que denuncian la idea de que las matemáticas exigen una inteligencia superior, de la que disponen unos pocos especialmente dotados. Esta elitista posición representa una idea muy generalizada, pero no deja de ser también un estereotipo a rechazar. Esta es mi posición que no tiene por qué coincidir con la de los estudiantes.

La propuesta hecha en el test, aunque formulada en términos suaves, pienso que podía ser entendida correctamente por los estudiantes investigados. Partimos de este supuesto, en el comienzo del análisis de los resultados obtenidos. Los estudiantes se identifican con la propuesta, de acuerdo o muy de acuerdo, en términos porcentuales, que superan el 50%. Por tanto el desacuerdo es, desde el punto de vista analítico que estamos haciendo, una posición minoritaria, pero significativa: en todos los grupos, tanto en el pretest como en el posttest se supera el 40%. Tal vez sea conveniente recordar ahora que los estudiantes están trabajando unos contenidos complicados de matemáticas y, en el curso próximo, tienen que elegir el itinerario de sus estudios, y por consiguiente, están bien dispuestos a considerar que las matemáticas son para gente inteligente, además de la carga de autoestima que lleva consigo la posición mayoritaria.

e) Diferencias significativas

A igual que hicimos con los grupos de segundo realizamos las pruebas de normalidad para los tres grupos de tercero. Visto que se verifican hacemos la prueba del Anova con el SPSS con una confianza del 95% ó se puede decir de significación de 0,05 y resulta que no hay diferencias significativas en los grupos

Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error(a)

Variable dependiente: DIF PS-PR

F	gl1	gl2	Significación
1,320	2	89	,272

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.
a Diseño: Intersección+grupo

Universidad Pontificia de Salamanca

7.1.4.- A modo de síntesis.

El presente resumen debe contener una referencia a los tres asuntos tratados con anterioridad: el contexto académico y familiar en que se integran los estudiantes de tercer curso de la ESO que participaron en la investigación. Otro asunto también de cierta consideración científico-técnica se refiere a la operación de agrupar las preguntas del test de motivación en unos cuantos capítulos de temática igual o semejante de su contenido. Con esta sistematización y ordenamiento hemos pretendido dar claridad al contenido del test de motivación. En la última cuestión se trata de resumir algo el análisis de contenido de los resultados obtenidos mediante el test de motivación utilizado.

1) Por lo que al contexto se refiere, destacan los aspectos siguientes: en cuanto la calificación de matemáticas del curso anterior, haciendo la media de cada grupo del curso de tercero fue de 7. Estos estudiantes de 3º tienen como asignatura preferida la biología y el deporte. Coinciden con los del segundo curso en el escaso aprecio de la lengua española. Por lo que se refiere a los hermanos destaca que solo el 25 % tienen dos o menos hermanos. El 75% de las familias de los estudiantes investigados pertenecen a familias numerosas. El 90% de los padres y madres tienen estudios universitarios de diplomatura o licenciatura. En cuanto a su situación laboral, los padres tenen trabajo y las madres son docentes el 26 % y el 31% son amas de casa.

2) El segundo asunto, se efiere a la organización de las sesenta y siete preguntas de que constaba el test, la mayoría importantes para el obtjetivo que me propuse, algunas de refuerzo y acompañamiento para mejor esclarecer el asunto concreto a investigar y algunas de contrapunto y hasta de relleno. A fin de dotar de unidad al texto y de organizar la diversdad de las cuestiones, me puse a la tarea de hacer grupos de preguntas que tuvieran un significado común y un objetivo claro a confirmar. Mediante sucesivas operaciones de ajustes y consultas a expertos, llegué a confeccionar una tabla de 10 cuestiones en torno a las cuales quedaban ajustadas las sesenta y siete preguntas del test. Es obvio que en esta operación hay preguntas que no encajaban en ninguna de las diez dimensiones, como se han denominado, y otras que podían encajar con varias. Esta organización de las preguntas, en mi parecer, fue positiva como base organizativa de muchas preguntas de que constaba el test y le dio una cierta sistemática a este apartado del capítulo en que exponemos los datos, los interpretamos y los analizamos en función de las variables motivación, procedimientos metodológicos y alternativas de respuesta. Sobre este último aspecto he de manifestar que en el cuestionario de los

Universidad Pontificia de Salamanca

estudiantes de 3º curso se le dejó, como estaba en el original, cuatro posibilidades – *muy de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo y muy en desacuerdo* -. Señalados estos asuntos que, por su pertenencia a los procedimientos, pueden ser relevantes en la investigación científica y cumplido el trámite de advertirlos para el conocimiento oportuno paso a señalar, de forma escueta los aspectos más importantes ya mostrados y analizados, con el apoyo de tablas estadísticas, gráficos y textos escritos intercalados.

El tercer asunto se refiere a los resultados y enfatizaré el significado que, en mi parecer constituye la tendencia mayoritaria: 1º) Hay un convencimiento firme y muy arraigado sobre la necesidad y utilidad de las matemáticas para la vida social actual, para el éxito profesional, económico y social, para hacer frente a los problemas que la vida diaria. Este es el núcleo motivador más sólido, responde a una motivación interna y recibe el asentimiento de más de 80%. 2º) Se produce una convergencia de resultados sobre las posibilidades que ofrecen las matemáticas para el intercambio de contenidos y procedimientos con otras materias del currículum, que podría producir un enriquecimiento mutuo como su utilidad para los variados avatares de la vida diaria. Este es un nucleo interesante de motivación. 3º) El segundo asunto se refiere a las valoraciones que recibieron los estudiantes, sobre el estudio y los resultados obtenidos en las matemáticas, de parte de los círculos a que pertenecen: los padres, los amigos y los compañeros. Tienen una arraigada creencia en el apoyo incondicional de sus padres y de su círculo de amigos. Esta crencia unuda al convencimiento que poseen sobre la utlidad de las matemáticas, hacen un nucleo motivador de enorme trascendencia. 4º) Con estos ha de relacionarse el nucleo de motivaciones que se generan en torno al *profesor como agente de motivación*. Se recogieron variados aspectos relacionados la tarea motivacional que ejerce el profesor en cuanto tal y las percepciones que los alumnos tienen de ese rol, sobre las actitudes de seguimiento que hace el profesor sobre la comprensión matemática y el rendimiento que manifiesta el alumno, la disponibilidad del profesor para solventar dudas y ayudar a los estudiantes a superar las dificultades, el concepto que el estudiante percibe que tiene de él su profesor de matemáticas y la positiva valoración hecha por los estudiantes sobre sus sus relaciones con el profesor. Este es otro núcleo de intensa capacidad de motivación en el aprendizaje de las matemáticas. 5º) En el asunto de los procedimientos metodológicos y los recursos se indagó en la valoración de nuevas metodologías y nuevos recursos. Se valoraron el trabajo en grupo, la resolución de ejercicios, las explicaciones del profesor y los ejercicios en grupo, la participación en clase. Con este elemento motivador se vinculan

Universidad Pontificia de Salamanca

los recursos de motivación en las clases de matemáticas, atendiendo con preferencia a los procedimientos a que recurrió el profesor, dentro de la dinámica de la clase, para animar el aprendizaje de las matemáticas, mediante variados medios, ejemplos y ejercicios que se relacionen con la vida diaria de los estudiantes, evitar la pesadez, el aburrimiento y el deseo de que las clases de matemáticas sean más atractivas y participativas. Los estudiantes han valorado positivamente los esfuerzos del profesor en este sentido.

En mi parecer, los estudiantes investigados están muy motivados para el estudio de las matemáticas. Disponen de recursos internos y externos de motivación sólidos, que alcanzan a niveles profundos de convencimiento. No es solo producto de la socialización escolar, esta tendencia se percibe ya en el pretest, lo que evidencia un ambiente contextual favorable y dispuesto a acompañarlos en el difícil camino a recorrer, en el estudio de las matemáticas.

Universidad Pontificia de Salamanca

7.2.- RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTO A LOS ESTUDIANTES DEL CURSO SEGUNDO DE LA ESO

El test previo de conocimientos y el test posterior que se realizó a los alumnos de segundo ESO es el mismo. Inicialmente me reuní con la profesora que impartía clases en segundo ESO y les expliqué la experiencia además de darle un dosier con los materiales y las direcciones de Internet con videos explicativos y aplicaciones interactivas. El test de conocimientos consta de 20 preguntas, de las cuales siete son de ecuaciones de primer grado: cuatro ejercicios y tres problemas; ocho preguntas sobre ecuaciones de segundo grado: siete ejercicios y un problema; y cinco preguntas de sistemas: tres ejercicios y dos problemas. El formato del test se puede ver en el *anexo2* de este capítulo. Los test previo y posterior se realizaron durante las horas de clases. Como hemos visto en el currículo las *ecuaciones de primer grado* se han visto en primero ESO, las *ecuaciones de segundo grado* y *sistemas* se estudian en segundo ESO aunque sin mucha complejidad o bien en tercero. En el colegio en que se llevó a cabo la experiencia investigadora, en segundo curso de la ESO se explican las ecuaciones de segundo grado y los sistemas, como ya se proponen en los libros de texto[204]. En el curso tercero de ESO se vuelven a repasar todos los contenidos, incrementando el nivel de dificultad. Los resultados obtenidos evidencian que los contenidos han resultado más difíciles, y cuanto realmente se asimila de un curso a otro, lo cual a los profesores más noveles les produce cierta perplejidad. Presento a continuación y por este orden las ecuaciones de primer grado, los problemas. Además añado un ítem sobre las igualdades notables. Por último se hace un análisis de los errores más comunes. Aunque el test constaba de parte de ecuaciones de segundo grado y sistemas la profesora nos comenta que sólo va a hacer la experiencia en ecuaciones de primer grado por falta de tiempo.

[204] Texto de 2º: Vizmanos, J. R.; Mansilla, S.; Fernando Alciaide, F. y Isabel de los Santos, I., (2012). *Pitágoras Matemáticas*. Madrid: S.M. (Isbn 978-84-675-4824-2).
Texto de 3º ESO: Vizmanos, J. R.; Anzola, M.; Bellón, M. y Juan Carlos Hervás, J. C., (2012). *Pitágoras Matemáticas*. Madrid: S. M. (Isbn 978-84-675-3991-2).

Universidad Pontificia de Salamanca

7.2.1.- Ecuaciones de primer grado.

<u>Pregunta 1ª:</u>

$$3x - 3 = -9$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron las máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Si al final, por despiste, han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron una puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son los debidos al mal uso de las reglas de despeje. Obtuvieron una puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Tabla 7.2.1.a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 1 de los alumnos de segundo ESO.

	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	85,71	85,30	96,87	96,77	72,73	85,19
Err. Result.(0,75)	8,57	2,94	3,13	3,23	9,09	14,81
Err. Despeja (0)	2,86	5,88	0,00	0,00	9,09	0,00
No contesta (0)	2,86	5,88	0,00	0,00	9,09	0,00

Es una pregunta sencilla, como en mi parecer corresponde a la primera cuestión que se les presenta en el cuestionario de evaluación para animar a los evaluados. El porcentaje de respuestas correctas fue alto en todos los grupos, sobresaliendo el tradicional, que alcanza cotas de acierto de más del 96 %, lo que evidencia la facilidad de la cuestión planteada. Es destacable el avance de aciertos que se produce en el grupo segundo TIC del pretest al posttest de la investigación.

<u>Pregunta 2ª:</u>

$$2 \cdot (2x - 5) - 3 \cdot (x - 5) = 0$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Si al final, por despiste, han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, se obtuvo una puntuación de 0,75.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Errores de despejar la incógnita:* Son los debidos al mal uso de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de 0,25 por haber hecho bien la distributiva de los paréntesis.
- *Errores paréntesis:* No supieron hacer la distributiva. De puntuación cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Tabla 7.2.1.b) Respuestas en porcentajes a la pregunta 2 de los alumnos de segundo ESO.

	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	60,01	94,12	84,36	90,31	60,61	96,30
Err. Result.(0,75)	5,71	2,94	6,25	0,00	3,03	3,70
Err. Despej.(0,25)	17,14	0,00	3,13	3,23	15,15	0,00
Err. Paréntesis(0)	11,43	0,00	3,13	3,23	15,15	0,00
No contesta (0)	5,71	2,94	3,13	3,23	6,06	0,00

Los estudiantes de los grupos TIC no han cometido en el posttest ningún error al aplicar las reglas para despejar la incógnita, ni tampoco errores al realizar la propiedad distributiva en la operación de los paréntesis, aunque uno de los paréntesis tenga un signo menos antes. El progreso desde el pretest hasta el posttest en los grupos que aplicaban las TICs como procedimiento metodológico de apoyo es espectacular: del 60% inicial alcanzan al final de la investigación el 94% y el 96%.

Pregunta 3ª:

$$\frac{4x}{3} - 6 = \frac{2x}{3} - 5$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Si al final, por despiste, han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* son debidos al mal uso de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 7.2.1.c) Respuestas en porcentajes a la pregunta 3 de los alumno de segundo ESO.

	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	77,15	91,18	68,74	80,64	39,40	96,30
Err. Result.(0,75)	5,71	0,00	0,00	9,68	6,06	0,00
Err. Despeja (0)	17,14	5,88	21,88	3,23	27,27	3,70
No contesta (0)	0,00	2,94	9,38	6,45	27,27	0,00

Hay una mejora importante en cuanto a evitar los errores por el uso de las reglas adecuadas para despejar la incógnita. También mejora el porcentaje de estudiantes que deja sin contestar la pregunta. Los grupos que consiguen la mejor puntuación son los que usaron las TICs como recurso de apoyo metodológico, si destaca el nivel de corrección alcanzado por el grupo segundo C, que coloca su nivel de corrección en el 96%.

Pregunta 4ª:

$$\frac{3x}{5} - 3 \cdot \frac{x-1}{4} = 1 - \frac{x+5}{10}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Si al final, por despiste, han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son debidos al mal uso de las reglas de despeje. Obtuvieron una puntuación de 0,5 puesto que resolvieron bien las fracciones equivalentes y distributivas.
- *Errores fracciones:* No supieron hacer la distributiva delante de las fracciones, o no hicieron correctamente las fracciones equivalentes para poder eliminar todos los denominadores. Si cometieron alguno de estos errores obtuvieron un cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 7.2.1.d) Respuestas en porcentajes a la pregunta 4 de los alumnos de segundo ESO.

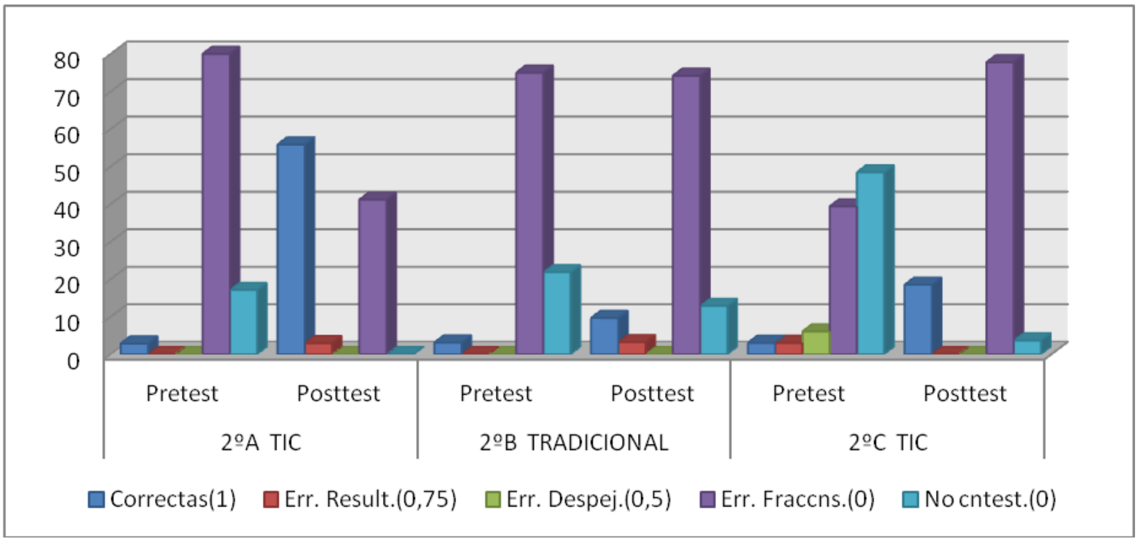
	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	2,86	55,88	3,12	9,68	3,04	18,52
Err. Result.(0,75)	0,00	2,94	0,00	3,23	3,03	0,00
Err. Despej. (0,5)	0,00	0,00	0,00	0,00	6,06	0,00
Err. Fraccns. (0)	80,00	41,18	75,00	74,19	39,39	77,78
No contesta (0)	17,14	0,00	21,88	12,90	48,48	3,70

La pregunta 4ª, cuyos resultados se muestran en la tabla precedente, entraña gran dificultad, por el uso de las fracciones con *diferente denominador*, el *menos* delante de las fracciones y el *factor 3* que multiplica a la fracción. Los porcentajes de respuestas correctas son bajos debido a las dificultades que tienen los alumnos con la operatoria. Mejoran los porcentajes de personas que dejan la pregunta sin contestar. El grupo TIC de segundo A alcanza un estimable 55,88 % de respuestas correctas al final de la investigación, máxime teniendo en cuenta que en el comienzo partía de un 2,86 de aciertos. Disminuye A la mitad el porcentaje de errores. También mejora en este aspecto el segundo C, aunque no tanto en el volumen de ejercicios correctos, cuanto en no guarecerse en el *No contesta,* que avanza desde el 48% al 3,7%.

Se presenta a continuación un gráfico que muestra con mucha claridad la importancia del procedimiento en los en los resultados obtenidos por los grupos que fueron reforzados tecnológicamente, destacándose el grupo TIC de segundo A como ya se constató en las cuestiones precedentes, aunque en esta cuestión los aciertos del segundo C son estimables en las respuestas correctas y en la ausencia de errores en el despeje y en los resultados. Esta pregunta es de las del test con peores resultados ha. A continuación mostramos gráficamente los resultados de los alumnos en segundo ESO en esta pregunta.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.2.a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 4 de los alumnos de segundo ESO



7.2.2.- Problemas

<u>Pregunta 5ª:</u> Carlos tiene el triple de años que su hijo Antonio. Fernando, el hijo pequeño, tiene la mitad de años que Antonio, y entre los tres suman 63 años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

Los resultados obtenidos los he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctos:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Cuando al final, por despiste, han hecho un cálculo erróneo o bien han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son los debidos al uso incorrecto de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de 0,5 por haber hecho bien el planteamiento del problema.
- *Errores de planteamiento:* No supieron identificar la incógnita o bien la ecuación no la han encontrado o no es correcta. Con este error obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Universidad Pontificia de Salamanca

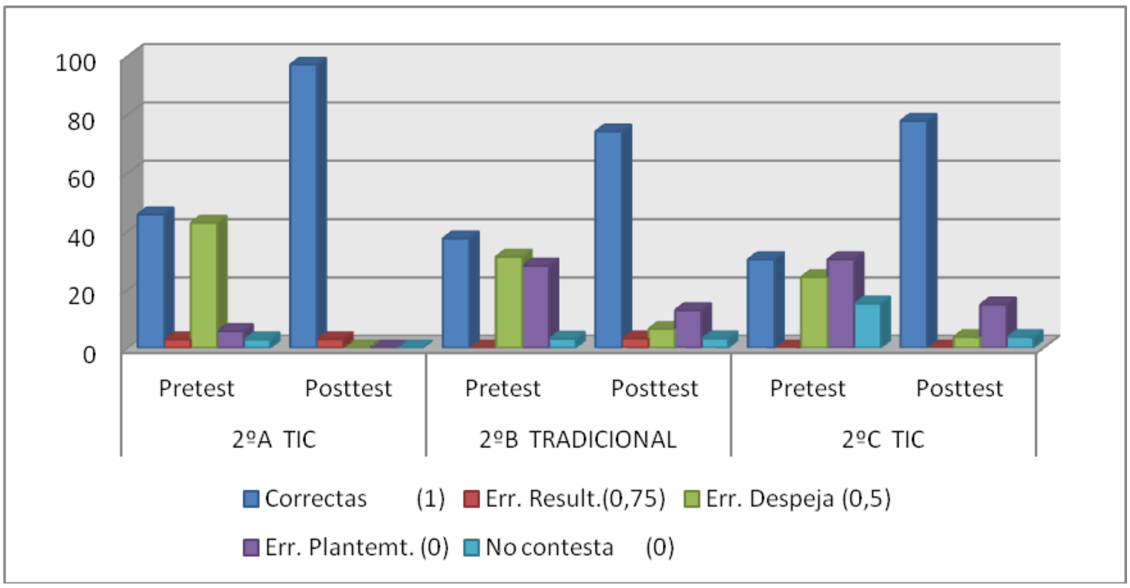
Tabla 7.2.2a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 5ª de los alumnos de segundo ESO.

	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	45,71	97,06	37,49	74,19	30,31	77,79
Err. Result.(0,75)	2,86	2,94	0,00	3,23	0,00	0,00
Err. Despeja (0,5)	42,86	0,00	31,25	6,45	24,24	3,70
Err. Plantemt. (0)	5,71	0,00	28,13	12,90	30,30	14,81
No contesta (0)	2,86	0,00	3,13	3,23	15,15	3,70

Hay una mejora generalizada, en los tres grupos, en relación con los errores de planteamiento y con los errores en la aplicación de las reglas de despeje. Sobresale en este aspecto el grupo TIC de segundo A, que solo ha tenido un 2,94% de errores y estos no son de planteamiento ni de despeje, se observan solo en los resultados. Destaca asimismo el crecimiento porcentual y en números absolutos de las respuestas correctas, en los grupos TIC: en segundo A ha habido un aumento de 51,35 % y en segundo C el aumento es de 47,48 %. En el grupo tradicional los aciertos han aumentado, aunque de forma más moderada 36,7 %. Teniendo en cuenta tanto los errores corregidos como los aciertos conseguidos se afirma la importancia manifiesta del procedimiento metodológico, sin infravalorar la importancia del profesor que se prepara su clase y logra el interés del estudiante por la enseñanza de las matemáticas.

Mostramos en el gráfico que sigue el aumento de respuestas correctas y disminución de errores.

Gráfico 7.2.b) Respuestas en porcentajes del ejercicio 5 de los alumnos de segundo ESO



Universidad Pontificia de Salamanca

Pregunta 6ª: En una bolsa hay bolas azules, blancas y rojas. El número de bolas rojas es igual al de bolas blancas más 14, y hay 6 bolas azules menos que blancas. Si en total hay 98 bolas, halla cuántas bolas hay de cada color.

Los resultados obtenidos los he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron las máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Si al final, por despiste, han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron una puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son los debidos al mal uso de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de 0,5 por haber hecho bien el planteamiento del problema.
- *Errores de planteamiento:* No han sabido identificar la incógnita o la ecuación no la han encontrado o no es correcta. Obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Tabla 7.2.2.b) Respuestas en porcentajes a la pregunta 6ª de los alumnos de segundo ESO.

	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	62,86	97,06	40,62	67,74	36,37	70,38
Err. Result.(0,75)	0,00	0,00	6,25	6,45	3,03	3,70
Err. Despeja (0,5)	5,71	0,00	0,00	0,00	12,12	7,41
Err. Plantemt. (0)	14,29	0,00	46,88	9,68	36,36	14,81
No contesta (0)	17,14	2,94	6,25	16,13	12,12	3,70

En este problema destaca de manera extraordinaria el 97 % de respuestas correctas y eliminación de errores por parte del grupo TIC de segundo A. También es importante el avance que se ha producido en el otro grupo TIC de segundo C, si tenemos en cuenta los aciertos logrados y los errores evitados, sobre todo disminuyeron los porcentajes de errores de planteamiento y los debidos al mal uso de las reglas de despejar. Estimo pertinente, una vez más, destacar la importancia de los métodos tecnológicos de apoyo seguidos en la clase de matemática, teniendo en cuenta los resultados presentados y que se trata de grupos muy homogéneos, como hemos demostrado en el análisis del contexto, realizado al comienzo del capítulo cinco.

Universidad Pontificia de Salamanca

Pregunta 7ª: Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Nerea si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él, más la sexta parte de su precio, suman en total 20 euros.

Los resultados obtenidos los he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Si al final, por despiste, han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son los debidos al mal uso de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de 0,5 por haber hecho bien el planteamiento del problema.
- *Errores de planteamiento:* No ha sabido identificar la incógnita o la ecuación no la han encontrado o no es correcta. Con este error, obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Tabla 7.2.2.c) Respuestas en porcentajes a la pregunta 7 de los alumnos de segundo ESO

	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	40,00	67,65	24,99	48,39	18,19	59,26
Err. Result.(0,75)	2,86	8,82	0,00	0,00	3,03	0,00
Err. Despeja (0,5)	25,71	5,88	40,63	9,68	27,27	18,52
Err. Plantemt. (0)	8,57	2,94	21,88	12,90	9,09	7,41
No contesta (0)	22,86	14,71	12,50	29,03	42,42	14,81

Todos los grupos mejoraron bastante: disminuyeron los errores en la aplicación de las reglas para despejar, los errores de planteamiento y también el porcentaje de alumnos que no han contestado a la pregunta. Pero son interesantes los resultados correctos obtenidos por los grupos TIC. Si sumamos los resultados correctos y los que cayeron en errores de los resultados, obtendríamos un porcentaje del 76% en el TIC de segundo A y del 59,26 % en segundo C, que es una porcentaje importante y, si cabe, es mayor en el grupo TIC de segundo C, por cuanto el aumento desde el inicio hasta el final de la investigación alcanzó el 41,07.

Universidad Pontificia de Salamanca

7.2.3.- Igualdades notables

<u>Pregunta 8ª:</u>

$$(4-2x)^2-(2x+1)^2=-5x^2$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

No contesta: Si no ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se puede calificar. La puntuación fue de cero.

- *Error igualdades notables:* Operó mal las igualdades notables. La puntuación fue de cero.
- *Error operaciones:* Aunque ha hecho bien las igualdades notables, se ha equivocado al operar y no llega a la ecuación correcta de segundo grado, para continuar el ejercicio. La puntuación fue de 0,25.
- *Error tipo 3:* Llegó a la ecuación de segundo grado pero se equivocó o al sustituir o al calcular y no llegó a ningún resultado correcto. La puntuación fue de 0,5.
- *Error tipo 4:* Se equivocó en una solución, por errores de cálculo o de signo. Todo el procedimiento anteriormente descrito estaba bien. La calificación fue de 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, los estudiantes obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.2.3.a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 13 de los alumnos de segundo ESO.

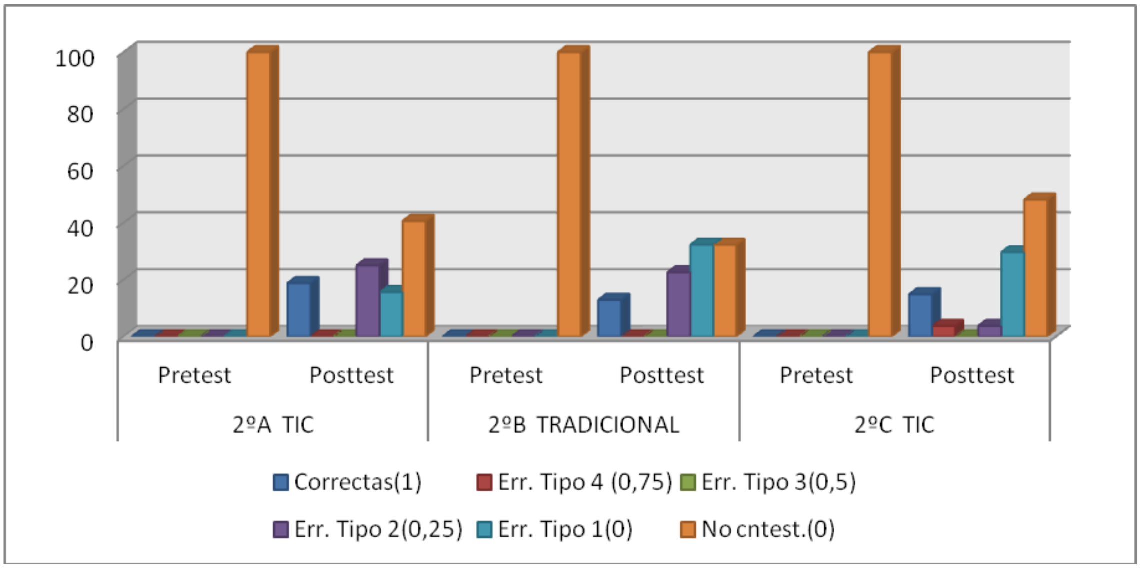
	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	0,00	18,74	0,00	12,90	0,00	14,82
Err. Solucn.(0,75)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,70
Err. Ec.2grd.(0,5)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Err. Operar (0,25)	0,00	25,00	0,00	22,58	0,00	3,70
Err. Ig Notabl.(0)	0,00	15,63	0,00	32,26	0,00	29,63
No contesta (0)	100,00	40,63	100,00	32,26	100,00	48,15

Aunque los resultados dejan mucho que desear, es claro que se han conseguido relativamente buenos resultados, en cuanto que es una materia que no habían estudiado ni en el curso anterior ni al comienzo de segundo. Sin embargo en los grupos TIC ha habido unos leves porcentajes de respuestas correctas.

Universidad Pontificia de Salamanca

Mostramos gráficamente los resultados obtenidos en la problemática cuestión de igualdades notables.

Gráfico 7.2.c) Respuestas en porcentajes a la pregunta 13 de los alumnos de segundo ESO



7.2.4.- Errores más comunes

Las dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas son y fueron objeto de investigación en Educación Matemática, como un paso previo a buscar soluciones a las dificultades en el aprendizaje. Es especialmente interesante al profesor establecer modos de clasificar los errores y dificultades, conocer el origen de esos errores y dificultades para, de esta manera, anticiparse en la medida de lo posible y aproximarse a su remedio. Socas (2011) destaca tres etapas en este estudio; en la primera etapa la investigación se caracterizó por identificar y analizar los errores más comunes y buscar que contenidos llevaban a esos errores. En la segunda etapa se asume el error no como un opción a lo bien aprendido sino como una etapa, un escalón que lleva al aprendizaje. En la tercera y última parte se abordan globalmente las dificultades y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria.

a) Origen de los errores. Durante el análisis de los resultados del *Cuestionario de conocimientos* hemos establecido una diferenciación entre errores por despiste, por falta de conocimiento y aquellos otros que son fruto de un esquema cognitivo erróneo. Desde el marco teórico descrito por Socas (1997), pueden considerarse tres tipos de

Universidad Pontificia de Salamanca

errores en relación con sus diferentes orígenes: 1) obstáculos, considerando así los conocimientos adquiridos que han funcionado en ciertos contextos, pero cuando el alumno extiende esas nociones a otros contextos originan respuestas inadecuadas. 2) Los errores pueden tener también otras procedencias como la carencia de significado, que para los alumnos puede tener el contenido de la enseñanza-aprendizaje, que obstaculizará su asimilación. 3) También pueden hacer acto de presencia actitudes afectivas y emocionales, falta de concentración, bloqueos u olvidos. En todo caso, son requeridas además actitudes motivadas de atención e interés, con que se disponga el alumno al aprendizaje, sin lo cual es prácticamente inútil todo esfuerzo del profesor. Expondré brevemente algunas consideraciones sobre las dificultades y errores que los alumnos tienen en el aprendizaje algebraico, que después intentaremos particularizar con nuestros ejemplos concretos.

b) Marco aritmético de referencia. Cuando el estudiante comienza a estudiar las primeras nociones del álgebra transfiere las nociones y enfoques, usados en la aritmética al álgebra. Aunque comparten signos y símbolos, el álgebra no puede considerarse como una generalización de la aritmética. El álgebra tiene sus propias reglas no deducibles de la aritmética. Errores comunes que aparecen con frecuencia, son la sobre-generalización de la propiedad distributiva de la suma a la operación del producto p.e.

$a \cdot (b \cdot c) = ab + ac$, las simplificaciones erróneas p.e. $\frac{2 + x}{2} = 1 + x$, el mal uso o no uso de los paréntesis, etc.

La transición desde una representación informal a una representación formal resulta difícil para algunos estudiantes, que se muestra a la hora de abordar y, sobre todo, al plantear los problemas. Una de las nociones más difíciles de asimilar por los alumnos es la equivalencia de ecuaciones. Dada una ecuación podemos encontrar una ecuación equivalente sumando, restando, multiplicando y/o dividiendo un número o expresión distinta de cero a las expresiones a ambos lados de la igualdad. Según Kieran et al. (1990) el símbolo del igual (=) es usado más para anunciar un resultado que para expresar una simetría o expresiones equivalentes. Ella señala que los estudiantes lo ven como una "señal de hacer algo", como un separador de la secuencia de operaciones y el resultado. La transposición de términos consiste en realizar la misma operación en ambos lados de la ecuación. A los alumnos les cuesta ver la equivalencia de las ecuaciones, es decir, dos ecuaciones son equivalentes si y solo si tienen las mismas

Universidad Pontificia de Salamanca

soluciones. Una ecuación equivalente se consigue sumando o/y restando la misma cantidad a ambos lados de la igualdad, multiplicando o/y dividiendo por la misma cantidad ambos lados de la igualdad. Estas reglas que están en el origen y en el procedimiento de la resolución de las ecuaciones de primer grado no son fáciles de asimilar por los alumnos, cometiendo errores de procedimiento de despejar, por no asimilar el contenido más profundo de este procedimiento. Por esta misma razón no simplifican una ecuación de segundo grado todo lo posible pudiendo acceder a cálculos más sencillos.

c) Lenguaje algebraico. Las dificultades del alumno con el lenguaje algebraico se manifiestan en ejercicios y problemas en cuanto toma contacto con el álgebra en primero de la ESO. Le cuesta entender qué es una fórmula o una ecuación. También le resulta difícil asimilar los procedimientos algebraicos de operaciones, la resolución de ecuaciones o traducir enunciados y problemas a un lenguaje algebraico. En los problemas el alumno, antes de enfrentarse a traducir del lenguaje normal al lenguaje algebraico, prefiere confiar en los métodos intuitivos de tanteo y de cálculo, en vez de formalizar el procedimiento, "algebreizar el enunciado". Tampoco suele ser riguroso con la escritura p.e. en una misma ecuación escribe varios "=". Los profesores al comienzo se afanan en explicar y puntuar el procedimiento y no evaluar los resultados, si no hay un procedimiento adecuado. Stacey, K, & Chick, H., (2004) exponen que la razón principal de las dificultades de un estudiante al usar los métodos algebraicos para resolver problemas es que no entiende la lógica del problema. Los estudiantes tienden a calcular en primer lugar, a conseguir el resultado, lo que es un comportamiento coherente con su aprendizaje aritmético. "Sin embargo los problemas algebraicos requieren su análisis y la transformación de los datos y relaciones en una ecuación" Norton&Irvin (2007).

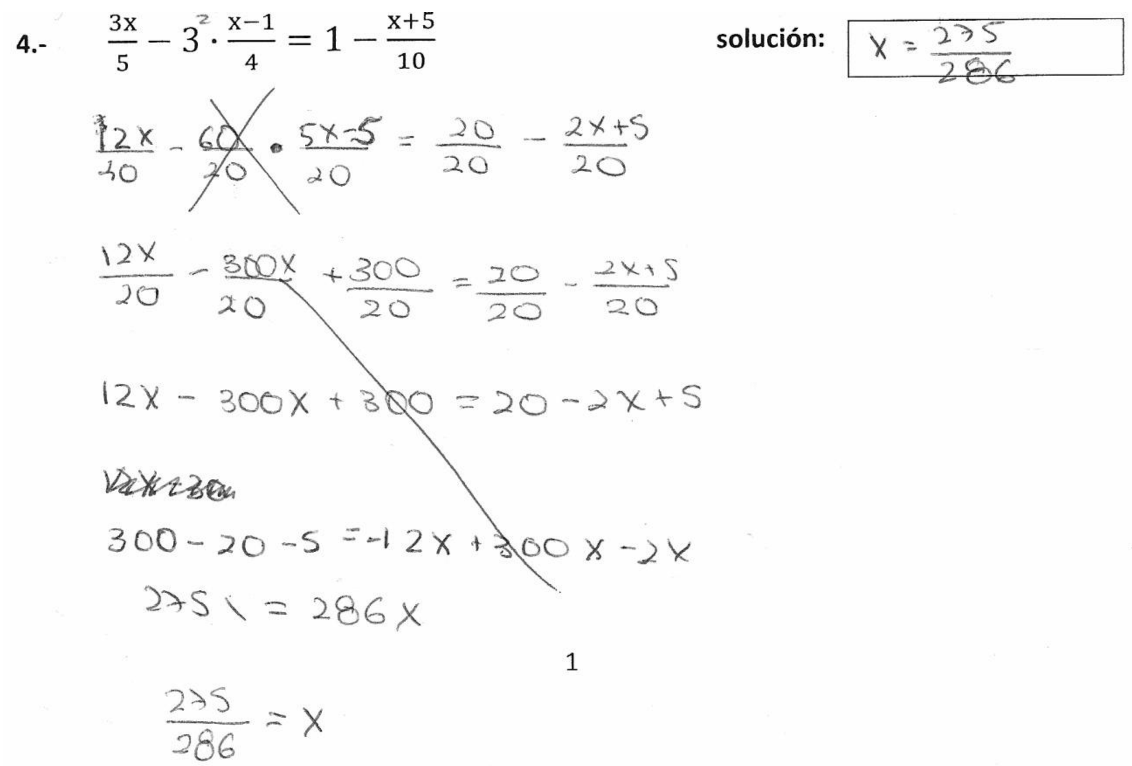
d) Variables. En un experimento de enseñanza, diseñado específicamente para favorecer la adquisición de la noción de letra como número generalizado, Booth encontró una fuerte resistencia por parte de los alumnos a asimilar esta parte del álgebra. El autor sugiere que "la obtención de este nivel de conceptualización está relacionada con el desarrollo de estructuras cognitivas de orden más alto"(Booth 1984, p.88).

Universidad Pontificia de Salamanca

Podemos hablar de otras dificultades con la que se enfrentan los alumnos, cuando tratan con los objetos algebraicos. Tienen que reconocer el objeto y saber el proceso que implica. “La dualidad proceso-objeto se refiere a la idea de que un concepto matemático puede ser considerado como proceso y objeto al mismo tiempo. A menudo los alumnos experimentan primero el proceso; en concepto de que ellos pueden desarrollar el objeto, lo cual es un prerrequisito para el progreso conceptual. Este desarrollo es llamado reificación (Sfard, 1991) o encapsulamiento (Dubinsky, 1991) y es el resultado de una comprensión “proceptual” (como concepto y como proceso) (Tall&Thomas, 1991). Estas nociones teóricas sobre matemáticas en general, también pueden ser aplicadas específicamente al aprendizaje del algebra” (Drijvers, 2003). En la actualidad esta dualidad va a recibir el nombre de estructura algebraica y son frecuentes los estudios que exponen las dificultades que tienen los estudiantes al utilizar estructuras algebraicas como las igualdades notables, etc.

A continuación mostramos algunos ejemplos de los errores más comunes que suelen cometer los estudiantes cometidos por los sujetos de nuestra investigación.

Gráfico 7.2.d) Errores cometidos en la pregunta 4 del test de conocimientos


4.- $\frac{3x}{5} - 3^2 \cdot \frac{x-1}{4} = 1 - \frac{x+5}{10}$ **solución:** $\boxed{x = \frac{275}{286}}$

$\frac{12x}{40} - \frac{60}{20} \cdot \frac{5x-5}{20} = \frac{20}{20} - \frac{2x+5}{20}$

$\frac{12x}{20} - \frac{300x}{20} + \frac{300}{20} = \frac{20}{20} - \frac{2x+5}{20}$

$12x - 300x + 300 = 20 - 2x + 5$

$300 - 20 - 5 = -12x + 300x - 2x$

$275 = 286x$

1

$\frac{275}{286} = x$

Universidad Pontificia de Salamanca

Este es un error que se repite bastante tanto en el pretest y como en el posttest. Indica que no han entendido las reglas de resolución de ecuaciones de primer grado. Las reglas de resolución de una ecuación dicen: *Se puede sumar o restar un mismo número o término a los dos lados de la igualdad y conseguimos una ecuación equivalente. Podemos multiplicar o dividir los dos lados de la ecuación por un mismo número distinto de cero y conseguimos una ecuación equivalente*. El error que cometen cuando proceden a sustituir el 3 por, $\frac{60}{20}$ es que cuando multiplican toda la ecuación por 20 para quitarse los denominadores, quitan el 20 del 60 y quitan el 20 de la fracción que multiplica lo que es erróneo. En ANEXOS, del capítulo 6, en el Anexo III, se adjuntan las soluciones del Cuestionario de Conocimientos.

En el ejemplo precedente también comete errores al no aplicar la propiedad distributiva en el segundo paréntesis, el menos de delante de la fracción cambia el signo de todo el numerador.

Gráfico 7.2.e) Errores cometidos en los problemas 5 y 6 por los alumnos en el test de conocimientos.

5.- Carlos tiene el triple de años que su hijo Antonio. Fernando, el hijo pequeño, tiene la mitad de años que Antonio, y entre los tres suman 63 años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

Antonio = x
Carlos = 3x
Fernando = $\frac{1}{2x}$
Los tres 63 años

63 | 3
03 21
0

Solución:

6.- En una bolsa hay bolas azules, blancas y rojas. El número de bolas rojas es igual al de bolas blancas más 14, y hay 6 bolas azules menos que blancas. Si en total hay 98 bolas, halla cuántas bolas hay de cada color.

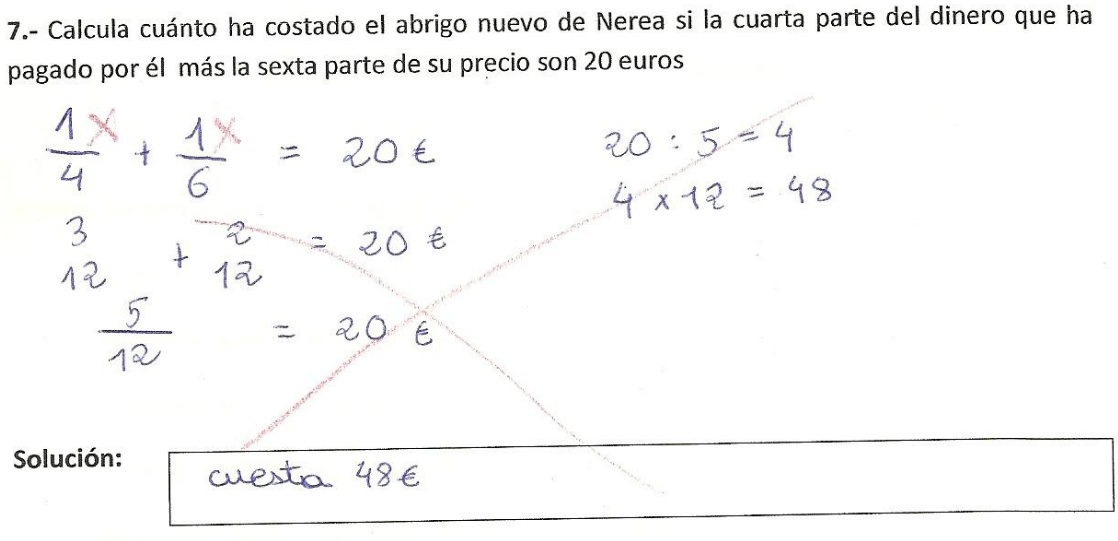
Azules = x − 6
Blancas = x + 14
Rojas = x
Total = 98

$x \cdot (-6+14) = 98$
$-6x + 14x = 98$
$8x = 48$

Universidad Pontificia de Salamanca

Hay alumnos que manifiestan una gran dificultad para traducir del lenguaje normal al lenguaje algebraico. En el primero no sabe escribir la mitad de un número. Y en el segundo no es capaz de encontrar la ecuación a pesar de que ha sabido traducir los datos. Se puede comprobar la solución en el anexo. También personas que comienzan a ser conscientes de su dificultad terminan desarrollando un bloqueo o inseguridad de que no van a ser capaces que cuesta mucho después superar.

Gráfico: 7.2.f) Errores cometidos en el problema 7 del test de conocimientos



7.- Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Nerea si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20 euros

$\frac{1x}{4} + \frac{1x}{6} = 20€$

$\frac{3}{12} + \frac{2}{12} = 20€$

$\frac{5}{12} = 20€$

$20 : 5 = 4$

$4 \times 12 = 48$

Solución: cuesta 48€

A veces les cuesta ser ordenados en sus procedimientos a pesar que se les enseña y se les pide. En vez de identificar cuál es el dato que no conocemos y queremos conocer e identificarlo con la incógnita, empieza a escribir la aproximada y errónea ecuación.

Gráfico 6.16.-: Errores cometidos en la resolución de igualdades notables.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$(4-2x)^2-(2x+1)^2=-5x^2$$

$$16+4x^2-16x-4x^2+1=-5$$

$$16+1=-5x^2+16x$$

$$17=-5x^2+16x$$

$$17+5x^2-16x$$

$a=5$
$b=-16$
$c=17$

$$x=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4.5.17}}{2.5}$$

$$x=\frac{16\pm\sqrt{-94}}{}$$

En igualdades notables está uno de los errores más generalizados y duraderos. No se dan cuenta que el cuadrado de un binomio es una multiplicación de el paréntesis por sí mismo. Lo curioso es que el primer cuadrado del binomio lo hizo bien y no el segundo que era más fácil. Les cuesta mucho ver y reconocer el patrón en este tipo de ejercicios.

Gráfico 7.2.g) Errores cometidos en el ejercicio de igualdades notables por resolver mal el paréntesis.

8

$$(4-2x)^2-(2x+1)^2=-5x^2$$

$$16-8x-8x+4x^2+4x^2+2x+2x+1=-5x^2$$

$$4x^2-12x+17=-5x^2$$

$$-x^2-12x+17=0$$

$a=-1$
$b=-12$
$c=17$

$$\text{Fórmula}=x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2a}$$

Este es otro de los errores generalizados y duraderos en el tiempo de la secundaria, el saber multiplicar los menos delante de un paréntesis (propiedad distributiva).

Universidad Pontificia de Salamanca

7.2.5.- Resultados finales

Procede hacer en este lugar, después de mostrar los resultados obtenidos de los *ejercicios de ecuaciones* de primer grado y de los *problemas* de ecuaciones de primer grado presentados para evaluar, porque es la parte sustancial de la evaluación. Los resultados de igualdades notables que se han mostrado con anterioridad no son tomados en cuenta en la evaluación de los resultados y no se incluyen, ya que propiamente las igualdades notables corresponden a la parte de las ecuaciones de 2º grado que se están estudiando, por primera vez, en este curso de segundo de la ESO.

Presentamos la tabla siguiente, (7.2.5.a) en la que buscamos la ganancia en los conocimientos y habilidades alcanzados en la experiencia investigadora, que viene definida con la siguiente fórmula: *ganancia normalizada* es la razón del aumento entre el pretest aplicado al inicio de la investigación y el post-test aplicado al final, con respecto al máximo aumento posible, tiene valores que cubren el intervalo de [0,1] y se calcula como se establece en la formula que sigue (Hake, 1998):

$$Ganancia\ normalizada\ de\ Hake\ corregida = \frac{Nota\ Posttest(\%) - Nota\ Pretest(\%)}{100 - Nota\ Pretest(\%)}$$

Tabla 7.2.5.a) Nota media final en porcentaje de la parte de ecuaciones de primer grado total y de problemas de segundo ESO.

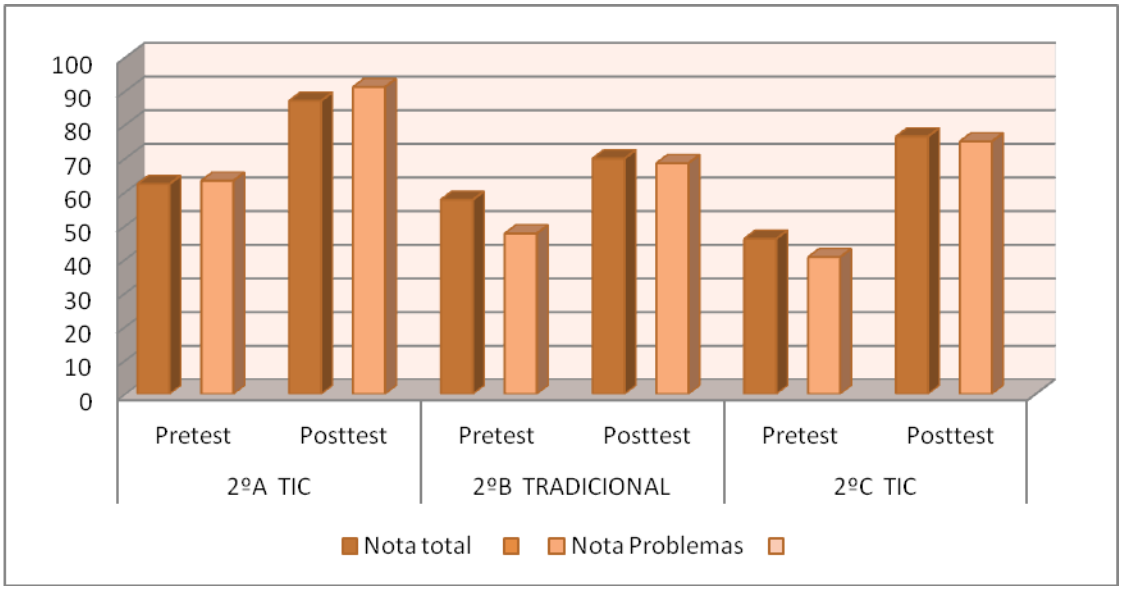
	2ºA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Nota med. Total	62,35	87,08	57,70	69,93	46,10	76,46
Ganancia total	0,66		0,29		0,56	
Nota med.Probl.	63,33	91,18	47,66	68,55	40,66	75,00
Ganancia en problemas	0,76		0,40		0,58	
Nota med. Ejerc	61,61	84,01	65,23	70,97	50,19	77,55
Ganancia en Ejercicios	0,58		0,17		0,55	

En este cuadro resumen se percibe claramente el progreso alcanzado en el aprendizaje matemático de los estudiantes de los tres grupos, entre el pretest y el posttest, principalmente en la parte de problemas más que en la de ejercicios. Destacan los grupos TIC, el grupo de segundo A en primer lugar, seguido de cerca del segundo C, que obtienen unos porcentajes más positivos que el grupo Tradicional, tanto en ejercicios como en problemas y por consiguiente también en la nota media total. Se ha de tener en cuenta que el grupo TIC de segundo C en el pretest obtuvo resultados

Universidad Pontificia de Salamanca

inferiores al grupo Tradicional y sin embargo al final de la investigación, lo superó ampliamente. A resultas de que hemos de seguir en esta línea y seguir investigando para confirmar las tendencias habidas, sin embargo los resultados obtenidos por la influencia metodológica han sido muy positivos, por el uso de las TIC en el aprendizaje de las matemáticas en el curso segundo de la ESO.

Gráfico 7.2.h) Notas medias en porcentajes de ecuaciones de 1er grado totales y de problemas obtenidas por los grupos de segundo ESO.



Los dos grupos TIC, segundo A y segundo C, han obtenido mejoras. El grupo TIC de segundo A es el que ha conseguido una nota media superior, en el pretest y en el posttest y también la ganancia, sin embargo el grupo TIC segundo C que era el que tenía nota media más baja ha superado en media de la clase al grupo tradicional segundo B. Por consiguiente comprobamos lo provechoso del apoyo que los recursos TIC han ofrecido al proceso de aprendizaje matemático.

7.2.6 Diferencias significativas

A igual que hemos procedido con el test de motivación lo hacemos con el test de conocimientos. Calculamos el índice de fiabilidad del test:

Alfa de Cronbach pretest=0,601

Alfa de cronbach postest=0,651

Universidad Pontificia de Salamanca

Vemos que nos sale un alfa pequeño, seguramente debido al número reducido de preguntas. En todo caso estimo que es un resultado aceptable, puesto cuando se tratan de investigaciones teóricas o generales o descripciones de conductas de grupos, o feedbacka un grupo, los resultados de más de 0.60 se consideran aceptables (González, G., 2004: 224).

Para comprobar si hay diferencias estadísticas entre la puntuación conseguida en el pretest y posttest dependiendo de la metodología seguida hacemos una prueba del test anova univariante, después de haber verificado la normalidad de los datos.

Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error(a)

Variable dependiente: DIF_TOT

F	gl1	gl2	Significación
1,193	2	85	,308

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.
a Diseño: Intersección+GRUPO

No hay diferencias estadísticas, lo que viene a ser positivo, o al menos no es negativo. Se obtienen buenos resultados, como muestran las ganancias que hemos expuesto anteriormente. A pesar del uso de nuevas metodologías por primera vez, los resultados del grupo tradicional obtuvieron los resultados que cabría esperar.

7.2.7.- A modo de síntesis

De los dos asuntos sobre los que se evaluaron los estudiantes, ecuaciones y problemas, los resultados obtenidos ofrecen algunas características que pueden sintetizarse en las siguientes: en cuanto a las ecuaciones las tres primeras fueron solucionadas correctamente por la mayor parte de los estudiantes, alcanzando niveles de corrección en más del 90 % de los casos. La cuarta ecuación presentaba especiales dificultades y el naufragio fue estrepitoso: los grupos TIC, desde el comienzo de la investigación hasta el final, progresaron realmente, aunque solo en el grupo de 2º A se

Universidad Pontificia de Salamanca

alcanzó un nivel de soluciones correctas el 56% mientras que el 44% cometió errores importantes.

En relación con los problemas, en términos generales, los porcentajes de acierto son menores que en el caso de las ecuaciones, pero en cambio no se produjeron debacles generalizadas. Los errores más frecuentes se originan en la carencia de habilidades para hacer el despeje y, con bastante frecuencia, también el planteamiento. En los grupos TIC las notas medias de los problemas en el posttest, es decir, al final de la investigación superaron al grupo tradicional. En este apartado se les presentó a los estudiantes de los tres grupos una pregunta sobre igualdades notables. Esta no se tomaría en consideración en los resultados logrados. Se propuso para ver la reacción de los estudiantes ante materia absolutamente nueva. Sin embargo una parte de los tres grupos fueron capaces de comprenderla y ofrecieron unos resultados aceptables, aunque solo habían dedicado una clase a la explicación del asunto.

7.3.- RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL CUESTIONARIO DE CONOCIMIENTOS A LOS ESTUDIANTES DEL CURSO TERCERO DE LA ESO.

A los alumnos de tercero de la ESO se les pasó un cuestionario previo de conocimientos y el mismo cuestionario se pasó al final de la investigación. El cuestionario tenía las mismas cuestiones al principio y al final. Constaba de 20 preguntas, de las cuales 7 se referían a ecuaciones de primer grado: 4 ejercicios y 3 problemas; 8 preguntas atañen a ecuaciones de segundo grado: 7 ejercicios y un problema; por último, 5 preguntas de sistemas: 3 ejercicios y 2 problemas.

El formato del cuestionario de conocimientos se puede ver en el anexo2 de este capítulo. Los test previo y posterior se realizaron durante las horas de clase. Como se aprecia en el currículo, las ecuaciones de primer grado se han estudiado en 1º ESO, las ecuaciones de segundo grado y sistemas se encuentran en 2º ESO, aunque sin mucha complejidad y se vuelven a estudiar en 3º ESO prestando atención a aspectos con más dificultad como pueden ser los sistemas con fracciones, con paréntesis, etc.

Universidad Pontificia de Salamanca

A continuación se presentan los resultados obtenidos a una serie de cuestiones que adoptan el formato de preguntas que siguen una progresión de creciente dificultad y al final se hará una breve síntesis de todo lo expuesto.

En este apartado se muestran las siguientes cuestiones que se identifican a continuación y los resultados que ofrecieron los estudiantes mediante la cumplimentación de los cuestionarios de conocimiento. Las cuestiones a tratar son las siguientes: ecuaciones de primer grado, los problemas algebraicos, ecuaciones de segundo grado y sistemas de dos ecuaciones y de dos incógnitas.

7.3.1.- Ecuaciones de primer grado

Las mayores dificultades que tienen los alumnos suele ubicarse en la operatoria de la distributiva - paréntesis y fracciones -, en la operatoria con números negativos o en uso del signo "-" delante de paréntesis, fracciones, etc.. Son cuestiones que han de reforzarse constantemente durante la ESO. También les cuesta mucho traducir al lenguaje algebraico el lenguaje normal de los enunciados de los problemas.

Pregunta 1ª:

$$3x - 3 = -9$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Cuando al final, por despiste hicieron un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son los debidos al uso incorrecto de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pueda calificar.

Tabla 7.3.1a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 1 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	81,82	93,94	93,54	93,55	66,67	90,91
Err. Result.(0,75)	12,12	3,03	3,23	0,00	12,12	9,09
Err. Despeja (0)	6,06	3,03	3,23	6,45	21,21	0,00
No contesta (0)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Universidad Pontificia de Salamanca

La pregunta es sencilla y fácil y un porcentaje muy alto de alumnos la hicieron bien, sin embargo hubo alumnos que tuvieron dificultades en el uso de las reglas para despejar la variable, como sucedió en el grupo TIC en el pretest. Se aprecia con facilidad el progreso a que llegaron al final de la investigación, los grupos TIC y Cooperativo que superan el 90% de aciertos, pero el TIC sube 24 % su porcentaje en relación con el pretest. El grupo Tradicional se mantiene en el 93% de aciertos que ya había alcanzado en el pretest. En todo caso, la facilidad de la primera pregunta anima siempre a los estudiantes.

Pregunta 2ª:

$$2 \cdot (2x - 5) - 3 \cdot (x - 5) = 0$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Cuando, por despiste, al final hicieron un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son errores debidos al uso incorrecto de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de cero.

No contesta: No han escrito nada o nada que se pueda calificar.

Tabla 7.3.1.b) Respuestas a la pregunta 2 de los alumnos de tercero ESO. Datos en porcentajes:

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	66,67	78,79	70,96	83,87	57,58	84,85
Err. Result.(0,75)	6,06	0,00	6,45	3,23	12,12	0,00
Err. Despej.(0,25)	0,00	3,03	3,23	0,00	3,03	6,06
Err. Paréntesis(0)	27,27	18,18	16,13	12,90	27,27	6,06
No contesta (0)	0,00	0,00	3,23	0,00	0,00	3,03

Esta pregunta obtuvo un alto porcentaje de respuestas correctas desde el test inicial, sin embargo muestra un porcentaje de alumnos que les resulta difícil la operatoria de los paréntesis. El grupo TIC logra unos resultados en el posttest interesantes: consigue eliminar los errores de resultado y en la operatoria de los paréntesis consigue disminuir el porcentaje de errores de 27% a 6%, obteniendo un contundente porcentaje del 84.85% de aciertos, que significa un 27% de aumento porcentual. Los grupos Cooperativo y Tradicional obtienen unos resultados positivos y muy similares.

Universidad Pontificia de Salamanca

<u>Pregunta 3ª:</u>

$$\frac{4x}{3} - 6 = \frac{2x}{3} - 5$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

- *Errores en el resultado:* Cuando, por despiste, al final hicieron un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.

- *Errores de despejar la incógnita:* Son errores atribuidos al uso incorrecto de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de cero.

- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pueda calificar.

Tabla 7.3.1c) Respuestas a la pregunta 3 de los alumnos de tercero ESO. Datos en porcentajes:

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	63,64	93,94	61,29	80,65	60,61	93,94
Err. Result.(0,75)	3,03	6,06	0,00	0,00	3,03	0,00
Err. Despeja (0)	27,27	0,00	29,03	19,35	30,30	3,03
No contesta (0)	6,06	0,00	9,68	0,00	6,06	3,03

Este ejercicio incluyó operatoria con fracciones sencillas y muestra porcentajes más bajos de respuestas correctas en el test inicial. Se logró, sin embargo, la asimilación de las normas de despeje, mediante pequeños pero constantes recordatorios, lo que favoreció un aumento considerable de respuestas correctas, como se aprecia en los resultados del posttest. Es espectacular el crecimiento porcentual en los ejercicios correctos de los grupos TIC y Cooperativo, en los que se produce también la casi desaparición de errores de despeje, con una caída del 27% a cero en el grupo Cooperativo y del 30% a 3 % en el TIC. El aprendizaje en los tres grupos es importante, sin embargo la ganancia del grupo Cooperativo y del grupo TIC es superior a la del grupo Tradicional, que también mejora pero no en la misma cuantía.

<u>Pregunta 4ª:</u>

$$\frac{3x}{5} - 3 \cdot \frac{x-1}{4} = 1 - \frac{x+5}{10}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Errores en el resultado:* Cuando, por despiste, al final han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son errores atribuidos al uso indebido de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pueda calificar.

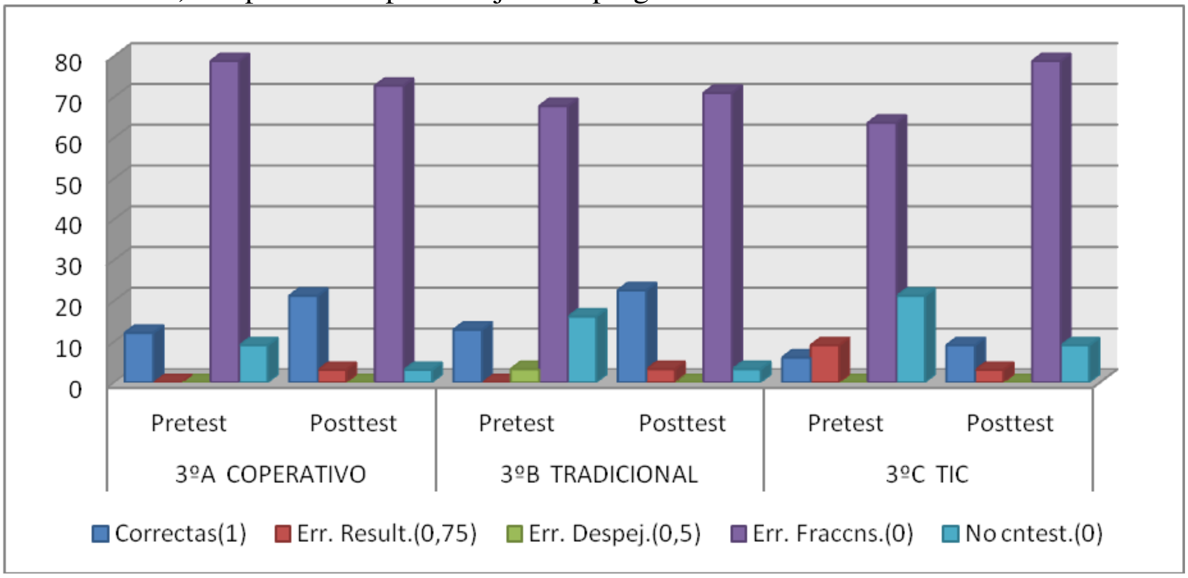
Tabla 7.3.1.d) Respuestas a la pregunta 4 de los alumnos de tercero ESO. Datos en porcentajes:

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	12,12	21,21	12,9	22,57	6,06	9,09
Err. Result.(0,75)	0,00	3,03	0,00	3,23	9,09	3,03
Err. Despeja (0,5)	0,00	0,00	3,23	0,00	0,00	0,00
Err. Fraccns. (0)	78,79	72,73	67,74	70,97	63,64	78,79
No contesta (0)	9,09	3,03	16,13	3,23	21,21	9,09

Este ejercicio de ecuación de primer grado incluye fracciones con diferente denominador, tienen que hacer mínimo común múltiplo, aparece el signo "-" delante de las fracciones, tienen que hacer distributiva y un número que multiplica a la fracción. Es una pegunta con dificultades manifiestas. El porcentaje de respuestas correctas en el posttest ha mejorado, aunque sigue siendo bastante bajo. La operatoria con fracciones, los menos delante de las fracciones y los paréntesis son aspectos que se refuerzan mucho durante la ESO, pero se tarda tiempo en lograr buenos resultados. Desde luego los estudiantes que investigamos no lo habían conseguido todavía. Tal vez se consiguieran antes si el contacto con el álgebra ya se hubiera producido en el nivel de primaria. El grupo TIC, en este caso, logra unos resultados de aprendizaje peores que los otros dos grupos, que tampoco se alejan del error, si bien en el grupo Cooperativo y Tradicional se perciben progresos pero de pocos estudiantes. En el gráfico siguiente se percibe con nitidez la acumulación cuantitativa de errores en el manejo de las fracciones.

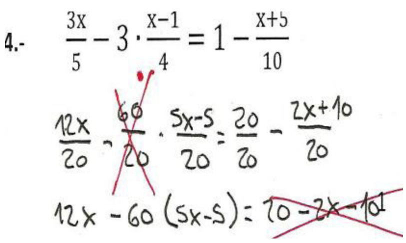
Universidad Pontificia de Salamanca

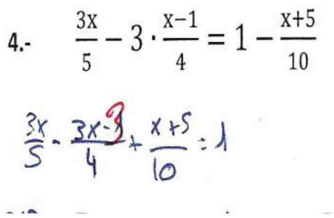
Gráfico 7.3.a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 4 de los alumnos de 3º ESO.



Ejemplos de errores en las respuestas a la pregunta 4ª*: "Err. Fracciones*

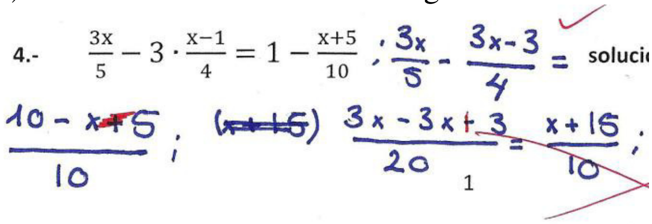
1) Error producto como suma 2) Error de la propiedad distributiva





El error de la izquierda es el mismo que vimos en la alumna de segundo. Como vemos los alumnos de tercero siguen cometiendo este error.
El error de la derecha muestra un error en la distributiva, el tres de delante de la fracción multiplica a todo el numerador de la fracción.

3) Errores de la distributiva del signo delante de las fracciones



Este ejemplo muestra la dificultad con la distributiva del menos delante de la fracción, si sabe multiplicar los números pero con los signos lo hace diferente. La operatoria de los números enteros es de lo que más les cuesta además del álgebra cuando llegan a primera y aún siguen asumiendo que cuando aparece un menos tenemos una resta en vez de pensar que tenemos "algo" negativo.

Universidad Pontificia de Salamanca

7.3.2.- Problemas algebraicos

Pregunta 5ª:

Carlos tiene el triple de años que su hijo Antonio. Fernando, el hijo pequeño, tiene la mitad de años que Antonio, y entre los tres suman 63 años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Cuando, por despiste, al final han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Se debieron al uso incorrecto de las reglas de despeje. Obtuvieron una puntuación de 0,5 por haber hecho bien el planteamiento del problema.
- *Errores de planteamiento:* No han sabido identificar la incógnita o bien la ecuación no la han encontrado o no es correcta. Con este error, obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pueda calificar.

Tabla 7.3.2.a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 5 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	63,64	69,7	58,05	70,96	48,49	57,58
Err. Result.(0,75)	3,03	0,00	3,23	0,00	0,00	0,00
Err. Despeja (0,5)	6,06	3,03	32,26	9,68	18,18	6,06
Err. Plantemt. (0)	27,27	27,27	3,23	16,13	33,33	33,33
No contesta (0)	0,00	0,00	3,23	3,23	0,00	3,03

En este problema, se produce una extraña circunstancia, los porcentajes de error en el planteamiento son iguales en el inicio y en el final de la investigación en el grupo TIC y Cooperativo y crece sustancialmente en el grupo Tradicional. En cuanto al resultado global del aprendizaje, el grupo Tradicional obtiene una mejoría mayor, seguido del TIC y del Cooperativo. En los problemas algebraicos se pide un planteamiento algebraico y si no se da no consigue nada de puntuación, aunque entiendan el problema y por un método de conteo gráfico pudieran haber llegado a la respuesta. El porcentaje de respuestas correctas mejoró en los tres grupos, disminuyeron drásticamente los errores en resultados y en el despeje, obteniendo mejores resultados en este caso el grupo tradicional.

Universidad Pontificia de Salamanca

Pregunta 6ª:

En una bolsa hay bolas azules, blancas y rojas. El número de bolas rojas es igual al de bolas blancas más 14, y hay 6 bolas azules menos que blancas. Si en total hay 98 bolas, halla cuántas bolas hay de cada color.

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron las máxima puntuación, un uno.
- *Errores en el resultado:* Suceden cuando, por despiste, al final han hecho un cálculo erróneo o bien han escrito mal el número en la secuencia, obteniéndose una puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son los debidos al uso incorrecto de las reglas de despeje. Se obtuvo una puntuación de 0,5 por haber hecho bien el planteamiento del problema.
- *Errores de planteamiento:* No han sabido identificar la incógnita o bien la ecuación no la ha encontrado o no es correcta. Con este error, obtuvieron una puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pueda calificar.

Tabla 7.3.2.b) Respuestas en porcentajes a la pregunta 6 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas(1)	51,52	39,39	64,52	54,83	54,55	63,64
Err. Result.(0,75)	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Err. Despej.(0,5)	0,00	0,00	0,00	3,23	3,03	0,00
Err. Plantemt.(0)	30,30	51,52	22,58	25,81	30,30	30,30
No cntest.(0)	15,15	9,09	12,90	16,13	12,12	6,06

La tabla nos muestra especiales dificultades en conseguir un planteamiento algebraico correcto, al igual que sucedió con el problema anterior. Un porcentaje alto de los alumnos que tienen errores de planteamiento, sin embargo alcanzaron un resultado correcto, aunque sin seguir un planteamiento algebraico, sino por el conteo. El aprendizaje en este caso es claramente deficiente, puesto que los errores han aumentado en el período de la investigación en el grupo Cooperativo y Tradicional, obteniendo un menor porcentaje de problemas correctamente solucionados en el posttest. En el grupo TIC se produjo un aprendizaje positivo y el porcentaje de alumnos que presentan los problemas correctos aumenta, en cambio se mantienen los mismos porcentajes de alumnos, en el pretest y en el posttest, que fallan en el planteamiento. En casos como este, los resultados obtenidos en el planteamiento – suben los errores después de la explicación - deberían ser un estímulo para reflexión del profesor.

Universidad Pontificia de Salamanca

Pregunta 7ª:

Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Nerea si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20 euros.

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

Correctas: Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

- *Errores en el resultado:* Cuando, por despiste, al final han hecho un cálculo erróneo o han escrito mal el número en la secuencia, obtuvieron la puntuación de 0,75.
- *Errores de despejar la incógnita:* Son errores debidos al uso incorrecto de las reglas de despeje. Obtuvieron la puntuación de 0,5 por haber hecho bien el planteamiento del problema.
- *Errores de planteamiento:* No han sabido identificar la incógnita o la ecuación no la ha encontrado o no es correcta. Con este error, obtuvieron la puntuación de cero.
- *No contesta:* No han escrito nada o nada que se pudiera calificar.

Tabla 7.3.2.c) Respuestas en porcentajes a la pregunta 7 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttes t
Correctas (1)	33,34	60,61	45,16	61,29	24,25	48,49
Err. Result.(0,75)	3,03	0,00	6,45	0,00	0,00	0,00
Err. Despeja (0,5)	9,09	12,12	0,00	3,23	12,12	6,06
Err. Plantemt. (0)	39,39	12,12	25,81	16,13	39,39	27,27
No contesta (0)	15,15	15,15	22,58	19,35	24,24	18,18

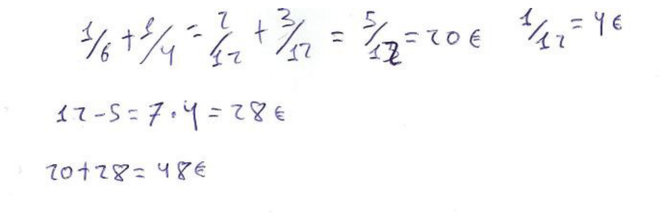
Bajan los porcentajes de errores en el planteamiento, en menor medida desciende también el número de alumnos que no contestan. Ha aumentado el porcentaje de respuestas correctas en los tres grupos. Las ganancias de aprendizaje en los tres grupos son reconocidos. Destacan sin embargo los cambios en los resultados de los alumnos del grupo Cooperativo y TIC, son el doble de alumnos que en pretest los que en el posttest llegan al resultado correcto. En el grupo Cooperativo destaca también el progreso logrado en el planteamiento, que baja del 39 % al 12 % el porcentaje de errores cometidos. Una vez más se constata y, permítanme que insista en algo ya indicado con anterioridad: la destreza matemática de saber traducir al lenguaje

Universidad Pontificia de Salamanca

algebraico el enunciado de un problema es algo que a los alumnos les requiere bastante tiempo.

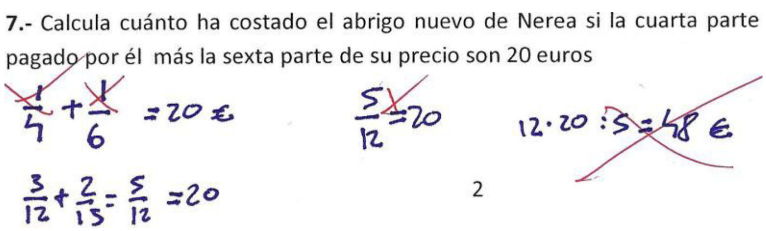
Ejemplos de errores sobre el problema de la pregunta 7ª*:*

1) No sabe formalizar. 2) Concatenación de iguales



Este error que ya lo hemos visto es el de la formalización del problema, el uso de la incógnita. También aquí aparecen igualdades que no son ciertas, pero utiliza el símbolo como "=" como separador.

3) No sabe formalizar. 4) No hay incógnita



7.3.3.- Ecuaciones de segundo grado

El Cuestionario de ecuaciones de segundo grado consta de preguntas sobre ecuaciones de segundo grado incompletas (8,9), ecuaciones de segundo grado completas (10, 11), operativa con polinomios (12, 13, 14) y un problema (15). Los porcentajes de respuestas correctas en ecuaciones incompletas son peores que los de las ecuaciones completas, también les cuesta darse cuenta que los coeficientes pueden ser enteros negativos y que la ecuación puede estar desordenada. Las preguntas 13 y 14 son las que peores resultados tienen: las igualdades notables tardan mucho en asimilarse, y durante el curso anterior, en éste y en el siguiente se seguirán cometiendo errores, e incluso en bachillerato. De modo semejante, las operaciones con polinomios son difíciles. Los numerosos errores de los alumnos, en el proceso de asimilar los cuadrados de binomios, nos interpela sobre la posibilidad de la conveniencia de dedicarle más tiempo a esta

Universidad Pontificia de Salamanca

parte, o si otros procedimientos fueren más útiles para alcanzar mejores resultados, por ejemplo, ver los cuadrados del binomio como el área de un cuadrado, etc.

Pregunta 8ª:

$$x^2 = 11x$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se puede calificar. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 1:* No saben el procedimiento porque no sabe la fórmula para calcular las soluciones de las ecuaciones de segundo grado o/y no identifica correctamente los coeficientes en la ecuación de segundo grado, ni alcanza las soluciones correctas. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 2:* Identificó los coeficientes de la ecuación de segundo grado ó conoció una solución pero no hubo procedimiento. La puntuación fue de 0,25.
- *Error tipo 3:* Conoció las dos soluciones pero sin planteamiento alguno, no conoció las soluciones porque se ha equivocado en el procedimiento por un despiste. La puntuación fue 0,5.
- *Error tipo 4:* Conoció el procedimiento, obtuvo correctamente una solución y se ha equivocado en la otra por errores de cálculo o signo. La calificación fue 0,75.
- *Correcta:* Cuando el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.3.a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 8 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	30,31	66,67	32,25	77,42	24,25	72,73
Err. Tipo 4 (0,75)	0,00	3,03	3,23	3,23	12,12	0,00
Err. Tipo 3 (0,5)	3,03	6,06	3,23	0,00	6,06	3,03
Err. Tipo 2 (0,25)	39,39	6,06	35,48	12,90	36,36	18,18
Err. Tipo 1 (0)	3,03	12,12	0,00	0,00	3,03	3,03
No contesta (0)	24,24	6,06	25,81	6,45	18,18	3,03

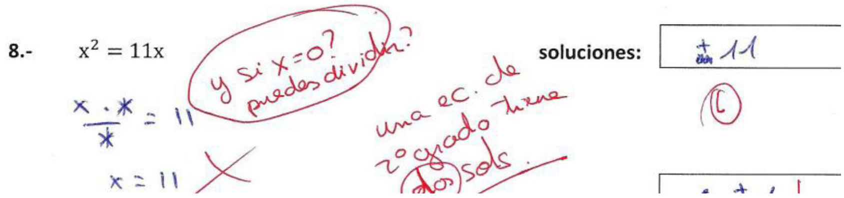
Durante la investigación han progresado en el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado: destaca el grupo TIC que pasa del 24% de ecuaciones correctas en el pretest a un porcentaje del 72% en el posttest, Es obvio el descenso porcentual en los errores. Le sigue de cerca en la mejora el grupo Tradicional. En el grupo Cooperativo ha habido también un cambio importante en el aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado, sobre todo la caída porcentual en los errores de tipo 2. En todo caso se aprecia

Universidad Pontificia de Salamanca

una mejora considerable en los porcentajes de respuestas correctas, aunque los resultados no reflejan diferencias en el aprendizaje entre los diferentes grupos.

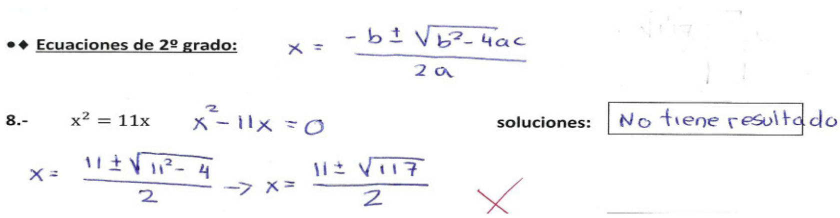
Ejemplos de errores *respecto de la pregunta 8ª:*

1) Simplificación errónea y 2) no encuentra las dos soluciones



3) Este error muestra algo que no se puede hacer, porque está partiendo de que la x es diferente de 0, y una de las soluciones la esta eliminando.

4) *Error de sustitución*, aún sabiendo la fórmula



Error muy frecuente, saben la fórmula de las soluciones de segundo grado, e incluso saben identificar los coeficientes a, b, c en la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ pero no saben sustituir, sobre todo cuando alguno de los coeficientes es 0 o negativo. Además cuando los coeficientes son negativos también muestran dificultad en la operatoria e incluso en la prioridad de las operaciones.

Pregunta 9ª:

$$-x^2 + 1 = 0$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se pudo calificar. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 1:* No supo el procedimiento porque ignora la fórmula para calcular las soluciones de las ecuaciones de segundo grado o/y no identifica correctamente coeficientes en la ecuación de segundo grado, ni dio con las soluciones correctamente. La puntuación fue 0.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Error tipo 2:* Identificó los coeficientes de la ecuación de segundo grado o conoció una solución pero no hay procedimiento. La puntuación fue de 0,25.
- *Error tipo 3:* Conoció las dos soluciones pero sin ningún planteamiento, no conoció las soluciones porque se ha equivocado en el procedimiento por un despiste. La puntuación fue 0,5.
- *Error tipo 4:* Conoció el procedimiento, tuvo bien una solución y se ha equivocado en la otra por errores de cálculo o signo. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.3.b) Respuestas en porcentajes a la pregunta 9 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	27,28	48,49	32,26	61,29	21,22	66,67
Err. Tipo 4 (0,75)	0,00	0,00	0,00	9,68	0,00	0,00
Err. Tipo 3 (0,5)	6,06	3,03	0,00	0,00	6,06	3,03
Err. Tipo 2 (0,25)	33,33	33,33	45,16	16,13	39,39	21,21
Err. Tipo 1 (0)	0,00	15,15	0,00	6,45	3,03	0,00
No contesta (0)	33,33	0,00	22,58	6,45	30,30	9,09

Mejoran los porcentajes de respuestas correctas y de los estudiantes que no contestan a esta pregunta. Destaca sobre los otros grupos el TIC tanto en porcentajes de respuestas correctas, pasó del 21% en el pretest al 66% en el posttest, cuanto en la disminución porcentual de los errores, hasta en el error 2 que avanza desde el 39% hasta el 21 %. En cambio, el grupo Cooperativo mantiene los mismos porcentajes de error tipo 2 antes y después de la experiencia investigadora. Los resultados de este grupo son manifiestamente mejorables. Ha mejorado asimismo, en el período de la investigación, el grupo Tradicional, que además ha conseguido bajar los porcentajes de error tipo 2, desde el 45% hasta el 16%.

Pregunta 10ª:

$$\mathbf{x^2 - 7x + 10 = 0}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha hecho no se pudo calificar. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 1:* No ha sabido el procedimiento porque no supo la fórmula para calcular las soluciones de las ecuaciones de segundo grado o/y no identificó correctamente los coeficientes en la ecuación de segundo grado. La puntuación fue 0.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Error tipo 2:* Identificó los coeficientes de la ecuación de segundo grado o conoció una solución. La puntuación fue de 0,25.
- *Error tipo 3:* Cometió errores de cálculo a pesar de saber la fórmula y sustituir correctamente los coeficientes en la ecuación. No obtuvo soluciones correctas. La puntuación fue 0,5.
- *Error tipo 4:* Cometió errores de cálculo o signo en una de las soluciones, todo lo demás estaba correcto. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, se obtuvo la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.3.c) Respuestas en porcentajes a la pregunta 10 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	45,46	87,88	58,06	83,87	45,46	81,82
Err. Tipo 4 (0,75)	0,00	0,00	3,23	0,00	3,03	9,09
Err. Tipo 3 (0,5)	3,03	0,00	3,23	0,00	0,00	0,00
Err. Tipo 2 (0,25)	9,09	0,00	3,23	3,23	0,00	6,06
Err. Tipo 1 (0)	9,09	6,06	12,90	6,45	21,21	3,03
No contesta (0)	33,33	6,06	19,35	6,45	30,30	0,00

En los resultados del pretest se aprecian las dificultades de la identificación de los coeficientes de la ecuación de segundo grado si son números negativos y la operatoria con ellos, u otros que produjeron unos altos porcentajes de *no contesta*. Se observa en las respuestas correspondientes al final de la investigación unos avances grandes de *respuestas correctas* de los tres grupos, sin embargo el avance logrado es más evidente en el grupo Cooperativo (de 45 avanza hasta el 87%) y en el TIC que progresa desde el 45% y alcanza al final de la prueba el 81%. En el grupo TIC pasamos 30 % que no contestaron al comienzo de la investigación, al posttest que todos contestaron. En el grupo Cooperativo la caída porcentual del *no contesta*: de 33.33% bajó al 6%.

Pregunta 11ª:

$$-2x^2 + 1 - x = 0$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* no ha realizado la pregunta o lo que ha presentado no se pudo calificar. La puntuación fue 0.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Error tipo 1:* No supo el procedimiento porque desconocía la fórmula para calcular las soluciones de las ecuaciones de segundo grado o/y no identificó correctamente los coeficientes en la ecuación de segundo grado. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 2:* Identificó los coeficientes de la ecuación de segundo grado o conoció una solución. La puntuación fue de 0,25.
- *Error tipo 3:* Cometió errores de cálculo a pesar de saber la fórmula y sustituir correctamente los coeficientes en la ecuación. No obtuvo soluciones correctas. La puntuación fue 0,5.
- *Error tipo 4:* Cometió errores de cálculo o signo en una de las soluciones, todo lo demás estaba correcto. La calificación fue 0,75.
- C*orrectas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.3.d) Respuestas en porcentajes a la pregunta 11 de los alumnos de tercero ESO.

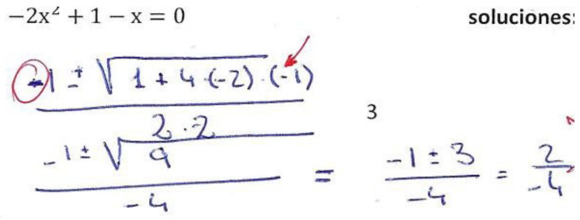
	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	24,25	42,43	35,49	48,39	24,25	42,43
Err. Tipo 4 (0,75)	0,00	12,12	3,23	16,13	12,12	18,18
Err. Tipo 3 (0,5)	6,06	6,06	12,90	12,90	3,03	0,00
Err. Tipo 2 (0,25)	9,09	6,06	0,00	0,00	3,03	3,03
Err. Tipo 1 (0)	27,27	33,33	29,03	12,90	21,21	33,33
No contesta (0)	33,33	0,00	19,35	9,68	36,36	3,03

Los resultados de la tabla precedente corresponden a las respuestas a una ecuación de segundo grado y son manifiestamente mejorables. Las respuestas de los estudiantes muestran las dificultades de los alumnos con coeficientes negativos, así como las dificultades cuando se cambia el orden de los coeficientes, la asimilación del cálculo con números negativos, la prioridad de las operaciones. El porcentaje de alumnos con la respuesta correcta creció especialmente en los grupos Cooperativo y TIC dándose la curiosa circunstancia de que parten de una posición porcentualmente igual, 24,25%, y llegan después de la investigación a otra posición también igual, 42,43%. Son reseñables los porcentajes de *no contesta* que han disminuido sustancialmente en los grupos cooperativo y TIC, en cambio no disminuyó la polarización de frecuencias en la rúbrica del error tipo 1. El grupo Tradicional, sin embargo, supera en un 6% en respuestas correctas a los otros dos grupos, aunque su ganancia es menor, en cambio en el posttest manifiesta una mayor polarización de frecuencias en las rúbricas de los errores tipo 4 y 3. Como he manifestado al comienzo de este comentario: estos grupos no asimilaron bien las explicaciones dadas.

Universidad Pontificia de Salamanca

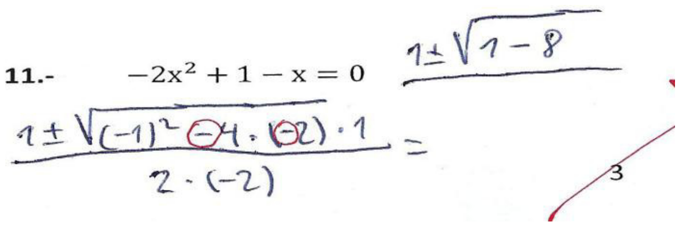
Ejemplos de los errores respecto de la pregunta 11ª:

1) no identifica correctamente los coeficientes:



2) la ecuación está desordenada y no ha sabido identificar b=-1, coeficiente de x y c=1 término independiente.

3) Dificultad en operar con términos negativos:



Pregunta 12ª:

$$\mathbf{5x^2 + 3x - 3 + x = 3x^2 - 4x - 3}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se pudo calificar. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 1:* Operó mal y no llegó a la ecuación de segundo grado. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 2:* Identificó los coeficientes de la ecuación de segundo grado, llegando a la ecuación de segundo grado general, después de haber operado correctamente pero no supo resolverla. La puntuación es de 0,25.
- *Error tipo 3:* Cometió errores de cálculo a pesar de conocer la fórmula para calcular las soluciones de la ecuación de segundo grado y sustituir correctamente los coeficientes en la ecuación. No obtuvo soluciones correctas La puntuación fue 0,5.
- *Error tipo 4:* Cometió errores de cálculo o signo en una de las soluciones, todo lo demás estaba correcto. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, se le calificó con la máxima puntuación, un uno.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 7.3.3.e) Respuestas en porcentajes a la pregunta 12 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	33,34	54,55	41,93	48,39	30,31	60,61
Err. Tipo 4 (0,75)	3,03	9,09	3,23	16,13	3,03	0,00
Err. Tipo 3 (0,5)	18,18	6,06	0,00	0,00	9,09	6,06
Err. Tipo 2 (0,25)	9,09	15,15	22,58	6,45	9,09	18,18
Err. Tipo 1 (0)	18,18	9,09	16,13	12,90	21,21	9,09
No contesta (0)	18,18	6,06	16,13	16,13	27,27	6,06

Las mejoras en los porcentajes de respuestas correctas los encontramos en los grupos Cooperativo, 21,21 % y TIC con el 30,30 % de mejora. En estos dos grupos el progreso en el aprendizaje es manifiesto la relación con los porcentajes obtenidos por el grupo Tradicional. En cambio si nos fijamos en los errores, llama la atención que tanto en el grupo Cooperativo como en el TIC crece la polarización de frecuencias en el posttest correspondiente al error tipo 2, mientras que decrece en el grupo Tradicional. En todo caso, es razonable considerar la influencia de los procedimientos metodológicos.

Pregunta 13:

$$(4-2\mathbf{x})^2-(\mathbf{2x}+\mathbf{1})^2=-\mathbf{5x}^2$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se pudo calificar. La puntuación fue 0.
- *Error igualdades notables:* Operó mal las igualdades notables. La puntuación fue 0.
- *Error operaciones:* Aunque ha hecho bien las igualdades notables, se ha equivocado al operar p. e. el "–"delante de la segunda igualdad notable y no llegó a la ecuación de segundo grado correctamente para continuar el ejercicio. La puntuación fue de 0,25.
- *Error tipo 3:* Llegó a la ecuación de segundo grado pero se equivocó o al sustituir, o al calcular y no llegó a ningún resultado correcto. La puntuación fue 0,5.
- *Error tipo 4:* Se equivocó en una solución por errores de cálculo o de signo. Todo el procedimiento anteriormente descrito estaba bien. La calificación fue 0,75.

Universidad Pontificia de Salamanca

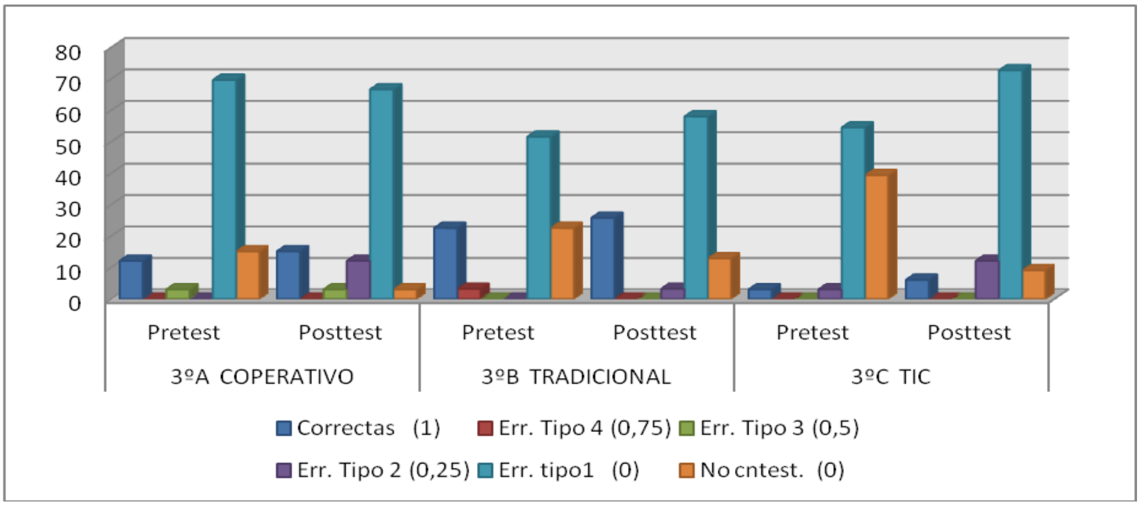
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.3.f) Respuestas en porcentajes a la pregunta 13 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	12,12	15,15	22,58	25,81	3,03	6,06
Err. Solucn.(0,75)	0,00	0,00	3,23	0,00	0,00	0,00
Err. Ec.2grd.(0,5)	3,03	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00
Err. Operar (0,25)	0,00	12,12	0,00	3,23	3,03	12,12
Err. Ig Notabl.(0)	69,70	66,67	51,61	58,06	54,55	72,73
No contesta (0)	15,15	3,03	22,58	12,90	39,39	9,09

Como hemos indicado con anterioridad, los alumnos tienen mucha dificultad en saber hacer el cuadrado del binomio, en hacer los menos delante de las fracciones o paréntesis. En el test previo no hubo ningún alumno que cuando llega a la ecuación de segundo grado con coeficientes bastante grandes, múltiplos de 5, se atreviera a simplificar, lo que muestra que el concepto de ecuación equivalente no les resulta significativo, ni tampoco las reglas de despejar. En este caso las diferencias entre los grupos no son muy grandes y gran parte de los estudiantes de los tres grupos cometen errores en *igualdades notables*, si bien parece razonable señalar que en el grupo Tradicional los aciertos en el posttest se aproximaron a la cuarta parte de los alumnos de ese grupo. Asimismo es de no olvidar que en el grupo TIC, el 72 % cometió errores en *igualdades notables*.

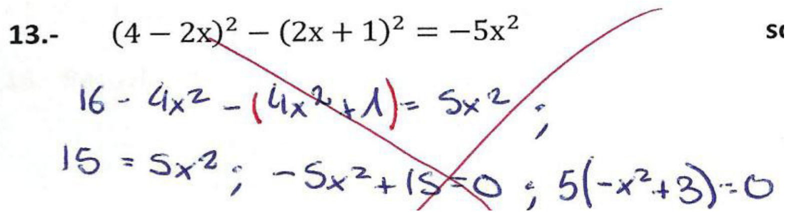
Gráfico 7.3.b) Respuestas en porcentajes de los alumnos de tercero ESO a la pregunta 13



Universidad Pontificia de Salamanca

Ejemplos de errores entre los muchos que se han hallado. **Pregunta 13ª**

1) Procedimiento erróneo de las igualdades notables.

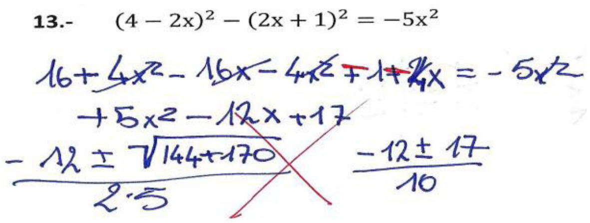

13.- $(4-2x)^2-(2x+1)^2=-5x^2$

$16-4x^2-(4x^2+1)=5x^2$;

$15=5x^2$; $-5x^2+15=0$; $5(-x^2+3)=0$

Como podemos comprobar siguen cometiendo errores en tercero con las igualdades notables. A pesar de que muchos saben multiplicar polinomios, no identifican a veces que $(4\text{-}2x)^2=(4\text{-}2x)(4\text{-}2x)$.

2) Operar mal el menos delante del paréntesis.


13.- $(4-2x)^2-(2x+1)^2=-5x^2$

$16+4x^2-16x-4x^2-1+4x=-5x^2$

$+5x^2-12x+17$

$\frac{-12\pm\sqrt{144+170}}{2\cdot5}$ $\frac{-12\pm17}{10}$

Este error también lo hemos comentado, es el menos delante de los paréntesis. Tienen que aplicar la distributiva y en vez de cambiar el signo a todo lo de dentro del paréntesis sólo cambian el signo del primer término

<u>Pregunta 14ª:</u>

$$(x+1)\left[\frac{3}{2}-2(1-x)\right]=3x^2+\frac{11(x-1)}{2}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha hecho no se pudo calificar. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 1:* Operó mal y no llegó a la ecuación adecuada de segundo grado. La puntuación fue 0.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Error tipo 2:* Aunque ha obtenido la ecuación de segundo grado, no ha sustituido correctamente los coeficientes en la fórmula de segundo grado. La puntuación fue de 0,25.
- *Error tipo 3:* Llegó a la ecuación de segundo grado y sustituyó correctamente los coeficientes pero se equivocó al calcular, no alcanzando resultado alguno correcto. La puntuación fue 0,5.
- *Error tipo 4:* Se equivocó en una solución, o por errores de cálculo o de signo. Todo el procedimiento anteriormente descrito estuvo bien. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.3.g) Respuestas en porcentajes a la pregunta 14 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	15,16	24,24	9,68	22,58	3,03	9,1
Err. Tipo 4 (0,75)	0,00	6,06	0,00	0,00	3,03	3,03
Err. Tipo 3 (0,5)	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Err. Tipo 2 (0,25)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,03
Err. Tipo 1 (0)	36,36	51,52	45,16	35,48	27,27	39,39
No contesta (0)	45,45	18,18	45,16	41,94	66,67	45,45

Desde el inicio de la experiencia investigadora al final se percibe una clara mejoría en el porcentaje de alumnos que no contestan, sobre todo en el grupo Cooperativo y el Tradicional, que mejoran el porcentaje de respuestas correctas y han obtenido mejor ganancia que el TIC. Las respuestas de *no contesta* y el *error de tipo 1*, han acaparado entre el 77% al 93 % de las respuestas dadas. Está claro que la operativa de los polinomios no la consiguen dominar todavía.

<u>Pregunta 15ª:</u>

Calcula la edad de Ana sabiendo que si al cuadrado de su edad se le resta el triple de su edad resulta nueve veces esta.
Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha presentado no se pudo calificar. La puntuación fue 0.
- *Error planteamiento:* No ha resuelto la ecuación de segundo grado del enunciado del problema. La puntuación fue 0.
- *Error ecuación de 2º grado:* Aunque ha obtenido la ecuación de segundo grado no ha sustituido correctamente los coeficientes en la fórmula para

Universidad Pontificia de Salamanca

obtener las soluciones de la ecuación de segundo grado o no ha sabido cómo resolverla. La puntuación fue de 0,5.

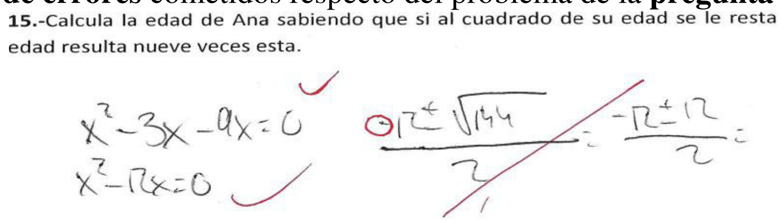
- *Error resultado:* Se equivocó en una solución, por errores de cálculo o de signo. Todo el procedimiento anteriormente descrito estaba bien. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima calificación, un uno.

Tabla 7.3.3.h) Respuestas en porcentajes a la pregunta 15 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	42,43	66,67	25,81	74,19	33,34	63,64
Err. Result.(0,75)	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Err. Ec 2º gr.(0,5)	15,15	12,12	35,48	3,23	24,24	9,09
Err. Planteam.(0)	18,18	18,18	16,13	6,45	6,06	9,09
No contesta (0)	21,21	3,03	22,58	16,13	36,36	18,18

El porcentaje de respuestas correctas ha mejorado mucho en los tres grupos, así como el porcentaje de alumnos que no contestan. En este caso el grupo Tradicional es el que manifiesta un aprendizaje mejor aprovechado, con un 74% de respuestas correctas. Sin embargo los grupos Cooperativo y TIC alcanzan cotas de acierto que superan el 63% y en ambos grupos la mejora en la alternativa de *no contesta* alcanza el 18%.

Ejemplos de errores cometidos respecto del problema de la **pregunta 15ª**:


15.-Calcula la edad de Ana sabiendo que si al cuadrado de su edad se le resta

edad resulta nueve veces esta.

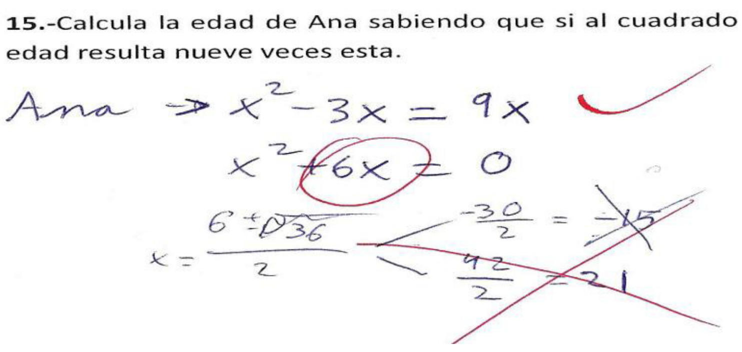
$x^2-3x-9x=0$

$x^2-12x=0$

$\frac{-12\pm\sqrt{144}}{2} = \frac{-12\pm 12}{2} =$

1) Escribe bien la ecuación y sin embargo después no se da cuenta que b=-12

2) Mal transposición


15.-Calcula la edad de Ana sabiendo que si al cuadrado

edad resulta nueve veces esta.

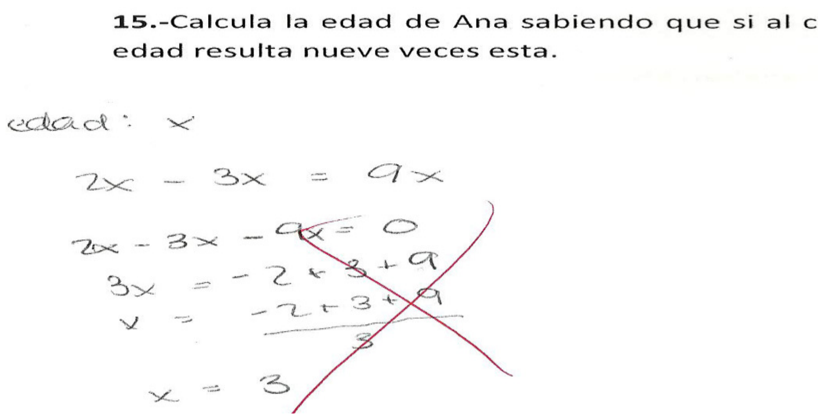
Ana $\rightarrow x^2-3x=9x$

$x^2+6x=0$

$x=\frac{6\pm\sqrt{36}}{2}$ $\frac{-30}{2}=-15$ $\frac{42}{2}=21$

Universidad Pontificia de Salamanca

3) Traducir a lenguaje algebraico error


15.-Calcula la edad de Ana sabiendo que si al c
edad resulta nueve veces esta.

edad: x

$2x - 3x = 9x$

$2x - 3x - 9x = 0$

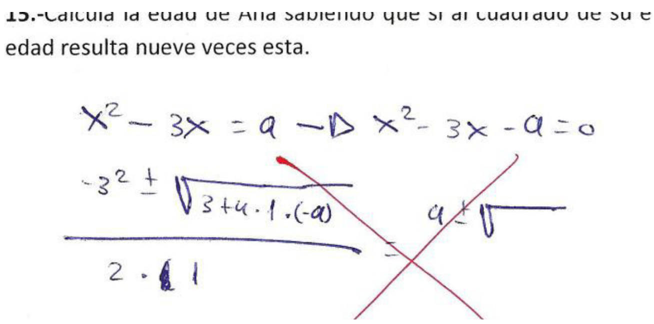
$3x = -2 + 3 + 9$

$x = \frac{-2+3+9}{3}$

$x = 3$

Traduce el cuadrado de la edad como 2x

4) Error al traducir a lenguaje algebraico


15.-Calcula la edad de Ana sabiendo que si al cuadrado de su e
edad resulta nueve veces esta.

$x^2 - 3x = 9 \rightarrow x^2 - 3x - 9 = 0$

$\frac{-3^2 \pm \sqrt{3+4\cdot 1\cdot(-9)}}{2\cdot 1}$ $\quad 9 \pm \sqrt{}$

7.3.4.- Sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas

También es contenido de segundo los sistemas, aunque solo los más sencillos y en muchos centros no se enseña la representación gráfica.

<u>Pregunta 16ª:</u>

Resuelve el siguiente sistema por el método que quieras:

$$\begin{cases} -x + 3y = 17 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se pudo calificar porque se lo ha inventado. La puntuación es 0.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Error resolver:* No resolvió correctamente el sistema por utilizar procedimientos erróneos. La puntuación es 0.
- *Error cálculo:* Los procedimientos son correctos pero se equivocó en los cálculos y no llegó a ninguna de las soluciones. La puntuación fue de 0,5.
- *Error resultado:* Se equivocó en una solución, por errores de cálculo o de signo. Todo el procedimiento anteriormente descrito estuvo bien. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.4.a) Respuestas en porcentajes a la pregunta 16 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	39,40	57,58	54,84	83,87	45,46	90,91
Err. Result (0,75)	6,06	9,09	0,00	0,00	0,00	0,00
Err. Calculo (0,5)	12,12	3,03	6,45	0,00	12,12	0,00
Err. Resolver (0)	18,18	24,24	16,13	9,68	21,21	6,06
No contesta (0)	24,24	6,06	22,58	6,45	21,21	3,03

Destaca el grupo TIC que muestra una mejora en el porcentaje de respuestas correctas muy importante, (45,45 %) en esta pregunta. Muy cerca de esta posición se halla el grupo Tradicional y más alejado el Cooperativo. También hay una mejora en el porcentaje de personas que dejan esta pregunta sin contestar o que cometen errores de cálculo. En términos más generales, los tres grupos de tercero ESO presentan una notable mejoría de resultados en comparación con los resultados de los problemas precedentes y, más en concreto, en evitar los errores de cálculo y de resultados.

Pregunta 17ª:

Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se pudo calificar. La puntuación es 0.
- *Error tipo 1:* No calculó ningún punto de ninguna recta. La puntuación fue 0.
- *Error tipo 2:* Calculó los puntos de una recta, pero no los de la otra porque se equivocó al calcular la ecuación de la recta. La puntuación fue de 0,5.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Error tipo 3:* Calculó los puntos de la recta y la gráfica de esa recta o bien calculó dos pares de puntos para cada una de las rectas. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.4.b) Respuestas en porcentajes a la pregunta 17 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	3,03	27,28	3,23	32,25	0,00	30,31
Err. Tipo 4 (0,75)	0,00	3,03	0,00	9,68	0,00	0,00
Err. Tipo 3 (0,5)	3,03	18,18	0,00	16,13	0,00	27,27
Err. Tipo 2 (0,25)	3,03	6,06	0,00	6,45	0,00	6,06
Err. Tipo 1 (0)	0,00	27,27	0,00	3,23	0,00	15,15
No contesta (0)	90,91	18,18	96,77	32,26	100,00	21,21

También en esta cuestión, el grupo TIC obtiene los resultados mejores (30,31%), seguido de cerca por el Tradicional y más alejado el Cooperativo. En esta pregunta con contenido nuevo consiguen una mejoría notable los tres grupos con diferencias mutuas escasas. La conexión del álgebra con las funciones es bastante relevante, poder identificar la expresión algebraica con una gráfica es una relación que irá aumentando en dificultad poco a poco en cuarto ESO y bachillerato. Al parecer esta cuestión no se había explicado con anterioridad al inicio de la investigación y de ahí la polarización masiva, entre el 90% y el 100% de las frecuencias convergieron sobre la rúbrica *no contesta*. Al final de la investigación, se percibe un notable aprendizaje de la cuestión propuesta, teniendo en cuenta que las explicaciones dadas fueron bastante someras, por exigencia del guión de explicaciones programadas.

<u>Pregunta 18ª:</u>

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método que se quiera:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x+1}{4}-\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No han realizado la pregunta o lo que han hecho no se pudo calificar. La puntuación fue 0.

Universidad Pontificia de Salamanca

- *Error al preparar el sistema:* No ha sabido preparar el sistema, es decir, quitar denominadores y dejarlo como dos ecuaciones sencillas. La puntuación es 0.
- *Error ecuación:* Solo consiguieron preparar una de las ecuaciones. La puntuación fue de 0,25.
- *Error cálculo:* Se equivocaron en el cálculo o en resolver el sistema y no llegaron a ninguna de las soluciones. La puntuación es de 0,5.
- *Error resultado:* Se equivocaron en una solución, por errores de cálculo o de signo u olvido. Todo el procedimiento anteriormente descrito estuvo bien. La calificación es 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

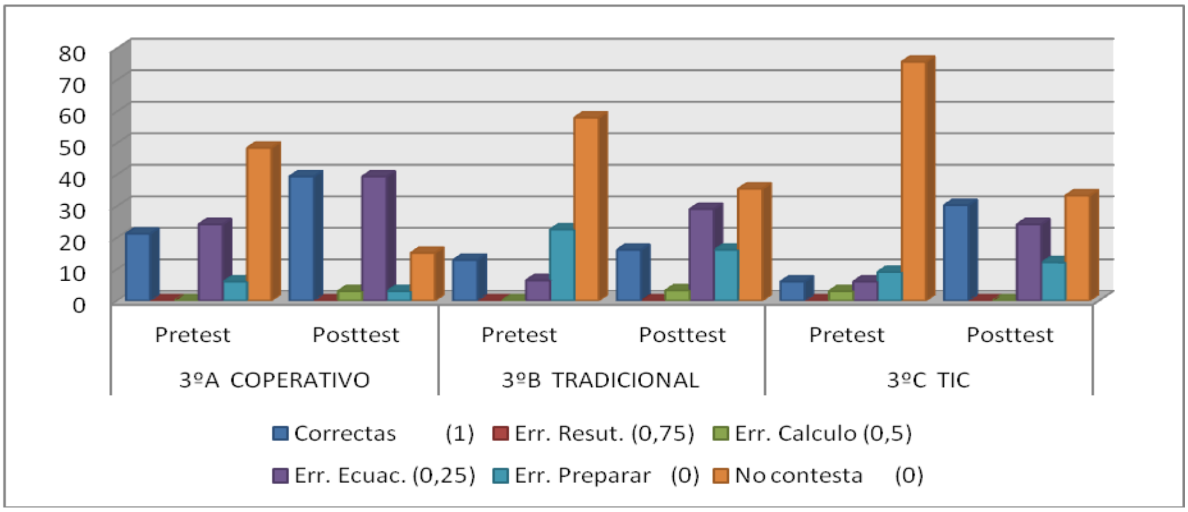
Tabla 7.3.4.c) Respuestas en porcentajes a la pregunta 18 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	21,22	39,40	12,91	16,13	6,06	30,31
Err. Resut. (0,75)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Err. Calculo (0,5)	0,00	3,03	0,00	3,23	3,03	0,00
Err. Ecuac. (0,25)	24,24	39,39	6,45	29,03	6,06	24,24
Err. Preparar (0)	6,06	3,03	22,58	16,13	9,09	12,12
No contesta (0)	48,48	15,15	58,06	35,48	75,76	33,33

Este sistema de dificultad de tercero ESO consigue un porcentaje bajo de respuestas correctas. La dificultad de este sistema está en la operatoria con fracciones, el uso del signo *menos* delante de las fracciones no está completamente conseguido, como hemos visto a lo largo de las respuestas obtenidas en el test. En el grupo Cooperativo el porcentaje de respuestas correctas alcanzó el 39,40% y en el grupo TIC se elevó al 30,31 %. En todo caso, los resultados positivos de estos dos grupos son superiores a los del grupo Tradicional.

Universidad Pontificia de Salamanca

Gráfico 7.3.c) Resultados en porcentajes de los alumnos de tercero ESO a la pregunta 18



<u>Pregunta 19ª:</u>

Las edades de dos niños suman 46 años. Hace 6 años, su diferencia era 30 años. ¿Cuál son sus edades?

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se puede calificar. La puntuación es 0.
- *Error planteamiento.* No llegaron a ninguna de las ecuaciones del planteamiento.
- *Error ecuación 1:* El planteamiento no fue del todo correcto ya que llegaron a una de las ecuaciones pero a la otra no. La puntuación es de 0,25.
- *Error cálculo:* El planteamiento fue correcto pero se equivocaron en cálculos o en saber resolverlo y no llegaron a ninguna de las soluciones. La puntuación es de 0,5.
- *Error resultado:* Se equivocaron en una solución, por errores de cálculo o de signo u olvido. Todo el procedimiento anteriormente descrito estuvo bien. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 7.3.4.d) Respuestas en porcentajes a la pregunta 19 de los alumnos de tercero ESO.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	51,52	60,61	54,83	61,29	36,37	51,52
Err. Result.(0,75)	0,00	0,00	3,23	0,00	3,03	0,00
Err. Calculo(0,5)	6,06	6,06	6,45	9,68	6,06	15,15
Err. Ecuac1(0,25)	36,36	30,30	32,26	29,03	39,39	27,27
Err. Plantamt. (0)	6,06	3,03	3,23	0,00	15,15	6,06
No contesta (0)	33,33	12,12	29,03	12,90	24,24	9,09

Hay una mejora en el porcentaje de respuestas correctas sin embargo el porcentaje de errores en sacar la segunda ecuación del planteamiento sigue siendo importante el porcentaje aprendizaje. La mejoría más trabajada es la del grupo TIC que subió 15 puntos del pretest al posttest y han progresado visiblemente en evitar los errores de planteamiento y de ecuaciones 1.

Pregunta 20ª:

En una granja se crían gallinas y conejos. Si en total hay 50 cabezas y 134 patas ¿cuántos animales hay de cada clase?

Las respuestas las he calificado de acuerdo a los criterios que siguen:

- *No contesta:* No ha realizado la pregunta o lo que ha realizado no se puede calificar. La puntuación es 0.
- *Error planteamiento.* No llegaron a ninguna de las ecuaciones del planteamiento.
- *Error ecuación 1:* El planteamiento no fue del todo correcto ya que llegaron a una de las ecuaciones pero no a la otra. La puntuación fue de 0,25.
- *Error cálculo:* El planteamiento fue correcto pero se equivocaron en cálculos ó en saber resolverlo y no llegaron a ninguna de las soluciones. La puntuación fue de 0,5.
- *Error resultado:* Se equivocaron en una solución bien por errores de cálculo o de signo u olvido. Todo el procedimiento anteriormente descrito estuvo bien. La calificación fue 0,75.
- *Correctas:* Si el procedimiento y las soluciones fueron completamente correctas, obtuvieron la máxima puntuación, un uno.

Tabla 7.3.4.e) Respuestas en porcentajes a la pregunta 20 de los alumnos de tercero ESO.

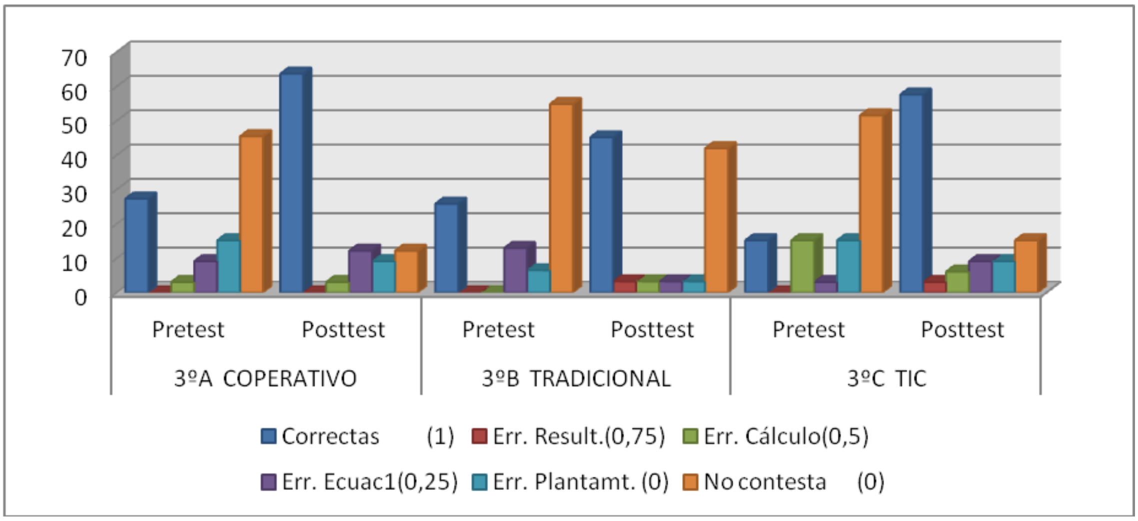
	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Correctas (1)	27,28	63,64	25,81	45,14	15,15	57,58
Err. Result.(0,75)	0,00	0,00	0,00	3,23	0,00	3,03
Err. Cálculo(0,5)	3,03	3,03	0,00	3,23	15,15	6,06

Universidad Pontificia de Salamanca

Err. Ecuac1(0,25)	9,09	12,12	12,90	3,23	3,03	9,09
Err. Plantamt. (0)	15,15	9,09	6,45	3,23	15,15	9,09
No contesta (0)	45,45	12,12	54,84	41,94	51,52	15,15

En esta pregunta el porcentaje de personas que no contestan disminuye sustancialmente en los grupos Cooperativo y TIC que, además, mejoran mucho en los resultados obtenidos. En esta cuestión, los alumnos del grupo TIC logran el mayor avance en aprendizaje entre el pretest y el posttest,. Los que siguieron el aprendizaje Cooperativo obtuvieron un buen resultado de 63,64% de respuestas correctas. Los alumnos del grupo Tradicional consiguieron un aprendizaje positivo, aunque inferior a los de otros grupos y no lograron bajar el porcentaje de los que *no contestan,* como ocurrió en los otros dos grupos.

Gráfico 7.3.d) Respuestas en porcentajes del problema de la pregunta 20 de los alumnos de tercero ESO.



7.3.5.- Resultados finales

Este capítulo siete dedicado al aprendizaje de las matemáticas se construye empíricamente sobre los estudios de álgebra a un nivel ya de notable madurez, como corresponde a los estudiantes de tercer curso de la ESO, que han dedicado ya a esta parte de las matemáticas, los dos cursos precedentes y el primer trimestre del curso actual. Por consiguiente se espera de los estudiantes con los que se proyectó hacer la investigación empírica, que dispongan de un cierto bagaje de información y de

Universidad Pontificia de Salamanca

conocimientos que, a priori al menos, permitan la elaboración de un cuestionario sobre ecuaciones de primer grado, problemas algebraicos, ecuaciones de segundo grado y sistemas de dos ecuaciones y de dos incógnitas, como es obvio, todas cuestiones matemáticas de álgebra de progresiva complejidad.

Desde esta perspectiva se elaboró un único cuestionario que se cumplimentó por los estudiantes inmediatamente antes del inicio de la investigación y el mismo cuestionario se volvió a cumplimentar al final de la investigación. Que fuera un mismo cuestionario se concibió para que el procedimiento de cumplimentación inicial y final permitiera captar mejor la ganancia de aprendizaje, puesto que se podía comparar el bagaje de conocimientos y destrezas de inicio con el del final, adquirido mediante la investigación. Es obvio que estas mediciones no tienen la exactitud y el rigor científico de las mediciones de artefactos o de fenómenos naturales, pero la aplicación de los procedimientos se hace siguiendo estrictos protocolos científicos, que es lo que puede exigirse del investigador en las presentes circunstancias. Los resultados fueron elaborados mediante fórmulas matemáticas y los resultados tienen el marchamo matemático. Mediante el procedimiento establecido y la elaboración subsiguiente, en mi parecer, estoy en condiciones de ofrecer unos resultados finales.

La ganancia de conocimientos, habilidades o destrezas y competencias, adquiridas por los estudiantes durante la investigación, es decir, desde el pretest hasta el posttest viene definida con la siguiente fórmula: *ganancia normalizada* es la razón del aumento entre el pretest aplicado al inicio de la investigación y el posttest aplicado al final, con respecto al máximo aumento posible, tiene valores que cubren el intervalo de [0,1] y se calcula como aparece en la fórmula que sigue (Hake, 1998):

$$Ganancia\ normalizada\ de\ Hake\ corregida = \frac{Nota\ Posttest(\%) - Nota\ Pretest(\%)}{100 - Nota\ Pretest(\%)}$$

Tabla 7.4.1.- Comparativa de las notas medias en porcentajes de *ecuaciones* de primer grado total y *problemas*. Conclusión primera.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Ecuaciones 1er grado Total	58,01	68,07	62,33	68,89	52,06	67,32
Ganancia Total Ecs. 1er grado	0,24		0,17		0,32	
Problemas Ecs. 1er grado	55,30	59,60	62,63	65,59	48,48	60,61

Universidad Pontificia de Salamanca

Ganancia Probl. Ecs 1^{er} grado	0,10		0,08		0,24	
Ejercicios Ecs. 1^{er} grado	60,04	74,43	62,10	71,37	54,73	72,35
Ganancia Ejerc. Ecs 1^{er} grado	0,36		0,24		0,39	

1a) Como consecuencia de la investigación llevada a cabo con los estudiantes de tercero de la ESO se ha producido un progreso en el aprendizaje matemático de los estudiantes, principalmente en los ejercicios más que en problemas. Este progreso es obvio en lo que respecta a las ecuaciones de primer grado, que ya han estudiado en cursos precedentes. En los problemas algebraicos han progresado, aunque ya tropezaron con la dificultad de pasar el problema enunciado a un planteamiento algebraico.

1b) Tanto en las ecuaciones como en los problemas algebraicos el grupo TIC ha sido el que más ha progresado teniendo en cuenta que partía de la calificación media más baja en el pretest y llega a conseguir mayor nota media que el grupo Cooperativo. Le sigue de cerca el grupo Cooperativo y después se sitúa el Tradicional que partía de la calificación media más alta en el pretest. Sin embargo la mejor nota media de clase la lleva el grupo Tradicional.

Tabla 7.4.2.- Comparativa de las notas medias en porcentajes de *ecuaciones de segundo grado* total y problemas. Conclusión segunda.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Ecuaciones 2º grado Total	36,08	58,14	40,52	61,79	31,25	57,67
Ganancia Total Ecs 2º grado	0,35		0,36		0,38	
Problemas Ecs. 2º grado	52,27	72,73	43,55	75,81	45,45	72,73
Ganancia Probl. Ecs. 2º grado	0,43		0,57		0,50	
Ejercicios Ecs. 2ºgrado	33,77	56,06	40,09	59,79	29,22	55,52
Ganancia Ejerc. Ecs. 2º grado	0,34		0,33		0,37	

2a) Con el referente de las ecuaciones de segundo grado los tres grupos han mejorado. Se trata todavía de una materia que ya han dado en el curso segundo y por tanto parten de una posición holgada. Sin embargo la mejoría es más holgada en los

Universidad Pontificia de Salamanca

problemas con ecuaciones de segundo grado que la obtenida en las ecuaciones del mismo grado.

2b) En cuanto a las ganancias, en las ecuaciones el grupo TIC, con el apoyo tecnológico, escala desde la posición inicial más baja a la posición más alta de los tres grupos y el Tradicional ocupa la segunda posición, si bien prácticamente igualada con el Cooperativo. En nota media por clase están muy cerca un grupo de otro tanto en problemas como en resultados. En las ecuaciones de segundo grado, el grupo Tradicional se mantiene en la primera posición que ya ostentaba en el pretest, seguido del grupo TIC y apenas distanciado el Cooperativo. En la nota media de clase no hay grandes diferencias entre los grupos. En relación con los problemas de ecuaciones de segundo grado, el grupo Tradicional obtiene la mayor ganancia, seguido del grupo TIC y luego el Cooperativo.

Tabla 7.4.3.- Comparativa de las notas medias en porcentajes de *sistemas de dos ecuaciones* y dos incógnitas total y *problemas*. Conclusión tercera.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Sistemas Ecuaciones	28,79	56,82	30,81	53,71	22,88	58,94
Ganancia Total Sistemas Ecs.	0,39		0,33		0,47	
Problemas Sistemas Ecs.	30,68	63,64	34,27	55,24	26,89	60,98
Ganancia Probl. Sistemas	0,48		0,32		0,47	
Ejercicios Sistemas Ecs.	27,53	52,27	28,49	52,69	20,20	57,58
Ganancia Ejerc. Sistemas	0,34		0,34		0,47	

3a) En relación con los sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y los correspondientes problemas, las posiciones de partida de los estudiantes son más bajas, sin embargo se produce un sustancial progreso del aprendizaje en los tres grupos y adquieren mejor nota media total el grupo TIC, luego el Cooperativo y después el Tradicional partía con mejor media desde el comienzo.

3b) En relación con la ganancia el grupo TIC alcanza la mejor nota media por clase en los sistemas de ecuaciones, seguido de cerca por el grupo Cooperativo y en los

Universidad Pontificia de Salamanca

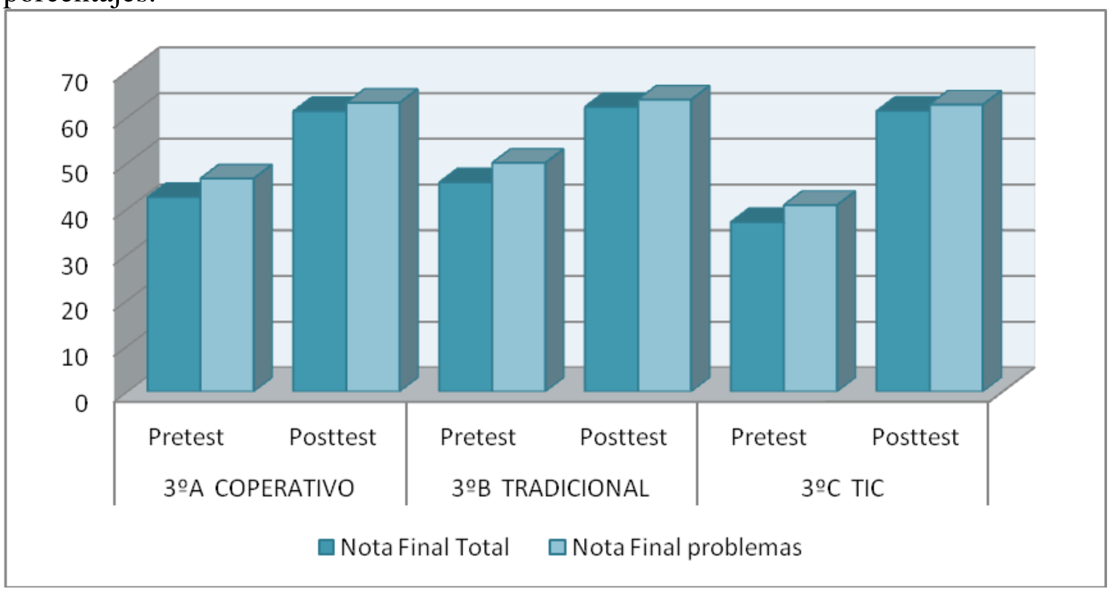
problemas de sistemas el mayor progreso va al grupo Cooperativo seguido del grupo TIC y en tercer lugar el Tradicional, a pesar de que en el pretest mostraba la mejor nota.

Tabla 7.44.- Comparativa de las notas *medias finales* totales y *problemas* en porcentajes.

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Nota Final total	42,54	61,29	45,73	62,26	37,08	61,36
Ganancia final total	0,33		0,30		0,39	
Nota Final Problemas	46,59	63,13	50,00	63,84	40,78	62,75
Ganancia final Problemas	0,31		0,28		0,37	
Nota Final Ejercicios	40,44	60,92	43,56	61,28	34,72	61,81
Ganancia final Ejercicios	0,34		0,31		0,41	

4a) Si tomamos como referente las notas medias finales totales y los problemas, todo en conjunto, la mayor ganancia de aprendizaje ha correspondido al grupo TIC y seguido muy de cerca por el grupo Cooperativo, casi igualados. La mejor nota es para el grupo tradicional, que ya en el pretest obtuvo la mejor calificación. Después de la experiencia investigadora los tres grupos están bastante igualados, si bien como hemos visto en la tabla precedente y en anteriores la mayor ganancia de aprendizaje corresponde al grupo TIC, seguido de cerca por el Cooperativo.

Gráfico 7.4.a) Gráfico comparativo de notas medias finales totales y de problemas en porcentajes.



Universidad Pontificia de Salamanca

En la gráfica, se perciben con bastante nitidez los resultados después de la experiencia, que se ha revelado como muy buena, según mi parecer, ya que los tres grupos han llegado a un nivel bastante similar. Aunque el grupo Tradicional (grupo B) sigue obteniendo una puntuación media superior, sin embargo, el grupo TIC y el grupo Cooperativo han obtenido mayores ganancias, han mostrado un mayor progreso en su aprendizaje desde el inicio de la investigación hasta el final. Es razonable sugerir que la influencia metodológica ha dejado sentir su presencia en el aprendizaje, que es el objetivo global de la tesis.

7.3.6.-Diferencias significativas

A igual que hemos hecho con el grupo de conocimientos, pasamos a comprobar la confidencialidad
Alfa de cronbach pretest=0,902
Alfa de cronbach posttest=0,889
La validez del test de conocimientos viene dado porque son preguntas seleccionadas de exámenes y de ejercicios puestos a los alumnos.
A continuación hacemos el tes de normalidad para ver si nuestros datos siguen una distribución normal. Una vez confirmados hacemos un test de anova univariante con las diferencias de la calificación obtenida entre el pretest y postest

Contraste de Levene sobre la igualdad de las varianzas error(a)

Variable dependiente: DIF_TOTAL

F	gl1	gl2	Significación
,731	2	93	,484

Contrasta la hipótesis nula de que la varianza error de la variable dependiente es igual a lo largo de todos los grupos.
a Diseño: Intersección+grupo

Vemos que no salen diferencias significativas. El resultado aunque nos hubiera gustado comprobar las diferencias significativas el saber que la primera vez que se utiliza otras metodologías no hayan bajado los resultados sino que incluso los tres grupos han alcanzado un nivel similar lo tomamos como un buen resultado.

Universidad Pontificia de Salamanca

7.3.7.- A modo de síntesis

La presentación de los resultados obtenidos de la cumplimentación de los cuestionarios de conocimientos se concretó en una serie de ejercicios y problemas de distinta complejidad y referidos a diferentes partes del álgebra. Se presentaron ejercicios de ecuaciones de primer grado así como también problemas que requerían de estas ecuaciones para su correcta solución.

Del mismo modo se procedió con las ecuaciones de segundo grado y sus correspondientes problemas, que obviamente entrañaban dificultades mayores que los anteriores, además de que este tipo de ejercicios y problemas, aunque fueron ya estudiados en primero y segundo curso de la ESO, sin embargo, se vuelve sobre ellos en tercero para estudiarlos en un nivel de mayor complejidad.

Un tercer bloque temático lo constituyeron los sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y los correspondientes problemas. Esta es una temática que a veces se incluye en el currículo del segundo curso de la ESO, pero es sobre todo la temática fuerte a estudiar, mediante ejercicios y problemas, en los cursos de tercero y siguientes. En este sentido constituye un área de la materia de álgebra que comprende unos niveles de dificultad notable, que le hizo más difícil alcanzar niveles adecuados de corrección.

Cada uno de los ejercicios y problemas se estructuró como preguntas, a las que acompañaron los criterios de calificación de los ejercicios y problemas atendiendo a todas las alternativas desde la corrección total de la respuesta hasta el no contesta, pasando por distintos tipos de errores, de planteamiento, de resultados, de cálculo, de despejar la incógnita, y otros tipos de dificultades en función de los ejercicios y problemas presentados. A cada uno de estos errores le acompañaba la calificación que se le otorgaba. Estos resultados se presentaron en formato de tablas y a veces en gráficos, cuando se consideraba conveniente para fijar mejor las tendencias. Al final se presentó un resumen cuantificado de los resultados en función de estos tres grandes capítulos de temática, que se han mencionado al comienzo.

Universidad Pontificia de Salamanca

7.4.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOOTH, L.R., (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. (NFER-Nelson: Windsor, UK).

DRIJVER, R.; GUESNE, E. y TIBERGHIEN, A., (1989). *Ideas científicas en la infancia y la adolescencia.* Madrid: Morata.

DUBINSKY, E., (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

GONZÁLEZ, A., (2004). "Características técnicas de los instrumentos de medida desde la teoría clásica de los tests. Fiabilidad, validez". En MARTÍNEZ, C., Coord., *Técnicas e instrumentos de recogida y análisis de datos.* Madrid: UNED.

KIERAN, C., (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In NESHER, P. & KILPATRICK, J., (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

MORALES, p., (2007). *La fiabilidad de los tests y escalas.* Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

MORALES, P., (2009). "El problema de la unidad de análisis en la investigación educacional: datos individuales o medias de grupos". http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/UnidadAnalisis.pdf (Consulta: 25/ abril/ 2013).

NORTON, S. & IRVIN, J. (2007). A concrete approach to teaching symbolic algebra. In J. Watson & K. Beswick (Eds.) *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, MERGA Inc. Retrieved: Dec. 20, 2007 from http://www.merga.net.au/documents/RP502007.pdf

NUNNALLY, J. C. (1978). *Psychometric theory*. New York: McGraw-Hill.

SOCAS, M., (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones a la investigación. En *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Vol. 77, julio 2011, págs. 5-34. < http://www.sinewton.org/numeros> (Consulta 19 enero 2013).

Universidad Pontificia de Salamanca

SOCAS, M. M., (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Cap. V, pp. 125-154. En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

STACEY, K, & CHICK, H., (2004). Solving the problem with algebra. In STACEY, K., CHICK,H. & KENDAL, M (Eds.),*The Future of Teaching and Learning of Algebra*. *The 12th ICMI Study* (pp. 1-20). Boston: Kluwer.

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 8

CONCLUSIONES Y PROPUESTA

C O N T E N I D O **PÁGS.**

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo 8.- CONCLUSIONES Y PROPUESTA

8.1.-CONCLUSIONES.

8.1.1.-Conclusión epistemológica: La educación y las matemáticas en la sociedad actual del conocimiento.

Con el concepto epistemológico quiero recapitular el papel metodológico que ha desempeñado la matemática en el desarrollo de las ciencias y, a mi juicio, el que debe seguir manteniendo en relación con las estrategias pedagógicas para hacer más eficaz su enseñanza en el contexto de la actual sociedad globalizada del conocimiento, más allá de sus objetivos estrictamente pedagógicos[205]. Propongo esta conclusión, no en virtud de un voluntarismo subjetivo, sino como consecuencia de la argumentación general de la tesis, desde la que se justifica la reforma de contenidos y procedimientos didácticos y pedagógicos en la enseñanza secundaria obligatoria, en particular con relación a las matemáticas, con el fin de que los programas escolares, además del conocimiento de las diversas materias, contribuyan al fomento de la innovación y la creatividad para que la sociedad española y europea sigan avanzando hacia las metas de desarrollo social y científico-técnico, exigibles para la promoción de los individuos y el desarrollo de los países de la Unión Europea, en la actual coyuntura de competitividad internacional.

No cabe duda que la globalización y la acumulación de cambios que la acompañan, generan incertidumbres para todos, crisis principalmente económicas, pero también educativas y sociales, que causan asimetrías persistentes e indeseables muy perturbadoras para los sectores socialmente más vulnerables. Es igualmente cierto que tanto la globalización como la convergencia de los cambios ofrecen nuevas oportunidades, que debieran ser un estímulo para una educación de calidad. La sociedad española y europea, como otras muchas, se están transformando y experimentando avances sin precedentes con consecuencias positivas, aunque no siempre, porque los progresos tecnológicos, tal como en nuestros días estamos experimentando, van

[205] Entiendo el concepto *epistemológico* como la expresión de los fundamentos y métodos del conocimiento científico.

Universidad Pontificia de Salamanca

acompañados de crisis intensas - axiológicas, ideológicas, sociales, económicas, políticas - que proyectan serias incertidumbres sobre la acción educativa, a las que en Europa y España se añade un doble efecto, que está sacando a luz la crisis económica. Por una parte, trae a primer plano las insuficiencias, cuando no el fracaso de la educación tradicional, incapaz o insuficiente para prevenir las actuales convulsiones, no sólo económicas, sino axiológicas, psicológicas y sociales. Por otra parte, la crisis económica hace peligrar la eficacia de los propios sistemas educativos, desprovistos de objetivos claramente definidos y con escasez de medios, lo que implica riesgos previsibles para la continuidad del necesario progreso científico, económico y social de las futuras sociedades. Hasta tiempos recientes Europa fue pionera en el campo educativo, en el de la ciencia y la cultura, pero en estos momentos la mayoría de los países europeos ocupan posiciones muy poco significativas, cuando no irrelevantes, si la comparación se establece con los países asiáticos y los de América del Norte.

Los beneficios sociales del progreso científico se demoran en la medida en que el conocimiento, en nuestros días priorizado y supervalorado, se continúa aplicando a las herramientas, a los productos y al trabajo, en lugar de dirigirse al saber mismo, a la producción, renovación e innovación de conocimientos, para que la economía no continúe tan dependiente de la industria y la mecanización. Desde esta perspectiva, el siglo XXI deberá acrecentar las exigencias de revisión y cambio de los sistemas educativos, porque su acertada articulación, científica y humanamente formativa, es el recurso imprescindible para hacer frente al ineludible y progresivo advenimiento de los profundos cambios, que afectan a aspectos con implicación antropológica por sus repercusiones psicológicas y éticas, así como a los que tienen que ver con la diversa valoración de la propia vida humana, las modalidades de familia, los sistemas de relaciones personales, además de todo cuanto exigen las mutaciones permanentes en los ámbitos técnicos y operativos de la vida cotidiana personal y colectiva. Y, con más concreción, sin una educación básica sólida no parece posible acceder a los beneficios de la desregularización del mercado, a la privatización y el impulso de la actividad creadora en las empresas, ni siquiera a la expansión de las tecnologías de la información y la comunicación, imprescindibles para el desarrollo sostenible.

No ha de olvidarse que la competitividad tiene lugar en un mundo progresivamente más abierto, lo que requiere una población debidamente educada, capaz de competir con sus pares en cualquier escenario cosmopolita desde la perspectiva cultural, económica y tecnológica. En este contexto, los sistemas educativos

Universidad Pontificia de Salamanca

son los llamados a capacitar a los ciudadanos para la nueva sociedad global, asumiendo como primer reto el de impartir preparación técnica exigente, con calidad muy superior a la que en el presente se está alcanzando, sin pasar por alto los valores humanísticos y éticos. No es suficiente la disponibilidad de la información y las tecnologías, es necesaria la capacitación cognitiva y práctica para aprovecharlas y hacerlas rentables.

Desde estos supuestos, he defendido en la tesis y ahora retomo en esta conclusión, que el sistema educativo ha de asumir como objetivo insoslayable el equipamiento humano y moral coherente que permita al individuo integrarse en la sociedad global, en relación solidaria con sus semejantes. Esta dimensión ha de nutrirse de los valores que denominamos Derechos Humanos que conforman el escenario de una convivencia interactiva propicia a la organización democrática de la sociedad y de los Estados, en actitud tolerante y solidaria con el diferente, con el emigrante, con el otro, sea quien fuere, sin menoscabo de continuar la adhesión a los valores y tradiciones de la propia cultura. Si, desde los griegos es una verdad indiscutible, la esencia misma de la humanidad se manifiesta por la sociabilidad, no es menos cierto que la educación constituye la mediación, igualmente esencial, tanto para la integración solidaria como para la acción eficaz. Y eso no de manera genérica, sino como exigencia incrementada por la complejidad de la estructura social en la que el individuo se ve obligado a afrontar tareas heterogéneas y funciones diferentes, más profesionales que vocacionales, oscilantes entre la continua sucesión de cambios.

En este contexto educativo, según opiniones de la psicopedagogía tradicional, avaladas al día de hoy por los *Informes Pisa*, *Timss y Pirls, las competencias matemáticas y de comprensión lingüística* son el primer eslabón para el equipamiento de las competencias intelectuales, tanto las más teóricas como las aplicadas a la producción tecnológica. De tal certeza han de ser conscientes no sólo las instituciones pedagógicas, sino las políticas, sociales y empresariales, que deberán comprometerse con acciones educativas orientadas en tal dirección. En este empeño los países avanzados de Asia están marcando el camino a los europeos, como puede comprobarse si se consultan y comparan los ranking sobre las competencias cognitivas, teóricas y aplicadas, de estudiantes europeos y asiáticos. Si bien los retos de la actualidad demandan prioritarias habilidades técnicas para la vida profesional, no puede pasarse por alto que éstas no se alcanzarán sin pasar por las competencias en comprensión lingüística y en el cálculo matemático. Lo que tampoco es una novedad si se atiende a la presencia histórica de las matemáticas, como se recapitula continuación.

Universidad Pontificia de Salamanca

En Grecia, la conveniencia de educar a los ciudadanos produjo la figura del pedagogo, precursor del maestro y de la educación institucionalizada, con el fin de formar niños y jóvenes adaptados a la convivencia ciudadana dentro de los ideales y proyectos de la polis. En este contexto la educación matemática abrió paso a la contemplación, explicación y comprensión geométrica de la naturaleza, del cosmos griego. Platón la convierte en el santo y seña del conocimiento verdadero y extiende su aplicación a los entornos urbanos y al diseño de las futuras ciudades, para prevenir su autosuficiencia en recursos y defensa, mediante el control de la propia población. La educación matemática en Aristóteles adquiere matices éticos y se configura como referencia métrica de las conductas morales y de las virtudes sociales. Cuando Grecia deja de vivir encerrada en sus fronteras y se asoma a las otras riberas mediterráneas, se amplía la utilidad práctica de las matemáticas, que llega a ocupar el centro de la ciencia helenística. Se crean escuelas para enseñar matemáticas en Alejandría con Euclides y la investigación e innovación extienden sus aplicaciones a los escenarios bélicos y a la calidad de vida en las ciudades. Euclides, Arquímedes, Apolonio de Perga, Ptolomeo y su *Almagesto*, Diofanto, son eminentes representantes tanto de la investigación y del progreso de las matemáticas, cuanto de sus aplicaciones docentes y técnicas.

La doctrina cristiana, particularmente su ética, reclama esencial atención a los problemas derivadas de los usos de la libertad, asunto fundamental al que dedicó su atención la enseñanza monacal y las inquietudes intelectuales de las universidades medievales, con cultivo esmerado del conocimiento intelectual más teórico. Es un período en el que las preocupaciones religiosas no atendieron al estudio de las matemáticas y de las ciencias que, sin embargo, adquiere vigor en la cultura islámica a partir del contacto con las doctrinas griegas. En el escenario del monacato se percibe un cierto impulso de los nuevos intereses matemáticos en el siglo XIV.

Con la Edad Moderna las matemáticas se erigen en la clave metodológica de la Nueva Ciencia renacentista, cuya epistemología admite como verdadero sólo las leyes matemáticamente formuladas. El renacimiento italiano, como advierte Bertrand Russell, es expresión de la presencia de las matemáticas transformada en belleza fría y austera en las proporciones de la escultura y adquiere belleza elegante y colorido en las composiciones pictóricas. A partir del siglo XVII la matemática asume el protagonismo,

Universidad Pontificia de Salamanca

no sólo de la nueva física, sino de todos los saberes emergentes[206]. Y en el XVIII se convierte en instrumento indispensable para el avance de otras ciencias, con sus aplicaciones empíricas y utilitarias, en busca de una nueva sociedad organizada científicamente, basada en las posibilidades de la razón. En esta mentalidad ilustrada, que en gran medida perdura en el siglo XIX, los conocimientos matemáticos ofrecen recursos racionales y teóricos para la fabricación de nuevas máquinas e instrumentos de utilidad pública, lo que convierte a la matemática en un factor fundamental del tejido social (Goñi, JM 2008:22-24). Desde la perspectiva de nuestro siglo, me parece oportuno señalar que la presencia educativa del saber matemático actuó de pilar sobre el que se construyó el progreso de las ciencias, con repercusiones en la organización social. Sin embargo, para algunos autores, en la actualidad, las matemáticas acusan la crisis generalizada de los diversos niveles educativos, sin que eso merme su influencia determinante en todas las áreas de investigación científica y tecnológica, que igual alcanza a la construcción de naves espaciales que al envío de sondas dirigidas y repletas de números y algoritmos al espacio exterior, que bien podrían ser la primera forma de comunicarnos con razas alienígenas inteligentes (Pickover, 2009).

8.1.2.- Coherencia de las conclusiones con los objetivos propuestos

Tras el proceso de argumentación documental y empírica, se entra en la fase nueva de la investigación: mediante la inferencia se logran determinadas conclusiones, unas más genéricas y otras más específicas, del pertinente análisis de la información recogida, por cuanto las conclusiones interpretan y expresan la significación y el alcance teórico de dichos resultados. En mi propósito actual está seguir investigando en esta temática, desde la perspectiva que ofrecen las conclusiones halladas, diseñar y llevar a cabo investigaciones similares con alumnos de estos u otros cursos de la ESO, de otros centros, en orden a alcanzar cotas más altas de validación científica y de

[206] Galileo en *Il Saggiatore,* obra 1623, en la que comenta críticamente las teorías de Lotario Sarsi Sigensario, confirma el papel trascendental de la matemática para la comprensión del universo. Con sus palabras: "La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto". *El Ensayador*, Aguilar, Buenos Aires, 1981, § 6, p. 63.

Universidad Pontificia de Salamanca

profundizar en el conocimiento de los problemas que la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas presenta en la enseñanza secundaria obligatoria. Con este procedimiento de actuación u otros semejantes se robustece el carácter definitivo de las conclusiones, siempre, como es obvio, teniendo en cuenta que lo definido como definitivo, en el ámbito de la ciencia no es sino provisionalmente definitivo, mientras no surjan otras propuestas igualmente verosímiles u otros hechos que cuestionen tales conclusiones. Esta circunstancia universalmente aceptada en el ámbito de la ciencia no invalida, sin embargo, el esfuerzo de los metodólogos en la búsqueda de procedimientos mejores y útiles para la consolidación de la seguridad de las conclusiones, a los que siempre estaré atenta.

Las pretensiones de validez de una investigación, según la bibliografía autorizada, deben valorarse a partir de la coherencia entre los objetivos propuestos y las conclusiones alcanzadas tras la argumentación documental o empírica utilizada en la investigación. En el caso de esta tesis, entiendo que se ha alcanzado tal propósito puesto que, tanto por los capítulos conceptuales de naturaleza más teórica, como por la investigación empírica realizada, las conclusiones que proponemos vienen a ser la concreción práctica de los objetivos que habíamos prefijado. Tal coherencia nos parece clara a través de las siguientes concreciones que formulamos teniendo a la vista cada uno de los objetivos propuestos y los resultados obtenidos.

1.- El objetivo fundamental, orientado a investigar los procedimientos pedagógicos y didácticos que pudieran resultar de mayor eficacia a la relación enseñanza-aprendizaje del álgebra en particular y de las matemáticas en general, lo consideramos ampliamente conseguido tras la aplicación y valoración de los resultados alcanzados por las pruebas empíricas, como se podrá comprobar por las conclusiones específicas que siguen. A partir de tal supuesto, ***nuestra conclusión fundamental muestra la conveniencia de un equipamiento tecnológico adecuado en las aulas de matemáticas, que anime al profesorado a utilizar los recursos de las TIC y el modelo cooperativo como procedimientos que favorecen la enseñanza de las matemáticas*** en los niveles en que se han experimentado.

2.- Los objetivos asociados a la motivación, tanto de profesores como de alumnos, han sido plenamente alcanzados y argumentados por doble vía. En primer lugar, por las razones esgrimidas en el capítulo dedicado a la formación de profesores,

Universidad Pontificia de Salamanca

algunas de las cuales se recogen en la propuesta que se hace sobre la formación y acreditación del profesorado. En segundo lugar, mediante la propuesta derivada de la experiencia de los modelos TIC y cooperativo, que lleva implícito el fomento de la motivación que supone la interacción complementaria de los alumnos y la condición de estímulo que supuso el uso de las nuevas tecnologías, favoreciendo el interés y la atención por los asuntos imbricados en la dinámica de la clase, que se discuten en el grupo, facilitan la competencia para explicar, comunicarse e incluso formalizar oralmente o por escrito los temas explicados, discutidos y estudiados

No cabe duda que si los estudiantes se sienten motivados y estimulados para el estudio de las matemáticas, las probabilidades de éxito y buenos resultados serán más asequibles. Por esta razón, se ha indagado en los objetivos de las motivaciones internas y externas, psicológicas personales, familiares y sociales que pueden dar razón del interés o desinterés de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. De los resultados obtenidos, podemos concretar algunos núcleos de motivación como los siguientes:

2.1.- Los estudiantes están muy sensibilizados sobre la necesidad y utilidad de las matemáticas en todos los órdenes de la vida.

Los investigados tienen asumida una significativa y generalizada opinión de la utilidad y la necesidad de las matemáticas para funcionar correctamente en la vida, tener éxito profesional e iniciar con provecho los estudios superiores. Están convencidos que en esta creencia cuentan con el total apoyo, de incuestionable importancia, de su grupo familiar y del grupo de amigos y compañeros, que siguen de cerca su trabajo y resultados. Son conscientes que desde este contexto recibirán ayudan si la necesitan y tienen experiencia de que le valoran los éxitos logrados. Los resultados han puesto en evidencia un bloque motivacional de enorme trascendencia.

2.2.- El profesor es un agente muy valorado de motivación para el aprendizaje de las matemáticas.

Este segundo núcleo de apoyo motivador se construye sobre la relaciones entre los estudiantes y el profesor: los estudiantes investigados tienen un concepto muy positivo del profesor de matemáticas, le aprecian por el seguimiento que hace de sus progresos en la comprensión matemática y en su rendimiento, valoran sus esfuerzos para animar la participación en la clase, por sus explicaciones y por su disponibilidad. Esta valoración unida a la convicción de sus propias capacidades para el aprendizaje matemático, de

Universidad Pontificia de Salamanca

gran arraigo en ambos grupos, destacando más los del segundo curso, en hipótesis al menos, constituye una combinación motivadora de insoslayable eficacia.

2.3.- Los estudiantes están instalados con manifiesta seguridad, en una trama afectiva y racional de autoestima, que les permite decantarse con decisión por el éxito en el aprendizaje de las matemáticas, con más decisión los del curso segundo que los de tercero.

La trama motivadora de impacto se configura a partir de las dimensiones más vinculadas al área afectiva o emocional mediante la autoestima, la confianza en sus capacidades, la curiosidad intelectual y la superación de los coyunturales bloqueos que cuidan de superar, apelando también a categorías más racionales como son las actitudes de interés, esfuerzo y constancia de importancia decisiva en el aprendizaje matemático.

2.4.- Las opiniones de los estudiantes desvelan estar motivados hacia la obtención de positivos resultados en el estudio de las matemáticas.

Una gama de opiniones sobre el aprendizaje matemático y sobre las mismas matemáticas desvelan arraigados impulsos de motivación, capaces de orientar la conducta de los estudiantes adolescentes hacia la obtención de positivos resultados en el estudio de las matemáticas: se decantan por la dificultad de las matemáticas y que se requiere inteligencia para comprenderlas, pero ellos no se consideran por ello gente rara, sino personas inteligentes. Los estudiantes se sienten especialmente motivados, en torno al 75%, a realizar bien las tareas, lo que le dispone a trabajar más, a llevar los ejercicios a casa y reclaman la felicitación por éxitos, que les anima para la resolución de los ejercicios matemáticos.

2.5.- Respecto de la importancia motivadora de las metodologías, de los resultados obtenidos de la investigación se pueden inferir dos conclusiones: a) Los estudiantes han valorado muy positivamente el procedimiento cooperativo y se han sentido a gusto. b) Los recursos tecnológicos han tenido favorable acogida, aunque no entusiasta, a excepción del grupo de 2ºC.

Estiman favorablemente el aprendizaje cooperativo, de manera especial como es obvio, el grupo que lo ha seguido. Se observó que se han sentido muy a gusto siguiendo esta metodología. En el grupo cooperativo se afirmó que los contenidos se han comprendido bien siguiendo esta enseñanza.

Los recursos tecnológicos tuvieron mejor acogida en el grupo de 2ºC y valoran que favorece un mejor aprendizaje de los contenidos. Se sienten positivamente motivados por estos recursos, queda claro en el curso 2ºC.

Universidad Pontificia de Salamanca

La metodología cooperativa y el uso de las tecnologías parece influir en que los estudiantes hayan considerado la memoria menos importante para el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo los del grupo tradicional afirman que el papel de la memoria es decisiva en el aprendizaje. En los que han seguido la metodología tradicional parece decaer su motivación por las matemáticas hasta el punto de que, en algunos casos, pierden la curiosidad por conocer la solución. En cambio, en los estudiantes que han seguido las otras metodologías ha crecido este aspecto, interesante de cara a fomentar la motivación intrínseca en estos alumnos a la hora de estudiar matemáticas.

3.- El objetivo empírico de la tesis se ha alcanzado ampliamente, tanto en su aspecto formal como en su valoración pedagógica. Desde el punto de vista formal, la experimentación empírica se ha llevado a cabo bajo las condiciones de rigor metodológico exigidas por la investigación sociológico-educativa planteada, lo que justifica concluir que la tesis ha alcanzado los propósitos de una investigación original. Desde el punto de vista pedagógico, concluir en la importancia del uso de procedimientos tecnológicos como modelos útiles en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, no aparece como una conclusión voluntarista infundada, sino comprobada y testada empíricamente. Por consiguiente, con las precauciones acostumbradas en estos casos estimo como conclusiones verificadas por los resultados obtenidos las que siguen, que se muestran primero en su formulación matemática y luego en su formulación lingüística.

Cuadro nº 8.1.- NOTAS MEDIAS GLOBALES Y GANANCIAS OBTENIDAS (Datos en %)

	2ªA TIC		2ºB TRADICIONAL		2ºC TIC	
	Pretest	Pos Test	Pretest	Pos Test	Pretest	Pos Test
Nota med. Total	62,35	87,08	57,70	69,93	46,10	76,46
Ganancia total	0,66		0,29		0,56	
Nota med.Probl.	63,33	91,18	47,66	68,55	40,66	75,00
Ganancia en problemas	0,76		0,40		0,58	
Nota med. Ejerc	61,61	84,01	65,23	70,97	50,19	77,55
Ganancia en Ejercicios	0,58		0,17		0,55	

Elaboración propia

Universidad Pontificia de Salamanca

3.1.- De los resultados obtenidos en la experiencia investigadora se infiere un claro progreso en el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes de segundo curso de la ESO.

En este proceso la competencia ha alcanzado no solo a los resultados obtenidos mediante ecuaciones y problemas. Se evidencia que también se avanzó en los complicados aspectos del planteamiento y, aunque con más dificultad, en las habilidades en el manejo de las reglas del despeje. El progreso fue más notorio en el uso de signos, fijar la atención en los números y en otras circunstancias imbricadas en el resultado.

3.2.- Es muy significativo el progreso alcanzado por los grupos TIC en el proceso de la enseñanza - aprendizaje matemático, que contaron con un aporte metodológico de apoyo en las tecnologías de la información y de la comunicación.

Estos dos grupos han obtenido una mejora de los resultados, a veces espectaculares, del inicio de la investigación hasta el final de la experiencia investigadora. En índices porcentuales es llamativo que tanto en las ecuaciones y como en los problemas hayan obtenido siempre mejores resultados que el grupo tradicional, a excepción de la primera ecuación. Si tomamos las notas medias globales de cada grupo, la ganancia obtenida por los TIC es doble o más del doble en relación con el grupo tradicional.

3.3.- La influencia de carácter tecnológico en la resolución de ecuaciones y problemas es incontestable.

En los resultados obtenidos, mediante ecuaciones y problemas, las influencias metodológicas son patentes y pienso que puede elevarse a conclusión verificada la especial influencia metodológica en el proceso de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas y en concreto, en la rama del álgebra, tanto en las ecuaciones como en los problemas, verificándose de esta manera el objetivo global de la tesis.

4.- Los objetivos empíricos y pragmáticos que habíamos prefijado se referían a tres ámbitos diferenciados, si bien estrechamente vinculados. Nuestras conclusiones se pueden sintetizar en las siguientes. a) Desde el punto de vista pedagógico, el *modelo cooperativo* responde a la psicología de los alumnos en los niveles experimentados y el *uso de procedimientos tecnológicos* le es connatural a los adolescentes actuales, contribuyendo a una educación integral de la personalidad propia de la pubertad y la

Universidad Pontificia de Salamanca

primera adolescencia. b) Desde el punto de vista didáctico, el *modelo cooperativo y los recursos tecnológicos* facilitan la actividad y la disposición a la interacción que caracteriza a tales edades. c) Desde el punto de vista cognitivo, el aprendizaje se adquiere con más facilidad a través de la interacción y del uso de las tecnologías a las que tan habituados están los estudiantes adolescentes. Mostramos a continuación los resultados globales obtenidos según la fórmula ya expuesta en el capítulo siete y luego las conclusiones.

Cuadro nº 8.2.- NOTAS MEDIAS GLOBALES Y GANANCIAS OBTENIDAS (Datos en %)

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Pos test	Pretest	Pretest	Pretest	Pos test
Nota Final total	42,54	61,29	45,73	62,26	37,08	61,36
Ganancia final total	0,33		0,30		0,39	
Nota Final Problemas	46,59	63,13	50,00	63,84	40,78	62,75
Ganancia final Problemas	0,31		0,28		0,37	
Nota Final Ejercicios	40,44	60,92	43,56	61,28	34,72	61,81
Ganancia final Ejercicios	0,34		0,31		0,41	

Elaboración propia

4.1.- Si tomamos como referente las notas medias finales totales, ejercicios y problemas en conjunto, los tres grupos han hecho notables progresos en su aprendizaje y los tres han obtenido ganancias.

La mayor ganancia de aprendizaje ha correspondido al grupo TIC y seguido muy de cerca por el grupo Cooperativo, casi igualados. La mejor nota es para el grupo tradicional, que ya en el pretest obtuvo la mejor calificación. Después de la experiencia investigadora los tres grupos están bastante igualados, las diferencias no son significativas, aunque la mayor ganancia de aprendizaje corresponde al grupo TIC, seguido de cerca por el Cooperativo.

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuadro nº 8.3.- ECUACIONES DE 1º GRADO Y PROBLEMAS

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Pos test	Pretest	Pretest	Pretest	Pos test
Ecuaciones 1^er grado Total	59,74	68,07	62,33	68,89	53,90	67,32
Ganancia Total Ecs. 1^er grado	0,21		0,17		0,29	
Problemas Ecs. 1^er grado	55,30	59,60	62,63	65,59	48,48	60,61
Ganancia Probl. Ecs 1^er grado	0,10		0,08		0,24	
Ejercicios Ecs. 1^er grado	60,04	74,43	62,10	71,37	54,73	72,35
Ganancia Ejerc. Ecs 1^er grado	0,36		0,24		0,39	

Elaboración propia

4.2.- Como consecuencia de la investigación llevada a cabo con los estudiantes de tercero de la ESO se ha producido un significativo progreso en el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Este progreso es obvio en lo que respecta a las ecuaciones de primer grado, que ya han estudiado en cursos precedentes. En los problemas algebraicos han progresado, aunque ya tropezaron con la dificultad de pasar el problema enunciado a un planteamiento algebraico. En las ecuaciones de primer grado y en los problemas algebraicos el grupo TIC ha sido el que más ha progresado teniendo en cuenta que partía de la calificación media más baja en el pretest. Le sigue de cerca el grupo Cooperativo y después se sitúa el Tradicional que partía de la calificación media más alta en el pretest. Sin embargo la mejor nota media de clase la lleva el grupo Tradicional.

Cuadro nº 8.4.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y PROBLEMAS

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Pos test	Pretest	Pos test	Pretest	Pos test
Ecuaciones 2º grado Total	36,08	58,14	40,52	61,79	31,25	57,67
Ganancia Total Ecs 2º grado	0,35		0,36		0,38	
Problemas Ecs. 2º grado	52,27	72,73	43,55	75,81	45,45	72,73
Ganancia Probl. Ecs. 2º grado	0,43		0,57		0,50	

Universidad Pontificia de Salamanca

Ejercicios Ecs. 2ºgrado	33,77	56,06	40,09	59,79	29,22	55,52
Ganancia Ejerc. Ecs. 2º grado	0,34		0,33		0,37	

Elaboración propia

4.3.- Con el referente de las ecuaciones de segundo grado los tres grupos han mejorado. Se trata de una materia que ya han dado en el curso segundo y por tanto parten de una posición holgada. Sin embargo la mejoría es más holgada en los problemas con ecuaciones de segundo grado que la obtenida en las ecuaciones del mismo grado.

En cuanto a las ganancias, en las ecuaciones el grupo TIC, con el apoyo tecnológico, escala desde la posición inicial más baja a la posición más alta de los tres grupos y el Tradicional ocupa la segunda posición, si bien prácticamente igualada con el Cooperativo. En nota media por clase están muy cerca un grupo de otro tanto en problemas como en resultados. En las ecuaciones de segundo grado, el grupo Tradicional se mantiene en la primera posición que ya ostentaba en el pretest, seguido del grupo TIC y apenas distanciado el Cooperativo. En la nota media de clase no hay diferencias significativas entre los grupos. En relación con los problemas de ecuaciones de segundo grado, el grupo Tradicional obtiene la mayor ganancia, seguido del grupo TIC y luego el Cooperativo.

Cuadro nº 8.5.- SISTEMAS DE DOS ECUACIONES Y DOS INCÓGNITAS Y PROBLEMAS. (Datos en %)

	3ºA COPERATIVO		3ºB TRADICIONAL		3ºC TIC	
	Pretest	Pos test	Pretest	Pos test	Pretest	Pos test
Sistemas Ecuaciones	28,79	56,82	30,81	53,71	22,88	58,94
Ganancia Total Sistemas Ecs.	0,39		0,33		0,47	
Problemas Sistemas Ecs.	30,68	63,64	34,27	55,24	26,89	60,98
Ganancia Probl. Sistemas	0,48		0,32		0,47	
Ejercicios Sistemas Ecs.	27,53	52,27	28,49	52,69	20,20	57,58
Ganancia Ejerc. Sistemas	0,34		0,34		0,47	

Elaboración propia.

Universidad Pontificia de Salamanca

4.4.- En relación con los sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas y los correspondientes problemas, la mejor nota media total corresponde al grupo TIC, también la mejor nota media por clase en los sistemas de ecuaciones y en ejercicios. A este posición destacada le sigue el Cooperativo y luego el Tradicional que partía con mejor media desde el comienzo. Las posiciones de partida de los estudiantes son más bajas, sin embargo se produce un sustancial progreso del aprendizaje en los tres grupos.

8.2.- PROPUESTA SOBRE EL PROFESORADO

8.2.1.- La formación y acreditación profesional del profesor de matemáticas

Que la formación del profesor es una variable fundamental del resultado escolar de los alumnos, es una certeza confirmada por la experiencia secular, reconocida en la argumentación de las ciencias pedagógicas, calificada de principio axial en esta tesis y admitida como evidente en los ambientes familiares y sociales. Debido a ello, las políticas educativas actuales más valoradas, como la canadiense, la finlandesa y algunas de Asia, dedican particular atención a la formación del profesorado. En España se han ido ensayando distintos procedimientos de formación y selección del profesorado, sin haber llegado a un sistema consolidado aceptable, a pesar de las sucesivas experiencias y la amplísima documentación sobre el asunto. Coherentes con los objetivos pedagógicos de la tesis, sugiero a continuación algunas precisiones, pensando en la formación específica del profesor de matemáticas para los niveles de ESO y Bachillerato.

De acuerdo con la legislación vigente y la bibliografía más reconocida, la formación de profesores discurre entre las exigencias de su formación inicial – Grado y Master en sus primeras etapas de implantación - y las conveniencias de la llamada formación permanente. Ahora bien, la atención que se conceda a ambas etapas, no puede obviar los problemas prácticos de la selección del profesorado ni los que conciernen a su incorporación al ámbito educativo de los centros escolares. La propuesta que aquí formulo introduce algunas precisiones genéricas que, a mi juicio, se deducen de la propia argumentación general de la tesis. Su puesta en práctica exigirá una programación más detallada y acompañada de un presupuesto económico. La ofrezco como una experiencia de ensayo piloto para el caso de que sea tomada en consideración.

Universidad Pontificia de Salamanca

A.1.- Formación inicial y permanente en conocimientos y competencias

Sin confundir los aspectos estructurales de una ciencia con las exigencias pedagógicas de su enseñanza, no parece dudoso que la naturaleza específica de cada ámbito científico introduce previsiones que deben orientar la formación del profesorado que deba impartirlo. Esto nos parece particularmente significativo cuando se trata de las matemáticas, por las razones ya expuestas en el capítulo cuatro de la tesis y algunas más puntuales, que expongo en este primer apartado.

A.1.1.- Carácter sistémico de la matemática: formación universitaria de su profesorado

Con independencia de sus aplicaciones prácticas y operativas, la matemática es una ciencia de carácter sistémico en virtud de su propia vertebración racional, en cuanto que la comprensión de sus operaciones superiores más complejas implica la comprensión de las operaciones más elementales, como las aditivas simples, al tiempo que tales operaciones elementales serán mal comprendidas si se las enseña fuera del contexto sistémico en el que tienen su sentido pleno. Tal carácter específico de la matemática, exige que el profesor de los niveles que nos conciernen, se dote de un conocimiento especializado amplio que requiere una formación universitaria. Será muy limitada la eficacia de la enseñanza operativa elemental sin lo que he venido identificando a lo largo de la tesis, ya desde los griegos, como mentalidad matemática, inalcanzable sin un aprendizaje especializado.

Enseñar álgebra, números irracionales, trigonometría y geometría de volúmenes, en los niveles de ESO y Bachillerato, requiere que el profesor tenga un conocimiento matemático mucho más amplio en tales áreas que el de los conocimientos que debe transmitir al alumno. Esta exigencia demanda su formación universitaria, de tal modo que, exceptuados casos contados, el fracaso está garantizado por adelantado si el profesor de tales niveles básicos carece de aquellos que debe trasmitir (apartado 4.2.4. del capítulo cuatro de la tesis). En este sentido, el profesor de matemáticas no se puede improvisar o reciclar a partir de formación no especializada, si bien, como añadimos a continuación, su preparación universitaria matemática se lleve a cabo en un contexto científico más amplio. .

Universidad Pontificia de Salamanca

A.1.2.- Carácter contextual de la enseñanza de la matemática

La especialización universitaria del profesor de matemáticas no puede pasar por alto que su preparación científica se encamina, no a la investigación ni a la matemática pura superior, sino a su transmisión a niveles elementales y en un contexto educativo heterogéneo, que incluye enseñanzas de naturaleza científica general y técnica, farmacéutica y clínica, sociológica y humanística. Este contexto aconseja, según algunos autores, que la formación inicial del profesor de matemáticas para la ESO y Bachillerato, se abra a cierta polivalencia hacia un Grado académico universitario que habilite para la docencia de matemáticas y ciencias de la naturaleza. Se asemejaría al modelo del Bachelor of Sciences de países como Inglaterra, Escocia, Irlanda y Estados Unidos, entre otros. En su contexto, la formación matemática, siempre con nivel universitario, se programaría como especialización. Como ya se ha mencionado en el capítulo cuatro (apartado 4.2.5.), para el profesor Goñi Zabala (2008: 196-202) esta titulación sería la idónea para la docencia en la ESO y Bachillerato. Esta formación abierta, a mi entender, ha de restringirse a las matemáticas y la física. Abrirse más sería adentrarse en espacios científicos densos que de dificultarían la preparación adecuada en estos saberes, que debe ostentar el profesor y le exigen las condiciones objetivas de su enseñanza en la ESO y Bachillerato, aunque se han de reconocer ciertas consecuencias positivas de orden cognitivo, pedagógico y profesional.

a) Desde el punto de vista cognitivo, el profesor especializado en matemáticas, dentro del contexto de una formación científica más amplia, se dispone mental y operativamente para la transmisión de las matemáticas en un contexto análogo al de sus futuros alumnos, que estudiarán matemáticas interrelacionadas con otras materias heterogéneas. La formación matemática universitaria del profesor, integrada con la de ciencias, facilitará su propia capacidad didáctica para encontrar similitudes y diferencias, sugerir aplicaciones, concreciones operativas, ampliaciones prácticas, etc. Lo que, sin merma para la enseñanza de las operaciones matemáticas como tales, irá induciendo en el alumno la convicción de que no son un saber puramente teórico y ajeno a la realidad cotidiana.

b) Desde el punto de vista pedagógico, la formación científica plural podrá ejercer de sustrato que facilitará la comprensión entre el profesorado, ya que la excesiva especialización puede aislar y entorpecer la comunicación, propiciando la excesiva crispación de cada profesor sobre la materia que enseña. No son infrecuentes en los centros educativos las diferencias y discrepancias pedagógicas y organizativas entre

Universidad Pontificia de Salamanca

profesores de ciencias y de letras, así como la búsqueda del predominio de unas materias sobre otras, con frecuencia transmitidas consciente o inconscientemente, al alumnado. Lo que, dada la transversalidad científica de las matemáticas, es con frecuencia perceptible en la primacía académica reivindicada, consciente o inconsciente, por los profesores de matemáticas en relación con las demás materias. El profesor con formación científica plural se habilita subjetivamente para una convivencia pedagógica, no sólo personal entre profesores, sino como supuesto de la organización escolar, en la confección de horarios, tiempos de prácticas, etc.

c) Desde el punto de vista profesional, la plurivalencia de una formación básica plural ofrecerá al profesor de matemáticas mayores posibilidades de empleo en el ámbito de la enseñanza, puesto que la formación científica le dotará de conocimientos competencias para impartir materias distintas. Tal plurivalencia, en consecuencia, mejoraría sus posibilidades de contratación por parte de los centros escolares. A su vez, ese pluralismo formativo contribuiría a subsanar la probable escasez del profesorado de matemáticas y de ciencias, como parece que ocurre ya en la Unión Europea, en donde no se integran como profesores muchos excelentes titulados porque el mercado industrial y de servicios les ofrece mejores condiciones laborales y económicas.

Haciendo frente a la carencia de vocaciones hacia la enseñanza por parte de los profesionales científicos, mi propuesta como ya defendía en el texto de la tesis (capítulo cuatro, apartado 4.2.5.) podría complementarse con la organización de un Grado en Matemáticas y Física, que dotara de las competencias necesarias para la enseñanza en la ESO y Bachillerato. Antes de proceder a su instauración, se debería explorar el ámbito industrial y el de los servicios para recabar las posibilidades de empleo que esos graduados pudieran encontrar. Las facultades de Matemáticas y de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense están preparando una graduación de este tenor.

d) Dificultades de la formación polivalente

La formación polivalente puede ofrecer ciertas ventajas pero también presenta algunos inconvenientes notables, a los que ya hice alusión en el texto de la tesis (capítulo cuatro, apartado 4.2.5. y 4.2.6.). Allí me decantaba por la conveniencia de que el profesor de la ESO y Bachillerato fuera experto en cada uno de las materias cuya docencia imparte, aunque estaba dispuesta a aceptar una graduación en matemáticas y física. La opinión expresada en el texto sigue siendo válida, si bien entiendo que deben tenerse en cuenta las precisiones que acabo de exponer, sin embargo, se ha de tener en

Universidad Pontificia de Salamanca

cuenta que los estudios de la Graduación actual, en relación con los de la antigua Licenciatura, han acortado en un año académico la preparación científica específica.

A.2.- Hacia un sistema de acreditación para el ejercicio profesional

Como he manifestado en su momento (apartado 4.2.5. del capítulo cuatro), coincido plenamente con el profesor Goñi Zabala (2008: 196-202), cuando reitera que sigue sin abordarse de manera satisfactoria la inserción de los profesores en el escenario del ejercicio profesional como profesor estable de una materia. Lo que no afecta sólo al profesorado de matemáticas, sino al de todas las materias y especialidades. Teniendo en cuenta la documentación que he consultado (EURYDICE, 2011c y 2011d), me responsabilizo de la propuesta siguiente.

A.2.1.- Selección y valoración de la aptitud profesional

El currículo formativo básico para el ejercicio profesional de la docencia exige que sea iniciado a partir del Master impartido, bajo la responsabilidad de las Universidades y las Administraciones Nacional y Autonómica. A partir de estos supuestos y haciéndome eco de numerosas iniciativas actuales, mi propuesta para la inserción del profesorado de matemáticas en el medio escolar incluiría las siguientes etapas:

1ª. Prueba de conocimientos. Oposición tradicional, no limitada a un número de plazas sino abierta en función de unos determinados niveles de dominio de la materia propia del currículo o concurso de méritos, con valoración específica de conocimientos matemáticos, teóricos y prácticos. Esta prueba se constituiría en una primera acreditación teórica e indispensable para la docencia en la ESO, Bachillerato y Formación Profesional, tanto pública como privada.

2ª. Habilitación en período de pruebas. Adscripción a un centro escolar siguiendo el escalafón establecido en la etapa anterior, con *asignación de un tutor* con un reconocido currículo de méritos. Establecimiento de un programa de actividades complementarias y prácticas (seminarios) a realizar con un grupo determinado de alumnos.

3ª. Acreditación práctica impartida por el Seminario o Departamento al que está adscrito, teniendo en cuenta el informe razonado del tutor.

Universidad Pontificia de Salamanca

4ª. Reconocimiento profesional. Tras el informe razonado del centro, aceptado por la Inspección Educativa autonómica, se le dará el certificado de aptitud o acreditación definitiva, para impartir la materia en cualquier centro de titularidad pública o privada.

5ª. Mantenimiento de la acreditación. El mantenimiento de esta acreditación se produciría por variadas vías alternativas, como asistencia a seminarios y cursos, congresos y simposios, investigaciones llevadas a cabo y publicaciones, que cada cinco a seis años los profesores presentarían en la Inspección correspondiente, acompañados de los informes del centro donde imparte la docencia. La valoración positiva de estos méritos llevaría adjunta el debido reconocimiento económico y social.

A.2.2.- Período de pruebas docentes con tutor

Precisando el apartado anterior (*Habilitación en período de pruebas*), no parece dudoso que el universitario incorporado por primera vez como profesor a un centro educativo, debe ser consciente de sus carencias didácticas y de su falta de experiencia. A su vez, deber ser reconocida institucionalmente la conveniencia de una tutela necesaria, como en cualquier otra profesión, que lo acompañe en los primeras etapas de su ejercicio profesional. El paso de estudiante universitario, esto es, de profesor en formación, al de profesor en ejercicio supone un cambio esencial, porque implica trasmutar los esquemas mentales de aprendizaje en esquemas operativos de enseñanza, para lo que parecen convenientes las siguientes previsiones.

a) Asignación de un tutor.- La metamorfosis de estudiante a profesor no es automática ni fácil de adquirir en solitario, sino que exige que el joven profesor sea asistido, en una labor de tutoría, por un colega con experiencia que lo acompañe en sus primeros ensayos docentes. El tutor debe asistir a las primeras clases del joven profesor, sin intervenir personalmente en ellas, con el fin de reconsiderar crítica y reflexivamente el desarrollo de las mismas, con periodicidad que puede ser semanal o quincenal.

b) Competencias evaluables en el período de habilitación de prueba. Durante el período de pruebas tuteladas, el profesor debe ser evaluado a partir de determinadas competencias relacionadas con la materia que debe enseñar. Teniendo en cuenta los supuestos que hemos ido argumentando en los diversos capítulos de la tesis y contando con mi experiencia profesional, entiendo que en el profesor de matemáticas debe evaluarse su competencia para las siguientes operaciones escolares:

Universidad Pontificia de Salamanca

*- *Profundizar y reinterpretar cada una de las partes, lecciones, temas, etc. que debe impartir en cada clase*. No es suficiente que demuestre el conocimiento sintético del tema, sino su parcelación analítica,

*- *Seleccionar y acotar procedimientos con habilidad expositiva,* valorando su capacidad de síntesis y de selección entre lo fundamental y lo accesorio.

*- *Exponer con claridad y lenguaje accesible*, valorando su lógica discursiva, esto es, la exposición en la que no se den por sabidos los supuestos sobre los que se articula cualquier demostración. El señuelo para la atención del alumno radica en la lógica discursiva del profesor.

*- *Hacer efectiva la interacción entre exposición teórica* (oral, escrita en la pizarra, en proyecciones, mediante vídeos u otros medios) *y los ejercicios prácticos,* valorando su capacidad para mantener la actitud activa y operativa del alumno mediante tareas breves y trabajos permanentes sobre el cuaderno, pizarra, ordenador, etc.

*- *Facilitar el estudio y el funcionamiento de la clase en grupos,* el trabajo en equipos y talleres, de acuerdo a la metodología que hemos propuesto y comprobado en nuestra muestra empírica.

*- *Promover las explicaciones de clase mediante la utilización de los medios tecnológicos adecuados*, que no se restringen solo a las Tics sino a otros recursos también presentes en los mercados.

*- *Promover la confianza y autoestima como motivación esencial del aprendizaje*, que ha sido uno de los objetivos que hemos adelantado para nuestra tesis.

*- *Relacionar los contenidos teóricos de la matemática con sus aplicaciones* a las situaciones concretas de la vida diaria, valorando su capacidad para contextualizar y dar concreción a las fórmulas, ecuaciones o teoremas.

*- *Planificar diversos procedimientos para efectuar la evaluación de los alumnos*, valorando su capacidad para los procedimientos matemáticos, los resultados obtenidos y en general establecer claros indicadores para valorar el rendimiento de los alumnos de modo continuado y personificado.

Universidad Pontificia de Salamanca

8.3.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

GALILEO, G., (1623). *Il Saggiatore,* en la versión española (1981), *El Ensayador*. Buenos Aires: Aguilar.

GOÑI ZABALA, J. Mª., (2008). *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.

PICKOVER, C.A., (2012). El libro de las matemáticas. Madrid: Ilus Books.

SIERRA, R., (1991). *Técnicas de la investigación social*. Madrid: Paraninfo.

Universidad Pontificia de Salamanca

B I B L I O G R A F Í A

AGENCIA EJECUTIVA EN EL ÁMBITO EDUCATIVO, AUDIOVISUAL Y CULTURAL, (2012). *Cifras clave de la educación en Europa 2012*. Madrid: red EURIDYCE y Secretaría General Técnica del MEC y D.

AGUADED, J. I.; PÉREZ, M. A. y MONESCILLO, M., (2010). Hacia una integración curricular de las TIC en los centros educativos andaluces de Primaria y Secundaria. *Bordón* 62 (4), 7-23.

AGUADO, J., (1994). "Apuntes sobre la idea leibniziana de progreso a la luz de su teoría del continuum", en RACIONERO, Q. Y ROLDÁN, C. (Comp.). *G. W. Leibniz. Analogía y expresión*. Madrid: Complutense.

AGUILÓ, A., (1995). *La tolerancia*. Madrid: ediciones Palabra.

ALBERTÍ, M., (2011). *La creatividad en matemáticas.* Barcelona: RBA Libros.

ALLPORT, G., (1961). *Pattern and Growth in Personality*. New York: Harcourt College.

ALTAREJOS, F.; RODRÍGUEZ S., A. y FONTRODONA, J., (2003) *Retos educativos de la globalización.* Pamplona: EUNSA.

ALVIRA, F. (1981). *Los dos métodos de las ciencias sociales*. Madrid: CIS

__ (1982), "La perspectiva cualitativa y cuantitativa en las investigaciones sociales", Madrid: *Estudios de Psicología*, 11, 34 – 36.

___ (1984), "La investigación Sociológica", en SALUSTIANO DEL CAMPO, *Tratado de sociología 1*, Madrid: Taurus.

AMEZCÚA, J. A. y FERNÁNDEZ, E., (2000). "La influencia del autoconcepto en el rendimiento académico". En *Iberpsicología*, 5 (1).

ANECA, (2005). Libro Blanco *Título de Grado en Magisterio* .www.aneca.es

ARENDT, H., (1993). *La condición humana*. Barcelona: Paidós.

ARGUELLES, A. (1997). *Formación basada en competencias laborales*. Mexico: Limusa.

ARISTÓTELES, *Acerca del Cielo* II 13, 295b. (Trad.cast., Madrid: Gredos, 1998)

ARISTÓTELES, *Etica Nicomáquea,* 1106 a 25-30. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1985).

ARISTÓTELES, *Física*, III 4, 203b.(Trad. cast., Madrid: Gredos, 1998, p. 204-206)

Universidad Pontificia de Salamanca

ARISTÓTELES, *Metafísica* VI, 1025 b 5- 1026 a 30. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1970, vol. I, p. 308).

ARISTÓTELES, *Metafísica,* I 3, 983 b. (Trad.cast., Madrid: Gredos, 1970, vol. I y II).

ARISTÓTELES, *Política,* VI, 1319 b, 18. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1988, p. 380).

ARON, R., (1970). *Las etapas del pensamiento sociológico*. Buenos Aires: Siglo Veinte.

ARTETA, A., (1998). "La tolerancia como barbarie", en MANUEL CRUZ (Comp), *Tolerancia o barbarie*. Barcelona: Gedisa.

ARZARELLO, F., BAZZINI, L. y CHIAPPINI, G., (1994). *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche.* Progetto Strategico CNR - TID, Quaderno n. 6.

AUSUBEL, D. et al., (1976). *Psicología cognitiva. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

AYALA, C.I.; GALVE, J.L.; MOZAS, L. y TRALLERO, M., (1997). *La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales.* Madrid: CEPE.

BACHELARD, G., (1986). *La formation de l'esprit scientifique*. París : Librairie Philosophique.

BALL, D.L.; HILL, H.C. y BASS,H., (2005). Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics wel enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator*, 29 (1), pp. 14 – 46. (Cita tomada de Eurydice 2011b: 119)

BANDURA, A., (1987). *Pensamiento y acción: Fundamentos sociales*. Barcelona: Martinez Roca.

BARÁ, J.; DOMINGO, J. y VALERO, M., (2007). *Técnicas de aprendizaje cooperativo*. Barcelona: Taller de formación en la Universidad Politécnica de Cataluña.

BARRERAS, M., (2012). "Mates en la vila", en la revista *Cuadernos de Pedagogía.* Marzo, nº 421, Barcelona, pp. 69-71.

BAUMAN, Z. (2007) *Tiempos líquidos.* Barcelona: Tusquets.

BAUMAN, Z., (2008). *Los retos de la educación en la Modernidad Líquida.* Barcelona: Gedisa.

BECK, U., (2006). *La sociedad del riesgo global*. Madrid: Siglo XXI.

BELL, D., (1996). Reflexiones al final de una era, en revista *Claves de la Razón Práctica.* Nº 68. Madrid: Santillana.

BELTRÁN, J.A., (1984). Psicología de la educación: una promesa histórica. *Revista española de pedagogía (Madrid)* 41, 162, 523-544.

Universidad Pontificia de Salamanca

BELTRAN, J. A. et al., (1996). *Psicología de la Instrucción*. Madrid, Síntesis. Cf. igualmente, MAYOR, J., Y PINILLOS, J. L., (eds), *Tratado de psicología general.* Madrid: Alambra. (En particular, vol. V: "Inteligencia y pensamiento").

BELTRÁN, J. A., (1988). *Para comprender La Psicología.* Estella (Navarra): EVD.

BELTRÁN, J.A., (1984). Psicología de la educación: una promesa histórica. *Revista española de pedagogía (Madrid)* 41, 162, 523-544.

BENEDICTO XVI, (2012). *Discurso*, al Cuerpo Diplomático acreditado ante la Santa Sede, Vaticano: Librería editrice Vaticana (09/01/2012).

BENEDICTO XVI, (2012). *Educar a los jóvenes en la justicia y la paz"*, Mensaje para la XLV Jornada Mundial de la Paz, (01/01/ 2012). Vaticano: Librería editrice Vaticana (08/12/2011).

BENEDICTO XVI, (2011). *Discurso*, (Encuentro con los Jóvenes profesores Universitarios, en la Basílica de El Escorial, el 19 de agosto de 2011). http://vatican.va/ (Consulta: 23/02/2012).

BENEDICTO XVI, (2010). Discurso a los Representantes de la Cultura y Artistas portugueses, en el Centro Cultural de Belém, de Lisboa, el 12 de mayo): *"Haced de vuestra vida un lugar de belleza"*. http://www.vatican.va / (consulta 17/05/2010).

BENEDICTO XVI, (2009). *Caritas in veritate*, Librería editrice Vaticana 2009, capítulo tercero, punto 35, versión española: Madrid: editorial San Pablo.

BERGER, P.L. Y KELLNER, H., (1985). *La reinterpretación de la sociología*. Madrid: Espasa-Calpe.

BERGMANN, G., (1961). *Filosofía de la Ciencia.* Madrid: Tecnos.

BERMEJO, V., (2010). "El PEIM: un programa de intervención", en BERMEJO, V. (Coord.), *Como enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.

BERMEJO, V., Coord. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: CCS.

BERNARD, I., (1989). *Revolución en la ciencia*, Barcelona: Gedisa.

BISHOP, A., (2000). "Enseñanza de las matemáticas: ¿Cómo beneficiar a los alumnos?", en GORGORIÓ, N.; DELOFEU, J. Y BIHOP, A., *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

BISHOP, A.J.; HART, K.; LERMAN, S.; NUNES, T., (1993). *Significant influences on children's learning of mathematics*. París: UNESCO.

BLOOM, B.S., (1979). *Taxonomía de los objetivos educativos*. Alcoy: Marfil.

Universidad Pontificia de Salamanca

BOLLNOW, O. F., (1960). *Esencia y cambios de las virtudes*. Madrid: Revista de Occidente.

BOOTH, L.R., (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* (NFER-Nelson: Windsor, UK).

BOURBAKI, N., (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

BOYER, C. B., (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

BROUSSEAU, G., (1983), 'Les obstacles epistémologiques et les probl`emes en mathématiques', *Recherches en Didactique des Math´ematiques*, 4(2), 165-198.

BUNGE, M., (1972). *La investigación científica*. Barcelona: Ariel.

BUTTERFIELD, H., (1958). *Los orígenes de la Ciencia Moderna.* Madrid: Taurus.

BUTTO, C. y ROJANO,T., (2009), "Pensamiento algebraico temprano", en *X Congreso Nacional de Investigación Educativa*, Veracruz, México.

CAMPEDELLI, L., (1970). *Fantasía y lógica en la matemática*. Barcelona: Labor.

CAMPILLO, A.,(Coord. y Presidente de CDM), (2005). *Título de Grado en Matemáticas.* Madrid: ANECA.

http://www.aneca.es/var/media/150436libroblanco_jun05_matematicas (Consulta 10 enero 2013).

CAMPS, V., (1990). *Virtudes públicas*. Madrid: Espasa – Calpe.

CANO, E., (1998). *Evaluación de la calidad educativa.* Madrid: La Muralla.

CAÑAL, P., (2000). El análisis didáctico de la dinámica del aula: tareas, actividades y estrategias de enseñanza. En PERALES, F.J. y CAÑAL, P. *Didáctica de las ciencias experimentales.* (209-238) Ed. Marfil. Alcoy.

CAPPELLETTI, J., (1986). *Mitología y Filosofía: los filósofos presocráticos*. Madrid: Cincel.

CARBONELL, J.,(2008). *Una educación para mañana*. Barcelona: Octaedro.

CARRAHER, D. W.y SCHLIEMANN, A. L., (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In: LESTER, F. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007, v. 2, p. 669 - 705.

CARRERA I CARRERA, J. (2003) *Mundo Global Ética Global*, Cuadernos C J, nº de abril, 118, 1-32. Barcelona: Cristianisme i Justicia.

CARRILLO, J. y CONTRERAS, L.C., (1998). *El desarrollo profesional del profesor de matemáticas.* Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

CASTEJÓN, J. L.; GONZÁLEZ, C.; GILAR, R. y MIÑANO, P., (2010). *Psicología de la educación*. Alicante: Editorial Club Universitario.

Universidad Pontificia de Salamanca

CEPEDA, E., (2005). Factores asociados al logro cognitivo en matemáticas. En *Revista de Educación,* núm. 336. Madrid: Secretaría General Técnica del MECD, pp. 503-514.

CHAMORRO, Mª C., (2012). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson educación.

CLAPHAN, C., (1998). *Diccionario de Matemáticas*. Madrid: Oxford-Complutense.

CLARES, J. y GIL, J., (2008) "Recursos tecnológicos y metodologías de enseñanza en titulaciones del ámbito de las ciencias de la educación". *Bordón* 60(3), 21-33.

CLAXTON, G., (1991). *Educar mentes curiosas.* Madrid: A. Machado libros.

CLEMENTS, M.A.; ELLERTON, N.F., (1996). *Mathematics education research: past, present and future.* Bangkok: UNESCO.

COBO S., J. M. (2005). *Otro mundo es posible*. Madrid: Biblioteca Nueva.

COLLETTE, J. P., (1985). *Historia de las matemáticas II*. Madrid: Siglo XXI.

COMENIO, J.A. (1632). *Didáctica Magna*. Madrid: Reus. Tomado de GER, tomo VII (1972). Madrid: Rialp.

COMISIÓN DE LAS COMUNIDADES EUROPEAS, (2001). *Futuros objetivos precisos de los sistemas educativos*. Bruselas: COM (31/01/2001): punto 4 y 12.

COMISIÓN EUROPEA, (2006). *Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente* (2006/962/CE). L 394/18 ES Diario Oficial de la Unión Europea 30.12.2006.

COMISIÓN INTERMINISTERIAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA, (CICYT), (2007). *Estrategia Nacional de Ciencia y Tecnología*, Madrid: edita Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT).

CICYT., (2007). *Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica 2008 – 2011*. Madrid: Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT).

__ (2007b). *Resumen. Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica, 2008 – 2011.* Madrid: FECYT.

__ (2008). *Informe SISE 2007*. Madrid: FECYT.

COMITÉ DE EDUCACIÓN DE LA ASOCIACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CALIDAD, (2005). *Calidad en educación, calidad de la educación*, Madrid: Asociación Española para la Calidad (AEC).

CORBALÁN, F., (2010). *La proporción áurea*. Madrid: RBA Coleccionables.

CORNFORD, F. M., (1984). *De la religión a la Filosofía*. Barcelona: Ariel.

Universidad Pontificia de Salamanca

CORNU, B., (1983). *Apprentissage de la notion de limite. Conception et Obstacle.* IREM Grenoble.

CORTINA, A., (1980). *Ética sin moral*. Madrid: Tecnos.

DAMEROW, P.; DUNKLEY, M.E.; NEBRES, B.F.; WERRY, B. (eds.), (1984). *Mathematics for all*. París: UNESCO.

DE MIGUEL, M., (1994). *Evaluación para la calidad de los institutos de educación secundaria*. Madrid: Escuela española.

DE MIGUEL, M., (1991). *La evaluación de las instituciones universitarias*, Madrid: Consejo de Universidades.

DE MIGUEL, M. y otros, (1989). *Modelos de investigación sobre organizaciones educativas*, Madrid: Rev. De Investigación Educativa 7 (13), p. 21-56.

DECRETO (22/2007) del 10/5/2007 en el B.O.C.M. 126 del 29/5/2007.

DECRETO (40/2007) del 3/5/2007 en el B.O.C. y L. 89 del 9/5/2007.

DELGADO, A., (2012). *Delibes y la velocidad del sonido, en la prueba de nivel, de 3º de ESO.* Madrid: Periódico ABC.

DELORS, J., (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid: Santillana.

DESCARTES, R., (1959). *Discurso del Método*. Buenos Aires: Losada.

DEULOFEU, J. Y GORGORIÓ, N., (2000). “Planteamientos para el cambio”. En GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. y BISHOP, A. (Coord.), *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

DEWEY, J., (1989). *Cómo pensamos.* Barcelona: Paidós.

DIVESTA, F. y RIEBER, L., (1987). “Characteristics of cognitive engineering”. *Educational communication and technology Journal(Bloomington)*, 35,4,213-230.

DOMJAN, M. y BURKHARD, B., (1990). *Principios de aprendizaje y de conducta.* Madrid: Debate.

DONNELLY, D.; McGARR, O. y O’REILLY, J., (2011). A framework for teachers’ integration of ICT into their classroom practice. *Computers & Education, 57 (2), 1469-1483.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1996. p. 65 - 86.

DÖRFLER, W., (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.) *Mathematical Knowledge:* Its Growth Throught Teaching. Dordrecht: Kluwer A.P, p. 63 - 85.

DOU, A., (1970). *Fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor.

Universidad Pontificia de Salamanca

DRIJVERS, P. (2003) “Learning algebra in computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter”, 2003, Tesis Doctoral Universidad de Utrecht.

DRIJVER, R.; GUESNE, E. y TIBERGHIEN, A., (1989). *Ideas científicas en la infancia y la adolescencia.* Madrid: Morata.

DUBINSKY, E., (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer.

DURÁN, A., (2000). *El legado de las Matemáticas,* Sevilla: Univ. Sevilla/SEM Thales.

ECCLES, J.S.; ADLER, T.F.; FUTTERMAN, R.; GOFF, S.B.; KACZALA,C.M.; MEECE, J.L. y MIDGLEY, C., (1983). Expectancies, values and academic behaviors. En J.T. Spence (Ed.) *Achievement and achievement motivation*. San Francisco, C.A.:W.H. Freeman.

ECHEVARRÍA, J., (2000). Conocimiento en el medio ambiente digital. *Nueva Revista*. (Madrid) 70, julio – agosto, 25-29.

EDMUNDS, R.; THORPE, M. y CONOLE, G. (2012) Student attitudes towards and use of ICT in course study, work and social activity: A technology acceptance model approach. *British journal of educational technology,* 43 (1), 71-84.

EGGERS Lan, (Editor)., *Los Filósofos presocráticos.* (Trad. Cast. Madrid: Gredos,1986, I y III p. 105).

ENKEVIST, I., (2009). “Ana Arendt y la filosofía de la Educación”, en revista *La Ilustración Liberal*, nº 41, otoño 2009. Madrid.

ENKEVIST, I., (2012). “Sentarse en la calle a gritar no sirve de nada”.Madrid: periódico *ALFA Y OMEGA*, (01/03/2012).

ERNEST, P., (1991). *The Phylosophy of Mathematics Education*. London: Flamer.

EURYDICE, (2011a). *Diferencias de género en los resultados educativos: medidas adoptadas y situación actual en Europa*. MEC de España: Secretaría General Técnica.

__ (2011-b). *Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies.* Bruselas: EACEA P9 Eurydice).

__(2011-c). *Science Education in Europe: National Policies, Practices and Research.* Bruselas: EACEA P9 Eurydice.

__ (2011d). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Madrid: MEC y D, EACEA P9 Eurydice.

FERNÁNDEZ, A., (Coord.) (1996). *Didáctica general.* Barcelona: UOC.

Universidad Pontificia de Salamanca

FERNÁNDEZ, J., (2010). “¿Cómo se hace la ciencia? y ¿cómo se comportan los científicos”, en MACEIRAS, M. y MÉNDEZ , L.,*Ciencia e investigación en la sociedad actual*. Salamanca: San Esteban.

FERNÁNDEZ, Mª.J. et al., (1993), Evaluación del clima de centros educativos, Madrid: *Rev. de Ciencias de la Educación*, nº 153, 69-83.

FERRATER M., J., (1966). “Ciencia”, en *Diccionario de Filosofía*. Madrid: editorial Sudamericana.

FETSCHER, I., (1996). *La tolerancia*. Barcelona: Gedisa.

FORO INTERNACIONAL SOBRE GLOBALIZACIÓN, (2003). *Alternativas a la globalización económica*. Barcelona: Gedisa.

GALILEI, G., (1976). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias.* Madrid: Editora Nacional. (Edición preparada por Solís C.y Sádaba, J.)

GARBAYO, E., (1978). *Control ideológico de la invención matemática*. Barcelona: Garbayo.

GARCÍA – RINCÓN DE CASTRO, C. (2004)). “Educación en valores y los nuevos espacios de socialización juvenil”, en la revista de ciencias sociales *SOCIEDAD Y UTOPÍA*. Madrid: Fundación Pablo VI.

GARCÍA, A., (1991). *Isaac Newton (1642-1727*). Madrid: Labor.

GARCÍA, E., *Mente y Cerebro. (2001).* Madrid: Síntesis.

GARCÍA, E., (2009). *Identidad profesional y responsabilidad moral del profesor*. En MACEIRAS, M. y MEJÍA, R., *Investigación e innovación*. Salamanca: San Esteban.

GARCÍA, E., (2006).“Las competencias del profesor en la sociedad del conocimiento”. En MEJÍA, R., (Coord.), *Educación, Globalización y Desarrollo Humano*. Santo Domingo, R.D.: Buho.

GARDNER, H., (1983). *Frames of Mind. The theory of multiple intelligences*. New York: Basicbooks.

GARDNER, H., (1988). *La nueva ciencia de la mente*. Barcelona: Paidós.

GARDNER, H., (1995). *Inteligencias múltiples*. Bacelona: Paidós.

GARICANO, L., (2012). “Son las matemáticas, estúpido”, El País, sección Opinión, 13 de noviembre de 2012, http://www.elpais.com Consulta 7 de enero de 2013.

GAVILÁN, P., (2004). *Álgebra en secundaria. Trabajo cooperativo en Matemáticas.* Madrid: Narcea-MEC.

GEYMONAT, L., (1984). *Historia del pensamiento filosófico y científico.* Vol.I, Barcelona: Ariel.

Universidad Pontificia de Salamanca

GIDDENS, A. Y HUTTON, W., (2001). "Luchar para defendernos", en el libro GIDDENS, A. y HUTTON, W. (edit.), *En el Límite (La vida en el capitalismo global*). Barcelona: Tusquets.

GIDDENS, A., (1999). *La tercera vía.* Madrid: Taurus.

GIGON, O., (1980). *Los orígenes de la Filosofía griega*. Madrid: Gredos.

GIL, I., N., GUERRERO, B.,E. y BLANCO, N., L., (2006). "El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas", en Revista Electrónica de Investigación Psico-educativa, ISSN. 1696-2095. Nº 8, Vol. 4 (1),p. 47-72. Universidad de Extremadura, http://www.investigacion-sicopedagogica.org/revista/articulos/8/espannol/Art_8_96.pdf (Consulta 26/III/2013).

GILSON, E., (1962). *René Descartes, Discours de la Méthode*. París: Ed. Vrin.

GINER, S., (1998). "Verdad, tolerancia y virtud republicana", en Cruz, M. (comp.) *Tolerancia o barbarie.* Barcelona: Gedisa.

GODINO, J.D.,CASTRO, W.F., AKÉ, L. P.,WILHELMI,M.R., (2012) ."The nature of elementary algebraic reasoning". En Bolema, Rio Claro (SP), V26, N42B, P.483-511, abr. 2012. (ISSN 0103-636X).

GOITIA, F. y AZEVEDO, V.de, (2012). *Educación: Estos profesores están revolucionando la enseñanza.* Madrid: XL Semanal. ABC (Semana del 15 al 21 de abril de 2012).

GÓMEZ, I., (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje*. Madrid: Educación Hoy Estudios.

GONZÁLEZ DE CARDEDAL, O., (2013). "Dilaciones y memorias", en LA TERCERA del periódico ABC. Madrid: Diario ABC, Domingo, 12 de mayo.

GONZÁLEZ, A., (2004). *Evaluación del clima escolar como factor de calidad.* Madrid: La Muralla.

GONZÁLEZ, A., (2005). "Características técnicas de los instrumentos de medida desde la teoría clásica de los tests. Fiabilidad, validez". En MARTÍNEZ, C., Coord., *Técnicas e instrumentos de recogida y análisis de datos.* Madrid: UNED.

GONZÁLEZ, G. (2012). Derechos Humanos e interculturalidad. A favor de una ética intercultural. En GONZÁLEZ, G. (ED.), *Derechos Humanos. Nuevos espacios de representación*. Madrid: Escolar y Mayo Editores.

GONZÁLVEZ, V.; TRAVER, J. y GARCÍA, R. (2011) El aprendizaje cooperativo desde una perspectiva ética. Universidad de Navarra: Estudios sobre educación 21, 181-197.

Universidad Pontificia de Salamanca

GOÑI, J. Mª., (2008), *El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.

GOÑI, J. Mª. (Coord.), (2011). *Didáctica de las matemáticas*. Vol. II. Barcelona: Graó.

GOÑI, J. Mª. (Coord.), (2011). *MATEMÁTICAS. Complementos de formación disciplinar*. Vol. I. Barceelona: Graó.

GOÑI, J. Mª. (Coord.), (2011). *MATEMÁTICAS. Investigación, innovación y buenas prácticas*. Vol. III, Barcelona: Graó.

GOÑI, J. Mª., (2008). *El desarrollo de la competencia matemática.* Barcelona: Graó.

GORGORIÓ, N. y BISHOP, A., (2000). "Implicaciones para el cambio", en GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. y BIHOP, A., (Coord.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó.

GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. Y BIHOP, A. (Coord.) (2000). *Matemáticas y educación.* Barcelona: Graó.

GRACIÁN, E., (2012). *Los números primos*. Navarra: RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales.

GREGORIO, J. R., (2002). "El constructivismo y las matemáticas". *Revista SIGMA*, nº 21, Urria. Vitoria: Gobierno Vasco. P. 113 -130.

HABERMAS, J., (1985). *Conciencia moral y acción comunicativa.* Barcelona: Península.

HAKE, R., (1998). Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses. *American journal of physics,* 66 (1), 64-74.

HALSEY,A.H., HEATH, A.F. & RIDGE,J.M., (1980).*Origins and destinations: Family, class and education in modern Britain*. Oxford: Clarendon Press.

HÄNZE, M. y BERGER, R., (2007) Cooperative learning, motivational effects, and student characteristics: An experimental study comparing cooperative learning and direct instruction in 12th grade physics classes. Learning and instruction, 17, 29-41.

HEIBERG, J. L., (Ed.) (1980-1981). *Archimedes. Opera omnia.* Leipzip.

HELD, D. y MCGREW, A.,(2003). *Globalización / Antiglobalización,* Barcelona: Paidos.

HERBART, J. F., (2006). *Pedagogía general.* Madrid: La lectura.

HIDALGO, S., MAROTO, A. y PALACIOS, A., (2004). "¿Por qué se rechazan las matemáticas?. Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas". En *Revista de Educación*, núm. 334, pp. 75 – 95. Madrid: Secretaría

Universidad Pontificia de Salamanca

General Técnica del MEC y D. En www.revistaeducacion.educacion.es (Consulta 26/III/2013).

HIEBERT, J. y GROUWS, D., (2009). "Whinch teaching methods are mos effective for maths?", en Better: Evidence-based Education, 2 (1), p.10-11. (Cita tomada de EURYDICE, 2011d, p. 58).

HILTON, P., (2000). "Necesidad de una reforma". En GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. y BISHOP, A. (Coord.), *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.

HIRSCHBERGER, J., (1979). *Historia de la Filosofía*. Barcelona: Herder.

HOCH, M. y DREYFUS, T. "Structure sense in High School Algebra: the effect of brackets" En M. J. HØINES & A. B. FUGLESTAD (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.3 (pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

HOLZ, H., (1970). *Leibniz.* Madrid: Tecnos.

HORTALÁ, M. T.; LEACH, J.; RODRÍGUEZ, M., (1998). *Matemática discreta y lógica matemática*. Madrid: Complutense.

HOYLES, C., (2012). "Retos y reflexiones en torno al potencial de la tecnología en la educación matemática", en PLANAS, N., (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

HUIZINGA, J., (1996). *El otoño de la Edad Media.* Madrid: Alianza.

HULL,W. H., (1961). *Historia y filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel.

INFORME COCKCROFT, (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: MEC.

INNERARITY, D., (2011). *La democracia del conocimiento*. Barcelona: Paidós.

INSTITUTO DE SOCIOLOGÍA APLICADA DE MADRID, (1974).*Curso de técnicas de investigación social*. Madrid: ISAMA, Lección 17.

JACOB, F., (1970). La *logique du vivant.* París: Gallimard.

JAEGER, W., (1987). *Paideia: los ideales de la cultura griega*. México: FCE.

JÁMBLICO, (1991). *Vida pitagórica,* Madrid: Etnos.

JAREÑO, J. Y TURON, F., (2012). "La escala musical: armonía más fracciones", en la revista *Cuadernos de Pedagogía.* nº 421, Marzo, Barcelona, pp. 72-75.

JAREÑO, J. Y TURON, F., (2012). "La escala musical: armonía más fracciones", en la revista *Cuadernos de Pedagogía.* nº 421, Marzo, Barcelona, pp. 72-75.

JAREÑO, J., (2012). "La cultura matemática", en la revista *Cuadernos de Pedagogía,* nº 421, Marzo, Barcelona, pp. 51-55.

Universidad Pontificia de Salamanca

JAREÑO, J., (2012). "La cultura matemática", en la revista *Cuadernos de Pedagogía,* nº 421, Marzo, Barcelona, pp. 51-55.

JIMÉNEZ, M., (2009). "La desconfianza, un agravante de la crisis", en el periódico de Madrid: *ABC, LA TERCERA*, (24 / 05/ 2009).

JOHNSON, D., y JOHNSON, R., (1999). *Learning together and alone: Cooperative, competitive and individualistic learning*. Boston: Allyn & Bacon.

KAGAN, S. y KAGAN, M., (2009). *Cooperative learning*. San Clemente: Kagan Publishing.

KIERAN, K., (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER , F. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning***,** Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM, 2007, p. 707 - 762. vol. 2.

KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.), (1996). *Approach to algebra: Perpectives for Research and Teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, p. 65 - 86.

KIERAN, C., (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In NESHER, P. & KILPATRICK, J., (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 96-112). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

KIERAN, C. y FILLOY, E., (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), pág. 229 - 240.

KIERAN, C., (1989). The early learning of algebra: Astructural perspective. En: WAGNER , S.; KIERAN , C. (Eds.) (1989). *Research issues in the learning of algebra*. Reston, VA: NCTM y Lawrence Earlbaum, p. 163 - 171.

KILLEEN, P., (1992).The reflex reserve. *Journal of the experimental analysis of behaviour (Indiana)* 50, 319-331.

KIMBLE, G. et al., (1971). Effect of choice on paired-associate learning. *Journal of experimental psychology (New Jersey)* 91, 1, 47-53.

KING, A.y SCHNEIDER, B., (1991). *La primera revolución mundial*. (Informe del Club de Roma), Barcelona: Plaza y Janés.

KOSSLYN, S. M. y POMERANTZ, J. R., (1977). "Imagery, propositions and the form of the internal representations". *Cognitive Psychology (London)*, 9, 52-76.

KOYRÉ, A., (1961). *Estudios de historia del pensamiento científico*. Madrid: Siglo XXI.

Universidad Pontificia de Salamanca

KUHN, T., (1962). *The Structure of Scientific Revolution,* Chicago/London: Univ. Press, (Trad. cast., México: FCE, 1975).

LABRADOR, C., (2006).“Aportaciones significativas de la pedagogía contemporánea”, en MEJÍA, R. (Coord.), *Educación, Globalización y desarrollo humano*. Santo Domingo: Buho.

LAMO, E., (1994). *La sociología del conocimiento y de la ciencia.* Madrid: Siglo XXI – C.I.S..

LATORRE, A., DEL RINCÓN, D., ARNAL, J. (2005). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona: Ediciones Experiencia.

LEBRET, J. L., (1961). *Manual de encuesta social*. Madrid: Rialp.

LEVY, C., (2000). *Gestión de competencias*. Barcelona: Gestión, 2000

LEWONTIN, R. C., (1982). “Introducción”, en AA.VV., *La biología como arma social*. Madrid: Alambra.

LEY 14/ 2011, de 1 de junio, de la *Ciencia, la Tecnología y la Innovación*. Madrid: BOE, nº 131, jueves 2 de junio de 2011, págs. 54.387 – 54.455.

LEY 13/ 1986, de 14 de abril, de *Fomento y Coordinación General de la Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico*. (BOE, núm. 93 de 18 de abril de 1985). (Estuvo vigente hasta el 2 de diciembre de 2011).

LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, BOE, núm. 106, 4 mayo de 2006. (El Capítulo III (Título III) se dedica a la formación del profesorado).

LEY ORGÁNICA 9/1995, de 20 de noviembre*, de la Participación, la Evaluación y el Gobierno de los Centros* Docentes (LOPEGCD)

LEY ORGÁNICA 1/1990, de 3 de octubre*, de Ordenación General del Sistema Educativo* (LOGSE)

LININGER, CH. A. Y WARWICK, D.P., (1978). *La encuesta por muestreo*, México: CECSA.

LÓPEZ, A., (1997). *Fracaso escolar en el aprendizaje de las matemáticas*. Cádiz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

LÓPEZ, F., *La gestión de calidad en educación*, Madrid: La Muralla.

LUENGO, M. A., (2001). *Formación Didáctica para profesores de matemáticas*. Madrid: editorial CCS.

MACEIRAS, M., (2006) “Política educativa, tecnociencia y desarrollo”. En MEJÍA, R. (Coord.), *Educación, globalización y desarrollo humano*. Santo Domingo: Búho.

MACEIRAS, M., (2002). *Metamorfosis del Lenguaje*. Madrid: Síntesis.

Universidad Pontificia de Salamanca

MACEIRAS, M., (2002). Perspectivas de la motivación. En *Revista de Educación*, número Extraordinario 2002: Educación y Futuro, pp.257-270. Madrid: Secretaría General Técnica del MEC y D.

MACEIRAS, M., (2007). *La experiencia como argumento.* Madrid: Síntesis.

MACEIRAS, M., (2010). "La investigación científica, bioética y derechos humanos", en MACEIRAS, M. y MÉNDEZ, L., (ed.), *Ciencia e Investigación en la sociedad actual*. Salamanca: San Esteban..

MACGREGOR, M., (2004). Goals and content of an algebra curriculum for the compulsory years of schooling. In K.Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra*. *The 12th ICMI Study* (pp. 313-328). Boston: Kluwer.

MACGREGOR, M., & STACEY, K., (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies inMathematics, 33*, 1-19.

MALISANI, E., (1999). "Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica.". En la *"Revista IRICE"* del "Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación" de Rosario –Argentina N° 13.

MAMIANI, M., (1990). *Introducción a Newton*. Madrid: Alianza.

MARCHESI, A. y MARTÍN, E., (1998). *Calidad de la enseñanza en tiempos de cambio*. Madrid: Alianza.

MARCHESI, A., (2009). *Las Metas Educativas 2021. Un proyecto iberoamericano para transformar la educación en la década de los bicentenarios*. Madrid: OEI; Revista CTS, nº 12, vol.4, abril

MARDONES, J. M., (1991). *Filosofía de las ciencias humanas y sociales.* Madrid: Anthropos.

MARÍAS, J., (1980). "La instalación juvenil en la vida", en *La juventud en la familia y en la sociedad actual*. Madrid: Karpos.

MARTÍNEZ, C., Coord., (2004). *Técnicas e instrumentos de recogida y análisis de datos.* Madrid: UNED.

MARTÍNEZ, J., (2000). *Una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Barcelona: CISSPRAXIS.

MASON, J., (1996). Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.) *Approach to algebra: Perpectives for Research and Teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1996. p. 65 - 86.

Universidad Pontificia de Salamanca

MAYER, R.E., (1988). *Learning strategies: an overview*. En WEINSTEIN, C., E. GOETZ, & ALEXANDER, P. (Eds.), (2001). Learning and Study Strategies: Issues in Assessment, Instruction, and Evaluation (11-22). New York: Academic Press.

MAYOR, J., (2009). *La actividad humana. Un incierto camino entre la necesidad y la posibilidad*. Madrid: Editorial Complutense.

MCLEOD, D. B., (1989). "Beliefs, attitudes and emorions: new view of affect in mathematics education". En D. B. MCLEOD y V.M. ADAMS (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*, (pp. 245-258). New York: Springer-Verlang.

MEDINA, A. y SALVADOR, F. Coord., (2008). "Enfoques, teorías y modelos de la Didáctica", en *Didáctica General*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

MEDINA, A. y SEVILLANO, M. (coords.), (1990). *Didáctica-Adaptación el currículum.* Madrid: UNED.

MEJÍA, R., (2009). "La investigación como reto de la Universidad Dominicana", en MACEIRAS, M. Y MEJÍA, R., *Investigación e Innovación*. Salamanca: San Esteban.

MELERO, L., (2004). "Motivación", en UÑA, O., *Diccionario de Sociología.* Madrid: ESIC.

MÉNDEZ, D. y GARCÍA-ALONSO, P. (2013). Cambio comunicativo en las nuevas metodologías didácticas. *Estudios sobre el mensaje periodístico,* 19, núm. especial marzo, 299-308. http://dx.doi.org/10.5209/rev_ESMP.2013.v19.42037

MÉNDEZ , D., (2012). "Cambio motivacional realizado por las TIC en los alumnos de secundaria de física", (pp. 199-224), en la Revista de Ciencias Humanas y Sociales *Miscelánea Comillas,* Vol. 70; Núm. 136, Enero-Junio. Madrid: edita Universidad Pontificia Comillas.

MÉNDEZ, D. (2011). Didáctica de los conceptos básicos de la termodinámica, http://eprints.ucm.es/14722/ (Consulta 24 enero 2013).

MÉNDEZ, L., (2003) "La ambivalencia de la globalización", en MÉNDEZ, L. (Coord.), *La Ética aliento de lo eterno*, Salamanca: San Esteban.

MÉNDEZ, L., (2008), "La Sociedad del Conocimiento", en MACEIRAS, M. Y MEJÍA, R. (ed), *Investigación e Innovación.* Salamanca: San Esteban.

MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN, (2008). *Indicadores del Sistema Español de Ciencia y Tecnología 2007*. Madrid: FECYT.

MORALES, P., (2007). *La fiabilidad de los tests y escalas.* Madrid: Universidad Pontificia Comillas.

Universidad Pontificia de Salamanca

MORALES, P., (2009). “El problema de la unidad de análisis en la investigación educacional: datos individuales o medias de grupos”. http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/UnidadAnalisis.pdf (Consulta: 25/ abril/ 2013).

MOYA, F. de, (2008). *Indicadores bibliométricos de la actividad científica española 2002 – 2006*. Madrid: FECYT.

MÚJICA, F., (2003) “Sociedad del conocimiento y sociedad del trabajo: rasgos estructurales de la sociedad activa”. En Herrero O., M. *Sociedad del trabajo y sociedad del conocimiento en la era de la globalización*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.

MUNICIO F., P., (2008). “Evaluación de la calidad”, en Pérez J., R. & al., *Hacia una educación de calidad*. Madrid: ediciones Narcea.

NAVARRO HINOJOSA, R., (2007). *Didáctica y currículum para el desarrollo de competencias.* Madrid: Dykinson.

NAVARRO, J., (2011). *Los secretos del número π.* Navarra: RBA Coleccionables.

NICOLÁS, J. A., (1994). “Fundamento y expresión en Leibniz”, en RACIONERO, Q. Y ROLDÁN, C. (Comp.). *G. W. Leibniz. Analogía y expresión*. Madrid: Complutense.

NORTON, S. & IRVIN, J. (2007). A concrete approach to teaching symbolic algebra. In J. Watson & K. Beswick (Eds.) *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, MERGA Inc. Retrieved: Dec. 20, 2007 from http://www.merga.net.au/documents/RP502007.pdf

ORDEN (del 10/8/2007) en el B.O.J.A., 166 del 23/8/2007.

ORDEN (del 10/8/2007) en el B.O.J.A., 166 del 23/8/2007.

ORDEN (del 10/8/2007) en el B.O.J.A., 171 del 30/8/2007.

ORDEN (del 10/8/2007) en el B.O.J.A., 171 del 30/8/2007.

ORDEN MINISTERIAL ECI/3858/ 2007/ de 27 de diciembre, *por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.* BOE, núm.312, sábado 29 de diciembre 2007.

ORTEGA Y GASSET, J., (1986), *La rebelión de las masas*, Madrid: Espasa-Calpe.

PARLAMENTO EUROPEO Y CONSEJO DE LA UNIÓN EUROPEA, (2006**).** *Recomendación sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente.* Bruselas: L 394/18 ES Diario Oficial de la Unión Europea 30.12.2006.

PASCAL, B., (1963). *Oeubres Complétes*. Senil, París: ed. de L. Lafuma.

Universidad Pontificia de Salamanca

PÉREZ, R. & al., (1989), *Evaluación de centros y calidad educativa*, Madrid: Cincel.

PÉREZ, R. & al., (2008), *Hacia una educación de calidad*, Madrid: Narcea.

PÉREZ, R., (2008). "La calidad de la educación", en Pérez, R. & al. *Hacia una educación de calidad*. Madrid: ediciones Narcea.

PERRENOUD, P., (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Barcelona: Graó.

PESTALOZZI, E., (1801). *Cómo enseña Gertrudis a sus hijos.* Madrid: La lectura.

PIAGET, J., (1961). *El nacimiento de la inteligencia del niño.* Madrid: Aguilar.

PIAGET, J., (1961). *La formación del símbolo en el niño.* México: FCE..

PIAGET, J., (1982). *Estudios sobre lógica y psicología.* Madrid: Alianza.

PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNÉ, J. y THOM, R., (1978). *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Madrid: Alianza.

PICKOVER, C. A., (2012). *El libro de las matemáticas*. Madrid: Cillero & de Motta.

PIEPER, J., (1984), *El fin del tiempo*. Barcelona: Herder.

PINILLOS, J. L., (1977). *Principios de Psicología*. Madrid: Alianza, Madrid.

PLANAS, N., (2011). "Buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato", en GOÑI, J. Mª., (Coord.), *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.

PLANAS, N., (Coord.), (2012). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

PLATÓN, *República* 562 a. (Trad. cast., Madrid: Gredos1988, p. 355).

PLATÓN, *Banquete*, 210 a - 211b. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1986, pp.262-263 y ss).

PLATÓN, *Carta VII*, 342 b. (Trad. cast. Madrid: Gredos, 1998).

PLATÓN, *Fedro*, 250 a y ss. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1986, pp. 373 y ss).

PLATÓN, *República,* VI, 510 c. (Trad. Cast., Madrid: Gredos,1988, 369).

PLATÓN, *Sofista,* 240 a y ss. (Trad. cast., Madrid: Gredos, 1988, pp. 392 y ss.).

POPPER, K., (1962). *La lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos, (Cf. Introducción a la lógica de la ciencia, pp. 27 56).

PORFIRIO, (1987). *Vida de protágoras.* Madrid: Gredos.

PRADA, J. M. de., (2011) "Pueblos sin tradición". Madrid: *XL SEMANAL. ABC*, nº 1238, del 17 al 25 de julio.

PRESIDENCIA DEL CONSEJO EUROPEO, (2002). *Conclusión 47*. Barcelona. (Consulta, 6 mayo 2012): www.consilium.europa.eu/ueDocs

PRIETO, L., (2007). *Autoeficacia del profesor*. Madrid: Narcea.

Universidad Pontificia de Salamanca

PUYOL, R., (1997). *La universidad del siglo XXI*, Conferencia pronunciada en el Club siglo XXI de Madrid: Madrid: Club Siglo XXI.

QUIÑONEZ, C.; RAMÍREZ, D.; RODRÍGUEZ, Z.; RIVERA, F.; TOVAR, E.; VÁSQUEZ, G. y RAMÍREZ, A., (2006). Desarrollo de herramientas virtuales para la enseñanza de la termodinámica básica. *Revista Colombiana de Física* 38, 1423-1426.

RÁBADE, S., (1994). *La razón y lo irracional*. Madrid: Complutense.

RACIONERO, Q., (1994). "Verdad y expresión. Leibniz y la crítica del subjetivismo moderno", en RACIONERO, Q. Y ROLDÁN, C. (Comp.). *G. W. Leibniz. Analogía y expresión*. Madrid: Complutense.

RADATZ, H., (1980). Students´ Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics,* 1(1), pp.1-20.

RADATZ, H. (1980). Students´ Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics,* 1(1), pp.1-20.

RADFORD, L., (2010) Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research in Mathematics Education, Vancouver, v. 12, n. 1, p. 1 - 19.

RADFORD, L., (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to studentes' types of generalization. Mathematical Thinking and approach to studentes' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning,* Vancouver, v. 5, n. 1, p 37 - 70, 2003.

RAVELA, P., (2009). "La evaluación del desempeño docente para el desarrollo de las

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES, (1999). *Diccionario esencial de las ciencias*. Madrid: Espasa.

REAL DECRETO 99 / 2011, de 28 de enero, *por el que se regulan las enseñanzas oficiales de doctorado*. BOE, núm. 35, jueves 10 de febrero de 2011. Art. 13. Tesis Doctoral.

REAL DECRETO 861/2010, de 2 de julio, por el que se modifica el Real Decreto 1393/ 2007 de 29 de octubre. BOE núm.161, de 3 julio 2010. Disposición nº 10.544.

REAL DECRETO 1393/ 2007, de 29 de octubre, *por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.* BOE núm. 260, de martes 30 octubre 2007.

REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.* BOE, núm. 293, 8 diciembre de 2006.

REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.* BOE, núm. 293, 8 diciembre de 2006.

Universidad Pontificia de Salamanca

REAL DECRETO 1631 / 2006, de 29 de diciembre*, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. BOE, núm. 5, de 5 enero 2007.

REAL DECRETO 1631/ 2006, de 29 de diciembre, *por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* BOE, núm. 5, (5 de enero 2007).

REAL DECRETO 56/ 2005, de 21 de enero, *por el que se regulan los estudios universitarios oficiales de Postgrado*. BOE, núm. 21, de martes 25 enero 2005.

REAL DECRETO 778/ 1998, de 30 de abril. BOE, núm. 104, viernes 1 de mayo de 1998. Art. 7 a 13.

RESOLUCIÓN de 30 de septiembre de 2009, *de la Dirección General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales, por la que se establecen los estándares o conocimientos esenciales de la materia de Matemáticas para los tres primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Madrid.* BOCM, núm. 250, de 21 de octubre de 2009.

RESOLUCIÓN de 30 de septiembre de 2009, *de la Dirección General de Educación Secundaria y Enseñanzas Profesionales, por la que se establecen los estándares o conocimientos esenciales de la materia de Matemáticas para los tres primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Madrid.* BOCM, núm. 250, de 21 de octubre de 2009.

RICO, L., (1995). "Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas". En J. KILPATRICK, J., GÓMEZ, P. y RICO, L. (Eds.), *Educación Matemática,* pp. 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

RICO, L. y Lupiáñez, J. L., (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza editorial.

RICO, L., (2006). "Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas", en *Revista de Educación.* Madrid: Secretaría General Técnica del MEC. Número extraordinario 2006, pp.275- 294.

RIOJA, A. y ORDÓÑEZ, J., (1999). *Teorías del universo, vol. I De los Pitagóricos a Galileo*. Madrid: Síntesis.

RITZ, J.M. y MARTÍN, G., (2012). Research needs for technology education: an international perspective. *International journal of technology and design education,* DOI 10.1007/s10798-012-9215-7. (Cita tomada de Méndez, D., 2012).

RORTY, R., (1983). *La filosofía y el espejo de la naturaleza*. Madrid: Cátedra.

Universidad Pontificia de Salamanca

ROSOVSKI, H., (1996). *La Universidad del Siglo XXI: problemas actuales, misión cambiante y posibles soluciones.* Madrid: Complutense.

RUIZ, C., (2003).*Confiabilidad*. Programa de doctorado de UPEL.

RUSSEL, B., (1969). *La perspectiva científica*. Barcelona: Ariel.

RUSSELL, B., (2001). M*isticismo y lógica*. Barcelona: Edhasa.

SABATER, F., (2006). "Tolerancia", en Giner, S. y otros, *Diccionario de sociología.* Madrid: Alianza.

SALAMONE, Mª. A., (2007). *La Ética y la Política de Aristóteles.* Milano: Lampi di stampa.

SAMPASCUAL, G., (2007). *Psicología del desarrollo y de la educación*. (Vol. II). Madrid: UNED

SAMUELSON, P. A., (1996). "El siglo XXI ya revelado". Madrid: Diario de Economía, del Periódico ABC, (2 / 12 / 1996) p. 49.

SÁNCHEZ, J.C., (2008). "Conocimiento científico de la didáctica". En SÁNCHEZ HUETE, J.C. (coord.) *Compendio de didáctica general* (49-72). Madrid: Ccs.

SÁNCHEZ, J.C. y FERNÁNDEZ, J.A., (2010). *La enseñanza de las matemáticas.* Madrid: CCS.

SÁNCHEZ, M., (2003). *Ética para la vida cotidiana*. Madrid: ediciones del Orto.

SANMARTÍ, N., (2000). "El diseño de unidades didácticas". En PERALES, F.J. y CAÑAL, P., *Didáctica de las ciencias experimentales* (239-266) Alcoy: Marfil.

SANMARTÍ, N., (2002). *Didáctica de las ciencias en la educación secundaria obligatoria.* Madrid: Síntesis.

SARABIA, A. e IRIARTE, C., (2011). *El aprendizaje de las matemáticas*. Pamplona: Eunsa.

SARRAMONA, J., (1990). *Tecnología educativa: una valoración crítica.* Barcelona: CEAC.

SCHULTZ, T. W., (1985) *Invirtiendo en la gente.* Barcelona: Ariel.

SEN, A., (2009). "El mercado no puede basarse sólo en el beneficio, necesita también valores", (Texto de Isabel Bernal). Madrid: *Tribuna Complutense*, nº 81, 10 de febrero.

SÉNECA, L. A., (1986). "Sobre la felicidad", en *Diálogos*. Madrid: Tecnos.

SEVILLANO, M. L., (2007). "La evaluación de los procesos y productos tecnológico-didácticos". En ORTEGA, J.A. y SEVILLANO GARCÍA, M. L., *Nuevas tecnologías para la educación en la era digital*. Madrid: Pirámide.

Universidad Pontificia de Salamanca

SFARD, A., (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

SHUNK,D., (1997). *Teorías del aprendizaje.* México: Prentice-Hall.

SIERPINSKA, A., (1985). Obstacles Epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 6(1).

SIERRA, R., (1991). *Técnicas de la Investigación social*. Madrid: Panorama.

SIERRA, R., (1997).*Tesis Doctorales*. Madrid: Paraninfo.

SKINNER, B.F., (1969). *Cumulativer Record. A selection of papers.* New York: Appleton-Century-Crofts. Tomado de la edición en castellano (1985) Aprendizaje y comportamiento. Barcelona: Martínez Roca.

__ (1974). *Sobre el conductismo*. Barcelona: Planeta.

SLAVIN, R. E., (1991) Synthesis of research on cooperative learning. *Educational leadership,* 48 (5), 71-81.

__ (2009). "What Works in teching maths?", en Better: evidence-based Education, 2,1, 4-5 (Online). http://content.yudu.com/A1i1c9/BetterFall09US (Consultado el 8 de noviembre de 2012).

SOCAS, M., (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones a la investigación. En *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Vol. 77, julio 2011, págs. 5-34. <http://www.sinewton.org/numeros> (Consulta 19 enero 2013).

SOCAS, M., CAMACHO, M., HERNANDEZ, J., (1998). "Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria". En *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, nº 32, pp 73-86.

SOCAS, M. M., (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Cap. V, pp. 125-154. En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

STACEY, K, & CHICK, H., (2004). Solving the problem with algebra. In STACEY, K., CHICK,H. & KENDAL, M (Eds.),*The Future of Teaching and Learning of Algebra*. *The 12th ICMI Study* (pp. 1-20). Boston: Kluwer.

STACEY, K., & MACGREGOR, M., (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *The Mathematics Teacher, 90*(2), 110-113.

STACEY, K., & MACGREGOR, M., (1999). Taking the algebraic thinking out of algebra. *Mathematics Education Research Journal, 1*; 24-38.

Universidad Pontificia de Salamanca

STEWART, I., (2006). *Cartas a una joven matemática*. Barcelona: Crítica.

___ (2007). *Locos por las matemáticas*. Barcelona: Crítica.

SWAN, M.; LACEY,P. y MAN, S., (2008). Mathematics Matters: Final Report. (Online): http://www.ncetm.org.uk/public/files/309231/Mathematics+Matters+Final/Report (Consulta 8 de noviembre de 2012).

TALL, D. O. & THOMAS M. O. J., (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 125–147.

TATON, R. y otros, (1971). *La Ciencia Antigua y Medieval.* Barcelona: Destino, vol. I.

TATON, R., (1988). *La ciencia moderna*. Vol. II. Barcelona: Orbis.

TAYLOR, CH., (1989). *Fuentes del Yo.* Barcelona: Paidós.

TIMPERLEY, H.; WILSON, A.; BARRAR, H. y FUNG, I.Y.Y., (2007). Teacher professional learning and development: Best evidence síntesis iteration. Wellington, New Zealand: Ministry of Education. (pdf) Available at:

TIMSS/ 2011. Encyclopedia Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science. Volumen 1 y 2.

TIMSS/ 2011. International results in Mathematics. TIMSS&PIRLS International Study Center.

TITONE, R., (1986). *El lenguaje y la interacción didáctica: teoría y modelos de análisis.* Madrid: Narcea.

TORRES, A. y MORROW, R. A., (2005). "Estado, globalización y política educacional, en Morrow, R. A., y otros, *Globalización y educación*. Madrid: editorial Popular.

TRIBÓ, G., (2008). "El nuevo perfil de los profesores de secundaria", en. *Educación XXI,* Madrid, 11, 183-209.

TSAI, C., (2010). Do students need teacher's initiation in online collaborative learning? *Computers & Education,* 54, 1137-1144. (Cita tomada de Méndez, D., 2012).

TUNING EDUCATIONAL STRUCTURES IN EUROPE, (2003). ***Informe final. Fase I*****. Deusto, Groningen: Universidades.**

UNESCO, (2010). *Conferencia Mundial sobre Educación Superior. 2009*. París.. www.unesco.org/es/wche2009 (Consulta17/04/2012)

UNESCO, (2012). www.iesalc.unesco.org.ve (Consulta 17/04/2012)

UNESCO. Conferencia General (25 de octubre al 16 de noviembre de 1995). *Declaración de Principios sobre la Tolerancia.* http://www.unesco.org/general/spa/ (Consulta13 enero de 2012).

Universidad Pontificia de Salamanca

VALLE, A., NUÑEZ, J. C., RODRÍGUEZ, S. y GONZÁLEZ-PUMARIEGA, S., (2002). "La motivación académica", en GONZÁLEZ-PIENDA, J. A.; GONZÁLEZ, R.; NÚÑEZ, J. C. y VALLE, A., *Manual de Psicología de la Educación*. Madrid: Pirámide.

VASILIOU, A., (2011). "Prólogo", en *La enseñanza de las matemáticas en Europa: retos comunes y políticas nacionales.* Madrid: Secretaría General Técnica del MEC y D y EACA P9 Eurydice.

VÁZQUEZ, A., (2011) "Plan_Do ‐ Check ‐ Act en una experiencia TIC en el aula: desde la idea a la evaluación". [artículo en línea].EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa. Núm.36/Junio 2011. (Consulta 26/10/11) en

VELASCO, F., (2004). "La solidaridad como marca", en la revista de ciencias sociales *SOCIEDAD Y UTOPÍA*. Madrid: Fundación Pablo V.

VERNANT, J. P., (1985). *Mito y pensamiento en la Grecia Antigua*. Barcelona: Ariel

VERSCHAFFEL, L., (2012). "Los problemas aritméticos verbales y la modelización matemática", en PLANAS, N. (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó.

VIGOTSKY, L.S. (1978). *Mind in society: the development of higher psycological processes.* Cambridge: Harvard university press.

VISAUTA, B., (1989). *Técnicas de investigación social.* Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias.

VIVES, J. L., (1948). *De disciplinis*. Vid. *Obras Completas*. Madrid: Lorenzo Riber.

VOGEL, C. J. de, (1966). *Pythagoras and early Pythagoreanism.* Assen: ed.Royal van Gorcum.

WEBER, M., (1977). *Economía y Sociedad.* México: Fondo de Cultura Económica.

WILSON, J. D., (1992). *Como valorar la calidad de la enseñanza*. Madrid: Paidós.

WINN, W. (1990). "Some implications of cognitive theory for instructional design". *Instructional Science (New York)*, 19, 1,53-69.

WOLFENSOHN, J. D., (1999). "Prefacio", en Banco Mundial, *Informe sobre el desarrollo mundial: el conocimiento al servicio del desarrollo.* Madrid: Mundi – Prensa.

WOOD, R., (1987). *Assessment and equal opportunities* (Conferencia pública), University of London, Institute of Education, 11 de noviembre.

WUSSING, H. y ARNOLD, W., (1989). *Biografías de grandes matemáticos*. Zaragoza: Prensas universitarias de Zaragoza.

www.educationcounts.govt.nz/goto/Bes (cita tomada de Eurydice:2011b:123).

Universidad Pontificia de Salamanca

ZABALZA, M. A., (1990). *Fundamentación de la didáctica y del conocimiento*. Madrid: Narcea.

ZIMAN, J., (1986). *Introducción al estudio de las ciencias*. Barcelona: Ariel.

ZUBIRI, X., (1982). "Investigar es dedicarse a la realidad verdadera". Madrid: Periódico Ya. (19/ X/ 1982), p.43.

WEBGRAFÍA:

INFORME DE CIENCIAS:

http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/133EN.pdf

INFORME DE MATEMÁTICAS:

http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/thematic_reports/132EN.pdf

INFORME DE GÉNERO: http://www.eurydice.org o también en la siguiente dirección española: <http://www.educacion.es/cide/eurydice>

INFORMACIÓN MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO UCM: http://www.ucm.es/centros/webs/m5057

INFORMACIÓN MASTER. UNIVERSIDAD PONTIFICIA DE SALAMANCA: www.upsam.es/

INFORMACIÓN MÁSTER. UNIVERSIDAD PONTIFICIA COMILLAS: www.upcomillas.es/

INFORMACIÓN MÁSTER DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO UNED: http://portal.uned.es/portal/page?_pageid=93.25604849&_dad=portal&_schema

INSTITUTO DE EVALUACIÓN. PISA 2009 Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos OCDE. Informe Español. Consulta el 12/02/2013 http://www.mcu.es/libro/docs/MC/Observatorio/pdf/PISA_espanol_2009.pdf

MULLIS, I.V.S., MARTIN, M.O., FOY, P., Y ARORA, A. "TIMSS 2011 International Results in Mathematics" (2012)Chestnut Hill, MA: TIMSS&PIRLS International Study Center, Boston College. Consulta el 12/02/2013 http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-results-mathematics.html

MULLIS, I.V.S., MARTIN, M.O., MINNICH, C.A., STANCO, G.M., ARORA, A., CENTURINO, V.A.S., & CASTLE, C.E. "TIMSS 2011 Encyclopedia: Education

Universidad Pontificia de Salamanca

Policy and Curriculum in Mathematics and Science", Volumes 1 and 2 (2012). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

CAI, J., KNUTH, E.,"Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives". 2011 Springer

NORMATIVAS DEL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN DE MATEMÁTICAS. CASTILLA Y LEÓN. http://www.educa.jcyl.es/es/curriculo consultada el 12 de Febrero del 2013

NORMATIVA DEL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN DE MATEMÁTICAS. ANDALUCÍA.

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/averroes/impe/web/portadaEntidad?pag=/contenidos/B/ApoyoAlCurriculo/CurriculoDeAndalucia/ consultada el 12 de Febrero del 2013

NORMATIVA DEL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN DE MATEMÁTICAS, MADRID:

http://www.madrid.org/cs/Satellite?c=CM_InfPractica_FA&cid=1142674185195&idConsejeria=1109266187254&idListConsj=1109265444710&idOrganismo=1142287728226&language=es&pagename=ComunidadMadrid%2FEstructura&sm=1109266100977 consultada 22 Mayo 2013

INSTITUTO DE EVALUACIÓN MEC :

www.institutodeevaluacion.educacion.es

Pruebas cgdi 2010

http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/informe-egd-2010.pdf?documentId=0901e72b80d5ad3e (consultada 22 Mayo 2013)

RESULTADOS TIMSS/ 2011:

http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/inee-timss-2011.-marcos-de-la-evaluacion.pdf?documentId=0901e72b8127e807. Consultada 22 de Mayo.

Universidad Pontificia de Salamanca

Índice:

Universidad Pontificia de Salamanca

Anexo III.1.: REAL DECRETO 1393/2007 por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. (BOE núm. 260, (30 octubre de 2007).

4.3.-ANEXO IV. 1: PLAN DE ESTUDIOS DEL GRADO DE MATEMÁTICAS EN LA UCM

5.- CAPÍTULO 5: ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

5.1.-ANEXO I: COMPARATIVA DE CONTENIDOS CURRICULARES DE ÁLGEBRA

5.2.-ANEXO II: EJEMPLOS DE EJERCICIOS DE ÁLGEBRA DE LAS PRUEBAS CDIS

5.3.-ANEXO III: GRÁFICOS DEL TIMSS 2011

5.4.-ANEXO IV: INFORME PISA

5.5.-ANEXO V: LEGISLACIÓN

Anexo V.1.: Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo

Anexo V.2.: Real Decreto 1631 / 2006, de 29 de diciembre

6.-CAPÍTULO 6:

6.1.-ANEXO I: TESTS

Anexo I.1.: Test de motivación

Anexo I.2.: Test de conocimiento

Anexo I.3.: Soluciones del test de conocimientos

6.2.-ANEXO II: RESULTADOS DEL TEST DE MOTIVACIÓN

Anexo II.1.: Resultados del test de motivación de los estudiantes del curso de tercero ESO.

Anexo II.2.: Resultados del test de motivación de los estudiantes del curso de tercero ESO.

Universidad Pontificia de Salamanca

6.3.-ANEXOS III: EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Universidad Pontificia de Salamanca

A N E X O S C A P Í T U L O 4:

ANEXO I: LEGISLACIÓN

Anexo I. 1: Orden ECI/ 3858 /2007/ de 27 de diciembre, B.O.E., núm. 312

22450 ***ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre,*** *por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.* (BOE, núm. 312, sábado 29 de diciembre 2007)

La disposición adicional novena del Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, establece que el Ministerio de Educación y Ciencia precisará los contenidos de su anexo I a los que habrán de ajustarse las solicitudes presentadas por las universidades para la obtención de la verificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos oficiales de Grado o de Máster, prevista en su artículo 24, que habiliten para el ejercicio de profesiones reguladas.

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, en sus artículos 94, 95 y 97, conforma las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas como profesiones reguladas, cuyo ejercicio requiere estar en posesión del correspondiente título oficial de Máster, obtenido, en este caso, de acuerdo con lo previsto en el artículo 15.4 del referido Real Decreto 1393/2007, conforme a las condiciones establecidas en el Acuerdo de Consejo de Ministros de 14 de diciembre de 2007, publicado en el «Boletín Oficial del Estado» de 21 de diciembre de 2007.

Dicho Acuerdo, en su apartado cuarto, en relación con la disposición adicional novena anteriormente citada, encomienda al Ministro de Educación y Ciencia el establecimiento
de los requisitos respecto a objetivos del título y planificación de las enseñanzas. Por lo tanto, a la vista de las disposiciones citadas, resulta procedente establecer los requisitos a los que deberán adecuarse los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, que presenten las universidades para su verificación por el Consejo de Universidades.

En su virtud, previo informe del Consejo de Universidades, dispongo:

Primero. ***Requisitos de los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas*.–**

Los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, deberán cumplir, además de lo previsto en el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, los requisitos respecto a los apartados del Anexo I del mencionado Real Decreto que se señalan en el Anexo a la presente Orden.

Universidad Pontificia de Salamanca

Segundo. ***Habilitación de aplicación y desarrollo***.–

Se autoriza a la Dirección General de universidades para dictar las resoluciones necesarias para el desarrollo y aplicación de la presente Orden.

Tercero. ***Entrada en vigor***.–

La presente Orden entrará en vigor el día siguiente al de su publicación en el «Boletín Oficial del Estado».

Madrid, 27 de diciembre de 2007.–

La Ministra de Educación y Ciencia,

Mercedes Cabrera Calvo-Sotelo.

ANEXO: (ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre)

Establecimiento de requisitos respecto a determinados apartados del anexo I del Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, relativo a la memoria para la solicitud de verificación de títulos oficiales

Apartado 1.1 Denominación:

La denominación de los títulos deberá ajustarse a lo dispuesto en el apartado segundo del Acuerdo de Consejo de Ministros de 14 de diciembre de 2007 por el que se establecen las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos que habiliten para el ejercicio de las profesiones reguladas de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, publicado en el «Boletín Oficial del Estado» de 21 de diciembre de 2007 mediante Resolución del Secretario de Estado de Universidades e Investigación de 17 de diciembre de 2007, y a lo dispuesto en la presente Orden. Así:

1. La denominación de los títulos universitarios oficiales a los que se refiere el apartado anterior, deberá facilitar la identificación de la profesión para cuyo ejercicio habilita y en ningún caso, podrá conducir a error o confusión sobre sus efectos profesionales.

2. No podrá ser objeto de verificación por parte del Consejo de Universidades ningún plan de estudios correspondiente a un título universitario oficial cuya denominación incluya la referencia expresa a las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas sin que dicho título cumpla las condiciones establecidas en el referido Acuerdo y en la presente Orden.

Apartado 3. Objetivos.

Competencias que los estudiantes deben adquirir:

1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.

2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.

3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.

4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.

5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre

Universidad Pontificia de Salamanca

hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.

6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.

7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.

8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.

10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.

11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.

Apartado 4.2 Condiciones de acceso al Máster:

Para el ingreso en el Máster se establece como requisito de acceso la acreditación del dominio de las competencias relativas a la especialización que se desee cursar, mediante la realización de una prueba diseñada al efecto por las Universidades, de la que quedarán exentos quienes estén en posesión de alguna de las titulaciones universitarias que se correspondan con la especialización elegida.

Asimismo, habrá de acreditarse el dominio de una lengua extranjera equivalente al nivel B1 del Marco Común Europeo de Referencia para las Lenguas, de acuerdo con la Recomendación N.º R (98)6 del Comité de Ministros de Estados Miembros de 17 de octubre de 2000.

Apartado 5. Planificación de las enseñanzas.

Los títulos a que se refiere el presente acuerdo son enseñanzas universitarias oficiales de Máster, y sus planes de estudios tendrán una duración de 60 créditos europeos a los que se refiere el artículo 5 del mencionado Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre.

Estas enseñanzas se estructurarán teniendo en cuenta las materias y ámbitos docentes en educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional, enseñanzas artísticas, enseñanzas de idiomas y enseñanzas deportivas. Con carácter general, han de ser presenciales, al menos, en el 80% de los créditos totales del Máster, incluido necesariamente el Practicum.

Las Universidades que por su especificidad diseñan, programan y desarrollan las enseñanzas exclusivamente a distancia, han de garantizar que el Practicum tenga carácter presencial. El Practicum se realizará en colaboración con las instituciones educativas establecidas mediante convenios entre Universidades y Administraciones Educativas.

Las instituciones educativas participantes en la realización del Practicum habrán de estar reconocidas como centros de prácticas, así como los tutores encargados de la orientación y tutela de los estudiantes

Módulo	Nª de créditos europeos	Competencias que deben adquirirse

Universidad Pontificia de Salamanca

Genérico: Aprendizaje y desarrollo de la personalidad Procesos y contextos educativos Sociedad, familia y educación	12	Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones. Comprender el desarrollo de la personalidad de estos estudiantes y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje. Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales. Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula y en el centro, abordar y resolver posibles problemas. Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país. Conocer y aplicar recursos y estrategias de información, tutoría y orientación académica y profesional. Promover acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana. Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia. Relacionar la educación con el medio y comprender la función educadora de la familia y la comunidad, tanto en la adquisición de competencias y aprendizajes como en la educación en el respeto de los derechos y libertades, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad. Conocer la evolución histórica de la familia, sus diferentes tipos y la incidencia del contexto familiar en la educación. Adquirir habilidades sociales en la relación y orientación familiar.
Específico: Complemento s para la formación	24	Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares. En formación profesional, conocer la evolución del mundo laboral, la interacción entre sociedad, trabajo y calidad de vida, así como la necesidad de adquirir la

Universidad Pontificia de Salamanca

disciplinar. Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes. Innovación docente e iniciación a la investigación educativa.		formación adecuada para la adaptación a los cambios y transformaciones que puedan requerir las profesiones. En el caso de la orientación psicopedagógica y profesional, conocer los procesos y recursos para la prevención de problemas de aprendizaje y convivencia, los procesos de evaluación y de orientación académica y profesional. Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo. Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos. Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo. Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada. Analizar críticamente el desempeño de la docencia, de las buenas prácticas y de la orientación utilizando indicadores de calidad. Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las materias de la especialización y plantear alternativas y soluciones. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.
Practicum: Practicum en la especialización, incluyendo el trabajo de fin de Master		Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización. Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente. Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia. Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica. Para la formación profesional, conocer la tipología empresarial correspondiente a los sectores productivos y comprender los sistemas organizativos más comunes en las empresas. Respecto a la orientación, ejercitarse en la evaluación psicopedagógica, el asesoramiento a otros profesionales de la educación, a los estudiantes y a las familias. Estas competencias, junto con las propias del resto de materias, quedarán reflejadas en el Trabajo fin de Máster que compendia la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas descritas.

Universidad Pontificia de Salamanca

Anexo I. 2: Legislación Europea

RECOMENDACIÓN
DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO,

de 18 de diciembre de 2006, sobre las
competencias clave para el aprendizaje permanente(2006/962/CE)
L 394/18 ES Diario Oficial de la Unión Europea 30.12.2006

PARLAMENTO EUROPEO Y CONSEJO DE LA UNIÓN EUROPEA, (2006). ***Recomendación sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente.*** **Bruselas: L 394/18 ES Diario Oficial de la Unión Europea 30.12.2006**.

a) Recomendación del Parlamento europeo y del Consejo de la Unión Europea.
Mediante esta Recomendación que firman el presidente del Parlamento Europeo y el presidente del Consejo Europeo se establecen unas recomendaciones a los Estados miembros de la Unión Europea para desarrollar la oferta de las *competencias clave* para el aprendizaje permanente, para todos, en el contexto de las diversas estrategias del aprendizaje. En el punto cuatro (4) de las recomendaciones a los Estados miembros se dice que han de establecerse las infraestructuras pertinentes para la educación y formación de todos los adultos y en ese *todos los adultos*, afirman de manera específica y explícita *incluidos los profesores y formadores*.
En el anexo se recogen las competencias clave para el aprendizaje permanente – un marco de referencia europeo- en el que se especifican ocho tipos de competencias básicas y en esa lista, el número tres (3) lo ocupan conjuntamente la “competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología”.

El marco de referencia establece ocho competencias clave siguientes:

1. comunicación en la lengua materna;
2. comunicación en lenguas extranjeras;
3. competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología;
4. competencia digital;
5. aprender a aprender;
6. competencias sociales y cívicas;
7. sentido de la iniciativa y espíritu de empresa, y
8. conciencia y expresión culturales.

Acentúan, en el párrafo siguiente, la importancia decisiva que atribuyen a todas y cada una de las competencias agrupadas en los ocho tipos porque “cada una de ellas puede contribuir al éxito de la sociedad del conocimiento” .
Aunque en el listado de competencias aparecen juntas matemáticas, ciencia y tecnología, luego en la especificación que se hace de cada una de las competencias básicas, en este caso se definen cada una de ellas de manera separada y distinta. La competencia básica de las matemáticas la definen en los términos siguientes:

“La competencia matemática es la habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. Basándose en un buen dominio del cálculo, el énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña — en distintos grados— la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas)”.

En cuanto a los c*onocimientos, capacidades y actitudes esenciales relacionados* con la competencia matemática en la recomendación se afirma explícitamente tres aspectos que se consideran importantes. Primero, en relación con las capacidades que se exigen en esta competencia básica, se afirma la necesidad de *tener un buen conocimiento* de los elementos estructurales de las matemáticas, números, medidas, operaciones y comprensión de los términos y conceptos matemáticos. En segundo término se afirma que los individuos debieran ser competentes para aplicar los principios a las situaciones de la vida cotidiana, de razonar matemáticamente y comprender las demostraciones matemáticas. Por último una actitud

Universidad Pontificia de Salamanca

positiva hacia las matemáticas "se basa en el respeto de la verdad y en la voluntad de encontrar argumentos y evaluar su validez"..

"Las capacidades necesarias en el ámbito de las matemáticas incluyen un buen conocimiento de los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones básicas y las representaciones matemáticas básicas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos y un conocimiento de las preguntas a las que las matemáticas pueden dar respuesta.
Las personas deberían contar con las capacidades necesarias para aplicar los principios y los procesos matemáticos básicos en situaciones cotidianas de la vida privada y profesional, así como para seguir y evaluar cadenas argumentales. Las personas deberían ser capaces de razonar matemáticamente, comprender una demostración matemática y comunicarse en el lenguaje matemático, así como de utilizar las herramientas de ayuda adecuadas.
Una actitud positiva en matemáticas se basa en el respeto de la verdad y en la voluntad de encontrar argumentos y evaluar su validez.

Anexo I. 3: Legislación española complementaria de la anterior europea de RECOMENDACIONES

Real Decreto 1631 / 2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp.677 – 773.

ANEXO I: COMPETENCIAS BÁSICAS

La incorporación de competencias básicas al currículo permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos. De ahí su carácter básico. Son aquellas competencias que debe haber desarrollado un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.

La inclusión de las competencias básicas en el currículo tiene varias finalidades. En primer lugar, integrar los diferentes aprendizajes, tanto los formales, incorporados a las diferentes áreas o materias, como los informales y no formales. En segundo lugar, permitir a todos los estudiantes integrar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos. Y, por último, orientar la enseñanza, al permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Con las áreas y materias del currículo se pretende que todos los alumnos y las alumnas alcancen los objetivos educativos y, consecuentemente, también que adquieran las competencias básicas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias. Cada una de las áreas contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias áreas o materias.

El trabajo en las áreas y materias del currículo para contribuir al desarrollo de las competencias básicas debe complementarse con diversas medidas organizativas y funcionales, imprescindibles para su desarrollo. Así, la organización y el funcionamiento de los centros y las aulas, la participación del alumnado, las normas de régimen interno, el uso de determinadas metodologías y recursos didácticos, o la concepción, organización y funcionamiento de la biblioteca escolar, entre otros aspectos, pueden favorecer o dificultar el desarrollo de competencias asociadas a la comunicación, el análisis del entorno físico, la creación, la convivencia y la ciudadanía, o la alfabetización digital. Igualmente, la acción tutorial permanente puede contribuir de modo determinante a la adquisición de competencias relacionadas con la regulación de los aprendizajes, el desarrollo emocional o las habilidades sociales. Por último, la planificación de las actividades complementarias y extraescolares puede reforzar el desarrollo del conjunto de las competencias básicas.

Universidad Pontificia de Salamanca

En el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea, y de acuerdo con las consideraciones que se acaban de exponer, se han identificado ocho competencias básicas:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

En este Anexo se recogen la descripción, finalidad y aspectos distintivos de estas competencias y se pone de manifiesto, en cada una de ellas, el nivel considerado básico que debe alcanzar todo el alumnado al finalizar la educación secundaria obligatoria.

El currículo de la educación secundaria obligatoria se estructura en materias, es en ellas en las que han de buscarse los referentes que permitan el desarrollo y adquisición de las competencias en esta etapa. Así pues, en cada materia se incluyen referencias explícitas acerca de su contribución a aquellas competencias básicas a las se orienta en mayor medida. Por otro lado, tanto los objetivos como la propia selección de los contenidos buscan asegurar el desarrollo de todas ellas. Los criterios de evaluación, sirven de referencia para valorar el progresivo grado de adquisición.

1. Competencia en comunicación lingüística.

Esta competencia se refiere a la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita, de representación, interpretación y comprensión de la realidad, de construcción y comunicación del conocimiento y de organización y autorregulación del pensamiento, las emociones y la conducta.

Los conocimientos, destrezas y actitudes propios de esta competencia permiten expresar pensamientos, emociones, vivencias y opiniones, así como dialogar, formarse un juicio crítico y ético, generar ideas, estructurar el conocimiento, dar coherencia y cohesión al discurso y a las propias acciones y tareas, adoptar decisiones, y disfrutar escuchando, leyendo o expresándose de forma oral y escrita, todo lo cual contribuye además al desarrollo de la autoestima y de la confianza en sí mismo.

Comunicarse y conversar son acciones que suponen habilidades para establecer vínculos y relaciones constructivas con los demás y con el entorno, y acercarse a nuevas culturas, que adquieren consideración y respeto en la medida en que se conocen. Por ello, la competencia de comunicación lingüística está presente en la capacidad efectiva de convivir y de resolver conflictos.

El lenguaje, como herramienta de comprensión y representación de la realidad, debe ser instrumento para la igualdad, la construcción de relaciones iguales entre hombres y mujeres, la eliminación de estereotipos y expresiones sexistas. La comunicación lingüística debe ser motor de la resolución pacífica de conflictos en la comunidad escolar.

Escuchar, exponer y dialogar implica ser consciente de los principales tipos de interacción verbal, ser progresivamente competente en la expresión y comprensión de los mensajes orales que se intercambian en situaciones comunicativas diversas y adaptar la comunicación al contexto. Supone también la utilización activa y efectiva de códigos y habilidades lingüísticas y no lingüísticas y de las reglas propias del intercambio comunicativo en diferentes situaciones, para producir textos orales adecuados a cada situación de comunicación.

Leer y escribir son acciones que suponen y refuerzan las habilidades que permiten buscar, recopilar y procesar información, y ser competente a la hora de comprender, componer y utilizar distintos tipos de textos con intenciones comunicativas o creativas diversas. La lectura facilita la interpretación y comprensión del código que permite hacer uso de la lengua escrita y es, además, fuente de placer, de descubrimiento de otros entornos, idiomas y culturas, de fantasía y de saber, todo lo cual contribuye a su vez a conservar y mejorar la competencia comunicativa.

La habilidad para seleccionar y aplicar determinados propósitos u objetivos a las acciones propias de la comunicación lingüística (el diálogo, la lectura, la escritura, etc.) está vinculada a algunos rasgos fundamentales de esta competencia como las habilidades para representarse mentalmente, interpretar y comprender la realidad, y organizar y autorregular el conocimiento y la acción dotándolos de coherencia.

Comprender y saber comunicar son saberes prácticos que han de apoyarse en el conocimiento reflexivo sobre el funcionamiento del lenguaje y sus normas de uso, e implican la capacidad de tomar el lenguaje como objeto de observación y análisis. Expresar e interpretar diferentes tipos de discurso acordes a la situación comunicativa en diferentes contextos sociales y culturales, implica el conocimiento y aplicación efectiva de las reglas de funcionamiento del sistema de la lengua y de las estrategias necesarias para interactuar lingüísticamente de una manera adecuada.

Disponer de esta competencia conlleva tener conciencia de las convenciones sociales, de los valores y aspectos culturales y de la versatilidad del lenguaje en función del contexto y la intención comunicativa. Implica la capacidad empática de ponerse en el lugar de otras personas; de leer, escuchar, analizar y tener en cuenta opiniones distintas a la propia con sensibilidad y espíritu crítico;

Universidad Pontificia de Salamanca

de expresar adecuadamente -en fondo y forma- las propias ideas y emociones, y de aceptar y realizar críticas con espíritu constructivo.

Con distinto nivel de dominio y formalización -especialmente en lengua escrita- esta competencia significa, en el caso de las lenguas extranjeras, poder comunicarse en algunas de ellas y, con ello, enriquecer las relaciones sociales y desenvolverse en contextos distintos al propio. Asimismo, se favorece el acceso a más y diversas fuentes de información, comunicación y aprendizaje.

En síntesis, el desarrollo de la competencia lingüística al final de la educación obligatoria comporta el dominio de la lengua oral y escrita en múltiples contextos, y el uso funcional de, al menos, una lengua extranjera.

2. Competencia matemática.

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

Asimismo esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. En consecuencia, la competencia matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.

La competencia matemática implica una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.), que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella . En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

Anexo I. 4: Real Decreto 861/2010, de 2 de julio, (BOE, núm. 161, Sábado 3 de julio de 2010)

Universidad Pontificia de Salamanca

Real Decreto 861/2010, de 2 de julio, por el que se modifica el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.

La profunda reforma que supuso la nueva estructuración de las enseñanzas y títulos universitarios oficiales concebida por la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, fue concretada y llevada a la práctica por medio del Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.

Dicha norma reglamentaria vino a dotar al sistema de los mecanismos necesarios par poder operar la trascendental transformación del sistema universitario español en su proceso de convergencia con el Espacio Europeo de Educación Superior, cumpliendo así con los compromisos adquiridos por el Gobierno al suscribir la Declaración de Bolonia y, en particular, con el mandato de llevar a cabo la adaptación de todas las enseñanzas a la nueva estructura en el año 2010.

Así, el primer gran reto al que se enfrentaba la universidad española, cual es el de la completa transformación de su oferta de enseñanzas para adaptarla a las exigencias de la nueva ordenación, está próximo a ser culminado, pues en el curso académico 2010-2011 ya se habrá generalizado la implantación de los nuevos títulos de Grado, Máster y Doctor, muchos de los cuales ya se están impartiendo actualmente en la práctica totalidad de las universidades españolas.

En este contexto, el procedimiento de verificación de los títulos universitarios oficiales se configura como uno de los ejes fundamentales sobre los que se vertebra la reforma universitaria, por lo que la experiencia acumulada en la aplicación de dicho procedimiento ha puesto de manifiesto la necesidad de introducir en el mismo determinadas modificaciones.

De este modo, la presente norma viene a introducir los ajustes necesarios a fin de garantizar una mayor fluidez y eficacia en los criterios y procedimientos establecidos por el anteriormente citado real decreto que ahora se modifica. Así, entre otros aspectos, se introducen ahora nuevas posibilidades en materia de reconocimiento de créditos por parte de las universidades; se posibilita que las universidades completen el diseño de sus títulos de grado con la introducción de menciones o itinerarios alusivos a una concreta intensificación curricular; se extiende la habilitación para emitir el preceptivo informe de evaluación en el procedimiento de verificación, además de a la ANECA a otros órganos de evaluación de las comunidades autónomas y, finalmente, se revisan los procedimientos de verificación, modificación, seguimiento y renovación de la acreditación con el fin de dotar a los mismos de una mejor definición.

Este real decreto ha sido informado favorablemente por el Consejo de Universidades, por la Conferencia General de Política Universitaria y por el Ministerio de Política Territorial. Durante el proceso de elaboración han sido, además, consultadas las organizaciones profesionales.

En su virtud, a propuesta del Ministro de Educación, con la aprobación previa de la Ministra de la Presidencia, de acuerdo con el Consejo de Estado y previa deliberación del Consejo de Ministros en su reunión del día 2 de julio de 2010,

DISPONGO:

Artículo único. *Modificación del Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.*

El Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, se modifica en los siguientes términos:

Uno. Se modifica el apartado 4 del artículo 3, que queda redactado del siguiente modo:

> «Las universidades podrán, mediante convenio con otras universidades nacionales o extranjeras, organizar enseñanzas conjuntas conducentes a la obtención de un único título oficial de Graduado o Graduada, Máster Universitario o Doctor o Doctora. A tal fin, el plan de estudios deberá acompañarse del correspondiente convenio en el que se especificará, al menos, qué Universidad será responsable de la custodia de los expedientes de los estudiantes y de la expedición y registro del título así como el procedimiento de modificación o extinción de planes de estudios. En el supuesto de

Universidad Pontificia de Salamanca

convenios con universidades extranjeras, se deberá acompañar al mismo certificación expedida por la autoridad competente o, en su caso, por la entidad acreditadora, del carácter oficial o acreditado de la universidad o universidades extranjeras de que se trate. En todo caso, la universidad española custodiará los expedientes de los títulos que expida.

A efectos de lo anterior se entiende por título conjunto el correspondiente a un único plan de estudios oficial diseñado por dos o más universidades, españolas o extranjeras, que han suscrito el correspondiente convenio de colaboración y que han presentado una única solicitud de verificación, a efectos del procedimiento establecido en el artículo 25 de este real decreto. Dicha solicitud deberá estar suscrita por todas las universidades participantes que, asimismo, deberán designar a cuál de ellas corresponderá la representación en el citado procedimiento.»

Dos. Se da nueva redacción al artículo 6, que queda redactado en los siguientes términos:

«Artículo 6. *Reconocimiento y transferencia de créditos.*

1. Con objeto de hacer efectiva la movilidad de estudiantes, tanto dentro del territorio nacional como fuera de él, las universidades elaborarán y harán pública su normativa sobre el sistema de reconocimiento y transferencia de créditos, con sujeción a los criterios generales que sobre el particular se establecen en este real decreto.

2. A los efectos previstos en este real decreto, se entiende por reconocimiento la aceptación por una universidad de los créditos que, habiendo sido obtenidos en unas enseñanzas oficiales, en la misma u otra universidad, son computados en otras distintas a efectos de la obtención de un título oficial. Asimismo, podrán ser objeto de reconocimiento los créditos cursados en otras enseñanzas superiores oficiales o en enseñanzas universitarias conducentes a la obtención de otros títulos, a los que se refiere el artículo 34.1 de la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades.

La experiencia laboral y profesional acreditada podrá ser también reconocida en forma de créditos que computarán a efectos de la obtención de un título oficial, siempre que dicha experiencia esté relacionada con las competencias inherentes a dicho título.

En todo caso no podrán ser objeto de reconocimiento los créditos correspondientes a los trabajos de fin de grado y máster.

3. El número de créditos que sean objeto de reconocimiento a partir de experiencia profesional o laboral y de enseñanzas universitarias no oficiales no podrá ser superior, en su conjunto, al 15 por ciento del total de créditos que constituyen el plan de estudios. El reconocimiento de estos créditos no incorporará calificación de los mismos por lo que no computarán a efectos de baremación del expediente.

4. No obstante lo anterior, los créditos procedentes de títulos propios podrán, excepcionalmente, ser objeto de reconocimiento en un porcentaje superior al señalado en el párrafo anterior o, en su caso, ser objeto de reconocimientos en su totalidad siempre que el correspondiente título propio haya sido extinguido y sustituido por un título oficial.

A tal efecto, en la memoria de verificación del nuevo plan de estudios propuesto y presentado a verificación se hará constar tal circunstancia y se deberá acompañar a la misma, además de los dispuesto en el anexo I de este real decreto, el diseño curricular relativo al título propio, en el que conste: número de créditos, planificación de las enseñanzas, objetivos, competencias, criterios de evaluación, criterios de calificación y obtención de la nota media del expediente, proyecto final de Grado o de Máster, etc., a fin de que la Agencia de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA) o el órgano de evaluación que la Ley de las comunidades autónomas determinen, compruebe que el título que se presenta a verificación guarda la suficiente identidad con el título propio anterior y se pronuncie en relación con el reconocimiento de créditos propuesto por la universidad.

5. En todo caso, las universidades deberán incluir y justificar en la memoria de los planes de estudios que presenten a verificación los criterios de reconocimiento de créditos a que se refiere este artículo.

6. La transferencia de créditos implica que, en los documentos académicos oficiales acreditativos de las enseñanzas seguidas por cada estudiante, se incluirán la totalidad de

Universidad Pontificia de Salamanca

los créditos obtenidos en enseñanzas oficiales cursadas con anterioridad, en la misma u otra universidad, que no hayan conducido a la obtención de un título oficial.

7. Todos los créditos obtenidos por el estudiante en enseñanzas oficiales cursados en cualquier universidad, los transferidos, los reconocidos y los superados para la obtención del correspondiente título, serán incluidos en su expediente académico y reflejados en el Suplemento Europeo al Título, regulado en el Real Decreto 1044/2003, de 1 de agosto, por el que se establece el procedimiento para la expedición por las universidades del Suplemento Europeo al Título.»

Tres. El apartado 3 del artículo 9 queda redactado del siguiente modo:

«3. El diseño de los títulos de Grado podrá incorporar menciones alusivas a itinerarios o intensificaciones curriculares siempre que éstas hayan sido previstas en la memoria del plan de estudios a efectos del procedimiento de verificación a que se refieren los artículos 24 y 25 de este real decreto.

La denominación de los títulos de Graduado será: Graduado o Graduada en T, con mención, en su caso, en M, por la Universidad U, siendo T el nombre específico del título, M el correspondiente a la Mención, y U la denominación de la Universidad que lo expide.

En el Suplemento Europeo al Título, de acuerdo con las normas que lo regulen, se hará referencia a la rama de conocimiento en la que se incardine el título. En todo caso, las Administraciones Públicas velarán por que la denominación del título sea acorde con su contenido, y en su caso, con la normativa específica de aplicación, coherente con su disciplina y no conduzca a error sobre su nivel o efectos académicos ni a confusión sobre su contenido y, en su caso, efectos profesionales.»

Cuatro. Se modifica el apartado 3 del artículo 10 que queda redactado del siguiente modo:

«3. Los títulos oficiales de Máster Universitario podrán incorporar especialidades en la programación de sus enseñanzas que se correspondan con su ámbito científico, humanístico, tecnológico o profesional, siempre que hayan sido previstas en la memoria del plan de estudios a efectos del procedimiento de verificación a que se refieren los artículos 24 y 25 de este real decreto. En todo caso, las Administraciones Públicas velarán por que la denominación del título sea acorde con su contenido y en su caso, con la normativa específica de aplicación, y no conduzca a error sobre su nivel o efectos académicos ni a confusión sobre su contenido y, en su caso, efectos profesionales.

La denominación de estos títulos será Máster Universitario en T, en su caso, en la especialidad E, por la Universidad U, siendo T el nombre específico del título, E el de la especialidad y U la denominación de la Universidad que lo expide.»

Cinco. Se modifican los apartados 5, 8 y 9 del artículo 12, que quedan redactados del siguiente modo:

«5. El plan de estudios deberá contener un mínimo de 60 créditos de formación básica. De ellos, al menos 36 estarán vinculados a algunas de las materias que figuran en el anexo II de este real decreto para la rama de conocimiento a la que se pretenda adscribir el título y deberán concretarse en asignaturas con un mínimo de 6 créditos cada una, que deberán ser ofertadas en la primera mitad del plan de estudios.

Los créditos restantes hasta 60, en su caso, deberán estar configurados por materias básicas de la misma u otras ramas de conocimiento de las incluidas en el anexo II, o por otras materias siempre que se justifique su carácter básico para la formación inicial del estudiante o su carácter transversal.»

«8. De acuerdo con el artículo 46.2.i) de la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, los estudiantes podrán obtener reconocimiento académico en créditos por la participación en actividades universitarias culturales, deportivas, de representación estudiantil, solidarias y de cooperación. A efectos de lo anterior, el plan de estudios deberá contemplar la posibilidad de que los estudiantes obtengan un reconocimiento de al menos 6 créditos sobre el total de dicho plan de estudios, por la participación en las mencionadas actividades.»

«9. Cuando se trate de títulos que habiliten para el ejercicio de actividades profesionales reguladas en España, el Gobierno establecerá las condiciones a las que

Universidad Pontificia de Salamanca

deberán adecuarse los correspondientes planes de estudios, que además deberán ajustarse, en su caso, a la normativa europea aplicable. Estos planes de estudios deberán, en todo caso, diseñarse de forma que permitan obtener las competencias necesarias para ejercer esa profesión. A tales efectos la Universidad justificará la adecuación del plan de estudios a dichas condiciones.

Hasta la aprobación de la Ley de servicios profesionales, excepcionalmente, y sólo en aquellos supuestos en que la normativa comunitaria imponga especiales exigencias de formación, el Gobierno podrá establecer las condiciones a las que se refiere el párrafo anterior, aún cuando el correspondiente título de Grado no habilite para el ejercicio profesional de que se trate pero constituya requisito de acceso al título de Máster que, en su caso, se haya determinado como habilitante.»

Seis. Se modifican las letras a) y c) del artículo 13, que quedan redactadas del siguiente modo.

«a) Siempre que el título al que se pretende acceder pertenezca a la misma rama de conocimiento, serán objeto de reconocimiento al menos 36 créditos correspondientes a materias de formación básica de dicha rama.»

«c) El resto de los créditos podrán ser reconocidos por la Universidad teniendo en cuenta la adecuación entre las competencias y conocimientos adquiridos, bien en otras materias o enseñanzas cursadas por el estudiante o bien asociados a una previa experiencia profesional y los previstos en el plan de estudios o que tengan carácter transversal.»

Siete. Se modifica el apartado 1 del artículo 14, que queda redactado del siguiente modo.

«1. El acceso a las enseñanzas oficiales de Grado se regirá de acuerdo con lo dispuesto en el Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas, modificado por el Real Decreto 558/2010, de 7 de mayo.»

Ocho. Se modifica el apartado 2 del artículo 15, que queda redactado en los siguientes términos:

«2. Los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster Universitario tendrán entre 60 y 120 créditos, que contendrá toda la formación teórica y práctica que el estudiante deba adquirir: materias obligatorias, materias optativas, seminarios, prácticas externas, trabajos dirigidos, trabajo de fin de Máster, actividades de evaluación, y otras que resulten necesarias según las características propias de cada título.

La Universidad propondrá la adscripción del correspondiente título de Máster Universitario a alguna de las ramas de conocimiento relacionadas en el artículo 12.4.

Dicha adscripción será igualmente de aplicación en aquellos casos en que el título esté relacionado con más de una disciplina y se hará respecto de la principal.»

Nueve. Se modifica el apartado 1 del artículo 16 que queda redactado en los siguientes términos:

«1. Para acceder a las enseñanzas oficiales de Máster será necesario estar en posesión de un título universitario oficial español u otro expedido por una institución de educación superior perteneciente a otro Estado integrante del Espacio Europeo de Educación Superior que faculte en el mismo para el acceso a enseñanzas de Máster.»

Diez. Se modifica el apartado 2 del artículo 17, que queda redactado del siguiente modo.

«2. La Universidad incluirá los procedimientos y requisitos de admisión en el plan de estudios, entre los que podrán figurar complementos formativos en algunas disciplinas, en función de la formación previa acreditada por el estudiante. Dichos complementos formativos podrán formar parte del Máster siempre que el número total de créditos a cursar no supere los 120.

Universidad Pontificia de Salamanca

En todo caso, formen o no parte del Máster, los créditos correspondientes a los complementos formativos tendrán, a efectos de precios públicos y de concesión de becas y ayudas al estudio la consideración de créditos de nivel de Máster.»

Once. Se modifican los apartados 2 y 3 del artículo 24, que quedan redactados del siguiente modo.

«2. Antes del transcurso de seis años a contar desde la fecha de su verificación inicial o desde la de su última acreditación, los títulos universitarios oficiales de Grado y Doctorado, deberán haber renovado su acreditación de acuerdo con el procedimiento y plazos que las Comunidades Autónomas establezcan en relación con las universidades de su ámbito competencial, en el marco de lo dispuesto en al artículo 27. Asimismo, los títulos de Máster deberán someterse al indicado procedimiento antes del transcurso de cuatro años.

3. A estos efectos la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA) y los órganos de evaluación que la Ley de las Comunidades Autónomas determinen y que cumplan con los criterios y estándares de calidad establecidos por la Comisión Europea mediante la superación de una evaluación externa que les permita ser miembros de pleno derecho de la Asociación Europea para el Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior (European Association for Quality Assurance in Higher Education) –ENQA– y estar inscritas en el Registro Europeo de Agencias de Calidad –EQAR– establecerán conjuntamente los protocolos de evaluación necesarios para la verificación y acreditación de acuerdo con estándares internacionales de calidad y conforme a lo dispuesto en este real decreto.»

Doce. Se modifica el artículo 25, que queda redactado del siguiente modo:

«Artículo 25. *Procedimiento de verificación.*

1. El plan de estudios elaborado por la Universidad será enviado para su verificación al Consejo de Universidades a través de la Secretaría de dicho Órgano que comprobará si se ajusta a los requisitos establecidos en este real decreto, así como a lo dispuesto en el anexo I.

En caso de existir deficiencias, el plan de estudios será devuelto a la Universidad para que ésta realice las modificaciones oportunas en el plazo de 10 días naturales, con indicación de que se así no lo hiciera se le tendrá por desistido de su petición de acuerdo con lo establecido en el artículo 71 de la Ley 30/1992, de 26 de noviembre, de Régimen Jurídico de las Administraciones Públicas y del Procedimiento Administrativo Común.

2. Una vez cumplido el trámite a que se refiere el apartado anterior, y de conformidad con la normativa vigente, el plan de estudios será enviado a la ANECA o al correspondiente órgano de evaluación, a efectos de elaboración del informe de evaluación, que tendrá el carácter preceptivo y determinante al que se refiere el artículo 42.5c de la Ley 30/1992, de 26 de noviembre, de Régimen Jurídico de las Administraciones Públicas y del Procedimiento Administrativo Común.

3. La ANECA, o en su caso, los órganos de evaluación que la Ley de las Comunidades Autónomas determinen, que cumplan los requisitos establecidos en el artículo 24.3 anterior, evaluarán los planes de estudios, de acuerdo con los protocolos de verificación a que se refiere el artículo 24.3 de este real decreto.

4. La evaluación del plan de estudios se realizará por una Comisión formada por expertos del ámbito académico y profesional. Dichos expertos serán evaluadores independientes y de reconocido prestigio designados en cada caso por la ANECA o por los respectivos órganos de evaluación.

5. El órgano de evaluación correspondiente elaborará una propuesta de informe que se expresará, de forma motivada, en términos favorables al plan de estudios o indicando los aspectos que necesariamente deben ser modificados a fin de obtener un informe favorable. Este informe será enviado por la ANECA o por el correspondiente órgano de evaluación a la Universidad para que pueda presentar alegaciones en el plazo de 20 días naturales.

6. Una vez concluido el plazo y valoradas, en su caso, las alegaciones, la ANECA o el órgano de evaluación correspondiente elaborará el informe de evaluación que podrá ser favorable o desfavorable y lo remitirá a la universidad solicitante, al Consejo de Universidades y al Ministerio de Educación.

Universidad Pontificia de Salamanca

7. Una vez recibido por el Consejo de Universidades el informe favorable, éste comprobará la denominación propuesta para el título, su coherencia con el plan de estudios, así como la adecuación del citado plan a las previsiones de este real decreto, y dictará resolución de verificación que podrá ser positiva, si se cumplen las condiciones señaladas, o negativa, en caso contrario. Si el informe recibido fuere desfavorable, el Consejo de Universidades dictará resolución negativa.

En ambos casos la resolución se dictará en el plazo de 6 meses desde la fecha de entrada de la solicitud de verificación en el Consejo de Universidades. La falta de resolución expresa en el citado plazo permitirá considerar desestimada la solicitud.

8. El Consejo de Universidades comunicará la resolución de verificación al Ministerio de Educación, a la Comunidad Autónoma o Comunidades Autónomas interesadas y a la Universidad o Universidades proponentes.

9. Contra la resolución de verificación, la Universidad podrá recurrir ante la Presidencia del Consejo de Universidades, en el plazo de un mes desde su notificación. En el caso de ser admitida a trámite la reclamación, ésta será valorada por una comisión designada al efecto por dicho órgano y formada por expertos que no hayan intervenido en la evaluación que ha conducido a la resolución negativa. Esta comisión examinará el expediente relativo a la verificación para velar por las garantías establecidas y podrá ratificar la resolución o, en su caso, aceptar la reclamación y remitirla a la ANECA o al correspondiente órgano de evaluación, indicando de forma concreta los aspectos de la evaluación que deben ser revisados, todo ello en un plazo máximo de tres meses, a contar desde la interposición de la reclamación.

10. El examen de la reclamación se basará exclusivamente en la memoria del plan de estudios propuesto por la Universidad y toda la documentación contenida en el expediente, por lo que no será objeto de consideración información adicional a la aportada durante el proceso de evaluación a excepción de posibles aclaraciones sobre la información inicialmente presentada.

11. La ANECA o el órgano de evaluación correspondiente analizará los aspectos señalados por el Consejo de Universidades y remitirá el correspondiente informe en el plazo máximo de un mes. Recibido el informe, el Consejo de Universidades emitirá la resolución definitiva en el plazo de dos meses que agotará la vía administrativa y será comunicada a la universidad, a la correspondiente Comunidad Autónoma y al Ministerio de Educación. La falta de resolución expresa en el citado plazo permitirá considerar desestimada la reclamación.»

Trece. Se añade un nuevo apartado 3 al artículo 26 con la siguiente redacción:

«3. Una vez que el Gobierno haya aprobado el carácter oficial del título, el Rector de la Universidad ordenará publicar el plan de estudios en el "Boletín Oficial del Estado" y en el Diario Oficial de la correspondiente comunidad autónoma.

A estos efectos la publicación deberá recoger los términos expresados en el apartado 5.1 de la Memoria contenida en el anexo I de este real decreto.»

Catorce. Se modifica el artículo 27 que pasa a tener una nueva denominación y queda redactado del siguiente modo.

«Artículo 27. *Seguimiento de los títulos inscritos en el Registro de universidades, centros y títulos (RUCT).*

1. Una vez iniciada la implantación de las enseñanzas correspondientes a los títulos oficiales inscritos en el Registro de universidades, centros y títulos (RUCT), la ANECA o los órganos de evaluación que la Ley de las comunidades autónomas determinen, llevarán a cabo el seguimiento del cumplimiento del proyecto contenido en el plan de estudios verificado por el Consejo de Universidades.

2. A efectos de lo establecido en el apartado anterior, la ANECA y los correspondientes órganos de evaluación en colaboración con el Ministerio de Educación y las correspondiente comunidades autónomas, elaborarán conjuntamente un protocolo que incluirá la definición de un mínimo de criterios e indicadores básicos comunes para el procedimiento de seguimiento de planes de estudio. A efectos del establecimiento de los criterios e indicadores básicos citados los órganos señalados impulsarán, con carácter previo, la realización de experiencias piloto sobre planes de estudios que hayan concluido su segundo año de implantación.»

Universidad Pontificia de Salamanca

Quince. Se añade un nuevo artículo 27 bis, que queda redactado en los siguientes términos:

«Artículo 27 bis. *Renovación de la acreditación de los títulos.*

1. La renovación de la acreditación de los títulos universitarios oficiales se producirá en los términos y plazos previstos en el artículo 24.2, cuando éstos obtengan la correspondiente resolución del Consejo de Universidades, previo informe favorable emitido por la ANECA o los órganos de evaluación que la Ley de las comunidades autónomas determinen.

2. A tal fin, la universidad efectuará la correspondiente solicitud de acuerdo con el procedimiento y plazos que las comunidades autónomas establezcan para sus respectivos ámbitos competenciales.

3. Una vez instruido el expediente, el órgano competente de la comunidad autónoma remitirá a la ANECA o al correspondiente órgano de evaluación la solicitud de informe a fin de comprobar que el plan de estudios se está llevando a cabo de acuerdo con su proyecto inicial, mediante una evaluación que incluirá, en todo caso, una visita de expertos externos a la universidad.

4. El órgano de evaluación correspondiente elaborará una propuesta de informe que se expresará, de forma motivada, en términos favorables a la renovación de la acreditación o, en su caso, indicando los aspectos que necesariamente deben ser modificados a fin de obtener un informe favorable. Este informe será enviado por la ANECA o por el correspondiente órgano de evaluación a la Universidad para que pueda presentar alegaciones en el plazo de 20 días naturales.

5. Una vez concluido el plazo y valoradas, en su caso, las alegaciones, la ANECA o el órgano de evaluación correspondiente elaborará el informe de evaluación que podrá ser favorable o desfavorable y lo remitirá a la universidad solicitante, al Consejo de Universidades al Ministerio de Educación y a la comunidad autónoma o comunidades autónomas correspondientes.

6. Recibido el informe, el Consejo de Universidades dictará en el plazo de un mes y en todo caso antes de seis meses desde la solicitud de la universidad a que se refiere el apartado 2 la correspondiente resolución que comunicará al Ministerio de Educación, a la comunidad o comunidades autónomas y a la Universidad. La falta de resolución expresa en el citado plazo permitirá considerar estimada la solicitud.

7. Contra la resolución a que se refiere el apartado anterior la universidad podrá recurrir ante la presidencia del Consejo de universidades en el plazo de un mes, que se sustanciará de acuerdo con el procedimiento establecido en los apartados 9 y siguientes del artículo 25.

8. Una vez dictada la resolución, el Ministerio de Educación la comunicará al RUCT, que caso de ser estimatoria procederá a la inscripción de la correspondiente renovación de la acreditación a que se refiere el apartado 1. En caso de ser desestimatoria, el título causará baja en el mencionado registro y perderá su carácter oficial y validez en todo el territorio nacional. En este último supuesto, la correspondiente resolución declarará extinguido el plan de estudios y deberá contemplar las adecuadas medidas que garanticen los derechos académicos de los estudiantes que se encuentren cursando dichos estudios.

9. La Conferencia General de Política Universitaria, aprobará los criterios de coordinación, cooperación y reconocimiento mutuo para la participación en el procedimiento a que se refiere este artículo.»

Dieciséis. Se da nueva redacción al artículo 28 en los siguientes términos:

«Artículo 28. *Modificación de los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos oficiales ya verificados.*

1. Las modificaciones de los planes de estudios a los que se refiere el presente real decreto, serán aprobadas por las universidades, en la forma en que determinen sus estatutos o normas de organización y funcionamiento y en su caso, las correspondientes normativas autonómicas que deberán preservar la autonomía académica de las universidades.

2. En el caso de que dichas modificaciones afecten al contenido de los asientos registrales relativos a títulos oficiales inscritos en el RUCT, éstas serán notificadas al Consejo de Universidades a través de la secretaría de dicho órgano, que las enviará

Universidad Pontificia de Salamanca

para su informe a la ANECA o al correspondiente órgano que hubiera efectuado la evaluación en el procedimiento de verificación a que se refiere el artículo 25. Dicho informe tendrá el carácter preceptivo y determinante al que se refiere el artículo 42.5.c de la Ley 30/1992, de 26 de noviembre, de Régimen Jurídico de las Administraciones Públicas y del Procedimiento Administrativo Común.

En el supuesto de que tales modificaciones no supongan, a juicio de las comisiones a que se refiere el artículo 25, un cambio en la naturaleza y objetivos del título inscrito, la ANECA o el órgano de evaluación correspondiente aceptará las modificaciones propuestas e informará a la universidad solicitante, al Ministerio de Educación y a la comunidad autónoma o comunidades autónomas correspondientes, en el plazo de tres meses desde la fecha de recepción de la solicitud de modificación. Transcurrido dicho plazo sin pronunciamiento expreso la universidad considerará aceptada su propuesta.

3. Las modificaciones aceptadas que afecten al apartado 5.1 de la Memoria para la solicitud de verificación de títulos oficiales contendida en el anexo I, darán lugar a una nueva publicación del plan de estudios de acuerdo con lo establecido en el artículo 26.3 de este real decreto.

Asimismo, en el supuesto de que las modificaciones aceptadas afecten a los términos de la denominación del título contenidos en la resolución de verificación del mismo, el rector o rectores deberán ordenar la publicación de dichas modificaciones en el "Boletín Oficial de Estado" y en el Boletín Oficial de la correspondiente comunidad autónoma.

4. En caso de que las modificaciones no sean aceptadas o sólo lo sean parcialmente, la ANECA o el órgano de evaluación correspondiente, remitirá en el plazo máximo de tres meses el oportuno informe al Consejo de Universidades que resolverá de acuerdo con el contenido de dicho informe y notificará la correspondiente resolución a la universidad, a la comunidad autónoma o comunidades autónomas correspondientes y al Ministerio de Educación, todo ello en el plazo máximo de seis meses desde la fecha de recepción de la solicitud de modificación. La falta de resolución expresa en el citado plazo permitirá considerar estimada la solicitud.

Contra dicha resolución la universidad podrá interponer la oportuna reclamación que se sustanciará por los trámites previstos en los apartados 9 a 11 del artículo 25.

5. El Ministerio de Educación dará traslado al RUCT de todas las modificaciones aceptadas en los planes de estudios de acuerdo con lo establecido en este artículo, a fin de proceder a su correspondiente inscripción.»

Diecisiete. Se añade un nuevo apartado 3 a la disposición adicional quinta con la siguiente redacción:

«3. El título de Doctor otorgado por el Instituto Universitario Europeo de Florencia es equivalente a todos los efectos al título de Doctor expedido por una Universidad española de conformidad con este real decreto.»

Dieciocho. Se añade una disposición adicional duodécima con la siguiente redacción:

«Disposición adicional duodécima. *Verificación de titulaciones conjuntas internacionales Erasmus Mundus.*

Las titulaciones conjuntas creadas mediante consorcios internacionales en las que participen instituciones de Educación Superior españolas y extranjeras y que hayan sido evaluadas y seleccionadas por la Comisión Europea en convocatorias competitivas como programas de excelencia con el sello Erasmus Mundus, se entenderá que cuentan con el informe favorable de verificación a que se refiere el artículo 24 del presente real decreto.

A estos efectos la universidad solicitante enviará al Ministerio de Educación la propuesta del plan de estudios aprobada por la Comisión Europea junto con el Convenio correspondiente del consorcio y la carta de notificación de haber obtenido el sello Erasmus Mundus al que se refiere el párrafo anterior, así como un formulario adaptado que proporcione los datos necesarios para la inscripción del correspondiente título en el RUCT. El Ministerio de Educación enviará el expediente al Consejo de Universidades a efectos de emitir la correspondiente resolución de acuerdo con lo dispuesto en el artículo 25.»

Diecinueve. Se añade una disposición adicional decimocuarta con la siguiente redacción:

Universidad Pontificia de Salamanca

«Disposición adicional decimocuarta. *Información sobre el sistema universitario español.*

La Secretaría General de Universidades, previo acuerdo de la Conferencia General de Política Universitaria, impulsará y coordinará la creación de un sistema integrado y general de información en el que participarán las Universidades y comunidades autónomas. Dicho sistema permitirá dar cobertura a las necesidades de información del conjunto del sistema universitario español y facilitará a la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA) y a los órganos de evaluación que la Ley de las comunidades autónomas determinen, la información necesaria para llevar a cabo los procedimientos relativos al seguimiento y acreditación de los títulos universitarios oficiales, previstos en este real decreto.

Dicho sistema de información será atendido con los recursos personales y materiales de que dispone la Secretaría General de Universidades.»

Veinte. Se añade un inciso final a la letra a) de la disposición transitoria segunda, que queda redactada en los siguientes términos:

«a) A los estudiantes que hubiesen iniciado estudios universitarios oficiales conforme a anteriores ordenaciones, les serán de aplicación las disposiciones reguladoras por las que hubieran iniciado sus estudios, sin perjuicio de lo establecido en la disposición adicional segunda de este real decreto, hasta el 30 de septiembre de 2015, en que quedarán definitivamente extinguidas. Ello no obstante, las universidades, sin perjuicio de las normas de permanencia que sean de aplicación, garantizarán la organización de al menos cuatro convocatorias de examen en los dos cursos académicos siguientes a la citada fecha de extinción.»

Veintiuno. Se modifica el anexo I, relativo a la Memoria para la solicitud de verificación de títulos oficiales, que queda redactado en los siguientes términos:

«**ANEXO I: Memoria para la solicitud de verificación de títulos oficiales**

La presente memoria configura el proyecto de título oficial que deben presentar las universidades para su correspondiente verificación. El proyecto constituye el compromiso de la institución sobre las características del título y las condiciones en las que se van a desarrollar las enseñanzas. En la fase de acreditación, la Universidad deberá justificar el ajuste de la situación de lo realizado con lo propuesto en el proyecto presentado, o justificar las causas del desajuste y las acciones realizadas en cada uno de los ámbitos.

La cumplimentación de la memoria que acompañará a la solicitud de verificación de los títulos se materializará a través del soporte informático desarrollado al efecto por el Ministerio de Educación.

Dicha soporte informático establecerá los mecanismos necesarios a fin de que por las universidades se haya de cumplimentar por una sola vez la información relativa a aquellos aspectos que sean comunes a todos los planes de estudios.

1. *Descripción del título*

1.1 Denominación.

1.2 Universidad solicitante, y centro o centros responsables de las enseñanzas conducentes al título, o en su caso, departamento o instituto. En caso de títulos conjuntos se deben citar todas las universidades, ya sean españolas o extranjeras, que han diseñado conjuntamente el plan de estudios y que lo presentan conjuntamente a verificación a través de una única solicitud. En estos casos se ha de aportar el correspondiente convenio. Tipo de enseñanza de qué se trata (presencial, semipresencial, a distancia, etc.).

1.3 Número de plazas de nuevo ingreso ofertadas (estimación para los primeros 4 años en el caso de títulos de Grado y para los 2 primeros años en el caso de títulos de Máster).

1.4 Número mínimo de créditos europeos de matrícula por estudiante y periodo lectivo y, en su caso, normas de permanencia. Los requisitos planteados en este apartado deben permitir a los estudiantes cursar estudios a tiempo parcial y deben atender a cuestiones derivadas de la existencia de necesidades educativas especiales.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.5 Resto de información necesaria para la expedición del Suplemento Europeo al Título de acuerdo con la normativa vigente.

2. ***Justificación***

2.1 Justificación del título propuesto, argumentando el interés académico, científico o profesional del mismo.

2.2 En el caso de los títulos de Graduado o Graduada: Referentes externos a la Universidad proponente que avalen la adecuación de la propuesta a criterios nacionales o internacionales para títulos de similares características académicas. Pueden ser:

Libros blancos del Programa de Convergencia Europea de la ANECA (www.aneca.es, sección libros blancos).

Planes de estudios de universidades españolas, universidades europeas e internacionales de calidad o interés contrastado,

Informes de asociaciones o colegios profesionales, nacionales, europeas, de otros países o internacionales,

Títulos del catálogo vigentes a la entrada en vigor de la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades.

Otros, con la justificación de su calidad o interés académico.

2.3 Descripción de los procedimientos de consulta internos y externos utilizados para la elaboración del plan de estudios. Éstos pueden haber sido con profesionales, estudiantes u otros colectivos.

3. ***Competencias***

3.1 Competencias generales y específicas que los estudiantes deben adquirir durante sus estudios, y que sean exigibles para otorgar el título. Las competencias propuestas deben ser evaluables. Deberán tenerse en cuenta los principios recogidos en el artículo 3.5 de este real decreto.

3.2 Se garantizarán, como mínimo las siguientes competencias básicas, en el caso del Grado, y aquellas otras que figuren en el Marco Español de Cualificaciones para la Educación Superior, MECES:

Que los estudiantes hayan demostrado poseer y comprender conocimientos en un área de estudio que parte de la base de la educación secundaria general, y se suele encontrar a un nivel que, si bien se apoya en libros de texto avanzados, incluye también algunos aspectos que implican conocimientos procedentes de la vanguardia de su campo de estudio;

Que los estudiantes sepan aplicar sus conocimientos a su trabajo o vocación de una forma profesional y posean las competencias que suelen demostrarse por medio de la elaboración y defensa de argumentos y la resolución de problemas dentro de su área de estudio;

Que los estudiantes tengan la capacidad de reunir e interpretar datos relevantes (normalmente dentro de su área de estudio) para emitir juicios que incluyan una reflexión sobre temas relevantes de índole social, científica o ética;

Que los estudiantes puedan transmitir información, ideas, problemas y soluciones a un público tanto especializado como no especializado;

Que los estudiantes hayan desarrollado aquellas habilidades de aprendizaje necesarias para emprender estudios posteriores con un alto grado de autonomía.

3.3 Se garantizarán, como mínimo las siguientes competencias básicas, en el caso del Máster, y aquellas otras que figuren en el Marco Español de Cualificaciones para la Educación Superior, MECES:

Poseer y comprender conocimientos que aporten una base u oportunidad de ser originales en el desarrollo y/o aplicación de ideas, a menudo en un contexto de investigación.

Que los estudiantes sepan aplicar los conocimientos adquiridos y su capacidad de resolución de problemas en entornos nuevos o poco conocidos dentro de contextos más amplios (o multidisciplinares) relacionados con su área de estudio;

Universidad Pontificia de Salamanca

Que los estudiantes sean capaces de integrar conocimientos y enfrentarse a la complejidad de formular juicios a partir de una información que, siendo incompleta o limitada, incluya reflexiones sobre las responsabilidades sociales y éticas vinculadas a la aplicación de sus conocimientos y juicios;

Que los estudiantes sepan comunicar sus conclusiones –y los conocimientos y razones últimas que las sustentan– a públicos especializados y no especializados de un modo claro y sin ambigüedades;

Que los estudiantes posean las habilidades de aprendizaje que les permitan continuar estudiando de un modo que habrá de ser en gran medida autodirigido o autónomo.

3.4 Se garantizarán, como mínimo las siguientes competencias básicas, en el caso del Doctorado, y aquellas otras que figuren en el Marco Español de Cualificaciones para la Educación Superior, MECES:

Que los estudiantes hayan demostrado una comprensión sistemática de un campo de estudio y el dominio de las habilidades y métodos de investigación relacionados con dicho campo;

Que los estudiantes hayan demostrado la capacidad de concebir, diseñar, poner en práctica y adoptar un proceso sustancial de investigación con seriedad académica;

Que los estudiantes hayan realizado una contribución a través de una investigación original que amplíe las fronteras del conocimiento desarrollando un corpus sustancial, del que parte merezca la publicación referenciada a nivel nacional o internacional;

Que los estudiantes sean capaces de realizar un análisis crítico, evaluación y síntesis de ideas nuevas y complejas;

Que los estudiantes sepan comunicarse con sus colegas, con la comunidad académica en su conjunto y con la sociedad en general acerca de sus áreas de conocimiento;

Que se les suponga capaces de fomentar, en contextos académicos y profesionales, el avance tecnológico, social o cultural dentro de una sociedad basada en el conocimiento.

4. *Acceso y admisión de estudiantes*

4.1 Sistemas accesibles de información previa a la matriculación y procedimientos accesibles de acogida y orientación de los estudiantes de nuevo ingreso para facilitar su incorporación a la Universidad y a las enseñanzas.

4.2 En su caso, siempre autorizadas por la administración competente, indicar las condiciones o pruebas de acceso especiales. Asimismo, se indicarán, los criterios de admisión a las enseñanzas oficiales de Master así como los complementos formativos que, en su caso, establezca la universidad de acuerdo con lo previsto en el artículo 17 de este real decreto.

4.3 Sistemas accesibles de apoyo y orientación de los estudiantes una vez matriculados.

4.4 Transferencia y reconocimiento de créditos: sistema propuesto por la Universidad de acuerdo con los artículos 6 y 13 de este real decreto.

4.5 En aquellos supuestos en que la universidad pretenda ofertar un diseño curricular concreto (curso puente o de adaptación) para el acceso a las enseñanzas de Grado por parte de titulados de la anterior ordenación, se deberán concretar todos los aspectos relativos a tal diseño curricular, así como los relativos a los criterios y condiciones de acceso al mismo.

4.6 Descripción de los complementos formativos necesarios, en su caso, para la admisión al Máster, de acuerdo con lo previsto en el artículo 17.2.

5. *Planificación de las enseñanzas*

5.1 Estructura de las enseñanzas:

a) Denominación del módulo o materia.
b) Contenido en créditos ECTS.
c) Organización temporal: semestral, trimestral o semanal, etc.
d) Carácter obligatorio u optativo.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 1. Resumen de las materias que constituyen la propuesta en un título de graduado y su distribución en créditos

Tipo de materia	Créditos
Formación básica	
Obligatorias	
Optativas	
Prácticas externas (si se incluyen)	
Trabajo fin de Grado	
Total	

Tabla 2. Resumen de las materias que constituyen la propuesta en un título de Máster Universitario y su distribución en créditos

Tipo de materia	Créditos
Obligatorias	
Optativas	
Prácticas externas (si se incluyen)	
Trabajo fin de Máster	
Total	

5.2 Procedimientos para la organización de la movilidad de los estudiantes propios y de acogida. Debe incluir el sistema de reconocimiento y acumulación de créditos ECTS.

5.3 Descripción de los módulos o materias de enseñanza-aprendizaje que constituyen la estructura del plan de estudios, incluyendo las prácticas externas y el trabajo de fin de Grado o Máster, de acuerdo con la siguiente tabla:

Tabla 3. Modelo de tabla para cada módulo o materia del plan de estudios propuesto

Denominación del módulo o materia:	
Competencias que adquiere el estudiante con dicho módulo o materia.	A definir por la universidad.
Breve descripción de sus contenidos.	A definir por la universidad.
Actividades formativas con su contenido en créditos ECTS, su metodología de enseñanza-aprendizaje y su relación con las competencias que debe adquirir el estudiante.	A definir por la universidad.
Sistema de evaluación de la adquisición de las competencias y sistema de calificaciones de acuerdo con la legislación vigente.	A definir por la universidad.

6. ***Personal académico***

Descripción del profesorado y otros recursos humanos necesarios y disponibles para llevar a cabo el plan de estudios propuesto

7. ***Recursos materiales y servicios***

7.1 Justificación de que los medios materiales y servicios disponibles propios y en su caso, concertados con otras instituciones ajenas a la universidad, (espacios, instalaciones, laboratorios, equipamiento científico, técnico o artístico, biblioteca y salas de lectura, nuevas tecnologías, etc.), son adecuados para garantizar la adquisición de competencias y el desarrollo de las actividades formativas planificadas, observando los criterios de accesibilidad universal y diseño para todos.

Universidad Pontificia de Salamanca

7.2 En el caso de que no se disponga de todos los recursos materiales y servicios necesarios en el momento de la propuesta del plan de estudios, se deberá indicar la previsión de adquisición de los mismos.

8. *Resultados previstos*

8.1 Estimación de valores cuantitativos para los indicadores que se relacionan a continuación y la justificación de dichas estimaciones. No se establece ningún valor de referencia al aplicarse estos indicadores a instituciones y enseñanzas de diversas características. En la fase de acreditación se revisarán estas estimaciones, atendiendo a las justificaciones aportadas por la Universidad y a las acciones derivadas de su seguimiento.

Tasa de graduación: porcentaje de estudiantes que finalizan la enseñanza en el tiempo previsto en el plan de estudios o en un año académico más en relación a su cohorte de entrada.

Tasa de abandono: relación porcentual entre el número total de estudiantes de una cohorte de nuevo ingreso que debieron obtener el título el año académico anterior y que no se han matriculado ni en ese año académico ni en el anterior.

Tasa de eficiencia: relación porcentual entre el número total de créditos del plan de estudios a los que debieron haberse matriculado a lo largo de sus estudios el conjunto de graduados de un determinado año académico y el número total de créditos en los que realmente han tenido que matricularse.

8.2 Procedimiento general de la Universidad para valorar el progreso y los resultados de aprendizaje de los estudiantes en términos de las competencias expresadas en el apartado 3 de este anexo. Entre ellos se pueden considerar resultados de pruebas externas, trabajos fin de Grado, trabajos fin de Máster, etc.

9. *Sistema de garantía de la calidad*

La información contenida en este apartado puede referirse tanto a un sistema propio para el título como a un sistema general de la Universidad o del centro responsable de las enseñanzas, aplicable al título.

a. Responsables del sistema de garantía de la calidad del plan de estudios.

b. Procedimientos de evaluación y mejora de la calidad de la enseñanza y el profesorado.

c. Procedimientos para garantizar la calidad de las prácticas externas y los programas de movilidad.

d. Procedimientos de análisis de la inserción laboral de los graduados y de la satisfacción con la formación recibida y en su caso su incidencia en la revisión y mejora del título.

e. Procedimiento para el análisis de la satisfacción de los distintos colectivos implicados (estudiantes, personal académico y de administración y servicios, etc.) y de atención a las sugerencias o reclamaciones y, en su caso, su incidencia en la revisión y mejora del título.

f. Criterios específicos en el caso de extinción del título.

10. *Calendario de implantación*

a. Cronograma de implantación del título.

b. Procedimiento de adaptación, en su caso, al nuevo plan de estudios por parte de los estudiantes procedentes de la anterior ordenación universitaria.

c. Enseñanzas que se extinguen por la implantación del correspondiente título propuesto.»

Disposición final única. *Entrada en vigor.*

El presente real decreto entrará en vigor el día siguiente al de su publicación en el «Boletín Oficial de Estado.»

Dado en Madrid, el 2 de julio de 2010.

JUAN CARLOS R.

Universidad Pontificia de Salamanca

El Ministro de Educación,
ÁNGEL GABILONDO PUJOL

Capítulo 4:

ANEXO II: MODELOS DE MASTER

Anexo II. 1: Master de Formación del Profesorado de la Universidad Pontificia Comillas

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO Núm. 120;
Lunes 17 de mayo de 2010 Sec. III. Pág. 43213/15

7959: *Resolución de 6 de mayo de 2010, de la Universidad Pontificia Comillas, por la que publica el plan de estudios de Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.*

De conformidad con lo que disponen el artículo 35.4 de la Ley orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, en la redacción dada por la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, la Disposición Adicional Sexta del Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales y el apartado segundo del Acuerdo del Consejo de Ministros de 12 de marzo de 2010 por el que se establece el carácter oficial de determinados títulos de Máster de la Universidad Pontificia Comillas, y una vez acordada por el Consejo de Universidades en su sesión del día 22 de junio de 2009 la verificación positiva de la propuesta de título de Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato por la Universidad Pontificia Comillas,

Este Rectorado ha resuelto ordenar la publicación del plan de estudios del Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato como Anexo a la presente Resolución.

Madrid, 6 de mayo de 2010.–El Rector de la Universidad Pontificia Comillas, José Ramón Busto Saiz.

ANEXO

Máster Universitario en Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

Cuadro 1. Resumen de módulos y distribución de ECTS según tipos de materias

Módulo	Créditos mínimos
Genérico	12
Específico	24
Prácticum y Trabajo Fin de Máster	16
Optatividad	8
Total	60

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO: MÓDULOS ECTS MATERIAS ECTS TIPO TEMPORALIZACIÓN, MATERIAS, DESGLOSE DE ASIGNATURAS, CRÉDITOS Y DISTRIBUCIÓN TEMPORAL

Universidad Pontificia de Salamanca

Módulo 1.- GENÉRICO. 12 ECTS

MO1. Aprendizaje y desarrollo de la personalidad 3C M1. Aprendizaje y desarrollo de la personalidad 3 C/ OB 1º semestre

MO2. Procesos y contextos educativos 6 M2. Procesos y contextos educativos 6 OB Anual

MO3. Sociedad, familia y educación 3 M3. Sociedad, familia y educación 3 OB 1º semestre

MO4.Complementos para la formación disciplinar 6 M4. Complementos para la formación disciplinar en la especialidad (especificar según corresponda) 6 OB Anual M5. Aprendizaje y enseñanza de la materia (según especialidad) 9 OB Anual

MO5. Aprendizaje y enseñanza de la materia (según especialidad) 12 .M6. Comunicación audiovisual y multimedia 3 OB 2º semestre M7. Innovación docente y calidad educativa 3 OB 2º semestre

Módulo 2.- ESPECÍFICO. 24 ECTS

MO6. Innovación docente e iniciación a la investigación educativa 6 M8. Iniciación a la investigación educativa 3 OB 1º semestre M9. Prácticum 10 OB Anual .

PRÁC-TICUM16 ECTS MO7. Prácticum 16 M10.

Trabajo fin de Máster 6 OB 2º semestre

M11a. Atención a la diversidad, interculturalidad y educación inclusiva 8 OPT Anual

M11b. CLIL, aprendizaje de contenidos a través de la lengua inglesa en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. (CLIL for Secondary Content Teachers) 8 OPT Anual

M11c. Aplicaciones educativas de las TIC 8 OPT Anual

M11d. Tutoría y Orientación de los estudiantes 8 OPT Anual

OPTATIVIDAD 8 ECTS MO8. Materias optativas 8 (elegir una).

M11e. Identidad y propuesta educativa de los centros católicos8 OPT Anual

TOTAL 60 TOTAL 60 (cve: BOE-A-2010-7959)

MATERIAS MÓDULO ESPECÍFICO (18 ECTS) PRÁCTICUM (16 ECTS)

M.2.1) Filosofía:
Materia: Complementos para la formación disciplinar en Filosofía (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de la Filosofía (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Filosofía (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Filosofía (6 ECTS)

M.2.2) Física y Química:
Materia: Complementos para la formación disciplinar en Física y Química (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de Física y Química (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Física y Química (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Física y Química (6 ECTS)

M.2.3) Geografía e Historia:
Materia: Complementos para la formación disciplinar en Historia (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de Historia (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Historia
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Historia (6 ECTS)

M.2.4) Inglés:
Materia: Complementos para la formación disciplinar en Inglés (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza del Inglés (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Inglés

Universidad Pontificia de Salamanca

Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Inglés (6 ECTS)

M.2.5) Lengua Castellana y Literatura:

Materia: Complementos para la formación disciplinar en Lengua Castellana y Literatura (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de Lengua Castellana y Literatura (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Lengua Castellana y Literatura (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Lengua Castellana y Literatura (6 ECTS)

M.2.6) Matemáticas:

Materia: Complementos para la formación disciplinar en Matemáticas (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de Matemáticas (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Matemáticas (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Matemáticas (6 ECTS)

M.2.7) Tecnología:

Materia: Complementos para la formación disciplinar en Tecnología (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de Tecnología (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Tecnología (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Tecnología (6 ECTS)

M.2.8) Orientación Educativa:

Materia: Complementos para la formación disciplinar en Orientación Educativa (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de la Orientación Educativa (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Orientación Educativa (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Orientación Educativa (6 ECTS)

M.2.9) Biología y Geología:

Materia: Complementos para la formación disciplinar en Biología y Geología (6 ECTS)
Materia: Aprendizaje y enseñanza de Biología y Geología (12 ECTS)
Materia: Prácticum en la materia de Biología y Geología (10 ECTS)
Materia: Trabajo de Fin de Máster en la materia de Biología y Geología (6 ECTS)

Anexo II. 2: Master de formación del profesorado de la Pontificia Universidad de Salamanca

1.- Titulación: *Master Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*

2.- Naturaleza del título: Master Universitario Oficial - B.O.E. 09/10/2099. Plan de Estudios B.O.E. 15/02/2010. Este Máster Universitario da acceso al Doctorado oficial de investigación.

3.- Duración: Un curso académico de octubre a junio (60 créditos ECTS) Se imparte en modalidad presencial.

4.- Centro:

Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
C/ Compañía, 5. 37002 Salamanca
923 277 140 www.upsa.es (Másteres Oficiales)
Directora Dra. Dña. M ª Jesús García Arroyo (ice@upsa.es)

5.- Destinatarios: Graduados y Licenciados, Ingenieros e Ingenieros Técnicos, Arquitectos y Arquitectos Técnicos, Maestros, Educadores Sociales y Diplomados que desean formar se para ser profesores de ESO, Bachillerato y F.P.
Los interesados deben formalizar la Solicitud de Plaza según se indica en www.upsa.es
Plazas Mínimo 10, máximo 64

6.- Requisitos:

Universidad Pontificia de Salamanca

5.1.- Estar en posesión de un título universitario oficial español u otro título de Educación Superior, reconocido por el Estado Español.
5.2.- Acreditar el dominio de una lengua extranjera a un nivel equivalente o superior al B1 del Marco Común Europeo. Quienes no lo acrediten realizarán una prueba de lengua extranjera.
5.3.- Quienes no acrediten alguna titulación de acceso directo a las especialidades que deseen cursar deberán realizar una prueba en la UPSA

7.- Objetivos:

6.1.- Formar en las competencias psicopedagógicas generales y específicas que requiere la profesión docente
6.2.- Capacitar profesionalmente a futuros profesores de ESO, Bachillerato y Formación profesional
6.3.- Dotar a los alumnos de herramientas para su entrenamiento docente en centros de Secundaria, Bachillerato y Formación profesional

8.- Metodología docente:

Clases teóricas y prácticas en pequeño grupo. *Seminarios y talleres* interdisciplinares con participación de profesores y orientadores de centros de E.S.O , Bachillerato y F.P.
Tutorías individuales y en pequeño grupo. *Prácticas tuteladas* en centros de ESO, Bachillerato y F.P. *Clases presenciales* combinadas con aprendizaje Blended Learning

9.- Resumen de contenidos y créditos:

Créditos de Formación Genérica: 16, 0 créditos ECTS
Créditos de Formación Específica: 24, 0 créditos ECTS
Créditos de Prácticas Externas: 14, 0 créditos ECTS
Créditos de Trabajo Fin de Máster: 6, 0 créditos ECTS

10.- Tasas de matrícula:

Precio del crédito 69.00 €
Seguro Escolar (sólo menores de 28 años) : 1,12 €
Apertura de expediente (sólo nuevos alumnos UPSA): 60,00 €
Precio final antiguos alumnos: 4140 €
Precio final nuevos alumnos : 4200 €
Se admite el fraccionamiento de la matrícula en tres plazos, con un recargo de 50,00€ en cada plazo. Al tratarse de un título oficial de Posgrado los alumnos pueden solicitar Beca ante el Ministerio de Educación (más información en negociado.becas@upsa.es

11.- Convenios

Convenios con Centros Educativos de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación profesional públicos y concertados, autorizados por la Junta de Castilla y León

12.- Otras informaciones:

Grupos reducidos. Tutorías individuales y seguimiento individualizado del proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos.
Aprendizaje blended learning
Los alumnos disponen de un tutor personal académico en la UPSA y otro tutor personal en el Centro dónde realizan las prácticas para un seguimiento individualizado de las mismas
Las clases se imparten con una metodología activa y participativa. Desarrollo de supuestos prácticos sobre procesos y contextos diversos del profesor de ESO, Bachilleratoy F.P.
Resolución de casos prácticos, análisis de documentos gráficos, visuales, etc.
Seminarios y talleres interdisciplinares de tipo monográfico con participación de profesores de la UPSA y de profesores y orientadores que ejercen su docencia en Centros de ESO, Bachillerato o F.P.

13.- PLAN DE ESTUDIOS DEL MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS ESPECIALIDAD ORIENTACIÓN EDUCATIVA

Universidad Pontificia de Salamanca

13.1.- Materias Créditos Semestre:

Desarrollo , Aprendizaje y Educación 2 1º
Procesos y Contextos Educativos 6 1º
Sociedad, Familia y Educación 4 1º
Los ámbitos de la orientación educativa y el asesoramiento psicopedagógico 6 1º
Los procesos de la orientación educativa y el asesoramiento psicopedagógico 6 2º
Educación Inclusiva y Atención a la Diversidad 6 2º
La Investigación e Innovación Educativa y la Gestión del Cambio 6 2º
Practicum I 5 Anual
Practicum II 5 Anual
Practicum III 2 Anual

Trabajo Fin de Máster 4 Anual

Anexo II. 3: Master de formación del profesorado de la Universidad Complutense de Madrid:

A continuación se muestra un resumen de los aspectos esenciales del Master de la universidad Complutense de Madrid, orientados a la formación del profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato y los aspectos del Máster directamente relacionados con la formación del profesor de matemáticas. En su totalidad está reogido y se muestra en la Web de esta universidad <www.ucm.es> .

1.- Denominación y aspectos generales.

En La Universidad Complutense el máster de formación del profesorado de secundaria y bachillerato tiene la denominación ***MÁSTER DE FORMACIÓN DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO*** y se implantó en el curso académico 2009 – 2010, integrándose en el Vicerrectorado de Espacio Europeo de Educación Superior, si bien sus funciones son asumidas por el Vicerrectorado de Posgrado y Formación Continua, mientras que los aspectos administrativos del Máster se llevan a cabo en la Facultad de Educación – Centro de Formación del Profesorado. Se incorporan a las tareas de formación, la mayoría de las facultades de la universidad, ofertando el primer año 1000 plazas, con un tipo de enseñanza presencial y control de asistencia a clase. El Master consta de 60 créditos ECTS, para ser realizado en un curso y el número mínimo de créditos de que pueden matricularse para cursarlo a tiempo parcial es de 30, salvo que resten menos créditos para completar los estudios. En cuanto a las normas de permanencia son las establecidas con carácter general establecidas en la universidad. El idioma de de enseñanza es el español, sin embargo en las materias del módulo específico de la especialidad de Lenguas Extranjeras se impartirá en el idioma propio de la modalidad (Alemán, Inglés, Francés o Italiano).

En cuanto al acceso y admisión de los estudiantes al Master, se establecen los criterios de admisión, la universidad se compromete a ofertar plazas cada curso, se indican los plazos de admisión y matriculación así como los asuntos referentes al reconocimiento y transferencia de créditos y se establecer mecanismos para la información a los estudiantes y para su orientación, especificado todo esto en la web de la universidad. La universidad ha constituido una Comisión responsable para prestar la debida atención y hacer el debido seguimiento a esta urdimbre formativa del profesorado de Secundaria y Bachillerato, que se integra en este master. La Comisión está formada por el coordinador general, la coordinadora de Practicum, los coordinadores de especialidad y el coordinador del módulo genérico. Se reúne periódicamente y estudia las sugerencias que se le hayan formulado.

2.- El Master de Formación del Profsorado.

El Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, está previsto que su duración sea de año. Se implantó en el curso 2009-2010 y está previsto ofertarlo desde entonces anualmente, con todas las especialidades. Se compone de sesenta créditos, estructurados en tres módulos, como se muestra en el cuadro siguiente.

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuadro1.- ESTRUTURA DEL MASTER DE LA UCM

MÓDULOS					
GENÉRICO		**ESPECÍFICO**		**PRACTICUM**	
12 ECTS		**30 ECTS**		**18 ECTS**	
MATERIAS		MATERIAS		MATERIAS	
Aprendizaje y desarrollo de la personalidad	4 ECTS	Complementos para la formación disciplinar	15 ECTS	Prácticas en centros	12 ECTS
Procesos y contextos educativos	4 ECTS	Enseñanza y aprendizaje de las materias correspondientes. Innovación docente e iniciación a la investigación educativa	15 ECTS	Trabajo Fin de Máster	6 ECTS
Sociedad, familia y educación	4 ECTS				

Cuadro 2.- DISTIBUCIÓN DE CRÉDITOS

Módulo genérico: asignaturas	**ECTS**
Aprendizaje y desarrollo de la personalidad	4
Procesos y contextos educativos	4
Sociedad, familia y educación	4

Módulo específico por especialidades: 30 ECTS

- Artes Plásticas y Visuales
- Biología y Geología
- Economía y Administración de Empresas
- Educación Física
- Filosofía
- Física y Química
- Formación y Orientación Laboral
- Geografía e Historia
- Informática
- Lengua y Literatura Castellana
- Lenguas Clásicas
- Lenguas Extranjeras: Alemán
- Lenguas Extranjeras: Francés
- Lenguas Extranjeras: Inglés
- Lenguas Extranjeras: Italiano
- Matemáticas
- Música
- Orientación Educativa

Cuadro 2: Módulo práctico

Módulo prácticum: materias y TFM	**ECTS**
Practicum en un Centro de Educación Secundaria	12
Trabajo Fin de Máster	6

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuadro 3.- MÓDULO ESPECÍFICO DE MATEMATICAS

Máster Profesorado Secundaria y Bachillerato: matemáticas			
Plan de estudios			
Especialidad		*Matemáticas*	
Módulo Específico: 30 ECTS			
Materia	ECTS	Asignatura	ECTS
Complementos para la formación matemática	15	El significado de la matemática en Educación Secundaria.	10
		Pensamiento matemático y resolución de problemas	5
Aprendizaje y enseñanza de las materias correspondientes	10	Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas	10
Innovación docente e iniciación a la investigación educativa	5	Innovación docente e iniciación a la investigación educativa en Matemáticas	5

3.- Competencias a desarrollar en el Máster UCM.

Se distinguen dos tipos de competencias a desarrollar las generales y las específicas. Se refieren ambas a las competencias previstas para los Máster de formación del profesorado de Enseñanza secundaria y de bachillerato, en la *Orden ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas* (BOE 29-12-2007). Me limitaré en este caso a copiar fielmente las competencias tal como aparecen en el Máster Complutense, distinguiendo entre competencias generales y específicas.

3.1.- Competencias Generales:

G1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.
G2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
G3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.
G4. Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.
G5. Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.
G6. Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.

Universidad Pontificia de Salamanca

G7. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.
G8. Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.
G9. Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.
G10. Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas de interrelación con la realidad social de cada época.
G11. Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.

Además de las competencias generales anteriormente señaladas los estudiantes de este Máster podrán:
G12. Completar los conocimientos de las disciplinas correspondientes en todos aquellos aspectos que puedan resultar de especial interés para el ejercicio de la docencia y la divulgación de la disciplina, así como el incremento del interés y la apreciación de los mismos en los diferentes niveles educativos.

3.2.- Competencias específicas:

CE.1. Conocer las características de los estudiantes, sus contextos sociales y motivaciones.
CE.2. Comprender el desarrollo de la personalidad de estos estudiantes y las posibles disfunciones que afectan al aprendizaje.
CE.3. Elaborar propuestas basadas en la adquisición de conocimientos, destrezas y aptitudes intelectuales y emocionales.
CE.4. Identificar y planificar la resolución de situaciones educativas que afectan a estudiantes con diferentes capacidades y diferentes ritmos de aprendizaje.
CE.5. Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula y en el centro, abordar y resolver posibles problemas.
CE.6. Conocer la evolución histórica del sistema educativo en nuestro país.
CE.7. Conocer y aplicar recursos y estrategias de información, tutoría y orientación académica y profesional.
CE.8. Promover acciones de educación emocional, en valores y formación ciudadana.
CE.9. Participar en la definición del proyecto educativo y en las actividades generales del centro atendiendo a criterios de mejora de la calidad, atención a la diversidad, prevención de problemas de aprendizaje y convivencia.
CE.10. Relacionar la educación con el medio y comprender la función educadora de la familia y la comunidad, tanto en la adquisición de competencias y aprendizajes como en la educación en el respeto de los derechos y libertades, en la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres y en la igualdad de trato y no discriminación de las personas con discapacidad.
CE.11. Conocer la evolución histórica de la familia, sus diferentes tipos y la incidencia del contexto familiar en la educación.
CE.12. Adquirir habilidades sociales en la relación y orientación familiar.
CE.13. Conocer el valor formativo y cultural de las materias correspondientes a la especialización y los contenidos que se cursan en las respectivas enseñanzas.
CE.14. Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.
CE.15. Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
CE.16. En formación profesional, conocer la evolución del mundo laboral, la interacción entre sociedad, trabajo y calidad de vida, así como la necesidad de adquirir la formación adecuada para la adaptación a los cambios y transformaciones que puedan requerir las profesiones.
CE.17. En el caso de la orientación psicopedagógica y profesional, conocer los procesos y recursos para la prevención de problemas de aprendizaje y convivencia, los procesos de evaluación y de orientación académica y profesional.
CE.18. Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes.
CE.19. Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.
CE.20. Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.
CE.21. Fomentar un clima que facilite el aprendizaje y ponga en valor las aportaciones de los estudiantes.

Universidad Pontificia de Salamanca

CE.22. Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
CE.23. Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.
CE.24. Conocer y aplicar propuestas docentes innovadoras en el ámbito de la especialización cursada.
CE.25. Analizar críticamente el desempeño de la docencia, de las buenas prácticas y de la orientación utilizando indicadores de calidad.
CE.26. Identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las materias de la especialización y plantear alternativas y soluciones.
CE.27. Conocer y aplicar metodologías y técnicas básicas de investigación y evaluación educativas y ser capaz de diseñar y desarrollar proyectos de investigación, innovación y evaluación.
CE.28. Adquirir experiencia en la planificación, la docencia y la evaluación de las materias correspondientes a la especialización.
CE.29. Acreditar un buen dominio de la expresión oral y escrita en la práctica docente.
CE.30. Dominar las destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar un clima que facilite el aprendizaje y la convivencia.
CE.31. Participar en las propuestas de mejora en los distintos ámbitos de actuación a partir de la reflexión basada en la práctica.

CE.32. Para la formación profesional, conocer la tipología empresarial correspondiente a los sectores productivos y comprender los sistemas organizativos más comunes en las empresas.
CE.33. Respecto a la orientación, ejercitarse en la evaluación psicopedagógica, el asesoramiento a otros profesionales de la educación, a los estudiantes y a las familias.
Estas competencias, junto con las propias del resto de materias, quedarán reflejadas en el Trabajo Fin de Máster que compendia la formación adquirida a lo largo de todas las enseñanzas del Título.

4.- Comisión de calidad y sistema de garantía.

La Universidad Complutense, a fin de garantizar la calidad del Master, crea una Comisión de garantía de calidad que será el órgano responsable de velar por el buen funcionamiento del Máster y está formada por los siguientes: Presidente: el Vicerrector/a de Desarrollo y Calidad de la Docencia y forman parte de la Comisión como vocales los siguientes: Decano de la Facultad de Educación; Coordinador del Máster; Director del Instituto de Ciencias de la Educación; un Decano por rama de conocimiento; dos Profesores de Universidad; dos Profesores de Educación Secundaria; un representante del Personal de Administración y Servicios; dos Estudiantes; un Agente externo, que puede ser un experto designado por las Agencias Autonómica o Estatal de Evaluación o un experto en evaluación de la calidad de otras universidades.

Las funciones que competen a la Comisión de Calidad del Máster son las siguientes:

> *Realizar el seguimiento del Sistema de Garantía Interna de Calidad del título. *Gestionar y coordinar todos los aspectos relativos a dicho sistema.
>
> *Realizar el seguimiento y evaluación de los objetivos de calidad del título.
> *Realizar propuestas de mejora y hacer un seguimiento de las mismas.
> *Proponer y modificar los objetivos de calidad del título.
> *Recoger información y evidencias sobre el desarrollo y aplicación del programa formativo de la titulación.
> *Gestionar el Sistema de Información de la titulación.
> *Establecer y fijar la política de calidad del título de acuerdo con la política de calidad del Centro donde se ubique la titulación y con la política de calidad de la UCM.

La Comisión asume también el cometido de elaborar anualmente un documento informativo sobre los aspectos cualitativos del Master Complutense sobre la formación del profesorado de Ecuación Secundaria y bachillerato.

Universidad Pontificia de Salamanca

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO 4-.

Anexo III. 1: REAL DECRETO

REAL DECRETO 1393/2007 ***por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales*****. (BOE núm. 260, (30 octubre de 2007).**

REAL DECRETO 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. BOE núm. 260, (30 octubre 2007)

La progresiva armonización de los sistemas universitarios exigida por el proceso de construcción del Espacio Europeo de Educación Superior, iniciado en 1999 con la Declaración de Bolonia y la consiguiente interacción operada entre tales sistemas por las diversas normativas nacionales sucesivamente promulgadas, ha dotado de una dimensión y de una agilidad sin precedentes al proceso de cambio emprendido por las universidades europeas.

Cercano ya el horizonte de 2010 previsto por la citada Declaración para la plena consecución de sus objetivos, el sistema español, aun habiendo dado notables pasos hacia la convergencia mediante la sucesiva adopción de normativas puntuales, adolecía, sin embargo, del adecuado marco legal que, de un modo global, sustentara con garantías la nueva construcción.

La Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, sienta las bases precisas para realizar una profunda modernización de la Universidad española. Así, entre otras importantes novedades, el nuevo Título VI de la Ley establece una nueva estructuración de las enseñanzas y títulos universitarios oficiales que permite reorientar, con el debido sustento normativo, el proceso anteriormente citado de convergencia de nuestras enseñanzas universitarias con los principios dimanantes de la construcción del Espacio Europeo de Educación Superior.

El presente real decreto, siguiendo los principios sentados por la citada Ley, profundiza en la concepción y expresión de la autonomía universitaria de modo que en lo sucesivo serán las propias universidades las que crearán y propondrán, de acuerdo con las reglas establecidas, las enseñanzas y títulos que hayan de impartir y expedir, sin sujeción a la existencia de un catálogo previo establecido por el Gobierno, como hasta ahora era obligado.

Asimismo, este real decreto adopta una serie de medidas que, además de ser compatibles con el Espacio Europeo de Educación Superior, flexibilizan la organización de las enseñanzas universitarias, promoviendo la diversificación curricular y permitiendo que las universidades aprovechen su capacidad de innovación, sus fortalezas y oportunidades. La flexibilidad y la diversidad son elementos sobre los que descansa la propuesta de ordenación de las enseñanzas oficiales como mecanismo de respuesta a las demandas de la sociedad en un contexto abierto y en constante transformación.

Por otra parte, la nueva organización de las enseñanzas universitarias responde no sólo a un cambio estructural sino que además impulsa un cambio en las metodologías docentes, que centra el objetivo en el proceso de aprendizaje del estudiante, en un contexto que se extiende ahora a lo largo de la vida.

Para conseguir estos objetivos, en el diseño de un título deben reflejarse más elementos que la mera descripción de los contenidos formativos. Este nuevo modelo concibe el plan de estudios como un proyecto de implantación de una enseñanza universitaria. Como tal proyecto, para su aprobación se requiere la aportación de nuevos elementos como: justificación, objetivos, admisión de estudiantes, contenidos, planificación, recursos, resultados previstos y sistema de garantía de calidad.

Los planes de estudios conducentes a la obtención de un título deberán, por tanto, tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, ampliando, sin excluir, el tradicional enfoque basado en contenidos y horas lectivas. Se debe hacer énfasis en los métodos de aprendizaje de dichas competencias así como en los procedimientos para evaluar su adquisición.

Se proponen los créditos europeos, ECTS, tal y como se definen en el Real Decreto 1125/2003, de 5 de septiembre, como unidad de medida que refleja los resultados del aprendizaje y volumen de

Universidad Pontificia de Salamanca

trabajo realizado por el estudiante para alcanzar los objetivos establecidos en el plan de estudios, poniendo en valor la motivación y el esfuerzo del estudiante para aprender.

La nueva organización de las enseñanzas incrementará la empleabilidad de los titulados al tiempo que cumple con el objetivo de garantizar su compatibilidad con las normas reguladoras de la carrera profesional de los empleados públicos. Por otro lado, en el supuesto de títulos que habiliten para el acceso o ejercicio de actividades profesionales, se prevé que el Gobierno establezca las condiciones a las que deberán adecuarse los planes de estudios para garantizar que los títulos acreditan la posesión de las competencias y conocimientos adecuados para dicho ejercicio profesional. La posibilidad de introducir prácticas externas viene a reforzar el compromiso con la empleabilidad de los futuros graduados y graduadas, enriqueciendo la formación de los estudiantes de las enseñanzas de grado, en un entorno que les proporcionará, tanto a ellos como a los responsables de la formación, un conocimiento más profundo acerca de las competencias que necesitarán en el futuro.

Los sistemas de Garantía de la Calidad, que son parte de los nuevos planes de estudios, son, asimismo, el fundamento para que la nueva organización de las enseñanzas funcione eficientemente y para crear la confianza sobre la que descansa el proceso de acreditación de títulos.

En este real decreto, la autonomía en el diseño del título se combina con un adecuado sistema de evaluación y acreditación, que permitirá supervisar la ejecución efectiva de las enseñanzas e informar a la sociedad sobre la calidad de las mismas. La concreción del sistema de verificación y acreditación permitirá el equilibrio entre una mayor capacidad de las universidades para diseñar los títulos y la rendición de cuentas orientada a garantizar la calidad y mejorar la información a la sociedad sobre las características de la oferta universitaria. La acreditación de un título se basará en la verificación del cumplimiento del proyecto presentado por la Universidad y facilitará la participación en programas de financiación específicos.

Se establece, también, en el presente real decreto un sistema de acceso y admisión a las diferentes enseñanzas que aporta mayor claridad y transparencia, contemplando las distintas situaciones de transición desde ordenaciones anteriores a la actual. Se garantizan los derechos académicos adquiridos por los estudiantes y los titulados conforme a sistemas educativos anteriores quienes, no obstante, podrán cursar las nuevas enseñanzas y obtener los correspondientes títulos, a cuyo efecto las universidades, en el ámbito de su autonomía, determinarán, en su caso, la formación adicional necesaria que hubieran de cursar para su obtención.

Además, los sistemas de acceso potencian la apertura hacia los estudiantes procedentes de otros países del Espacio Europeo de Educación Superior y de otras áreas geográficas, marcando una nueva estrategia en el contexto global de la Educación Superior.

Por otra parte, uno de los objetivos fundamentales de esta organización de las enseñanzas es fomentar la movilidad de los estudiantes, tanto dentro de Europa, como con otras partes del mundo, y sobre todo la movilidad entre las distintas universidades españolas y dentro de una misma universidad. En este contexto resulta imprescindible apostar por un sistema de reconocimiento y acumulación de créditos, en el que los créditos cursados en otra universidad serán reconocidos e incorporados al expediente del estudiante.

Otro objetivo importante es establecer vínculos adecuados entre el Espacio Europeo de Educación y el Espacio Europeo de Investigación. Para ello, es necesaria una mayor apertura en la organización de las enseñanzas de doctorado y facilitar la actualización o modificación de los planes de estudio.

En el ámbito temporal, las universidades establecerán su propio calendario de adaptación ateniéndose a lo establecido en el presente real decreto que recoge a su vez los compromisos adquiridos por el Gobierno Español en la declaración de Bolonia, en virtud de los cuales en el año 2010 todas las enseñanzas deberán estar adaptadas a la nueva estructura.

Finalmente, se debe tener en cuenta que la formación en cualquier actividad profesional debe contribuir al conocimiento y desarrollo de los Derechos Humanos, los principios democráticos, los principios de igualdad entre mujeres y hombres, de solidaridad, de protección medioambiental, de accesibilidad universal y diseño para todos, y de fomento de la cultura de la paz.

Universidad Pontificia de Salamanca

Así, en el Capítulo I de este real decreto se incluyen las disposiciones generales del mismo, el Capítulo II establece con carácter general la estructura de las enseñanzas universitarias oficiales, que se concretan en los Capítulos III, IV y V para las enseñanzas de Grado, Máster y Doctorado, respectivamente. Por su parte, el Capítulo VI regula los procedimientos de verificación y acreditación de los títulos.

Además el presente real decreto contiene once disposiciones adicionales, cinco transitorias, una disposición derogatoria única y cuatro disposiciones finales.

Finalmente el anexo I presenta la memoria que configura el proyecto de título oficial que deben presentar las universidades para solicitar la verificación del mismo de acuerdo con lo establecido en esta norma y el anexo II contiene la relación de materias básicas que se han
incluido en cada una de las ramas de conocimiento.

Este real decreto ha sido informado favorablemente por el Consejo de Universidades, formado por las universidades españolas, y por la Conferencia General de Política Universitaria, formada por las Comunidades Autónomas. Durante el proceso de elaboración han sido, además, consultadas las organizaciones profesionales.

En su virtud, a propuesta de la Ministra de Educación y Ciencia, con la aprobación previa de la Ministra de Administraciones Públicas, de acuerdo con el Consejo de Estado y previa deliberación del Consejo de Ministros en su reunión del día 26 de octubre de 2007,

D I S P O N G O :

CAPÍTULO I: Disposiciones generales

Artículo 1. ***Objeto.***

Este real decreto tiene por objeto desarrollar la estructura de las enseñanzas universitarias oficiales, de acuerdo con las líneas generales emanadas del Espacio Europeo de Educación Superior y de conformidad con lo previsto en el artículo 37 de la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, en su nueva redacción dada por la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la anterior. Asimismo, este real decreto establece las directrices, condiciones y el procedimiento de verificación y acreditación, que deberán superar los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos, previamente a su inclusión en el Registro de Universidades, Centros y Títulos (RUCT).

Artículo 2. ***Ámbito de aplicación.***

Las disposiciones contenidas en este real decreto serán de aplicación a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado, Máster y Doctorado impartidas por las Universidades españolas, en todo el territorio nacional.

Artículo 3. ***Enseñanzas universitarias y expedición de títulos.***

1. Las universidades impartirán enseñanzas de Grado, Máster y Doctorado conducentes a la obtención de los correspondientes títulos oficiales.

2. Los títulos oficiales serán expedidos, en nombre del Rey, por el Rector de la Universidad en que se hubiesen concluido las enseñanzas que den derecho a su obtención, de acuerdo con los requisitos básicos que respecto a su formato, texto y procedimiento de expedición se establezcan por el Gobierno, previo informe del Consejo de Universidades.

3. Las enseñanzas universitarias oficiales se concretarán en planes de estudios que serán elaborados por las universidades, con sujeción a las normas y condiciones que les sean de aplicación en cada caso. Dichos planes de estudios habrán de ser verificados por el Consejo de Universidades y autorizados en su implantación por la correspondiente Comunidad Autónoma, de acuerdo con lo establecido en el artículo 35.2 de la Ley Orgánica 6/2001, modificada por la Ley 4/2007, de Universidades. Los títulos a cuya obtención conduzcan, deberán ser inscritos en el RUCT y acreditados, todo ello de acuerdo con las previsiones contenidas en este real decreto.

4. Las universidades podrán, mediante convenio con otras universidades nacionales o extranjeras, organizar enseñanzas conjuntas conducentes a la obtención de un único título oficial de Graduado o Graduada, Máster Universitario o Doctor o Doctora. A tal fin, el plan de estudios deberá incluir el correspondiente convenio en el que se especificará, al menos, qué Universidad será responsable de la custodia de los expedientes de los estudiantes y de la expedición y registro del título así como el procedimiento de modificación o extinción de planes de estudios. En el supuesto de convenios con

Universidad Pontificia de Salamanca

universidades extranjeras, en todo caso, la Universidad española custodiará los expedientes de los títulos que expida.

5. Entre los principios generales que deberán inspirar el diseño de los nuevos títulos, los planes de estudios deberán tener en cuenta que cualquier actividad profesional debe realizarse:

a) desde el respeto a los derechos fundamentales y de igualdad entre hombres y mujeres, debiendo incluirse, en los planes de estudios en que proceda, enseñanzas relacionadas con dichos derechos.

b) desde el respeto y promoción de los Derechos Humanos y los principios de accesibilidad universal y diseño para todos de conformidad con lo dispuesto en la disposición final décima de la Ley 51/2003, de 2 de diciembre, de Igualdad de oportunidades, no discriminación y accesibilidad universal de las personas con discapacidad, debiendo incluirse, en los planes de estudios en que proceda, enseñanzas relacionadas con dichos derechos y principios.

c) de acuerdo con los valores propios de una cultura de paz y de valores democráticos, y debiendo incluirse, en los planes de estudios en que proceda, enseñanzas

Artículo 4. ***Efectos de los títulos universitarios.***

Los títulos universitarios regulados en el presente real decreto tendrán carácter oficial y validez en todo el territorio nacional, surtirán efectos académicos plenos y habilitarán, en su caso, para la realización de actividades de carácter profesional reguladas, de acuerdo con la normativa que en cada caso resulte de aplicación.

Artículo 5. ***Sistema europeo de créditos y calificaciones de las enseñanzas universitarias.***

1. El haber académico que representa el cumplimiento de los objetivos previstos en los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos universitarios oficiales se medirá en créditos europeos (ECTS) tal y como se definen en el real decreto 1125/2003, de 5 de septiembre, por el que se establece el sistema europeo de créditos y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional.

2. El nivel de aprendizaje conseguido por los estudiantes en las enseñanzas oficiales de Grado y Máster, se expresará mediante calificaciones numéricas, de acuerdo con lo establecido en el artículo 5 del real decreto 1125/2003, de 5 de septiembre, citado. La calificación en el Doctorado se expresará de acuerdo con lo señalado en el artículo 21 de este real decreto.

Artículo 6. ***Reconocimiento y transferencia de créditos.***

1. Con objeto de hacer efectiva la movilidad de estudiantes, tanto dentro del territorio nacional como fuera de él, las universidades elaborarán y harán pública su normativa sobre el sistema de reconocimiento y transferencia de créditos, con sujeción a los criterios generales que sobre el particular se establecen en este real decreto.

2. A los efectos previstos en este real decreto, se entiende por reconocimiento la aceptación por una universidad de los créditos que, habiendo sido obtenidos en unas enseñanzas oficiales, en la misma u otra universidad, son computados en otras distintas a efectos de la obtención de un título oficial. Asimismo, la transferencia de créditos implica que, en los documentos académicos oficiales acreditativos de las enseñanzas seguidas por cada estudiante, se incluirán la totalidad de los créditos obtenidos en enseñanzas oficiales cursadas con anterioridad, en la misma u otra universidad, que no hayan conducido a la obtención de un título oficial.

3. Todos los créditos obtenidos por el estudiante en enseñanzas oficiales cursados en cualquier universidad, los transferidos, los reconocidos y los superados para la obtención del correspondiente título, serán incluidos en su expediente académico y reflejados en el Suplemento Europeo al Título, regulado en el real decreto 1044/2003 de 1 de agosto, por el que se establece el procedimiento para la expedición por las universidades del Suplemento Europeo al Título.

Artículo 7. ***Precios públicos de las enseñanzas universitarias oficiales.***

De acuerdo con lo dispuesto en el apartado b del artículo 81 de la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, en su nueva redacción dada por la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la anterior, en las enseñanzas conducentes a la obtención de títulos de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional, e impartidas en universidades públicas, los precios públicos y derechos los fijará la Comunidad Autónoma, dentro de los límites que establezca la Conferencia General de Política Universitaria, que estarán relacionados con los costes de la prestación del servicio.

CAPÍTULO II

Universidad Pontificia de Salamanca

Estructura de las enseñanzas universitarias oficiales

Artículo 8. ***Estructura general.***

Las enseñanzas universitarias conducentes a la obtención de títulos de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional se estructurarán en tres ciclos, denominados respectivamente Grado, Máster y Doctorado, de acuerdo con lo establecido en el artículo 37 de la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, en su nueva redacción dada por la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la anterior y en este real decreto.

Artículo 9. ***Enseñanzas de Grado.***

1. Las enseñanzas de Grado tienen como finalidad la obtención por parte del estudiante de una formación general, en una o varias disciplinas, orientada a la preparación para el ejercicio de actividades de carácter profesional.

2. La superación de las enseñanzas previstas en el apartado anterior dará derecho a la obtención del título de Graduado o Graduada, con la denominación específica que, en cada caso, figure en el RUCT.

3. La denominación de los títulos de Graduado será: Graduado o Graduada en T por la Universidad U, siendo T el nombre del Título y U la denominación de la Universidad que expide el título. En el Suplemento Europeo al Título, de acuerdo con las normas que lo regulen, se hará referencia a la rama de conocimiento en la que se incardine el título. En todo caso, las Administraciones Públicas velarán por que la denominación del título sea acorde con su contenido, y en su caso, con la normativa específica de aplicación, coherente con su disciplina y no conduzca a error sobre su nivel o efectos académicos ni a confusión sobre su contenido y, en su caso, efectos profesionales.

Artículo 10. Enseñanzas de Máster.

1. Las enseñanzas de Máster tienen como finalidad la adquisición por el estudiante de una formación avanzada, de carácter especializado o multidisciplinar, orientada a la especialización académica o profesional, o bien a promover la iniciación en tareas investigadoras.

2. La superación de las enseñanzas previstas en el apartado anterior dará derecho a la obtención del título de Máster Universitario, con la denominación específica que figure en el RUCT.

3. La denominación de los títulos de Máster será: Máster Universitario en T por la Universidad U, siendo T el nombre del Título y U la denominación de la Universidad que expide el título. En todo caso, las Administraciones Públicas velarán por que la denominación del título sea acorde con su contenido y en su caso, con la normativa específica de aplicación, y no conduzca a error sobre su nivel o efectos académicos ni a confusión sobre su contenido y, en su caso, efectos profesionales.

Artículo 12. ***Directrices para el diseño de títulos de Gradua****do.*

1. Los planes de estudios conducentes a la obtención del título de Graduado serán elaborados por las universidades y verificados de acuerdo con lo establecido en el presente real decreto.

2. Los planes de estudios tendrán 240 créditos, que contendrán toda la formación teórica y práctica que el estudiante deba adquirir: aspectos básicos de la rama de conocimiento, materias obligatorias u optativas, seminarios, prácticas externas, trabajos dirigidos, trabajo de fin de Grado u otras actividades formativas. En los supuestos en que ello venga determinado por normas de derecho comunitario, el Gobierno, previo informe del Consejo de Universidades, podrá asignar un número mayor de créditos.

3. Estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa de un trabajo de fin de Grado.

4. La Universidad propondrá la adscripción del correspondiente título de Graduado o Graduada a alguna de las siguientes ramas de conocimiento:

a) Artes y Humanidades
b) Ciencias.
c) Ciencias de la Salud.
d) Ciencias Sociales y Jurídicas.
e) Ingeniería y Arquitectura.

Dicha adscripción será igualmente de aplicación en aquellos casos en que el título esté relacionado con más de una disciplina y se hará respecto de la principal.

5. El plan de estudios deberá contener un mínimo de 60 créditos de formación básica, de los que, al menos, 36 estarán vinculados a algunas de las materias que figuran en el anexo II de este real decreto para la rama de conocimiento a la que se pretenda adscribir el título. Estas materias deberán concretarse en

Universidad Pontificia de Salamanca

asignaturas con un mínimo de 6 créditos cada una y serán ofertadas en la primera mitad del plan de estudios.
Los créditos restantes hasta 60, en su caso, deberán estar configurados por materias básicas de la misma u otras ramas de conocimiento de las incluidas en el anexo II, o por otras materias siempre que se justifique su carácter básico para la formación inicial del estudiante o su carácter transversal.

6. Si se programan prácticas externas, éstas tendrán una extensión máxima de 60 créditos y deberán ofrecerse preferentemente en la segunda mitad del plan de estudios.

7. El trabajo de fin de Grado tendrá entre 6 y 30 créditos, deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título.

8. De acuerdo con el artículo 46.2.i) de la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre de Universidades, los estudiantes podrán obtener reconocimiento académico en créditos por la participación en actividades universitarias culturales, deportivas, de representación estudiantil, solidarias y de cooperación hasta un máximo de 6 créditos del total del plan de estudios cursado.

9. Cuando se trate de títulos que habiliten para el ejercicio de actividades profesionales reguladas en España, el Gobierno establecerá las condiciones a las que deberán adecuarse los correspondientes planes de estudios, que además deberán ajustarse, en su caso, a la normativa europea aplicable. Estos planes de estudios deberán, en todo caso, diseñarse de forma que permitan obtener las competencias necesarias para ejercer esa profesión. A tales efectos la Universidad justificará la adecuación del plan de estudios a dichas condiciones.

Artículo 13. ***Reconocimiento de Créditos en las enseñanzas de Grado.***

Además de lo establecido en el artículo 6 de este real decreto, la transferencia y reconocimiento de créditos en las enseñanzas de grado deberán respetar las siguientes reglas básicas:
a) Siempre que el título al que se pretende acceder pertenezca a la misma rama de conocimiento, serán objeto de reconocimiento los créditos correspondientes a materias de formación básica de dicha rama.
b) Serán también objeto de reconocimiento los créditos obtenidos en aquellas otras materias de formación básica pertenecientes a la rama de conocimiento del título al que se pretende acceder.
c) El resto de los créditos podrán ser reconocidos por la Universidad teniendo en cuenta la adecuación entre las competencias y conocimientos asociados a las restantes materias cursadas por el estudiante y los previstos en el plan de estudios o bien que tengan carácter transversal.

Artículo 14. ***Acceso a las enseñanzas oficiales de Grado.***

1. El acceso a las enseñanzas oficiales de Grado requerirá estar en posesión del título de bachiller o equivalente y la superación de la prueba a que se refiere el artículo 42 de la Ley Orgánica 6/2001, de Universidades, modificada por la Ley 4/2007, de 12 de abril, sin perjuicio de los demás mecanismos de acceso previstos por la normativa vigente.

2. Las universidades dispondrán de sistemas accesibles de información y procedimientos de acogida y orientación de los estudiantes de nuevo ingreso para facilitar su incorporación a las enseñanzas universitarias correspondientes. Estos sistemas y procedimientos deberán incluir, en el caso de estudiantes con necesidades educativas específicas derivadas de discapacidad, los servicios de apoyo y asesoramiento adecuados, que evaluarán la necesidad de posibles adaptaciones curriculares.

CAPÍTULO IV

Enseñanzas universitarias oficiales de Máster

Artículo 15. Directrices para el diseño de títulos de Máster Universitario.

1. Los planes de estudios conducentes a la obtención del título de Máster Universitario, serán elaborados por las universidades y verificados de acuerdo con lo establecido en el presente real decreto.

Universidad Pontificia de Salamanca

2. Los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster Universitario tendrán entre 60 y 120 créditos, que contendrá toda la formación teórica y práctica que el estudiante deba adquirir: materias obligatorias, materias optativas, seminarios, prácticas externas, trabajos dirigidos, trabajo de fin de Máster, actividades de evaluación, y otras que resulten necesarias según las características propias de cada título.

3. Estas enseñanzas concluirán con la elaboración y defensa pública de un trabajo de fin de Máster, que tendrá entre 6 y 30 créditos.

4. Cuando se trate de títulos que habiliten para el ejercicio de actividades profesionales reguladas en España, el Gobierno establecerá las condiciones a las que deberán adecuarse los correspondientes planes de estudios, que además deberán ajustarse, en su caso, a la normativa europea aplicable. Estos planes de estudios deberán, en todo caso, diseñarse de forma que permitan obtener las competencias necesarias para ejercer esa profesión. A tales efectos la Universidad justificará la adecuación del plan de estudios a dichas condiciones.

Artículo 16. Acceso a las enseñanzas oficiales de Máster.

1. Para acceder a las enseñanzas oficiales de Máster será necesario estar en posesión de un título universitario oficial español u otro expedido por una institución de educación superior del Espacio Europeo de Educación Superior que facultan en el país expedidor del título para el acceso a enseñanzas de máster.

2. Así mismo, podrán acceder los titulados conforme a sistemas educativos ajenos al Espacio Europeo de Educación Superior sin necesidad de la homologación de sus títulos, previa comprobación por la Universidad de que aquellos acreditan un nivel de formación equivalente a los correspondientes títulos universitarios oficiales españoles y que facultan en el país expedidor del título para el acceso a enseñanzas de postgrado. El acceso por esta vía no implicará, en ningún caso, la homologación del título previo de que esté en posesión el interesado, ni su reconocimiento a otros efectos que el de cursar las enseñanzas de Máster.

Artículo 17. Admisión a las enseñanzas oficiales de Máster.

1. Los estudiantes podrán ser admitidos a un Máster conforme a los requisitos específicos y criterios de valoración de méritos que, en su caso, sean propios del título de Máster Universitario o establezca la universidad.

2. La Universidad incluirá los procedimientos y requisitos de admisión en el plan de estudios, entre los que podrán figurar requisitos de formación previa especí-fica en algunas disciplinas.

3. Estos sistemas y procedimientos deberán incluir, en el caso de estudiantes con necesidades educativas específicas derivadas de discapacidad, los servicios de apoyo y asesoramiento adecuados, que evaluarán la necesidad de posibles adaptaciones curriculares, itinerarios o estudios alternativos.

4. La admisión no implicará, en ningún caso, modificación alguna de los efectos académicos y, en su caso, profesionales que correspondan al título previo de que esté en posesión el interesado, ni su reconocimiento a otros efectos que el de cursar enseñanzas de Máster.

Artículo 21. La tesis doctoral.

Universidad Pontificia de Salamanca

1. La tesis doctoral consistirá en un trabajo original de investigación elaborado por el candidato en cualquier disciplina.

2. La Universidad establecerá procedimientos con el fin de garantizar la calidad de las tesis doctorales tanto en su elaboración como en el proceso de evaluación. Estos procedimientos incluirán las previsiones relativas a la elección y al registro del tema de la tesis doctoral y a la lengua en la que se redactará y en la que se defenderá la tesis doctoral.

3. Para la elaboración de la tesis doctoral, la Universidad asignará al doctorando un director, que será un doctor con experiencia investigadora acreditada. La tesis podrá ser codirigida por otros doctores.

4. En el proceso de evaluación y previo al acto de defensa, la Universidad garantizará la publicidad de la tesis doctoral finalizada de forma que otros doctores puedan remitir observaciones sobre su contenido.

5. El tribunal que evalúe la tesis doctoral se compondrá de acuerdo con las normas que establezca la universidad. Todos los miembros deberán tener el título de doctor y experiencia investigadora acreditada. En cualquier caso sólo podrán formar parte del tribunal dos miembros de la Universidad responsable de la expedición del título.

6. La tesis doctoral se evaluará en el acto de defensa que tendrá lugar en sesión pública y consistirá en la exposición y defensa por el doctorando del trabajo de investigación elaborado ante los miembros del tribunal. Los doctores presentes en el acto público podrán formular cuestiones en el momento y forma que señale el presidente del tribunal.

7. El tribunal emitirá un informe y la calificación global concedida a la tesis de acuerdo con la siguiente escala: «no apto», «aprobado», «notable» y «sobresaliente». El tribunal podrá otorgar la mención de «cum laude» si la calificación global es de sobresaliente y se emite en tal sentido el voto por unanimidad.

8. Una vez aprobada la tesis doctoral, la Universidad se ocupará de su archivo y remitirá un ejemplar de la misma así como la información necesaria al Ministerio de Educación y Ciencia a los efectos oportunos.

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO 4:

ANEXO IV: PLAN DE ESTUDIOS DEL GRADO DE MATEMÁTICAS EN LA UCM

III. OTRAS DISPOSICIONES

UNIVERSIDADES

BOLETÍN OFICIAL DEL ESTADO,
Núm. 150 (21 junio de 2010)
Sec. III. Pág. 54349.

9876. ***Resolución de 28 de mayo de 2010, de la Universidad Complutense de Madrid, por la que se publica el plan de estudios de Graduado en Matemáticas*.**

Obtenida la verificación del plan de estudios por el Consejo de Universidades, previo el informe positivo de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación, y acordado el carácter oficial del título por el Consejo de Ministros de 30 de octubre de 2009 (publicado en el BOE del 5 de enero de 2010 por Resolución de la Secretaría General de Universidades de 13 de noviembre de 2009),

Este Rectorado ha resuelto publicar el plan de estudios conducente a la obtención del título de Graduado o Graduada en Matemáticas, que quedará estructurado según consta en el anexo.

Madrid, 28 de mayo de 2010.–El Rector, Carlos Berzosa Alonso-Martínez.

ANEXO: Plan de estudios del título de Graduado o Graduada en Matemáticas

Distribución del plan de estudios en créditos ECTS:

Tipo de materia	Créditos ECTS
Formación básica	64,5
Obligatorias	103,5
Optativas	60
Prácticas Externas	–
Trabajo de Fin de Grado	12
Créditos totales	240

Créditos de formación básica. Distribución en materias:

Universidad Pontificia de Salamanca

Rama de conocimiento	Materia	Asignaturas vinculadas	ECTS	Curso
Ciencias.	Matemáticas.	Algebra Lineal.	18	1
Ciencias.	Matemáticas.	Análisis de variable real.	18	1
Ciencias.	Matemáticas.	Matemáticas básicas.	9	1
Ciencias.	Física.	Física: mecánica y ondas.	6	2
Ingeniería y Arquitectura.	Informática.	Informática.	7,5	1
CC. de la Salud.	Estadística.	Estadística.	6	2
Créditos totales			64,5	

Plan de estudios resumido (por módulo)

Módulo	Materia	Carácter	Créditos ECTS	Semestre
FORMACIÓN BÁSICA.	MATEMÁTICAS.	MATERIA BÁSICA.	45	1.º y 2.º
	INFORMÁTICA.	MATERIA BÁSICA.	7,5	1.º y 2.º
	ESTADÍSTICA.	MATERIA BÁSICA.	6	4.º
	FÍSICA.	MATERIA BÁSICA.	6	4.º
CONTENIDOS INICIALES.	ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS Y APLICACIONES.	MATERIA OBLIGATORIA.	7,5	1.º y 2.º
	ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES.	MATERIA OBLIGATORIA.	12	3.º y 4.º
	MÉTODOS NUMÉRICOS E INVESTIGACIÓN OPERATIVA.	MATERIA OBLIGATORIA.	12	3.º y 4.º
	ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	4.º
	ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	3.º y 4.º
	PROBABILIDAD.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	3.º
	GEOMETRÍA LINEAL.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	3.º y 4.º
CONTENIDOS INTERMEDIOS.	GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA.	MATERIA OBLIGATORIA.	15	5.º y 6.º
	ECUACIONES DIFERENCIALES Y SU ANÁLISIS NUMÉRICO.	MATERIA OBLIGATORIA.	13,5	5.º y 6.º
	ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.	MATERIA OBLIGATORIA.	7,5	5.º y 6.º
	OPTIMIZACIÓN.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	5.º y 6.º
	ECUACIONES ALGEBRAICAS.	MATERIA OBLIGATORIA.	6	5.º y 6.º
CONTENIDOS ESPECÍFICOS.	FUNDAMENTOS DE LAS MATEMÁTICAS.	MATERIA OPTATIVA.	*12	5.º y 6.º
	MATEMÁTICAS GENERALES.	MATERIA	*12	5.º y 6.º

Universidad Pontificia de Salamanca

		OPTATIVA.		
	ASTRONOMÍA Y GEODESIA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	5.º y 6.º
	MODELOS LINEALES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	5.º y 6.º
MATEMÁTICA PURA Y APLICADA.	ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	GEOMETRÍA ALGEBRAICA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	ANÁLISIS AVANZADO.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	VARIEDADES DIFERENCIABLES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
CONTENIDOS AVANZADOS EN MATEMÁTICA PURA Y APLICADA I.	ÁLGEBRA CONMUTATIVA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	GEOMETRÍA O TOPOLOGÍA AVANZADAS.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
	ANÁLISIS FUNCIONAL O COMPLEJO.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
CONTENIDOS AVANZADOS EN MATEMÁTICA PURA Y APLICADA II.	MÉTODOS ANALÍTICOS O NUMÉRICOS PARA LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
	ANÁLISIS REAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	PROCESOS ESTOCÁSTICOS O SIMULACIÓN.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	ÁLGEBRA COMPUTACIONAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º

Módulo	Materia	Carácter	Créditos ECTS	Semestre
CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN.	ÁLGEBRA COMPUTACIONAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	FUNDAMENTOS DE LA PROGRAMACIÓN.	MATERIA OPTATIVA.	*12	7.º y 8.º
	AUTÓMATAS O COMPUTABILIDAD.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
CONTENIDOS AVANZADOS DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN.	PARADIGMAS DE PROGRAMACIÓN.	MATERIA OPTATIVA.	*18	7.º y 8.º
	GEOMETRÍA COMPUTACIONAL.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
CONTENIDOS ESPECÍFICOS AVANZADOS.	TEORÍA DE NÚMEROS.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	CÁLULO DE VARIACIONES.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	MECÁNICA CELESTE.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
	MATEMÁTICAS PARA LA ENSEÑANZA.	MATERIA OPTATIVA.	*6	7.º y 8.º
TRABAJO FIN DE GRADO.	TRABAJO FIN DE GRADO.	MATERIA OBLIGATORIA.	12	7.º y 8.º

- Créditos optativos que componen la materia. En función de las materias cursadas, el alumno podrá obtener el itinerario de: Matemática Pura y Aplicada y de Ciencias de la Computación.

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO V: ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

ANEXO V: LEGISLACIÓN

Anexo V.1.: Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, BOE (4 mayo 2006), núm. 106, pp. 17.158 – 17.207.

TÍTULO I:

CAPÍTULO III

Educación secundaria obligatoria

Artículo 22. Principios generales.

1. La etapa de educación secundaria obligatoria comprende cuatro cursos, que se seguirán ordinariamente entre los doce y los dieciséis años de edad.

2. La finalidad de la educación secundaria obligatoria consiste en lograr que los alumnos y alumnas adquieran los elementos básicos de la cultura, especialmente en sus aspectos humanístico, artístico, científico y tecnológico; desarrollar y consolidar en ellos hábitos de estudio y de trabajo; prepararles para su incorporación a estudios posteriores y para su inserción laboral y formarles para el ejercicio de sus derechos y obligaciones en la vida como ciudadanos.

3. En la educación secundaria obligatoria se prestará especial atención a la orientación educativa y profesional del alumnado.

4. La educación secundaria obligatoria se organizará de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Corresponde a las Administraciones educativas regular las medidas de atención a la diversidad, organizativas y curriculares, que permitan a los centros, en el ejercicio de su autonomía, una organización flexible de las enseñanzas.

5. Entre las medidas señaladas en el apartado anterior se contemplarán las adaptaciones del currículo, la integración de materias en ámbitos, los agrupamientos flexibles, los desdoblamientos de grupos, la oferta de materias optativas, programas de refuerzo y programas de tratamiento personalizado para el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo.

6. En el marco de lo dispuesto en los apartados 4 y 5, los centros educativos tendrán autonomía para organizar los grupos y las materias de manera flexible y para adoptar las medidas de atención a la diversidad adecuadas a las características de su alumnado.

7. Las medidas de atención a la diversidad que adopten los centros estarán orientadas a la consecución de los objetivos de la educación secundaria obligatoria por parte de todo su alumnado y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y la titulación correspondiente.

Artículo 23. Objetivos.

La educación secundaria obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos,

Universidad Pontificia de Salamanca

ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en e conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

Artículo 24. Organización de los cursos primero, segundo y tercero.

1. Las materias de los cursos primero a tercero de la etapa serán las siguientes:

Ciencias de la naturaleza.
Educación física.
Ciencias sociales, geografía e historia.
Lengua castellana y literatura y, si la hubiere, lengua cooficial y literatura.
Lengua extranjera.
Matemáticas.
Educación plástica y visual.
Música.
Tecnologías.

2. Además, en cada uno de los cursos todos los alumnos cursarán las materias siguientes:
Ciencias de la naturaleza.
Educación física.
Ciencias sociales, geografía e historia.
Lengua castellana y literatura y, si la hubiere, lengua cooficial y literatura.
Lengua extranjera.

Universidad Pontificia de Salamanca

Matemáticas.

3. En uno de los tres primeros cursos todos los alumnos cursarán la materia de educación para la ciudadanía y los derechos humanos en la que se prestará especial atención a la igualdad entre hombres y mujeres.

4. En el tercer curso la materia de ciencias de la naturaleza podrá desdoblarse en biología y geología, por un lado, y física y química por otro.

5. Asimismo, en el conjunto de los tres cursos, los alumnos podrán cursar alguna materia optativa. La oferta de materias en este ámbito de optatividad deberá incluir una segunda lengua extranjera y cultura clásica. Las Administraciones educativas podrán incluir la segunda lengua extranjera entre las materias a las que se refiere el apartado 1.

6. En cada uno de los cursos primero y segundo los alumnos cursarán un máximo de dos materias más que en el último ciclo de educación primaria.

7. Sin perjuicio de su tratamiento específico en algunas de las materias de la etapa, la comprensión lectora, la expresión oral y escrita, la comunicación audiovisual, las tecnologías de la información y la comunicación y la educación en valores se trabajarán en todas las áreas.

8. Los centros educativos podrán organizar, de acuerdo con lo que regulen las Administraciones educativas, programas de refuerzo de las capacidades básicas para aquellos alumnos que, en virtud del informe al que se hace referencia en el artículo 20.5, así lo requieran para poder seguir con aprovechamiento las enseñanzas de la educación secundaria.

Artículo 25. Organización del cuarto curso.

1. Todos los alumnos deberán cursar en el cuarto curso las materias siguientes:

Educación física.
Educación ético-cívica.
Ciencias sociales, geografía e historia.
Lengua castellana y literatura y, si la hubiere, lengua cooficial y literatura.
Matemáticas.
Primera lengua extranjera.

2. Además de las materias enumeradas en el apartado anterior, los alumnos deberán cursar tres materias de las siguientes:

Biología y geología.
Educación plástica y visual.
Física y química.
Informática.
Latín.
Música.
Segunda lengua extranjera.
Tecnología.

3. Los alumnos podrán cursar una o más materias optativas de acuerdo con el marco que establezcan las Administraciones educativas.

4. En la materia de educación ético-cívica se prestará especial atención a la igualdad entre hombres y mujeres.

5. Sin perjuicio de su tratamiento específico en algunas de las materias de este cuarto curso, la comprensión lectora, la expresión oral y escrita, la comunicación audiovisual, las tecnologías de la información y la comunicación y la educación en valores se trabajarán en todas las áreas.

6. Este cuarto curso tendrá carácter orientador, tanto para los estudios postobligatorios como para la incorporación a la vida laboral. A fin de orientar la elección de los alumnos, se podrán establecer agrupaciones de estas materias en diferentes opciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

7. Los centros deberán ofrecer la totalidad de las materias y opciones citadas en los apartados anteriores. Sólo se podrá limitar la elección de materias y opciones de los alumnos cuando haya un número insuficiente de los mismos para alguna de ellas a partir de criterios objetivos establecidos previamente por las Administraciones educativas.

Artículo 26. Principios pedagógicos.

1. Los centros elaborarán sus propuestas pedagógicas para esta etapa desde la consideración de la atención a la diversidad y del acceso de todo el alumnado a la educación común. Asimismo, arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje de los alumnos, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo.

2. En esta etapa se prestará una atención especial a la adquisición y el desarrollo de las competencias básicas y se fomentará la correcta expresión oral y escrita y el uso de las matemáticas. A fin de promover el hábito de la lectura, se dedicará un tiempo a la misma en la práctica docente de todas las materias.

3. Las Administraciones educativas establecerán las condiciones que permitan que, en los primeros cursos de la etapa, los profesores con la debida cualificación impartan más de una materia al mismo grupo de alumnos.

4. Corresponde a las Administraciones educativas promover las medidas necesarias para que la tutoría personal de los alumnos y la orientación educativa, psicopedagógica y profesional, constituyan un elemento fundamental en la ordenación de esta etapa.

5. Asimismo, corresponde a las Administraciones educativas regular soluciones específicas para la atención de aquellos alumnos que manifiesten dificultades especiales de aprendizaje o de integración en la actividad ordinaria de los centros, de los alumnos de alta capacidad intelectual y de los alumnos con discapacidad.

Artículo 27. Programas de diversificación curricular.

1. En la definición de las enseñanzas mínimas de la etapa se incluirán las condiciones básicas para establecer las diversificaciones del currículo desde tercer curso de educación secundaria obligatoria, para el alumnado que lo requiera tras la oportuna evaluación. En este supuesto, los objetivos de la etapa se alcanzarán con una metodología específica a través de una organización de contenidos, actividades prácticas y, en su caso, de materias, diferente a la establecida con carácter general.

2. Los alumnos que una vez cursado segundo no estén en condiciones de promocionar a tercero y hayan repetido ya una vez en secundaria, podrán incorporarse a un programa de diversificación curricular, tras la oportuna evaluación.

3. Los programas de diversificación curricular estarán orientados a la consecución del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.

Artículo 28. Evaluación y promoción.

1. La evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de la educación secundaria obligatoria será continua y diferenciada según las distintas materias del currículo.

2. Las decisiones sobre la promoción del alumnado de un curso a otro, dentro de la etapa, serán adoptadas de forma colegiada por el conjunto de profesores del alumno respectivo, atendiendo a la consecución de los objetivos. Las decisiones sobre la obtención del título al final de la misma serán adoptadas de forma colegiada por el conjunto de profesores del alumno respectivo, atendiendo a la consecución de las competencias básicas y los objetivos de la etapa.

3. A los efectos de lo dispuesto en el apartado anterior, los alumnos promocionarán de curso cuando hayan superado los objetivos de las materias cursadas o tengan evaluación negativa en dos materias, como máximo y repetirán curso cuando tengan evaluación negativa en tres o más materias. Excepcionalmente, podrá autorizarse la promoción de un alumno con evaluación negativa en tres materias cuando el equipo docente considere que la naturaleza de las mismas no le impide seguir con éxito el curso siguiente, se considere que tiene expectativas favorables de recuperación y

Universidad Pontificia de Salamanca

que dicha promoción beneficiará su evolución académica. Las Administraciones educativas regularán las actuaciones del equipo docente responsable de la evaluación.

4. Con el fin de facilitar a los alumnos la recuperación de las materias con evaluación negativa, las Administraciones educativas regularán las condiciones para que los centros organicen las oportunas pruebas extraordinarias en las condiciones que determinen.

5. Quienes promocionen sin haber superado todas las materias seguirán los programas de refuerzo que establezca el equipo docente y deberán superar las evaluaciones correspondientes a dichos programas de refuerzo. Esta circunstancia será tenida en cuenta a los efectos de promoción y titulación previstos en los apartados anteriores.

6. El alumno podrá repetir el mismo curso una sola vez y dos veces como máximo dentro de la etapa. Cuando esta segunda repetición deba producirse en el último curso de la etapa, se prolongará un año el límite de edad al que se refiere el apartado 2 del artículo 4. Excepcionalmente, un alumno podrá repetir una segunda vez en cuarto curso si no ha repetido en los cursos anteriores de la etapa.

7. En todo caso, las repeticiones se planificarán de manera que las condiciones curriculares se adapten a las necesidades del alumno y estén orientadas a la superación de las dificultades detectadas.

8. Los alumnos que al finalizar el cuarto curso de educación secundaria obligatoria no hayan obtenido la titulación establecida en el artículo 31.1 de esta Ley podrán realizar una prueba extraordinaria de las materias que no hayan superado.

9. Los alumnos que cursen los programas de diversificación curricular a los que se refiere el artículo 27, serán evaluados de conformidad con los objetivos de la etapa y los criterios de evaluación fijados en cada uno de los respectivos programas.

Artículo 29. Evaluación de diagnóstico.

Al finalizar el segundo curso de la educación secundaria obligatoria todos los centros realizarán una evaluación de diagnóstico de las competencias básicas alcanzadas por sus alumnos. Esta evaluación será competencia de las Administraciones educativas y tendrá carácter formativo y orientador para los centros e informativo para las familias y para el conjunto de la comunidad educativa. Estas evaluaciones tendrán como marco de referencia las evaluaciones generales de diagnóstico que se establecen en el artículo 144.1 de esta Ley.

Artículo 30. Programas de cualificación profesional inicial.

1. Corresponde a las Administraciones educativas organizar programas de cualificación profesional inicial destinados al alumnado mayor de dieciséis años, cumplidos antes del 31 de diciembre del año del inicio del programa, que no hayan obtenido el título de Graduado en educación secundaria obligatoria. Excepcionalmente, y con el acuerdo de alumnos y padres o tutores, dicha edad podrá reducirse a quince años para aquéllos que cumplan lo previsto en el artículo 27.2. En este caso, el alumno adquirirá el compromiso de cursar los módulos a los que hace referencia el apartado 3.c) de este artículo.

2. El objetivo de los programas de cualificación profesional inicial es que todos los alumnos alcancen competencias profesionales propias de una cualificación de nivel uno de la estructura actual del Catálogo Nacional de Cualificaciones Profesionales creado por la Ley 5/2002, de 19 de junio, de las Cualificaciones y de la Formación Profesional, así como que tengan la posibilidad de una inserción sociolaboral satisfactoria y amplíen sus competencias básicas para proseguir estudios en las diferentes enseñanzas.

3. Los programas de cualificación profesional inicial incluirán tres tipos de módulos:

a) Módulos específicos referidos a las unidades de competencia correspondientes a cualificaciones de nivel uno del Catálogo citado.

b) Módulos formativos de carácter general, que amplíen competencias básicas y favorezcan la transición desde el sistema educativo al mundo laboral.

Universidad Pontificia de Salamanca

c) Módulos de carácter voluntario para los alumnos, que conduzcan a la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria y que podrán cursarse de manera simultánea con los módulos a los que se refieren los anteriores párrafos a) y b) o una vez superados éstos.

4. Los alumnos que superen los módulos obligatorios de estos programas obtendrán una certificación académica expedida por las Administraciones educativas. Esta certificación tendrá efectos de acreditación de las competencias profesionales adquiridas en relación con el Sistema Nacional de Cualificaciones y Formación Profesional.

5. La oferta de programas de cualificación profesional inicial podrá adoptar modalidades diferentes. Podrán participar en estos programas los centros educativos, las corporaciones locales, las asociaciones profesionales, las organizaciones no gubernamentales y otras entidades empresariales y sindicales, bajo la coordinación de las Administraciones educativas.

6. Corresponde a las Administraciones educativas regular los programas de cualificación profesional inicial, que serán ofrecidos, en todo caso, en centros públicos y privados concertados a fin de posibilitar al alumnado el acceso a dichos programas.

Artículo 31. Título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.

1. Los alumnos que al terminar la educación secundaria obligatoria hayan alcanzado las competencias básicas y los objetivos de la etapa obtendrán el título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria.

2. El título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria permitirá acceder al bachillerato, a la formación profesional de grado medio, a los ciclos de grado medio de artes plásticas y diseño, a las enseñanzas deportivas de grado medio y al mundo laboral.

3. Los alumnos que cursen la educación secundaria obligatoria y no obtengan el título al que se refiere este artículo recibirán un certificado de escolaridad en el que consten los años cursados.

TÍTULO III: PROFESORADO
CAPÍTULO II: PROFESORADO DE Enseñanza secundaria obligatoria y bachillerato.

Artículo 94. Profesorado de educación secundaria obligatoria y de bachillerato.

Para impartir las enseñanzas de educación secundaria obligatoria y de bachillerato será necesario tener el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto, o el título de Grado equivalente, además de la formación pedagógica y didáctica de nivel de Postgrado, de acuerdo con lo dispuesto en el artículo 100 de la presente Ley, sin perjuicio de la habilitación de otras titulaciones que, a efectos de docencia pudiera establecer el Gobierno para determinadas áreas, previa consulta a las Comunidades Autónomas.

Universidad Pontificia de Salamanca

Anexo V.2.:Real Decreto 1631 / 2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp.677 – 773.

ANEXO I

COMPETENCIAS BÁSICAS

La incorporación de competencias básicas al currículo permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos. De ahí su carácter básico. Son aquellas competencias que debe haber desarrollado un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.

La inclusión de las competencias básicas en el currículo tiene varias finalidades. En primer lugar, integrar los diferentes aprendizajes, tanto los formales, incorporados a las diferentes áreas o materias, como los informales y no formales. En segundo lugar, permitir a todos los estudiantes integrar sus aprendizajes, ponerlos en relación con distintos tipos de contenidos y utilizarlos de manera efectiva cuando les resulten necesarios en diferentes situaciones y contextos. Y, por último, orientar la enseñanza, al permitir identificar los contenidos y los criterios de evaluación que tienen carácter imprescindible y, en general, inspirar las distintas decisiones relativas al proceso de enseñanza y de aprendizaje.

Con las áreas y materias del currículo se pretende que todos los alumnos y las alumnas alcancen los objetivos educativos y, consecuentemente, también que adquieran las competencias básicas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias. Cada una de las áreas contribuye al desarrollo de diferentes competencias y, a su vez, cada una de las competencias básicas se alcanzará como consecuencia del trabajo en varias áreas o materias.

El trabajo en las áreas y materias del currículo para contribuir al desarrollo de las competencias básicas debe complementarse con diversas medidas organizativas y funcionales, imprescindibles para su desarrollo. Así, la organización y el funcionamiento de los centros y las aulas, la participación del alumnado, las normas de régimen interno, el uso de determinadas metodologías y recursos didácticos, o la concepción, organización y funcionamiento de la biblioteca escolar, entre otros aspectos, pueden favorecer o dificultar el desarrollo de competencias asociadas a la comunicación, el análisis del entorno físico, la creación, la convivencia y la ciudadanía, o la alfabetización digital. Igualmente, la acción tutorial permanente puede contribuir de modo determinante a la adquisición de competencias relacionadas con la regulación de

Universidad Pontificia de Salamanca

los aprendizajes, el desarrollo emocional o las habilidades sociales. Por último, la planificación de las actividades complementarias y extraescolares puede reforzar el desarrollo del conjunto de las competencias básicas.

En el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea, y de acuerdo con las consideraciones que se acaban de exponer, se **han identificado ocho competencias básicas:**

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. **Competencia matemática.**
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

En este Anexo se recogen la descripción, finalidad y aspectos distintivos de estas competencias y se pone de manifiesto, en cada una de ellas, el nivel considerado básico que debe alcanzar todo el alumnado al finalizar la educación secundaria obligatoria.

El currículo de la educación secundaria obligatoria se estructura en materias, es en ellas en las que han de buscarse los referentes que permitan el desarrollo y adquisición de las competencias en esta etapa. Así pues, en cada materia se incluyen referencias explícitas acerca de su contribución a aquellas competencias básicas a las se orienta en mayor medida. Por otro lado, tanto los objetivos como la propia selección de los contenidos buscan asegurar el desarrollo de todas ellas. Los criterios de evaluación, sirven de referencia para valorar el progresivo grado de adquisición.

1. Competencia en comunicación lingüística.

2. Competencia matemática.

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

Asimismo esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. En consecuencia, la competencia matemática supone la habilidad para

Universidad Pontificia de Salamanca

seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.

La competencia matemática implica una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.), que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella . En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad.

Real Decreto 1631 / 2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (5 enero 2007), núm. 5, pp.677 – 773.

ANEXO II: **Matemáticas**

En su intento de comprender el mundo todas las civilizaciones han creado y desarrollado herramientas matemáticas: el cálculo, la medida y el estudio de relaciones entre formas y cantidades han servido a los científicos de todas las épocas para generar modelos de la realidad.

Las matemáticas, tanto histórica como socialmente, forman parte de nuestra cultura y los individuos deben ser capaces de apreciarlas. El dominio del espacio y del tiempo, la organización y optimización de recursos, formas y proporciones, la capacidad de previsión y control de la incertidumbre o el manejo de la tecnología digital, son sólo algunos ejemplos.

Universidad Pontificia de Salamanca

En la sociedad actual las personas necesitan, en los distintos ámbitos profesionales, un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas que las que precisaban hace sólo unos años. La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo, y en la información que se maneja cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación. Por ello, los ciudadanos deben estar preparados para adaptarse con eficacia a los continuos cambios que se generan.

Ahora bien, acometer los retos de la sociedad contemporánea supone, además, preparar a los ciudadanos para que adquieran autonomía a la hora de establecer hipótesis y contrastarlas, diseñar estrategias o extrapolar resultados a situaciones análogas. Los contenidos matemáticos seleccionados para esta etapa obligatoria están orientados a conseguir que todos los alumnos puedan alcanzar los objetivos propuestos y estén preparados para incorporarse a la vida adulta. Por lo cual, se deberán introducir las medidas que en cada caso sean necesarias para atender a la diversidad de actitudes y competencias cognitivas del alumnado de la etapa.

Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, tratando siempre de relacionarlos con su propia experiencia y de presentarlos preferentemente en un contexto de resolución de problemas. Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad. La consolidación de los contenidos considerados complejos se realizará de forma gradual y cíclica, planteando situaciones que permitan abordarlos desde perspectivas más amplias o en conexión con nuevos contenidos.

En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas. Desde un punto de vista formativo, la resolución de problemas es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc. pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general. También se introducen en este bloque la capacidad de expresar verbalmente los procesos que se siguen y la confianza en las propias capacidades para interpretar, valorar y tomar decisiones sobre situaciones que incluyen soporte matemático, poniendo de relieve la importancia de los factores afectivos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El resto de los contenidos se han distribuido en cinco bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas, y Estadística y probabilidad. Es preciso indicar que es sólo una forma de organizarlos. No se trata de crear compartimentos estancos: en todos los bloques se utilizan técnicas numéricas y algebraicas, y en cualquiera de ellos puede ser útil confeccionar una tabla, generar una gráfica o suscitar una situación de incertidumbre probabilística.

El desarrollo del sentido numérico iniciado en educación primaria continúa en educación secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes. Lo importante en estos cursos no son sólo las destrezas de cálculo ni los algoritmos de lápiz

Universidad Pontificia de Salamanca

y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados y posibles errores.

Por su parte, las destrezas algebraicas se desarrollan a través de un aumento progresivo en el uso y manejo de símbolos y expresiones desde el primer año de secundaria al último, poniendo especial atención en la lectura, simbolización y planteamiento que se realiza a partir del enunciado de cada problema.

Para la organización de los contenidos de álgebra se ha tenido en cuenta que su estudio resulta, con demasiada frecuencia, difícil a muchos alumnos. La construcción del conocimiento algebraico ha de partir de la representación y transformación de cantidades. El trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre lenguajes son fundamentales en los primeros cursos.

La geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.

La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas.

El estudio de las relaciones entre variables y su representación mediante tablas, gráficas y modelos matemáticos es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos diversos de tipo económico, social o natural. Los contenidos de este bloque se mueven entre las distintas formas de representar una situación: verbal, numérica, geométrica o a través de una expresión literal y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje. Así mismo, se pretende que los estudiantes sean capaces de distinguir las características de determinados tipos de funciones con objeto de modelizar situaciones reales.

Debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística. En los primeros cursos se pretende una aproximación natural al estudio de fenómenos aleatorios sencillos mediante experimentación y el tratamiento, por medio de tablas y gráficas, de datos estadísticos. Posteriormente, el trabajo se encamina a la obtención de valores representativos de una muestra y se profundiza en la utilización de diagramas y gráficos más complejos con objeto de sacar conclusiones a partir de ellos. La utilización de la hojas de cálculo facilita el proceso de organizar la información, posibilita el uso de gráficos sencillos, el tratamiento de grandes cantidades

Universidad Pontificia de Salamanca

de datos, y libera tiempo y esfuerzos de cálculo para dedicarlo a la formulación de preguntas, comprensión de ideas y redacción de informes.

En la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrase en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos comúnmente usados en la vida cotidiana, por tanto el trabajo de esta materia en el aula debería reflejar tal realidad.

Tomando en consideración el carácter orientador que debe tener la etapa, para atender a la diversidad de motivaciones, intereses y ritmos de aprendizaje de los alumnos, la materia de Matemáticas podrá configurarse en dos opciones, A y B, en el último curso. Las dos opciones remarcan contenidos parcialmente diferenciados según pongan más o menos énfasis en el carácter terminal o propedéutico, en el mayor o menor uso del simbolismo abstracto, en la mayor o menor exigencia de precisión o rigor matemático, etc. Las diferencias que aconsejan el establecimiento de las dos opciones se traducen no sólo en la selección de contenidos, sino también, y sobre todo, en la forma en que habrán de ser tratados.

En todos los casos, las matemáticas han de ser presentadas a los alumnos como un conjunto de conocimientos y procedimientos cercanos a su experiencia, que han evolucionado en el transcurso del tiempo y que, con seguridad, continuarán haciéndolo en el futuro.

Contribución de la materia a la adquisición de las competencias básicas

Puede entenderse que todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de la competencia matemática, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje. Todos los bloques de contenidos están orientados a aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad. Conviene señalar que no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana.

La discriminación de formas, relaciones y estructuras geométricas, especialmente con el desarrollo de la visión espacial y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio, contribuye a profundizar la competencia en conocimiento e interacción con el mundo físico. La modelización constituye otro referente en esta misma dirección. Elaborar modelos exige identificar y seleccionar las características relevantes de una situación real, representarla simbólicamente y

Universidad Pontificia de Salamanca

determinar pautas de comportamiento, regularidades e invariantes a partir de las que poder hacer predicciones sobre la evolución, la precisión y las limitaciones del modelo.

Por su parte, la incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas contribuye a mejorar la competencia en tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación. No menos importante resulta la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de los alumnos.

Las matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas. Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento. El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto.

Las matemáticas contribuyen a la competencia en expresión cultural y artística porque el mismo conocimiento matemático es expresión universal de la cultura, siendo, en particular, la geometría parte integral de la expresión artística de la humanidad al ofrecer medios para describir y comprender el mundo que nos rodea y apreciar la belleza de las estructuras que ha creado. Cultivar la sensibilidad y la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el apasionamiento estético son objetivos de esta materia.

Los propios procesos de resolución de problemas contribuyen de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal porque se utilizan para planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones. También, las técnicas heurísticas que desarrolla constituyen modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento y consolida la adquisición de destrezas involucradas en la competencia de aprender a aprender tales como la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo.

La aportación a la competencia social y ciudadana desde la consideración de la utilización de las matemáticas para describir fenómenos sociales. Las matemáticas, fundamentalmente a través del análisis funcional y de la estadística, aportan criterios científicos para predecir y tomar decisiones. También se contribuye a esta competencia enfocando los errores cometidos en los procesos de resolución de problemas con espíritu constructivo, lo que permite de paso valorar los puntos de vista ajenos en plano de igualdad con los propios como formas alternativas de abordar una situación.

Universidad Pontificia de Salamanca

Objetivos

La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

Universidad Pontificia de Salamanca

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO CINCO: ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

ANEXO IV: INFORME PISA

Informes Pisa

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) [1] realiza cada tres años los informes PISA (Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos)[2] que evalúan la competencia lectora, matemática y científica internacionalmente en alumnos de 15 años. Cada tres años se centra en evaluar sobre todo una de las tres competencias. Así en el 2000,2009 se centró en la compresión lectora, en el 2003, 2012 se centró en la competencia matemática, 2006 y 2015 se centran y centrará en la competencia científica. Las áreas de contenidos matemáticos en este informe se agrupan: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, probabilidad. Los resultados de PISA se han presentado por medio de escalas con una puntuación media de 500 y una desviación típica de 100,

Establece 6 niveles de competencia

[1] Organisation for Economic Co-operation and Development
[2]Programme for International Student Assesment

Universidad Pontificia de Salamanca

Figura 2.2 ■ **Descripciones resumidas de los seis niveles de competencia en matemáticas**

Nivel	LO QUE POR LO GENERAL SABEN HACER LOS ALUMNOS
6	En el nivel 6, los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de una manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y razonamiento matemático avanzado. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden formular y comunicar con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, argumentos y su adecuación a las situaciones originales.
5	En el nivel 5, los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar problemas complejos relativos a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y razonamiento bien desarrolladas, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
4	En el nivel 4, los alumnos pueden trabajar con eficacia con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Pueden elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.
3	En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Los alumnos de este nivel saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
2	En el nivel 2, los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacer uso de un único modelo representacional. Los alumnos de este nivel pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de efectuar razonamientos directos e interpretaciones literales de los resultados.
1	En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 2.2. Media en competencia matemática en los países y comunidades autónomas participantes en PISA 2009

Países	Media	Error típico	Extremo inf.	Extremo sup.
Shanghái - China	600	2,82	595	606
Singapur	562	1,44	559	565
Hong Kong - China	555	2,73	549	560
Corea del Sur	546	4,02	538	554
Taipéi - China	543	3,40	537	550
Finlandia	541	2,17	536	545
Liechtenstein	536	4,06	528	544
Suiza	534	3,30	527	540
Japón	529	3,33	522	536
Canadá	527	1,61	524	530
Países Bajos	526	4,75	517	535
Macao-China	525	0,92	523	527
Nueva Zelanda	519	2,31	515	524
Bélgica	515	2,25	511	520
Australia	514	2,53	509	519
Alemania	513	2,86	507	518
Estonia	512	2,57	507	517
Islandia	507	1,39	504	509
Dinamarca	503	2,60	498	508
Eslovenia	501	1,23	499	504
Noruega	498	2,40	493	503
Francia	497	3,09	491	503
República Eslovaca	497	3,08	491	503
Austria	496	2,66	491	501
Polonia	495	2,84	489	500
Suecia	494	2,90	489	500
República Checa	493	2,83	487	498
Reino Unido	492	2,42	488	497
Hungría	490	3,45	483	497
Luxemburgo	489	1,18	487	491
Estados Unidos	487	3,57	480	494
Irlanda	487	2,54	482	492
Portugal	487	2,91	481	493
España	483	2,11	479	488
Italia	483	1,86	479	487
Letonia	482	3,07	476	488
Lituania	477	2,62	471	482
Federación Rusa	468	3,29	461	474
Grecia	466	3,88	458	474
Croacia	460	3,09	454	466
Dubai (EAU)	453	1,07	450	455
Israel	447	3,28	440	453
Turquía	445	4,44	437	454
Serbia	442	2,92	437	448
Azerbaiyán	431	2,76	426	436
Bulgaria	428	5,86	417	440
Rumanía	427	3,41	420	434
Uruguay	427	2,59	422	432
Chile	421	3,06	415	427
Tailandia	419	3,23	412	425
México	419	1,83	415	422
Trinidad y Tobago	414	1,28	412	417
Kazajistán	405	3,04	399	411
Montenegro	403	2,03	399	406
Argentina	388	4,09	380	396
Jordania	387	3,71	379	394
Brasil	386	2,39	381	390
Colombia	381	3,24	374	387
Albania	377	3,98	370	385
Túnez	371	2,98	366	377
Indonesia	371	3,72	364	379
Qatar	368	0,70	367	369
Perú	365	4,00	357	373
Panamá	360	5,25	349	370
Kirguistán	331	2,87	326	337
Total OCDE	488	1,18	486	491
Promedio OCDE	496	0,49	495	497

Universidad Pontificia de Salamanca

CCAA	Media	Error típico	Extremo inf.	Extremo sup.
Castilla y León	514	5,29	504	525
Navarra	511	3,59	504	518
País Vasco	510	2,82	504	515
Aragón	506	5,23	495	516
La Rioja	504	2,72	498	509
Madrid	496	4,38	488	505
Cataluña	496	6,02	484	507
Cantabria	495	5,00	485	504
Asturias	494	4,63	485	503
Galicia	489	4,27	481	498
España	483	2,11	479	488
Murcia	478	5,60	467	489
Baleares	464	4,51	456	473
Andalucía	462	5,17	452	472
Canarias	435	4,06	427	443
Ceuta	424	3,41	417	430
Melilla	409	3,34	403	416
Total OCDE	488	1,18	486	491
Promedio OCDE	496	0,49	495	497

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 2.6. Niveles de rendimiento en competencia matemática en los países participantes en PISA 2009

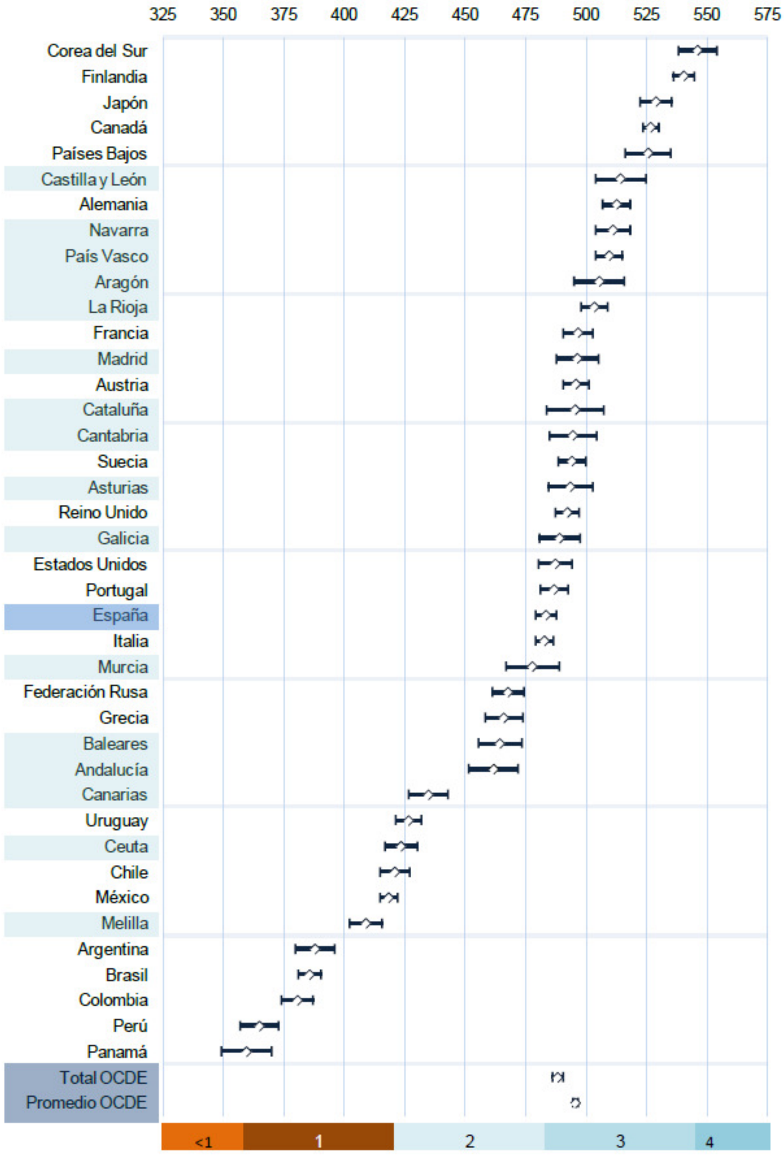
Países	Nivel<1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
Shanghái - China	1,4	3,4	8,7	15,2	20,8	23,8	26,6
Finlandia	1,7	6,1	15,6	27,1	27,8	16,7	4,9
Corea del Sur	1,9	6,2	15,6	24,4	26,3	17,7	7,8
Hong Kong - China	2,6	6,2	13,2	21,9	25,4	19,9	10,8
Liechtenstein	3,0	6,5	15,0	26,2	31,2	13,0	5,0
Singapur	3,0	6,8	13,1	18,7	22,8	20,0	15,6
Macao-China	2,8	8,2	19,6	27,8	24,5	12,8	4,3
Canadá	3,1	8,3	18,8	26,5	25,0	13,9	4,4
Japón	4,0	8,5	17,4	25,7	23,5	14,7	6,2
Estonia	3,0	9,6	22,7	29,9	22,7	9,8	2,2
Taipéi - China	4,2	8,6	15,5	20,9	22,2	17,2	11,3
Países Bajos	2,8	10,6	19,0	23,9	23,9	15,4	4,4
Suiza	4,5	9,0	15,9	23,0	23,5	16,3	7,8
Nueva Zelanda	5,3	10,2	19,1	24,4	22,2	13,6	5,3
Australia	5,1	10,8	20,3	25,8	21,7	11,9	4,5
Islandia	5,7	11,3	21,3	27,3	20,9	10,5	3,1
Dinamarca	4,9	12,1	23,0	27,4	21,0	9,1	2,5
Noruega	5,5	12,7	24,3	27,5	19,7	8,4	1,8
Alemania	6,4	12,2	18,8	23,1	21,7	13,2	4,6
Bélgica	7,7	11,3	17,5	21,8	21,3	14,6	5,8
Reino Unido	6,2	14,0	24,9	27,2	17,9	8,1	1,8
Eslovenia	6,5	13,8	22,5	23,9	19,0	10,3	3,9
Polonia	6,1	14,4	24,0	26,1	19,0	8,2	2,2
Irlanda	7,3	13,6	24,5	28,6	19,4	5,8	0,9
República Eslovaca	7,0	14,0	23,2	25,0	18,1	9,1	3,6
Suecia	7,5	13,6	23,4	25,2	19,0	8,9	2,5
Hungría	8,1	14,2	23,2	26,0	18,4	8,1	2,0
República Checa	7,0	15,3	24,2	24,4	17,4	8,5	3,2
Francia	9,5	13,1	19,9	23,8	20,1	10,4	3,3
Letonia	5,8	16,7	27,2	28,2	16,4	5,1	0,6
Austria	7,8	15,4	21,2	23,0	19,6	9,9	3,0
Estados Unidos	8,1	15,3	24,4	25,2	17,1	8,0	1,9
Portugal	8,4	15,3	23,9	25,0	17,7	7,7	1,9
España	9,1	14,6	23,9	26,6	17,7	6,7	1,3
Luxemburgo	9,6	14,4	22,7	23,1	19,0	9,0	2,3
Italia	9,1	15,9	24,2	24,6	17,3	7,4	1,6
Lituania	9,0	17,3	26,1	25,3	15,4	5,7	1,3
Federación Rusa	9,5	19,0	28,5	25,0	12,7	4,3	1,0
Grecia	11,3	19,1	26,4	24,0	13,6	4,9	0,8
Croacia	12,4	20,8	26,7	22,7	12,5	4,3	0,6
Dubai (EAU)	17,6	21,2	23,0	19,6	12,1	5,3	1,2
Israel	20,5	18,9	22,5	20,1	12,0	4,7	1,2
Serbia	17,6	22,9	26,5	19,9	9,5	2,9	0,6
Turquía	17,7	24,5	25,2	17,4	9,6	4,4	1,3
Azerbaiyán	11,5	33,8	35,3	14,8	3,6	0,9	0,2
Rumanía	19,5	27,5	28,6	17,3	5,9	1,2	0,1
Bulgaria	24,5	22,7	23,4	17,5	8,2	3,0	0,8
Uruguay	22,9	24,6	25,1	17,0	7,9	2,1	0,3
México	21,9	28,9	28,3	15,6	4,7	0,7	0,0
Chile	21,7	29,4	27,3	14,8	5,6	1,2	0,1
Tailandia	22,1	30,4	27,3	14,0	4,9	1,0	0,3
Trinidad y Tobago	30,1	23,1	21,2	15,4	7,7	2,1	0,3
Montenegro	29,6	28,8	24,6	12,2	3,8	0,9	0,1
Kazajistán	29,6	29,6	23,5	12,0	4,2	0,9	0,3
Argentina	37,2	26,4	20,8	10,9	3,9	0,8	0,1
Jordania	35,4	29,9	22,9	9,5	2,1	0,3	0,0
Albania	40,5	27,2	20,2	9,1	2,6	0,4	0,0
Brasil	38,1	31,0	19,0	8,1	3,0	0,7	0,1
Colombia	38,8	31,6	20,3	7,5	1,6	0,1	0,0
Perú	47,6	25,9	16,9	6,8	2,1	0,5	0,1
Túnez	43,4	30,2	18,7	6,1	1,3	0,2	0,0
Qatar	51,1	22,7	13,1	7,2	4,2	1,5	0,3
Indonesia	43,5	33,1	16,9	5,4	0,9	0,1	0,0
Panamá	51,5	27,3	13,9	5,6	1,4	0,4	0,0
Kirguistán	64,8	21,8	9,3	3,3	0,7	0,0	0,0
Total OCDE	9,3	15,5	22,7	23,5	17,3	8,9	2,8
Promedio OCDE	8,0	14,0	22,0	24,3	18,9	9,6	3,1

Tabla 2.7. Niveles de rendimiento en competencia matemática en las comunidades autónomas participantes en PISA 2009

CCAA	Nivel<1	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
País Vasco	5,3	9,6	20,5	28,6	23,2	10,5	2,2
Navarra	5,5	9,6	19,5	27,6	24,3	11,3	2,1
Castilla y León	5,1	10,3	18,6	27,5	23,1	11,9	3,5
Aragón	6,8	11,3	20,5	25,1	22,0	10,9	3,4
Cataluña	7,4	11,7	23,4	27,1	20,0	8,6	1,8
Madrid	6,4	12,7	23,4	27,9	19,3	8,5	1,9
La Rioja	8,4	11,1	19,7	25,5	20,3	11,0	4,0
Galicia	6,9	13,4	25,1	27,6	20,0	6,2	0,7
Asturias	8,9	11,9	20,8	27,2	21,1	8,5	1,6
Cantabria	8,1	13,6	22,0	25,1	19,2	9,4	2,5
España	9,1	14,6	23,9	26,6	17,7	6,7	1,3
Murcia	8,0	16,3	26,7	26,4	17,0	5,2	0,4
Baleares	12,7	17,3	25,3	24,7	15,1	4,4	0,5
Andalucía	12,8	17,9	26,7	25,0	13,3	3,9	0,3
Canarias	18,1	25,2	27,5	20,1	7,7	1,3	0,1
Ceuta	25,6	22,3	23,4	17,9	8,9	1,6	0,2
Melilla	33,0	20,9	19,4	16,0	8,2	2,1	0,5
Total OCDE	9,3	15,5	22,7	23,5	17,3	8,9	2,8
Promedio OCDE	8,0	14,0	22,0	24,3	18,9	9,6	3,1

Universidad Pontificia de Salamanca

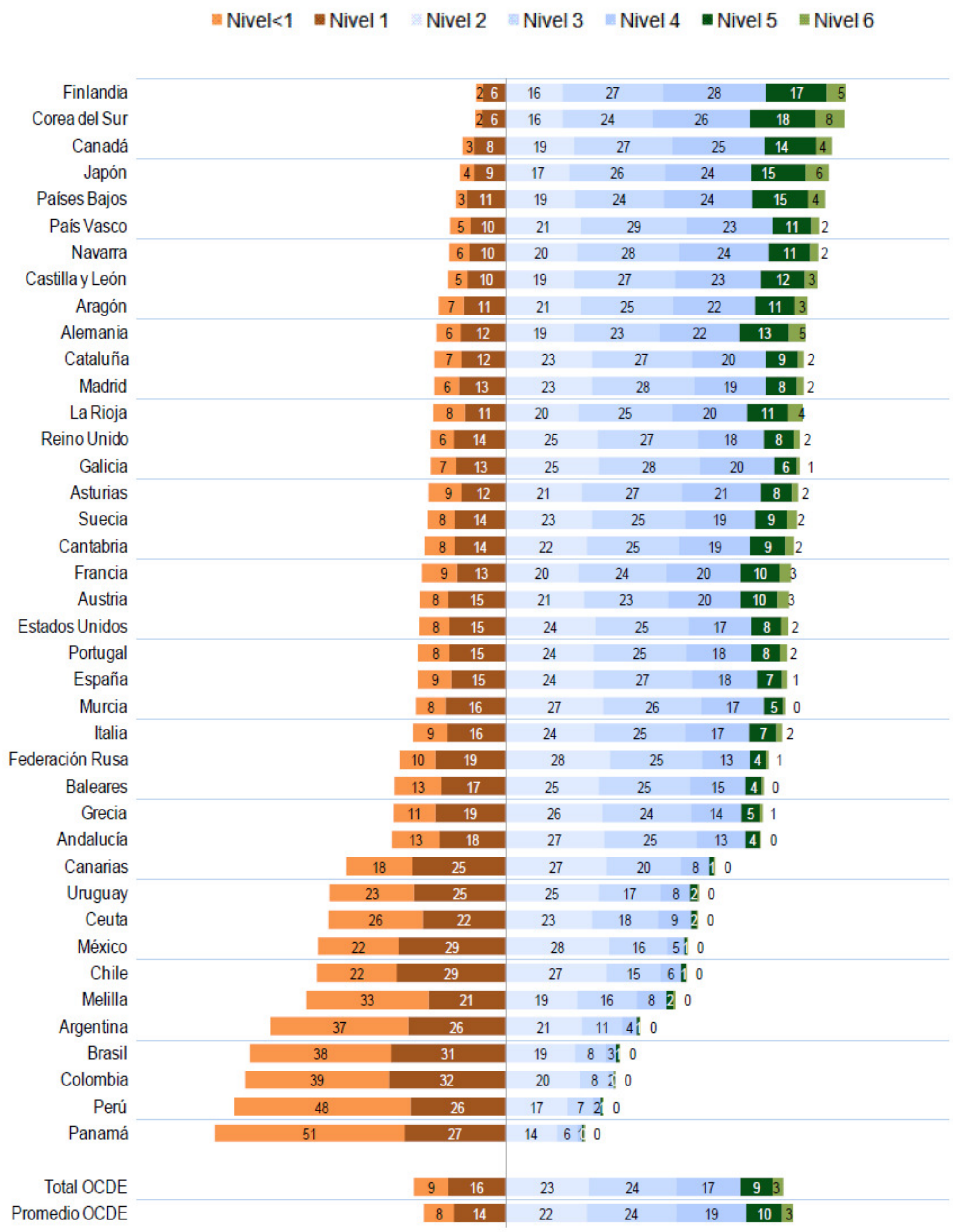
Figura 2.11. Resultados promedio en competencia matemática



Nota: los países están ordenados de manera descendente en función de su promedio en la competencia matemática.
Fuente: OECD PISA 2009 database, Vol. I, Table I.3.3 y Table S.I.u.
Elaboración: Instituto de Evaluación, Anexo 2, Tabla 2.2.

Universidad Pontificia de Salamanca

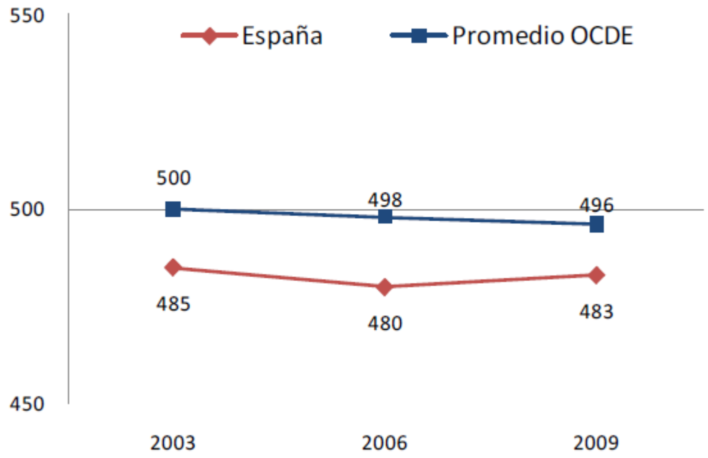
Figura 2.12. Niveles de rendimiento. Competencia matemática



Nota: los países están ordenados de manera descendente en función de su promedio en la competencia matemática.
Fuente: OECD PISA 2009 database, Vol. I, Table I.3.3 y Table S.I.s.
Elaboración: Instituto de Evaluación, Anexo 2, Tabla 2.2.

Universidad Pontificia de Salamanca

Figura 5.11. Evolución de los resultados promedios OCDE y España en competencia matemática



Fuente: OECD PISA 2009 database, Vol. I, Table I.3.3; Informes españoles PISA 2003 y 2006.
Elaboración: Instituto de Evaluación.

Comprobamos que los resultados de España nos gustaría que fueran mejores. En el área que nos hemos centrado es en Álgebra y estudiando las diferencias curriculares de los diferentes países que tiene una buena puntuación en álgebra nos damos cuenta que en su currículo introducen los contenidos sencillos de álgebra en primaria, así como p.e. República de Korea, Singapur, Finlandia Estados Unidos, etc.

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO V: ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

ANEXO I: COMPARATIVA DE CONTENIDOS CURRICULARES DE ÁLGEBRA (Este anexo pasará a los Anexos del capítulo 5)

Contenidos de 1º ESO

- Para todo el Estado.
  Bloque 3. Álgebra.
  -Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.
  -Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas.

  -Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.
  -Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana.

- Para Castilla y León y Andalucía:
  Lo mismos que para todo el Estado.

- Para Madrid
  En el Decreto23/2007 del 10/5/2007 de enseñanzas mínimas aparecen los mismos que para todo el Estado

  En la Resolución del 30/9/2009 se definen los siguientes estándares:
  62. Sustituir las letras en las fórmulas geométricas habituales (que dan las áreas de algunas figuras) por números y calcular el resultado.
  63. Describir situaciones o enunciados que dependen de cantidades variables mediante expresiones algebraicas.
  64. Aplicar la propiedad distributiva para transformar productos en sumas.
  65. Sacar factor común en expresiones algebraicas para transformar sumas en productos (factorizarlas).
  66.- Resolver ecuaciones con una incógnita, de los tipos:
  - $x \pm a = b$.
  - $x \cdot a = b$ ($a \neq 0$).
  - $x : a = b$ ($a \neq 0$).

  En las que a y b representan enteros o decimales sencillos.
  67. Hallar la solución de problemas elementales cuando se reducen a plantear y resolver ecuaciones como las del apartado anterior y comprobar que dicha solución verifica la ecuación.

Contenidos de 2º ESO

Universidad Pontificia de Salamanca

- Para todo el Estado:

  Bloque 3. Álgebra.
  -El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
  -Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.
  -Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.
  -Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución.
  -Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.

- Para Castilla y León:

  -El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y expresar relaciones.
  -Obtención de formulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
  -Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.
  -Binomios de primer grado: suma, resta y producto por un número.
  -Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Resolución de ecuaciones de primer grado.
  -Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas.
  -Interpretación de las soluciones.
- Para Madrid

  En el Decreto23/2007 del 10/5/2007 de enseñanzas mínimas aparecen los mismos que los de Castilla y León.
  En la Resolución del 30/9/2009 se definen los siguientes estándares:
  55. Traducir al lenguaje algebraico con una variable, situaciones en las que hay un número desconocido.
  56. Expresar el área de una figura poligonal de la que se desconoce una de las medidas necesarias para calcularla en función de dicha medida. Por ejemplo, el área de un trapecio del que se desconoce la medida de una base.
  57. Hallar el valor numérico de expresiones algebraicas para diferentes valores de sus letras.
  58. Observar sucesiones numéricas y obtener una fórmula para el término que ocupa un lugar "n" cualquiera.
  59. Sumar y restar binomios de primer grado
  60. Multiplicar binomios de primer grado por un número.
  61. Simplificar expresiones algebraicas de primer grado con coeficientes enteros o decimales reduciéndolas a otra del tipo ax+b (si la variable es x).
  62. Comprobar, dada una ecuación, si un valor de la incógnita es solución de la misma.
  63. Trasponer términos en una ecuación de primer grado.

Universidad Pontificia de Salamanca

64. Transformar, mediante transposición de términos una ecuación de primer grado en otra del tipo a·x=b y hallar su solución.
65. Resolver problemas que pudieran tener relación con la vida real mediante ecuaciones de primer grado, interpretando el resultado.
66. Despejar en una fórmula conocida una de las letras.

- Para Andalucía

Contenidos de 3ºESO

- Para todo el Estado

Bloque 3. Álgebra.
-Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas.
-Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes.
-Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.
-Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
-Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables.
-Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Siste mas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
-Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.

- Para Castilla y León

– Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.
– Estudio de las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.
– Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.
– Polinomios. Valor numérico. Operaciones elementales con polinomios. Identidades notables. Ceros de un polinomio.
– Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
– Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales. Propiedades de las raíces.
– Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación critica de las soluciones.

- Para Madrid

En el Decreto23/2007 del 10/5/2007 de enseñanzas mínimas aparecen:

- Sucesiones de números enteros y fraccionarios. Sucesiones recurrentes.
- Progresiones aritméticas y geométricas.
- Estudio de las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.
- Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.

Universidad Pontificia de Salamanca

- Polinomios. Valor numérico. Operaciones elementales con polinomios.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolución algebraica de ecuaciones de segundo grado. Soluciones exactas y aproximaciones decimales. .
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas. Interpretación critica de las soluciones.

En la Resolución del 30/9/2009 se definen los siguientes estándares:
29. Hallar, dado el primer término de una sucesión, los siguientes términos cuando se conoce la ley de formación de cada término a partir del anterior o cuando se conoce la fórmula del término general.
30. Observar sucesiones de números enteros o fraccionarios y obtener la ley de formación o alguna fórmula para el término general.
31. Distinguir las sucesiones en las que cada término se obtiene del anterior sumándole o restándole un número fijo.
32. Distinguir las sucesiones en las que cada término se obtiene del anterior multiplicándolo o dividiéndole por un número fijo.
33. Conocer las definiciones de progresión aritmética y progresión geométrica.
34. Hallar, dados algunos términos de una progresión, la diferencia y el término general.
35. Calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.
36. Resolver problemas utilizando las técnicas propias de las progresiones aritméticas.
37. Hallar, dados algunos términos de una progresión geométrica, la razón y el término general.
38. Calcular la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.
39. Traducir al lenguaje algebraico expresiones o situaciones en las que intervienen cantidades indeterminadas.
40. Calcular el valor numérico de un polinomio.
41. Reconocer en un monomio el coeficiente, la indeterminada y el grado.
42. Sumar, restar y multiplicar polinomios, dando el resultado en forma de polinomio ordenado.
43. Factorizar polinomios.
44. Conocer la fórmula que da el cuadrado de una suma o resta del tipo $(a \pm b)^2$.
45. Conocer la fórmula que da una suma por una diferencia y utilizarla.
46. Resolver ecuaciones de primer grado en las que intervengan números enteros, decimales o fraccionarios.
47. Comprobar si un par de números es, o no, solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
48. Resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
49. Resolver problemas mediante ecuaciones o sistemas de dos ecuaciones lineales, dando un resultado coherente con los datos del problema.

Universidad Pontificia de Salamanca

50. Comprobar que el resultado obtenido al resolver una ecuación o un sistema es coherente con el enunciado y los datos del problema

- Para Andalucía: Los mismos del Estado

Contenidos de 4º ESO opción A

- Para todo el Estado español

Bloque 3. Bloque Álgebra.

- Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.
- Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.

- Para Castilla y León

- Valor numérico de polinomios y otras expresiones algebraicas.
- Suma, resta y producto de polinomios.
- Identidades notables: estudio particular de las expresiones $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b) \cdot (a-b)$. Factorización de polinomios.
- Resolución algebraica y grafica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Ecuación de segundo grado en una incógnita.
- Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.

- Para Madrid

En el Decreto23/2007 del 10/5/2007 de enseñanzas mínimas aparecen:

- Valor numérico de polinomios y otras expresiones algebraicas.
- Suma, resta y producto de polinomios.
- Identidades notables: estudio particular de las expresiones $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ y $(a+b) \cdot (a-b)$. Factorización de polinomios.
- Resolución algebraica y grafica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas con ayuda de la calculadora científica o gráfica.

- Para Andalucía

Los mismos que para el Estado

Contenidos de 4º ESO opción B

- Para todo el estado español

Universidad Pontificia de Salamanca

Bloque 3. Álgebra.

- Manejo de expresiones literales. Utilización de igualdades notables.
- Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.
- Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

• Para Castilla y León

- Polinomios. Operaciones con polinomios. Raíces de un polinomio.
- Factorización de polinomios. Utilización de las identidades notables y de la regla de Ruffini en la descomposición factorial de un polinomio.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Ecuaciones reducibles a cuadráticas.
- Resolución algebraica y gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y simplificación de fracciones.
- Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de ecuaciones algebraicas mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.
- Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Interpretación grafica.
- Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

• Para Madrid

En el Decreto23/2007 del 10/5/2007 de enseñanzas mínimas aparecen:

- Raíces de un polinomio. Factorización de polinomios.
- Regla de Ruffini. Utilización de las identidades notables y de la regla de Ruffini en la descomposición factorial de un polinomio.
- Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
- Resolución algebraica y gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Uso de la descomposición factorial para la resolución de ecuaciones de grado superior a dos y simplificación de fracciones.
- Resolución de problemas cotidianos y de otros campos de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante aproximaciones sucesivas con ayuda de los medios tecnológicos.
- Inecuaciones y sistemas de inecuaciones de primer grado con una incógnita. Interpretación grafica.

Universidad Pontificia de Salamanca

- Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

- Para Andalucía

ANEXO II: EJEMPLOS DE EJERCICIOS DE ÁLGEBRA DE LAS PRUEBAS CDIS

Ejercicios de álgebra

Preguntas de álgebra en el examen 2008		
Preguntas	B	M
Resolver el sistema: 3x-y=1 2x+y=4	41,52	68,48
Calcular el valor numérico del polinomio X^4-$2x^3$-$4x^2$+3 para x=-1	56,08	43,92
Los jueves, Andrés distribuye las 24 horas de día de la siguiente forma: estudia la mitad de lo que duerme y todavía le sobran 10horas para el resto de actividades. A.- Plantea una ecuación o un sistema de ecuaciones que expresen el enunciado, indicando claramente lo que significan la o las incógnitas	61,83	48,17

Preguntas de álgebra en el examen 2009			
Preguntas	B	R	M
Son verdaderas o falsas las igualdades siguientes	8	43	49
Las notas de Rosa en las dos primeras evaluaciones de matemáticas han sido 3,5 y 4,6. Quiere tener como media de las tres evaluaciones al menos un 5. ¿Cuánto tiene que sacar, como mínimo, en la tercera evaluación?	47	10	43
La madre de Laura y José ha pagado 122€ por un vestido y una sudadera que ha regalado a sus hijos. José protesta porque con lo que cuesta el vestido se podrían haber comprado dos sudaderas y habrían sobrado 17€. A.- Traduce la situación al lenguaje del álgebra mediante un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, indicando con claridad el significado de las letras que empleas	36	5	59
B.- Calcular el precio del vestido y el de la sudadera	32	5	63

Ejercicios de algebra 2010			
Pregunta	B	R	M
Andrea abre un libro y observa que la suma de las dos páginas que tiene delante es 99. ¿Cuáles son esos números?	50,9	27,9	21,3
Las notas de Irene en las tres primeras evaluaciones han sido: 5,5; 7; 4,5. ¿Qué nota tendrá que sacar Irene en la 4º evaluación para tener como media de las cuatro evaluaciones un 6?	46,7	19,4	34
El mástil de una bandera mide 9,2m. Una ráfaga de viento ha hecho que se partiera en dos trozos. Uno de ellos tiene 80cm más que el otro.	25,0	13,0	62

Universidad Pontificia de Salamanca

Hallar la longitud de cada trozo			
a) Comprueba que x=-1 es solución de la ecuación b) Calcula el valor de A, dando el resultado en la forma más sencilla posible			

Ejercicios de algebra de 2011		
Pregunta	B	M
Comprueba que x=-1 es la solución de la ecuación	55,9	44,1
¿Cuál es el número que sumado con su quinta parte da 24?	38,7	61,3

Ejercicios de Álgebra 2012		
Pregunta	B	M
Si al triple de un número se le resta 6, el resultado es 18. Halla razonadamente dicho número	82,2	17,8
La suma de tres números consecutivos es 36. Calcula razonadamente el primero de ellos	64,8	35,2

Universidad Pontificia de Salamanca

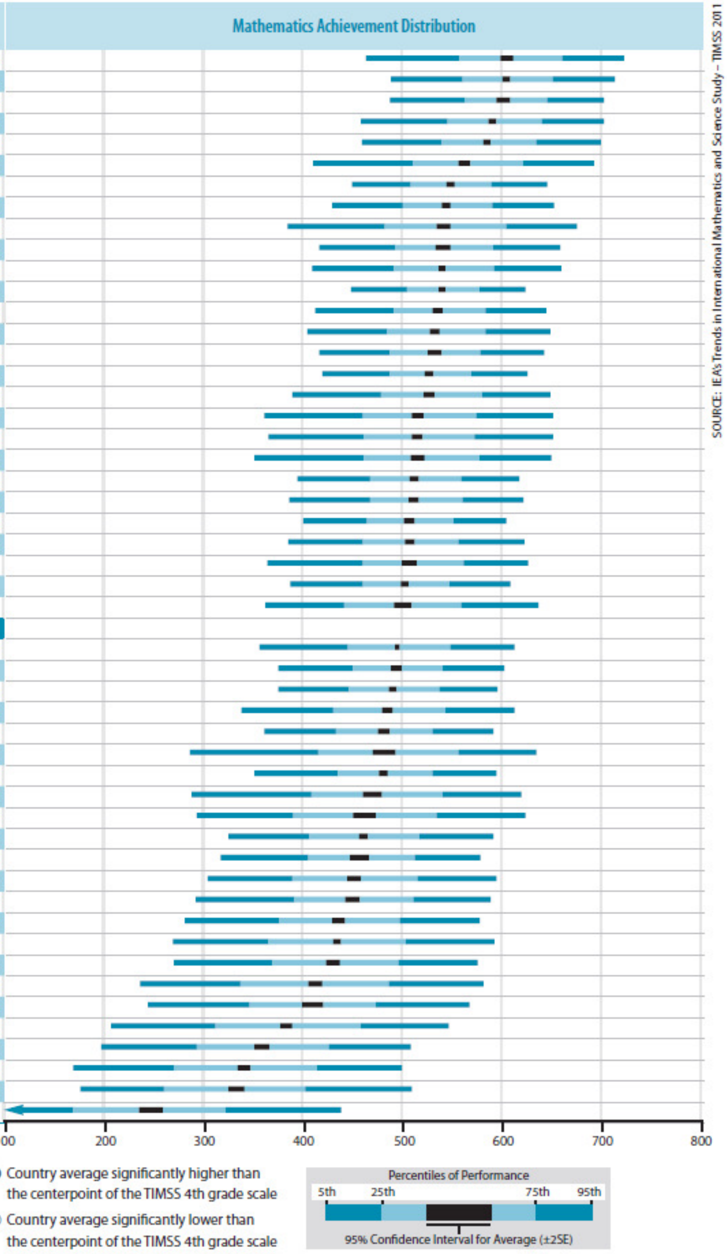
ANEXO III:GRÁFICOS DEL TIMSS 2011

Tabla 1: Resultados de las pruebas de TIMSS2011 en grado 4.

Exhibit 1.1: Distribution of Mathematics Achievement

TIMSS 2011 Mathematics 4th Grade

Country	Average Scale Score	
2 Singapore	606 (3.2)	▲
Korea, Rep. of	605 (1.9)	▲
2 Hong Kong SAR	602 (3.4)	▲
Chinese Taipei	591 (2.0)	▲
Japan	585 (1.7)	▲
† Northern Ireland	562 (2.9)	▲
Belgium (Flemish)	549 (1.9)	▲
Finland	545 (2.3)	▲
England	542 (3.5)	▲
Russian Federation	542 (3.7)	▲
2 United States	541 (1.8)	▲
† Netherlands	540 (1.7)	▲
2 Denmark	537 (2.6)	▲
1 2 Lithuania	534 (2.4)	▲
Portugal	532 (3.4)	▲
Germany	528 (2.2)	▲
Ireland	527 (2.6)	▲
2 Serbia	516 (3.0)	▲
Australia	516 (2.9)	▲
Hungary	515 (3.4)	▲
Slovenia	513 (2.2)	▲
Czech Republic	511 (2.4)	▲
Austria	508 (2.6)	▲
Italy	508 (2.6)	▲
Slovak Republic	507 (3.8)	
Sweden	504 (2.0)	
2 Kazakhstan	501 (4.5)	
TIMSS Scale Centerpoint	500	
Malta	496 (1.3)	▼
‡ Norway	495 (2.8)	
2 Croatia	490 (1.9)	▼
New Zealand	486 (2.6)	▼
Spain	482 (2.9)	▼
Romania	482 (5.8)	▼
Poland	481 (2.2)	▼
Turkey	469 (4.7)	▼
2 Azerbaijan	463 (5.8)	▼
Chile	462 (2.3)	▼
Thailand	458 (4.8)	▼
Armenia	452 (3.5)	▼
1 Georgia	450 (3.7)	▼
Bahrain	436 (3.3)	▼
United Arab Emirates	434 (2.0)	▼
Iran, Islamic Rep. of	431 (3.5)	▼
2 Qatar	413 (3.5)	▼
Saudi Arabia	410 (5.3)	▼
Ψ Oman	385 (2.9)	▼
Ψ Tunisia	359 (3.9)	▼
1 ‽ Kuwait	342 (3.4)	▼
‽ Morocco	335 (4.0)	▼
‽ Yemen	248 (6.0)	▼



▲ Country average significantly higher than the centerpoint of the TIMSS 4th grade scale

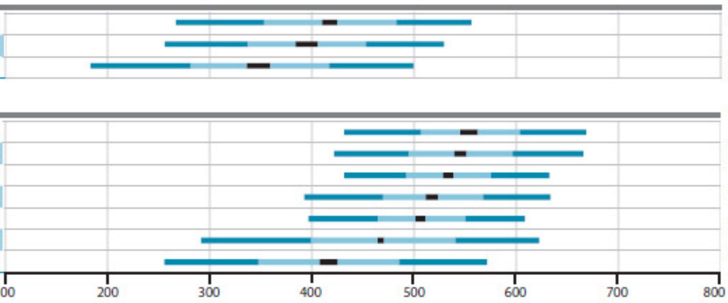
▼ Country average significantly lower than the centerpoint of the TIMSS 4th grade scale

‽ Average achievement not reliably measured because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 25%.
Ψ Reservations about reliability of average achievement because the percentage of students with achievement too low for estimation does not exceed 25% but exceeds 15%.
See Appendix C.2 for target population coverage notes 1, 2, and 3. See Appendix C.8 for sampling guidelines and sampling participation notes †, ‡, and ‡.
( ) Standard errors appear in parentheses. Because of rounding some results may appear inconsistent.

Universidad Pontificia de Salamanca

Exhibit 1.1: Distribution of Mathematics Achievement (Continued) — TIMSS 2011 Mathematics 4th Grade

Country	Average Scale Score		Mathematics Achievement Distribution
Sixth Grade Participants			
Botswana	419 (3.7)	▼	
Ψ Honduras	396 (5.5)	▼	
Ж Yemen	348 (5.7)	▼	
Benchmarking Participants			
1 2 North Carolina, US	554 (4.2)	▲	
1 3 Florida, US	545 (2.9)	▲	
Quebec, Canada	533 (2.4)	▲	
Ontario, Canada	518 (3.1)	▲	
2 Alberta, Canada	507 (2.5)	▲	
Dubai, UAE	468 (1.6)	▼	
Abu Dhabi, UAE	417 (4.6)	▼	



▲ Country average significantly higher than the centerpoint of the TIMSS 4th grade scale

▼ Country average significantly lower than the centerpoint of the TIMSS 4th grade scale

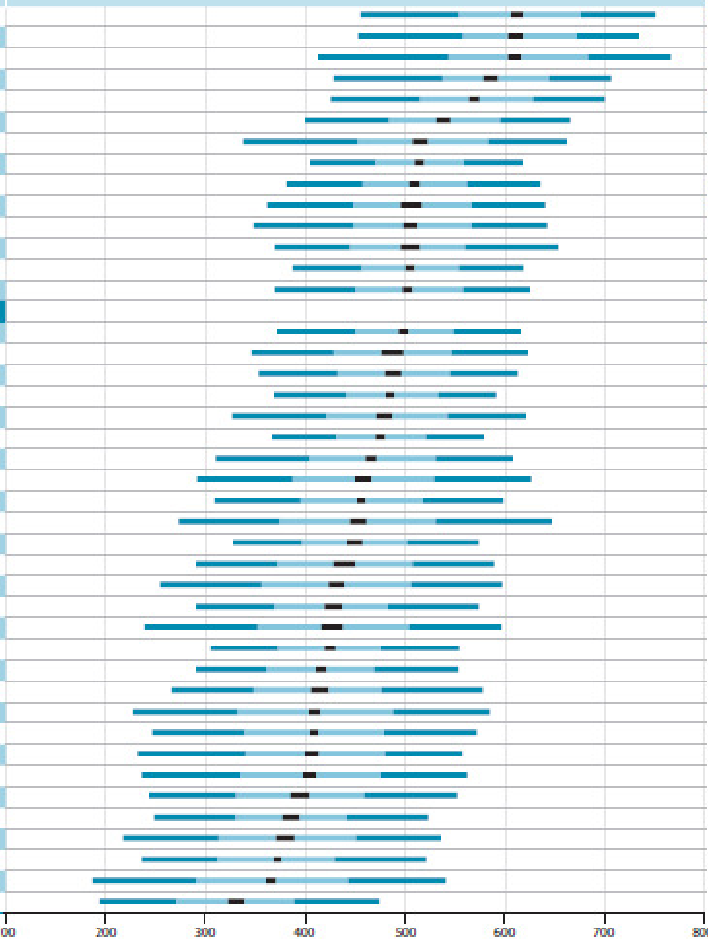
Percentiles of Performance: 5th, 25th, 75th, 95th — 95% Confidence Interval for Average (±2SE)

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

Tabla 3: Resultados de las pruebas de TIMSS2011 en grado 8.

Exhibit 1.2: Distribution of Mathematics Achievement — TIMSS 2011 Mathematics 8th Grade

Country	Average Scale Score		Mathematics Achievement Distribution
Korea, Rep. of	613 (2.9)	▲	
2 Singapore	611 (3.8)	▲	
Chinese Taipei	609 (3.2)	▲	
Hong Kong SAR	586 (3.8)	▲	
Japan	570 (2.6)	▲	
2 Russian Federation	539 (3.6)	▲	
3 Israel	516 (4.1)	▲	
Finland	514 (2.5)	▲	
2 United States	509 (2.6)	▲	
‡ England	507 (5.5)		
Hungary	505 (3.5)		
Australia	505 (5.1)		
Slovenia	505 (2.2)	▲	
1 Lithuania	502 (2.5)		
TIMSS Scale Centerpoint	**500**		
Italy	498 (2.4)		
New Zealand	488 (5.5)	▼	
Kazakhstan	487 (4.0)	▼	
Sweden	484 (1.9)	▼	
Ukraine	479 (3.9)	▼	
Norway	475 (2.4)	▼	
Armenia	467 (2.7)	▼	
Romania	458 (4.0)	▼	
United Arab Emirates	456 (2.1)	▼	
Turkey	452 (3.9)	▼	
Lebanon	449 (3.7)	▼	
Malaysia	440 (5.4)	▼	
1 Georgia	431 (3.8)	▼	
Thailand	427 (4.3)	▼	
Ψ Macedonia, Rep. of	426 (5.2)	▼	
Tunisia	425 (2.8)	▼	
Chile	416 (2.6)	▼	
Ψ Iran, Islamic Rep. of	415 (4.3)	▼	
Ψ Qatar	410 (3.1)	▼	
Ψ Bahrain	409 (2.0)	▼	
Ψ Jordan	406 (3.7)	▼	
Ψ Palestinian Nat'l Auth.	404 (3.5)	▼	
Ψ Saudi Arabia	394 (4.6)	▼	
Ψ Indonesia	386 (4.3)	▼	
Ψ Syrian Arab Republic	380 (4.5)	▼	
Ж Morocco	371 (2.0)	▼	
Ψ Oman	366 (2.8)	▼	
Ж Ghana	331 (4.3)	▼	



▲ Country average significantly higher than the centerpoint of the TIMSS 8th grade scale

▼ Country average significantly lower than the centerpoint of the TIMSS 8th grade scale

Percentiles of Performance: 5th, 25th, 75th, 95th — 95% Confidence Interval for Average (±2SE)

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

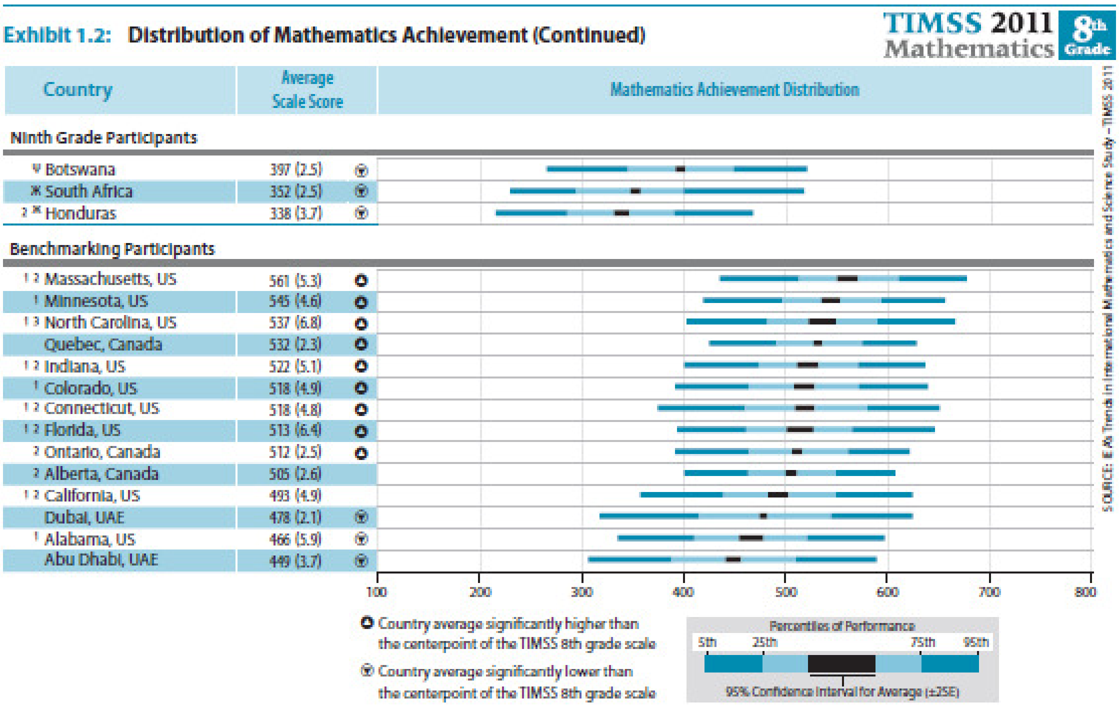
Ж Average achievement not reliably measured because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 25%.

Ψ Reservations about reliability of average achievement because the percentage of students with achievement too low for estimation does not exceed 25% but exceeds 15%.

See Appendix C.3 for target population coverage notes 1, 2, and 3. See Appendix C.9 for sampling guidelines and sampling participation notes †, ‡, and ‡.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because of rounding some results may appear inconsistent.

Universidad Pontificia de Salamanca



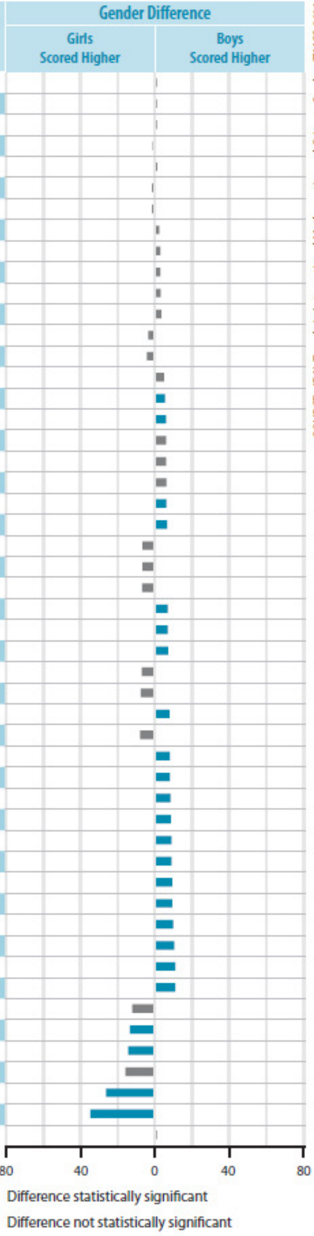
Y la diferencia entre niños y niñas

Universidad Pontificia de Salamanca

Exhibit 1.10: Average Mathematics Achievement by Gender

TIMSS 2011 Mathematics 4th Grade

Country	Girls		Boys		Difference (Absolute Value)
	Percent of Students	Average Scale Score	Percent of Students	Average Scale Score	
Iran, Islamic Rep. of	49 (2.9)	431 (5.2)	51 (2.9)	431 (5.4)	0 (8.0)
New Zealand	49 (0.8)	486 (3.3)	51 (0.8)	486 (2.8)	0 (3.1)
† Northern Ireland	49 (1.3)	562 (3.3)	51 (1.3)	563 (3.6)	0 (3.8)
Russian Federation	49 (1.0)	543 (3.7)	51 (1.0)	542 (4.1)	1 (2.4)
1 2 Lithuania	48 (0.8)	533 (2.6)	52 (0.8)	534 (2.9)	1 (2.6)
Chinese Taipei	47 (0.6)	592 (2.5)	53 (0.6)	590 (2.4)	2 (2.8)
Turkey	48 (0.6)	470 (5.2)	52 (0.6)	469 (4.8)	2 (3.8)
Hungary	49 (1.0)	514 (3.6)	51 (1.0)	517 (3.9)	2 (3.2)
Romania	48 (0.9)	481 (6.7)	52 (0.9)	484 (5.9)	3 (4.5)
Japan	49 (0.5)	584 (2.0)	51 (0.5)	587 (2.5)	3 (3.0)
England	48 (1.0)	541 (4.2)	52 (1.0)	544 (3.5)	3 (3.4)
Ireland	49 (2.3)	526 (3.7)	51 (2.3)	529 (3.3)	3 (4.6)
Armenia	47 (0.8)	454 (4.1)	53 (0.8)	451 (3.6)	3 (3.0)
2 Singapore	49 (0.6)	608 (3.6)	51 (0.6)	604 (3.5)	4 (3.0)
Sweden	49 (1.0)	501 (2.5)	51 (1.0)	506 (2.4)	5 (2.7)
2 Kazakhstan	48 (0.8)	498 (4.4)	52 (0.8)	504 (4.8)	5 (2.6)
2 Denmark	51 (0.7)	534 (2.9)	49 (0.7)	540 (2.9)	6 (2.8)
Australia	49 (1.0)	513 (3.3)	51 (1.0)	519 (3.6)	6 (3.8)
Portugal	49 (1.1)	529 (4.1)	51 (1.1)	535 (3.4)	6 (3.2)
2 Serbia	48 (0.9)	513 (3.8)	52 (0.9)	519 (3.5)	6 (4.1)
2 Hong Kong SAR	46 (1.2)	598 (3.2)	54 (1.2)	604 (3.9)	6 (2.3)
Korea, Rep. of	48 (0.4)	601 (2.1)	52 (0.4)	608 (2.2)	7 (2.0)
2 Azerbaijan	47 (0.8)	466 (6.4)	53 (0.8)	460 (5.9)	7 (3.9)
Ж Morocco	48 (0.8)	338 (4.6)	52 (0.8)	331 (4.3)	7 (3.9)
Ψ Tunisia	47 (0.8)	363 (4.5)	53 (0.8)	356 (4.4)	7 (4.4)
Malta	49 (0.5)	492 (1.6)	51 (0.5)	499 (2.1)	7 (2.5)
‡ Norway	51 (1.1)	492 (2.8)	49 (1.1)	499 (3.5)	7 (2.8)
Finland	49 (0.8)	542 (2.5)	51 (0.8)	549 (2.9)	7 (2.8)
1 Georgia	48 (0.9)	454 (3.2)	52 (0.9)	447 (4.9)	7 (3.9)
Bahrain	50 (1.6)	440 (4.5)	50 (1.6)	432 (4.0)	7 (5.5)
† Netherlands	52 (1.0)	536 (2.1)	48 (1.0)	544 (2.1)	8 (2.4)
United Arab Emirates	50 (1.6)	438 (2.8)	50 (1.6)	430 (3.5)	8 (5.0)
Belgium (Flemish)	50 (0.9)	545 (2.2)	50 (0.9)	553 (2.4)	8 (2.5)
Slovak Republic	49 (0.9)	503 (4.0)	51 (0.9)	511 (3.9)	8 (2.6)
Germany	49 (0.8)	523 (2.7)	51 (0.8)	532 (2.6)	8 (2.7)
2 United States	51 (0.5)	536 (2.1)	49 (0.5)	545 (1.9)	9 (1.7)
Italy	50 (0.7)	503 (3.1)	50 (0.7)	512 (2.9)	9 (3.0)
Poland	48 (0.9)	476 (2.4)	52 (0.9)	486 (2.5)	9 (2.5)
Austria	49 (1.2)	504 (2.7)	51 (1.2)	513 (3.3)	9 (2.8)
Chile	51 (1.4)	457 (2.7)	49 (1.4)	466 (2.8)	9 (3.3)
Slovenia	48 (0.8)	508 (2.2)	52 (0.8)	518 (3.1)	10 (3.2)
2 Croatia	50 (0.8)	485 (2.4)	50 (0.8)	495 (2.4)	10 (2.8)
Czech Republic	48 (1.2)	505 (2.8)	52 (1.2)	516 (2.7)	11 (2.7)
Spain	49 (0.8)	477 (3.1)	51 (0.8)	488 (3.4)	11 (3.0)
Ж Yemen	40 (2.8)	255 (7.0)	60 (2.8)	243 (7.0)	12 (7.6)
2 Qatar	47 (3.4)	420 (4.7)	53 (3.4)	407 (4.2)	13 (5.6)
Thailand	49 (0.9)	465 (4.8)	51 (0.9)	451 (5.6)	14 (4.4)
Saudi Arabia	52 (1.5)	418 (4.6)	48 (1.5)	402 (10.0)	16 (11.2)
Ψ Oman	49 (0.7)	398 (3.2)	51 (0.7)	372 (3.4)	26 (3.3)
1 Ж Kuwait	54 (1.6)	358 (3.6)	46 (1.6)	323 (5.8)	35 (6.8)
International Avg.	49 (0.2)	490 (0.5)	51 (0.2)	491 (0.6)	



SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

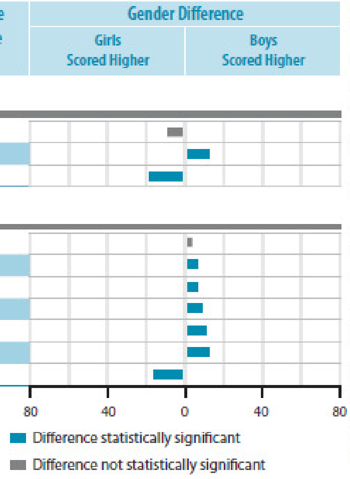
Ж Average achievement not reliably measured because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 25%.
Ψ Reservations about reliability of average achievement because the percentage of students with achievement too low for estimation does not exceed 25% but exceeds 15%.
See Appendix C.2 for target population coverage notes 1, 2, and 3. See Appendix C.8 for sampling guidelines and sampling participation notes †, ‡, and ‡.
( ) Standard errors appear in parentheses. Because of rounding some results may appear inconsistent.

Universidad Pontificia de Salamanca

Exhibit 1.10: Average Mathematics Achievement by Gender (Continued)

TIMSS 2011 Mathematics 4th Grade

Country	Girls: Percent of Students	Girls: Average Scale Score	Boys: Percent of Students	Boys: Average Scale Score	Difference (Absolute Value)
Sixth Grade Participants					
Ж Yemen	42 (2.5)	354 (7.5)	58 (2.5)	345 (6.4)	9 (7.8)
Ψ Honduras	51 (1.2)	390 (5.9)	49 (1.2)	403 (5.8)	12 (3.7)
Botswana	52 (0.8)	428 (4.0)	48 (0.8)	410 (4.2)	18 (3.4)
Benchmarking Participants					
Dubai, UAE	47 (2.4)	466 (3.5)	53 (2.4)	470 (3.9)	4 (6.7)
Ontario, Canada	49 (0.8)	515 (3.3)	51 (0.8)	521 (3.4)	6 (2.6)
[1,3] Florida, US	51 (0.8)	542 (2.8)	49 (0.8)	549 (3.9)	7 (3.3)
[2] Alberta, Canada	48 (0.9)	502 (3.1)	52 (0.9)	511 (2.7)	9 (3.1)
Quebec, Canada	50 (1.0)	527 (2.8)	50 (1.0)	538 (2.7)	11 (2.6)
[1,2] North Carolina, US	51 (1.3)	548 (4.0)	49 (1.3)	560 (4.9)	12 (3.2)
Abu Dhabi, UAE	50 (2.9)	425 (5.0)	50 (2.9)	409 (6.7)	16 (7.9)



SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

Universidad Pontificia de Salamanca

Exhibit 3.2: Achievement in Mathematics Content Domains

TIMSS 2011 Mathematics 8th Grade

Country	Overall Mathematics Average Scale Score	Number			Algebra		
		Average Scale Score	Difference from Overall Mathematics Score		Average Scale Score	Difference from Overall Mathematics Score	
Korea, Rep. of	613 (2.9)	618 (2.6)	5 (1.2)	▲	617 (3.2)	4 (1.6)	▲
[2] Singapore	611 (3.8)	611 (3.6)	0 (1.4)		614 (4.1)	3 (0.9)	▲
Chinese Taipei	609 (3.2)	598 (3.1)	−12 (1.0)	▼	628 (3.8)	19 (1.5)	▲
Hong Kong SAR	586 (3.8)	588 (3.7)	2 (1.2)	▲	583 (3.9)	−3 (1.2)	▼
Japan	570 (2.6)	557 (3.0)	−13 (1.6)	▼	570 (3.0)	0 (1.6)	
[2] Russian Federation	539 (3.6)	534 (3.2)	−5 (1.0)	▼	556 (3.7)	17 (1.7)	▲
[3] Israel	516 (4.1)	518 (4.0)	2 (1.1)		521 (4.7)	5 (1.7)	▲
Finland	514 (2.5)	527 (2.4)	13 (1.1)	▲	492 (2.9)	−22 (1.5)	▼
[2] United States	509 (2.6)	514 (3.0)	4 (1.0)	▲	512 (2.6)	2 (1.0)	▲
‡ England	507 (5.5)	512 (5.8)	5 (1.4)	▲	489 (5.7)	−17 (1.5)	▼
Hungary	505 (3.5)	510 (3.9)	5 (1.1)	▲	496 (4.0)	−8 (1.8)	▼
Australia	505 (5.1)	513 (5.4)	8 (0.9)	▲	489 (5.3)	−16 (1.6)	▼
Slovenia	505 (2.2)	511 (2.5)	6 (1.1)	▲	493 (2.6)	−12 (1.8)	▼
[1] Lithuania	502 (2.5)	501 (2.5)	−1 (1.5)		492 (2.8)	−10 (1.5)	▼
Italy	498 (2.4)	496 (2.9)	−2 (1.7)		491 (2.7)	−8 (1.3)	▼
New Zealand	488 (5.5)	492 (5.9)	5 (1.2)	▲	472 (5.5)	−16 (1.2)	▼
Kazakhstan	487 (4.0)	479 (4.0)	−8 (1.8)	▼	506 (4.4)	19 (1.4)	▲
Sweden	484 (1.9)	504 (1.8)	19 (1.0)	▲	459 (2.2)	−26 (1.2)	▼
Ukraine	479 (3.9)	472 (4.1)	−7 (1.8)	▼	487 (4.4)	8 (1.6)	▲
Norway	475 (2.4)	492 (2.8)	18 (1.1)	▲	432 (2.7)	−43 (1.3)	▼
Armenia	467 (2.7)	474 (2.4)	7 (1.0)	▲	496 (2.8)	29 (1.1)	▲
Romania	458 (4.0)	448 (4.1)	−10 (1.7)	▼	477 (4.3)	19 (1.6)	▲
United Arab Emirates	456 (2.1)	459 (2.2)	3 (0.8)	▲	468 (2.2)	12 (1.3)	▲
Turkey	452 (3.9)	435 (3.9)	−18 (1.5)	▼	455 (4.2)	2 (1.2)	▲
Lebanon	449 (3.7)	451 (3.8)	2 (1.9)		471 (3.8)	22 (1.5)	▲
Malaysia	440 (5.4)	451 (5.8)	11 (1.2)	▲	430 (5.2)	−10 (1.3)	▼
[1] Georgia	431 (3.8)	435 (3.5)	4 (1.5)	▲	450 (3.8)	19 (1.6)	▲
Thailand	427 (4.3)	425 (4.6)	−2 (1.0)	▼	425 (4.3)	−2 (1.2)	
Ψ Macedonia, Rep. of	426 (5.2)	418 (5.1)	−8 (2.3)	▼	448 (5.3)	22 (2.3)	▲
Tunisia	425 (2.8)	431 (2.8)	6 (1.8)	▲	419 (2.9)	−6 (1.7)	▼
Chile	416 (2.6)	413 (2.9)	−4 (1.2)	▼	403 (3.6)	−14 (2.1)	▼
Ψ Iran, Islamic Rep. of	415 (4.3)	402 (4.9)	−13 (2.7)	▼	422 (4.3)	7 (1.9)	▲
Ψ Qatar	410 (3.1)	408 (3.4)	−1 (1.9)		425 (2.8)	15 (1.9)	▲
Ψ Bahrain	409 (2.0)	397 (1.7)	−13 (1.4)	▼	424 (1.7)	15 (1.2)	▲
Ψ Jordan	406 (3.7)	390 (3.8)	−15 (1.4)	▼	432 (3.9)	26 (1.1)	▲
Ψ Palestinian Nat'l Auth.	404 (3.5)	400 (3.4)	−5 (1.2)	▼	419 (3.3)	14 (1.6)	▲
Ψ Saudi Arabia	394 (4.6)	393 (4.8)	−1 (1.9)		399 (4.9)	6 (1.3)	▲
Ψ Indonesia	386 (4.3)	375 (4.8)	−11 (2.0)	▼	392 (3.8)	6 (1.3)	▲
Ψ Syrian Arab Republic	380 (4.5)	373 (4.0)	−7 (1.8)	▼	391 (4.9)	11 (2.8)	▲
Ж Morocco	371 (2.0)	379 (2.6)	8 (1.3)	▲	357 (2.7)	−15 (1.6)	▼
Ψ Oman	366 (2.8)	351 (3.0)	−16 (1.9)	▼	383 (2.8)	17 (1.4)	▲
Ж Ghana	331 (4.3)	321 (4.5)	−10 (1.8)	▼	358 (4.0)	28 (2.1)	▲

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

▲ Subscale score significantly higher than overall mathematics score

▼ Subscale score significantly lower than overall mathematics score

Ж Average achievement not reliably measured because the percentage of students with achievement too low for estimation exceeds 25%.

Ψ Reservations about reliability of average achievement because the percentage of students with achievement too low for estimation does not exceed 25% but exceeds 15%.

See Appendix C.3 for target population coverage notes 1, 2, and 3. See Appendix C.9 for sampling guidelines and sampling participation notes †, ‡, and ‡.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because of rounding some results may appear inconsistent.

Universidad Pontificia de Salamanca

Exhibit 3.2: Achievement in Mathematics Content Domains (Continued)

TIMSS 2011 Mathematics 8th Grade

Country	Overall Mathematics Average Scale Score	Number: Average Scale Score	Number: Difference from Overall Mathematics Score	Algebra: Average Scale Score	Algebra: Difference from Overall Mathematics Score
Ninth Grade Participants					
Ψ Botswana	397 (2.5)	392 (3.3)	−5 (1.6) ▼	407 (3.2)	10 (1.7) ▲
Ж South Africa	352 (2.5)	359 (2.6)	7 (1.4) ▲	361 (2.5)	9 (1.3) ▲
2 Ж Honduras	338 (3.7)	352 (3.5)	14 (2.2) ▲	327 (4.5)	−11 (2.8) ▼
Benchmarking Participants					
1 2 Massachusetts, US	561 (5.3)	567 (5.9)	7 (1.4) ▲	559 (5.6)	−1 (1.1)
1 Minnesota, US	545 (4.6)	556 (5.3)	11 (1.4) ▲	543 (4.9)	−2 (1.2)
1 3 North Carolina, US	537 (6.8)	547 (7.3)	10 (1.5) ▲	537 (6.8)	0 (1.6)
Quebec, Canada	532 (2.3)	543 (2.5)	11 (0.7) ▲	516 (2.9)	−16 (1.0) ▼
1 2 Indiana, US	522 (5.1)	528 (5.4)	6 (1.7) ▲	520 (5.3)	−2 (1.4)
1 Colorado, US	518 (4.9)	521 (5.1)	3 (2.0)	512 (5.1)	−6 (1.4) ▼
1 2 Connecticut, US	518 (4.8)	527 (4.9)	10 (1.8) ▲	510 (5.4)	−7 (1.7) ▼
1 2 Florida, US	513 (6.4)	517 (7.0)	4 (1.8) ▲	513 (6.4)	−1 (2.0)
2 Ontario, Canada	512 (2.5)	519 (2.6)	7 (1.3) ▲	497 (2.4)	−15 (0.8) ▼
2 Alberta, Canada	505 (2.6)	523 (3.0)	18 (1.1) ▲	485 (2.7)	−20 (1.4) ▼
1 2 California, US	493 (4.9)	492 (5.2)	0 (1.7)	509 (5.2)	17 (2.5) ▲
Dubai, UAE	478 (2.1)	479 (2.3)	2 (1.0)	489 (2.4)	11 (1.7) ▲
1 Alabama, US	466 (5.9)	463 (7.1)	−3 (2.6)	471 (5.3)	5 (1.6) ▲
Abu Dhabi, UAE	449 (3.7)	452 (3.8)	4 (1.0) ▲	459 (3.8)	10 (2.0) ▲

Country	Overall Mathematics Average Scale Score	Geometry: Average Scale Score	Geometry: Difference from Overall Mathematics Score	Data and Chance: Average Scale Score	Data and Chance: Difference from Overall Mathematics Score
Ninth Grade Participants					
Ψ Botswana	397 (2.5)	381 (3.0)	−16 (1.7) ▼	391 (3.2)	−6 (1.7) ▼
Ж South Africa	352 (2.5)	315 (3.1)	−36 (2.1) ▼	333 (3.4)	−19 (1.7) ▼
2 Ж Honduras	338 (3.7)	309 (4.1)	−29 (3.1) ▼	319 (5.0)	−19 (3.9) ▼
Benchmarking Participants					
1 2 Massachusetts, US	561 (5.3)	548 (5.5)	−13 (2.0) ▼	584 (7.3)	24 (2.6) ▲
1 Minnesota, US	545 (4.6)	515 (6.2)	−29 (2.9) ▼	571 (6.2)	26 (2.6) ▲
1 3 North Carolina, US	537 (6.8)	515 (8.1)	−22 (3.7) ▼	548 (8.3)	11 (2.9) ▲
Quebec, Canada	532 (2.3)	529 (2.7)	−3 (0.7) ▼	549 (2.8)	17 (1.2) ▲
1 2 Indiana, US	522 (5.1)	498 (5.3)	−23 (2.2) ▼	545 (6.0)	23 (2.9) ▲
1 Colorado, US	518 (4.9)	505 (5.7)	−13 (2.8) ▼	540 (5.7)	23 (1.9) ▲
1 2 Connecticut, US	518 (4.8)	490 (5.1)	−27 (2.3) ▼	546 (6.3)	29 (2.7) ▲
1 2 Florida, US	513 (6.4)	499 (6.8)	−14 (2.3) ▼	528 (9.0)	15 (3.5) ▲
2 Ontario, Canada	512 (2.5)	512 (2.7)	0 (1.7)	531 (4.1)	19 (2.4) ▲
2 Alberta, Canada	505 (2.6)	485 (3.0)	−21 (1.7) ▼	529 (3.8)	24 (1.9) ▲
1 2 California, US	493 (4.9)	454 (5.0)	−38 (1.8) ▼	495 (6.0)	2 (2.4)
Dubai, UAE	478 (2.1)	453 (3.0)	−25 (2.0) ▼	468 (2.8)	−10 (1.9) ▼
1 Alabama, US	466 (5.9)	443 (6.0)	−23 (2.2) ▼	480 (7.9)	14 (4.0) ▲
Abu Dhabi, UAE	449 (3.7)	424 (4.4)	−25 (2.4) ▼	434 (4.3)	−15 (1.7) ▼

▲ Subscale score significantly higher than overall mathematics score

▼ Subscale score significantly lower than overall mathematics score

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

Universidad Pontificia de Salamanca

Exhibit 3.6: Trends in Achievement for Mathematics Content Domains

TIMSS 2011 Mathematics 8th Grade

Country	Number				Algebra			
	2011 Average Scale Score	2007 Average Scale Score	Difference		2011 Average Scale Score	2007 Average Scale Score	Difference	
Australia	513 (5.4)	504 (4.0)	9 (6.7)		489 (5.3)	474 (4.2)	15 (6.7)	▲
Ψ Bahrain	397 (1.7)	381 (2.5)	15 (3.0)	▲	424 (1.7)	397 (1.7)	28 (2.4)	▲
Chinese Taipei	598 (3.1)	586 (4.3)	12 (5.3)	▲	628 (3.8)	629 (6.0)	−1 (7.1)	
England	512 (5.8)	511 (5.4)	1 (7.9)		489 (5.7)	496 (5.1)	−7 (7.6)	
Georgia	435 (3.5)	416 (6.2)	19 (7.1)	▲	450 (3.8)	416 (7.3)	34 (8.2)	▲
Hong Kong SAR	588 (3.7)	575 (5.9)	13 (7.0)		583 (3.9)	575 (6.0)	8 (7.1)	
Hungary	510 (3.9)	520 (3.9)	−11 (5.5)		496 (4.0)	508 (3.8)	−11 (5.5)	▼
Ψ Indonesia	375 (4.8)	393 (4.1)	−18 (6.3)	▼	392 (3.8)	399 (3.9)	−7 (5.5)	
Ψ Iran, Islamic Rep. of	402 (4.9)	388 (4.3)	14 (6.6)	▲	422 (4.3)	405 (4.2)	18 (6.0)	▲
Italy	496 (2.9)	480 (3.1)	16 (4.2)	▲	491 (2.7)	460 (3.6)	30 (4.5)	▲
Japan	557 (3.0)	558 (2.4)	−2 (3.8)		570 (3.0)	567 (2.9)	3 (4.2)	
Ψ Jordan	390 (3.8)	412 (4.9)	−22 (6.2)	▼	432 (3.9)	445 (4.4)	−14 (5.9)	▼
Korea, Rep. of	618 (2.6)	592 (2.4)	25 (3.6)	▲	617 (3.2)	608 (3.3)	9 (4.6)	
Lebanon	451 (3.8)	453 (3.7)	−1 (5.3)		471 (3.8)	468 (3.5)	3 (5.1)	
Lithuania	501 (2.5)	507 (2.8)	−6 (3.8)		492 (2.8)	487 (2.9)	5 (4.0)	
Malaysia	451 (5.8)	494 (5.5)	−43 (8.0)	▼	430 (5.2)	455 (4.9)	−26 (7.2)	▼
Norway	492 (2.8)	485 (2.1)	8 (3.5)	▲	432 (2.7)	424 (2.8)	8 (3.9)	▲
Ψ Oman	351 (3.0)	354 (3.0)	−4 (4.3)		383 (2.8)	384 (3.4)	0 (4.4)	
Ψ Palestinian Nat'l Auth.	400 (3.4)	355 (3.8)	44 (5.1)	▲	419 (3.3)	370 (4.0)	48 (5.2)	▲
Romania	448 (4.1)	455 (3.8)	−7 (5.6)		477 (4.3)	480 (5.0)	−3 (6.6)	
Russian Federation	534 (3.2)	510 (4.2)	25 (5.3)	▲	556 (3.7)	525 (4.8)	31 (6.1)	▲
Singapore	611 (3.6)	605 (3.7)	6 (5.2)		614 (4.1)	591 (3.9)	23 (5.7)	▲
Slovenia	511 (2.5)	504 (2.5)	7 (3.6)		493 (2.6)	491 (2.6)	2 (3.7)	
Sweden	504 (1.8)	505 (1.9)	−2 (2.6)		459 (2.2)	459 (2.7)	0 (3.5)	
Ψ Syrian Arab Republic	373 (4.0)	385 (4.1)	−12 (5.7)	▼	391 (4.9)	398 (4.1)	−6 (6.4)	
Thailand	425 (4.6)	443 (5.2)	−18 (7.0)	▼	425 (4.3)	431 (5.5)	−5 (7.0)	
Tunisia	431 (2.8)	420 (2.8)	11 (3.9)	▲	419 (2.9)	419 (3.0)	0 (4.2)	
Ukraine	472 (4.1)	458 (4.1)	14 (5.8)	▲	487 (4.4)	465 (4.2)	23 (6.1)	▲
United States	514 (3.0)	514 (3.0)	0 (4.2)		512 (2.6)	507 (3.0)	5 (4.0)	
Benchmarking Participants								
Ontario, Canada	519 (2.6)	528 (4.2)	−9 (4.9)		497 (2.4)	496 (3.9)	1 (4.6)	
Quebec, Canada	543 (2.5)	537 (3.6)	5 (4.4)		516 (2.9)	512 (3.6)	4 (4.6)	
Dubai, UAE	479 (2.3)	458 (3.2)	21 (3.9)	▲	489 (2.4)	476 (2.6)	13 (3.6)	▲
Massachusetts, US	567 (5.9)	554 (5.3)	13 (8.0)		559 (5.6)	547 (5.4)	13 (7.8)	
Minnesota, US	556 (5.3)	542 (4.4)	14 (6.9)	▲	543 (4.9)	524 (5.0)	19 (7.0)	▲

▲ 2011 average significantly higher

▼ 2011 average significantly lower

SOURCE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

Ψ Reservations about reliability of average achievement in TIMSS 2011, because the percentage of students with achievement too low for estimation does not exceed 25% but exceeds 15%.

( ) Standard errors appear in parentheses. Because of rounding some results may appear inconsistent.

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO 6

ANEXO I: TESTS

Anexo I.1.: TEST DE MOTIVACIÓN

TEST DE MOTIVACIÓN DE MATEMÁTICAS

●♦DATOS DE IDENTIFICATIÓN:

TIPO DE CENTRO: PÚBLICO □ CONCERTADO □ PRIVADO □

NOMBRE CENTRO: ____

HOMBRE: □ MUJER: □ EDAD: _____________ CURSO:_______________

SI HAS REPETIDO ALGUN CURSO INICIAL INDICA CUÁL: ________________________________

TIENES PENDIENTE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS: SI □ NO □

CALIFICACIÓN OBTENIDA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS (CURSO ANTERIOR):_____________

ASIGNATURA PREFERIDA EN EL CURSO ACTUAL: _____________________________________

NIVEL DE INSTRUCCIÓN DE LOS PADRES

1.- SIN ESTUDIOS

2.- ESTUDIOS PRIMARIOS

3.- FORMACION PROFESIONAL (FP)

4.- FORMACIÓN UNIVERSITARIA DIPLOMATURA (maestro, ingenierías técnicas, etc.)

5.- FORMACIÓN UNIVERSITARIA LICENCIATURA

Universidad Pontificia de Salamanca

(rodea con un círculo)

PADRE	MADRE
1 2 3 4 5	1 2 3 4 5

PROFESION/SITUACIÓN LABORAL DE LOS PADRES:

1.- PROFESOR/A

2.- FUNCIONARIO NO DOCENTE

3.- TRABAJADOR A CUENTA PROPIA. AUTONOMO

4.- TRABAJADOR A CUENTA AJENA

(médico, vendedor, abogado, informático, empresario, etc.)

5.-PARADO

6.-JUBILADO

7.- AMO/A DE CASA

8.- OTROS/AS(especificar)

(rodea con un círculo)

PADRE	MADRE
1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8

NUMERO DE HERMANOS (incluido el/la alumno/a):_______________

•

♦ **<u>INSTRUCCIONES</u>**

Para contestar el cuestionario tienes que poner nota, de 1 a 5, a cada frase según estés de acuerdo o no con ella, 1 no estás nada de acuerdo y 5 estás muy de acuerdo. Marcas con una **X** la opción de respuesta que consideres que se ajusta más a tu manera de pensar sobre el asunto propuesto.

5 Muy de acuerdo, es lo que pienso, creo
4 De acuerdo
3 Indiferente
2 En desacuerdo
1 Muy en desacuerdo

A continuación se muestra el Test con *cinco posibilidades de respuesta*.

1º MODELO:

Universidad Pontificia de Salamanca

	1	2	3	4	5
1.- Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.					
2.- Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad.					
3.- En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.					
4.- Casi todos los ejercicios de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.					
5.- Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer.					
6.-La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual.					
7.- El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido.					
8.- Sabiendo resolver los ejercicios que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.					
9.- Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.					
10.-Busco distintas maneras y métodos para resolver un ejercicio.					
11.-Aprendo mucho inventando nuevos ejercicios.					
12.-El gusto por las matemáticas influye a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato en la que estén o no presentes.					
13.- El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirse más valorado/a y admirado/a por los compañeros.					
14.- Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.					
15.- Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.					
16.-Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.					
17.- Cuando resuelvo un ejercicio suelo dudar de si el resultado es correcto.					
18.- Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.					
19.-Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.					
20.-Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando resuelvo ejercicios de matemáticas.					
21.- Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.					
22.-La suerte influye a la hora de resolver con éxito un ejercicio de					

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas.					
23.- En clase de matemáticas los/as profesores/as nos emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que me permiten relacionar las matemáticas con situaciones de mi vida diaria.					
24.- Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase.					
25.- Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.					
26.-Para mis profesores/as de matemáticas soy un/a buen/a alumno/a.					
27.- Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias.					
28.- Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.					
29.- Los/as profesores/as de matemáticas se interesan por mi evolución y rendimiento en la materia.					
30.- En clase de matemáticas los/as profesores/as valoran mi esfuerzo y reconocen mi trabajo diario en la asignatura.					
31.- Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.					
32.- Las matemáticas que nos enseñan en el instituto/colegio no les interesan a mis padres.					
33.- Algunos de mis padres era bastante bueno/a resolviendo ejercicios de matemáticas.					
34.- Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.					
35.- Mis amigos/as pasan de las matemáticas.					
36.-Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económica-mente están relacionadas con ellas.					
37.- La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.					
38.- El aumentar mis conocimientos matemáticos me hará sentir una persona competente en la sociedad.					
39.-Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.					
40.-Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.					
41.- La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando cómo resolver un ejercicio.					
42.- 42.- Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo					
43.- Disfruto los días que no tenemos clases de matemáticas porque no me interesan ni me atraen.					
44.- Ante un ejercicio complicado suelo darme por vencido fácilmente.					
45.-Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.					
46.- Me angustio y siento miedo cuando el/la profesor/a me propone					

Universidad Pontificia de Salamanca

"por sorpresa" que resuelva un ejercicio.					
47.- Cuando resuelvo ejercicios en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a.					
48.- Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un ejercicio empiezo a sentirme inseguro/a, desesperado/a, nervioso/a,…					
49.-Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.					
50.- Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un ejercicio matemático.					
51.- Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.					
52.- La resolución de los ejercicios exige un esfuerzo, perseverancia y paciencia.					
53.- Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.					
54.-Me gustan las clases de matemáticas.					
55.- En las clases de matemáticas suelo distraerme pensando en mis cosas, hablando con mis compañeros/as, etc. porque no me entero de nada, me aburro y lo estudio mejor por mi cuenta o me lo explica mejor mi profesor/a particular o el de la academia.					
56.- Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.					
57.-Estudio matemáticas porque mis padres son muy exigentes con la nota de mis exámenes.					
58.- Me cuesta menos entender las cosas cuando se utiliza en la clase ejemplos o actividades o materiales que no son el libro de texto o la explicación del profesor.					
59.- Me entero mejor de la explicación cuando hacemos los ejercicios en grupos y no solo las hace el profesor.					
60.- Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.					
61.-Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.					
62.- Hacer ejercicios de matemáticas en grupos me ayuda a aprender y a disfrutar más de las clases de matemáticas.					
63.- Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.					
64.- A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas.					
65.- La asignatura por la que empiezo a hacer los deberes para casa es las matemáticas.					
66.- Cuando intervengo en clase y participo me lo paso mejor en clase y presto más atención.					
67.-Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.					

GRACIAS POR VUESTRA COLABORACIÓN

Universidad Pontificia de Salamanca

♦ **INSTRUCCIONES**

Para contestar el cuestionario tienes que poner nota, de 1 a 5, a cada frase según estés de acuerdo o no con ella, 1 no estás nada de acuerdo y 5 estás muy de acuerdo. Marcas con una **X** la opción de respuesta que consideres que se ajusta más a tu manera de pensar sobre el asunto propuesto.

1 Muy de acuerdo, es lo que pienso, creo
2 De acuerdo
3 En desacuerdo
4 Muy en desacuerdo

2º MODELO: A continuación se muestra el Test con ***cuatro posibilidades de respuesta:***

	1	**2**	**3**	**4**
1.- Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.				
2.- Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad.				
3.- En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.				
4.- Casi todos los ejercicios de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.				
5.- Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer.				
6.-La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual.				
7.- El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido.				
8.- Sabiendo resolver los ejercicios que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.				
9.- Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.				
10.-Busco distintas maneras y métodos para resolver un ejercicio.				
11.-Aprendo mucho inventando nuevos ejercicios.				
12.-El gusto por las matemáticas influye a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato en la que estén o no presentes.				
13.- El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirse más valorado/a y admirado/a por los compañeros.				

Universidad Pontificia de Salamanca

14.- Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.				
15.- Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.				
16.-Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.				
17.- Cuando resuelvo un ejercicio suelo dudar de si el resultado es correcto.				
18.- Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.				
19.-Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.				
20.-Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando resuelvo ejercicios de matemáticas.				
21.- Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.				
22.-La suerte influye a la hora de resolver con éxito un ejercicio de matemáticas.				
23.- En clase de matemáticas los/as profesores/as nos emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que me permiten relacionar las matemáticas con situaciones de mi vida diaria.				
24.- Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase.				
25.- Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.				
26.-Para mis profesores/as de matemáticas soy un/a buen/a alumno/a.				
27.- Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias.				
28.- Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.				
29.- Los/as profesores/as de matemáticas se interesan por mi evolución y rendimiento en la materia.				
30.- En clase de matemáticas los/as profesores/as valoran mi esfuerzo y reconocen mi trabajo diario en la asignatura.				
31.- Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.				
32.- Las matemáticas que nos enseñan en el instituto/colegio no les interesan a mis padres.				
33.- Algunos de mis padres era bastante bueno/a resolviendo ejercicios de matemáticas.				
34.- Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.				
35.- Mis amigos/as pasan de las matemáticas.				
36.-Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económica-mente están relacionadas con ellas.				
37.- La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.				

Universidad Pontificia de Salamanca

38.- El aumentar mis conocimientos matemáticos me hará sentir una persona competente en la sociedad.				
39.-Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.				
40.-Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.				
41.- La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando cómo resolver un ejercicio.				
42.- Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo				
43.- Disfruto los días que no tenemos clases de matemáticas porque no me interesan ni me atraen.				
44.- Ante un ejercicio complicado suelo darme por vencido fácilmente.				
45.-Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.				
46.- Me angustio y siento miedo cuando el/la profesor/a me propone “por sorpresa” que resuelva un ejercicio.				
47.- Cuando resuelvo ejercicios en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a.				
48.- Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un ejercicio empiezo a sentirme inseguro/a, desesperado/a, nervioso/a,…				
49.-Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.				
50.- Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un ejercicio matemático.				
51.- Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.				
52.- La resolución de los ejercicios exige un esfuerzo, perseverancia y paciencia.				
53.- Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.				
54.-Me gustan las clases de matemáticas.				
55.- En las clases de matemáticas suelo distraerme pensando en mis cosas, hablando con mis compañeros/as, etc. porque no me entero de nada, me aburro y lo estudio mejor por mi cuenta o me lo explica mejor mi profesor/a particular o el de la academia.				
56.- Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.				
57.-Estudio matemáticas porque mis padres son muy exigentes con la nota de mis exámenes.				
58.- Me cuesta menos entender las cosas cuando se utiliza en la clase ejemplos o actividades o materiales que no son el libro de texto o la explicación del profesor.				
59.- Me entero mejor de la explicación cuando hacemos los ejercicios en grupos y no solo las hace el profesor.				
60.- Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.				
61.-Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender				

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.				
62.- Hacer ejercicios de matemáticas en grupos me ayuda a aprender y a disfrutar más de las clases de matemáticas.				
63.- Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.				
64.- A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas.				
65.- La asignatura por la que empiezo a hacer los deberes para casa es las matemáticas.				
66.- Cuando intervengo en clase y participo me lo paso mejor en clase y presto más atención.				
67.-Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.				

NOTA: Este Test de motivación se elaboró a partir d un modelo de *Cuestionario sobre creencias y actitudes acerca de las matemáticas*, que publicaron los profesores de la Universidad de Extremadura, Nuria Gil Ignacio, Eloisa Guerrero Barona y Lorenzo Blanco Nieto, (2006). "El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas", en la *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa,* ISSN 1696 / 2005. Nº 8, Vol. 4 (1) 2006, pp. 47 – 72. Universidad de Extremadura.

Esta base se corrigió para adecuarla a la búsqueda de las motivaciones y se le añadieron veinte cuestiones más, con lo que se preparó el Test resultante, que se pasó a su cumplimentación en diciembre de 2012 antes de la investigación y la segunda vez se cumplimentó en enero- febrero de 2013 una vez transcurrida la experiencia investigadora.

Del Test se hicieron dos versiones con las mismas preguntas, pero en una de ellas se le suprimió la columna de de *Indiferente* para facilitar que los estudiantes se decantaran por las respuestas de acuerdo o en desacuerdo. Sin embargo para los estudiantes de 2º de la ESO se le facilitó la posible respuesta de *Indiferente.* Consultados algunos profesores de los grupos a investigar nos hallamos con diversidad de opiniones y en la dificultad de elegir una sola de las opciones, nos decantamos por las dos posibilidades, teniendo en cuenta que teníamos estudiantes de dos cursos distintos, se aplicó una forma en un curso y otra en el otro.

Universidad Pontificia de Salamanca

Anexo I.2.: TEST DE CONOCIMIENTO

TEST DE CONOCMIENTOS DE ECUACIONES

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios y problemas escribiendo todo el procedimiento y escribiendo los resultados en el recuadro de la solución.

Alumno:...

●♦ **Ecuaciones de 1er grado:**

1.- $3x - 3 = -9$ **solución:**

sol: x=-2

2.- $2 \cdot (2x - 5) - 3 \cdot (x - 5) = 0$ **solución:**

sol: x=-5

3.- $\frac{4x}{3} - 6 = \frac{2x}{3} - 5$ **solución:**

sol: x=3/2

4.- $\frac{3x}{5} - 3 \cdot \frac{x-1}{4} = 1 - \frac{x+5}{10}$ **solución:**

sol: x=5

Multiplicar por el m.c.m.(5, 4, 10)=20 toda la ecuación. Recordar que obtenemos una ecuación equivalente, es decir, con las mismas soluciones si multiplicamos toda la ecuación por un mismo número distinto de cero.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$20 \cdot \frac{3x}{5} - 20 \cdot 3 \cdot \frac{x-1}{4} = 20 \cdot 1 - 20 \cdot \frac{x+5}{10}$$

Operamos teniendo cuidado con los paréntesis

$$4 \cdot 3x - 5 \cdot 3 \cdot (x-1) = 20 \cdot 1 - 2 \cdot (x+5)$$

$$12x - 15 \cdot (x-1) = 20 - 2 \cdot (x+5)$$

$$12x - 15x + 15 = 20 - 2x - 10$$

Pasamos los términos con x a un lado de la igualdad y los términos independientes al otro lado de la igualdad

$$12x - 15x + 2x = 20 - 10 - 15$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

5.- Carlos tiene el triple de años que su hijo Antonio. Fernando, el hijo pequeño, tiene la mitad de años que Antonio, y entre los tres suman 63 años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

Sol: Antonio= 14 años Fernando=7 años Carlos=42 años

Datos:

Edad_Carlos= triple Edad_Antonio

Edad_Fernando=mitad Edad_Antonio

Edad_Carlos + Edad_Fernando + Edad_Antonio=63

Edad_Antonio=x Edad_Carlos=3x Edad_Fernando=$\frac{x}{2}$

$$x + 3x + \frac{x}{2} = 63$$

$$2x + 6x + x = 126$$

$$9x = 126$$

$$x = \frac{126}{9} = 14$$

Solución:

6.- En una bolsa hay bolas azules, blancas y rojas. El número de bolas rojas es igual al de bolas blancas más 14, y hay 6 bolas azules menos que blancas. Si en total hay 98 bolas, halla cuántas bolas hay de cada color.

Sol: blancas=30 rojas=44 azules=24

Solución:

7.- Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Nerea si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20 euros

Sol: 48 €

X = precio del abrigo

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=20$$

$$24\cdot\frac{x}{4}+24\cdot\frac{x}{6}=24\cdot 20$$

$$6\cdot x+4\cdot x=480$$

$$10x=480$$

$$x=\frac{480}{10}=48\ euros$$

●♦ **Ecuaciones de 2º grado:**

8.- $x^2=11x$ **soluciones:**

Sols: x=0 x=11

9.- $-x^2 + 1 = 0$ **soluciones:**

Sols: x=-1 y x=1

10.- $x^2 - 7x + 10 = 0$ **soluciones:**

Sols: x=2 y x=5

11.- $-2x^2 + 1 - x = 0$ **soluciones:**

Sols: x=-1 y x=1/2

12.- $5x^2 + 3x - 3 + x = 3x^2 - 4x - 3$ **soluciones:**

Sols: x=0 y x=-4

13.- $(4 - 2x)^2 - (2x + 1)^2 = -5x^2$ **soluciones:**

Sols: x=3 y x=1

$$16 + 4x^2 - 16x - (4x^2 + 1 + 4x) = -5x^2$$

$$16 + 4x^2 - 16x - 4x^2 - 1 - 4x + 5x^2 = 0$$

$$5x^2 - 20x + 15 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1$$

14.- $(x + 1)\left[\frac{3}{2} - 2(1 - x)\right] = 3x^2 + \frac{11(x-1)}{2}$ **soluciones:**

Sols x=1 x=-5

15.-Calcula la edad de Ana sabiendo que si al cuadrado de su edad se le resta el triple de su edad resulta nueve veces esta.

Sol 12 años

Solución:

●♦ **Sistemas de dos ecuaciones lineales:**

16.- Resuelve el siguiente sistema por el método que quieras:

$$\begin{cases} -x + 3y = 17 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

soluciones:

Sols: x=-2 y =5

17.- Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

18.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método que se quiera:

$$\begin{cases} \frac{X+1}{2} + \frac{y-1}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y-1}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

soluciones:

Sols: x=2 y=1

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{x+1}{2} + 4 \cdot \frac{y-1}{4} = 4 \cdot \frac{3}{2} \\ 4 \cdot \frac{x+1}{4} - 4 \cdot \frac{y-1}{2} = 4 \cdot \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (x+1) + 4 \cdot (y-1) = 6 \\ (x+1) - 2 \cdot (y-1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2 + 4y - 4 = 6 \\ x + 1 - 2y + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$x = 2y$$

$$2 \cdot 2y + 4y = 8$$

$$8y = 8$$

19.- Las edades de dos niños suman 46 años. Hace 6 años, su diferencia era 30 años. ¿Cuál son sus edades?

Sols: 38 años y 8 años

Soluciones:

20.- En una granja se crían gallinas y conejos. Si en total hay 50 cabezas y 134 patas ¿cuántos animales hay de cada clase?

Sols 17 conejos y 33 gallinas

Soluciones:

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

Anexo I.3.: TEST DE CONOCIMIENTO SOLUCIONES

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO 6

ANEXO I: TESTS

Anexo I.1.: TEST DE MOTIVACIÓN

<u>TEST DE MOTIVACIÓN DE MATEMÁTICAS</u>

●♦<u>DATOS DE IDENTIFICATIÓN:</u>

TIPO DE CENTRO: PÚBLICO □ CONCERTADO □ PRIVADO □

NOMBRE CENTRO: ____

HOMBRE: □ MUJER: □ EDAD: _____________ CURSO:_______________

SI HAS REPETIDO ALGUN CURSO INICIAL INDICA CUÁL: ________________________________

TIENES PENDIENTE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS: SI □ NO □

CALIFICACIÓN OBTENIDA EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS (CURSO ANTERIOR):_____________

ASIGNATURA PREFERIDA EN EL CURSO ACTUAL: _____________________________________

NIVEL DE INSTRUCCIÓN DE LOS PADRES

1.- SIN ESTUDIOS

2.- ESTUDIOS PRIMARIOS

3.- FORMACION PROFESIONAL (FP)

4.- FORMACIÓN UNIVERSITARIA DIPLOMATURA (maestro, ingenierías técnicas, etc.)

5.- FORMACIÓN UNIVERSITARIA LICENCIATURA

Universidad Pontificia de Salamanca

(rodea con un círculo)

PADRE	MADRE
1 2 3 4 5	1 2 3 4 5

PROFESION/SITUACIÓN LABORAL DE LOS PADRES:

1.- PROFESOR/A

2.- FUNCIONARIO NO DOCENTE

3.- TRABAJADOR A CUENTA PROPIA. AUTONOMO

4.- TRABAJADOR A CUENTA AJENA

(médico, vendedor, abogado, informático, empresario, etc.)

5.-PARADO

6.-JUBILADO

7.- AMO/A DE CASA

8.- OTROS/AS(especificar)

(rodea con un círculo)

PADRE	MADRE
1 2 3 4 5 6 7 8	1 2 3 4 5 6 7 8

NUMERO DE HERMANOS (incluido el/la alumno/a):_______________

•

♦ **INSTRUCCIONES**

Para contestar el cuestionario tienes que poner nota, de 1 a 5, a cada frase según estés de acuerdo o no con ella, 1 no estás nada de acuerdo y 5 estás muy de acuerdo. Marcas con una **X** la opción de respuesta que consideres que se ajusta más a tu manera de pensar sobre el asunto propuesto.

5 Muy de acuerdo, es lo que pienso, creo
4 De acuerdo
3 Indiferente
2 En desacuerdo
1 Muy en desacuerdo

A continuación se muestra el Test con *cinco posibilidades de respuesta*.

1º MODELO:

Universidad Pontificia de Salamanca

	1	2	3	4	5
1.- Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.					
2.- Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad.					
3.- En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.					
4.- Casi todos los ejercicios de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.					
5.- Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer.					
6.-La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual.					
7.- El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido.					
8.- Sabiendo resolver los ejercicios que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.					
9.- Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.					
10.-Busco distintas maneras y métodos para resolver un ejercicio.					
11.-Aprendo mucho inventando nuevos ejercicios.					
12.-El gusto por las matemáticas influye a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato en la que estén o no presentes.					
13.- El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirse más valorado/a y admirado/a por los compañeros.					
14.- Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.					
15.- Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.					
16.-Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.					
17.- Cuando resuelvo un ejercicio suelo dudar de si el resultado es correcto.					
18.- Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.					
19.-Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.					
20.-Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando resuelvo ejercicios de matemáticas.					
21.- Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.					
22.-La suerte influye a la hora de resolver con éxito un ejercicio de					

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas.					
23.- En clase de matemáticas los/as profesores/as nos emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que me permiten relacionar las matemáticas con situaciones de mi vida diaria.					
24.- Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase.					
25.- Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.					
26.-Para mis profesores/as de matemáticas soy un/a buen/a alumno/a.					
27.- Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias.					
28.- Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.					
29.- Los/as profesores/as de matemáticas se interesan por mi evolución y rendimiento en la materia.					
30.- En clase de matemáticas los/as profesores/as valoran mi esfuerzo y reconocen mi trabajo diario en la asignatura.					
31.- Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.					
32.- Las matemáticas que nos enseñan en el instituto/colegio no les interesan a mis padres.					
33.- Algunos de mis padres era bastante bueno/a resolviendo ejercicios de matemáticas.					
34.- Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.					
35.- Mis amigos/as pasan de las matemáticas.					
36.-Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económica-mente están relacionadas con ellas.					
37.- La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.					
38.- El aumentar mis conocimientos matemáticos me hará sentir una persona competente en la sociedad.					
39.-Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.					
40.-Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.					
41.- La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando cómo resolver un ejercicio.					
42.- 42.- Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo					
43.- Disfruto los días que no tenemos clases de matemáticas porque no me interesan ni me atraen.					
44.- Ante un ejercicio complicado suelo darme por vencido fácilmente.					
45.-Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.					
46.- Me angustio y siento miedo cuando el/la profesor/a me propone					

Universidad Pontificia de Salamanca

"por sorpresa" que resuelva un ejercicio.					
47.- Cuando resuelvo ejercicios en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a.					
48.- Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un ejercicio empiezo a sentirme inseguro/a, desesperado/a, nervioso/a,…					
49.-Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.					
50.- Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un ejercicio matemático.					
51.- Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.					
52.- La resolución de los ejercicios exige un esfuerzo, perseverancia y paciencia.					
53.- Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.					
54.-Me gustan las clases de matemáticas.					
55.- En las clases de matemáticas suelo distraerme pensando en mis cosas, hablando con mis compañeros/as, etc. porque no me entero de nada, me aburro y lo estudio mejor por mi cuenta o me lo explica mejor mi profesor/a particular o el de la academia.					
56.- Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.					
57.-Estudio matemáticas porque mis padres son muy exigentes con la nota de mis exámenes.					
58.- Me cuesta menos entender las cosas cuando se utiliza en la clase ejemplos o actividades o materiales que no son el libro de texto o la explicación del profesor.					
59.- Me entero mejor de la explicación cuando hacemos los ejercicios en grupos y no solo las hace el profesor.					
60.- Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.					
61.-Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.					
62.- Hacer ejercicios de matemáticas en grupos me ayuda a aprender y a disfrutar más de las clases de matemáticas.					
63.- Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.					
64.- A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas.					
65.- La asignatura por la que empiezo a hacer los deberes para casa es las matemáticas.					
66.- Cuando intervengo en clase y participo me lo paso mejor en clase y presto más atención.					
67.-Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.					

GRACIAS POR VUESTRA COLABORACIÓN

Universidad Pontificia de Salamanca

♦ **INSTRUCCIONES**

Para contestar el cuestionario tienes que poner nota, de 1 a 5, a cada frase según estés de acuerdo o no con ella, 1 no estás nada de acuerdo y 5 estás muy de acuerdo. Marcas con una **X** la opción de respuesta que consideres que se ajusta más a tu manera de pensar sobre el asunto propuesto.

1 Muy de acuerdo, es lo que pienso, creo
2 De acuerdo
3 En desacuerdo
4 Muy en desacuerdo

2º MODELO: A continuación se muestra el Test con ***cuatro posibilidades de respuesta:***

	1	**2**	**3**	**4**
1.- Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.				
2.- Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad.				
3.- En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.				
4.- Casi todos los ejercicios de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.				
5.- Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer.				
6.-La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual.				
7.- El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido.				
8.- Sabiendo resolver los ejercicios que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.				
9.- Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.				
10.-Busco distintas maneras y métodos para resolver un ejercicio.				
11.-Aprendo mucho inventando nuevos ejercicios.				
12.-El gusto por las matemáticas influye a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato en la que estén o no presentes.				
13.- El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirse más valorado/a y admirado/a por los compañeros.				

Universidad Pontificia de Salamanca

14.- Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.				
15.- Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.				
16.-Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.				
17.- Cuando resuelvo un ejercicio suelo dudar de si el resultado es correcto.				
18.- Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.				
19.-Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.				
20.-Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando resuelvo ejercicios de matemáticas.				
21.- Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.				
22.-La suerte influye a la hora de resolver con éxito un ejercicio de matemáticas.				
23.- En clase de matemáticas los/as profesores/as nos emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que me permiten relacionar las matemáticas con situaciones de mi vida diaria.				
24.- Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase.				
25.- Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.				
26.-Para mis profesores/as de matemáticas soy un/a buen/a alumno/a.				
27.- Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias.				
28.- Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.				
29.- Los/as profesores/as de matemáticas se interesan por mi evolución y rendimiento en la materia.				
30.- En clase de matemáticas los/as profesores/as valoran mi esfuerzo y reconocen mi trabajo diario en la asignatura.				
31.- Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.				
32.- Las matemáticas que nos enseñan en el instituto/colegio no les interesan a mis padres.				
33.- Algunos de mis padres era bastante bueno/a resolviendo ejercicios de matemáticas.				
34.- Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.				
35.- Mis amigos/as pasan de las matemáticas.				
36.-Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económica-mente están relacionadas con ellas.				
37.- La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.				

Universidad Pontificia de Salamanca

38.- El aumentar mis conocimientos matemáticos me hará sentir una persona competente en la sociedad.				
39.-Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.				
40.-Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.				
41.- La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando cómo resolver un ejercicio.				
42.- Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo				
43.- Disfruto los días que no tenemos clases de matemáticas porque no me interesan ni me atraen.				
44.- Ante un ejercicio complicado suelo darme por vencido fácilmente.				
45.-Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.				
46.- Me angustio y siento miedo cuando el/la profesor/a me propone "por sorpresa" que resuelva un ejercicio.				
47.- Cuando resuelvo ejercicios en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a.				
48.- Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un ejercicio empiezo a sentirme inseguro/a, desesperado/a, nervioso/a,…				
49.-Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.				
50.- Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un ejercicio matemático.				
51.- Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.				
52.- La resolución de los ejercicios exige un esfuerzo, perseverancia y paciencia.				
53.- Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.				
54.-Me gustan las clases de matemáticas.				
55.- En las clases de matemáticas suelo distraerme pensando en mis cosas, hablando con mis compañeros/as, etc. porque no me entero de nada, me aburro y lo estudio mejor por mi cuenta o me lo explica mejor mi profesor/a particular o el de la academia.				
56.- Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.				
57.-Estudio matemáticas porque mis padres son muy exigentes con la nota de mis exámenes.				
58.- Me cuesta menos entender las cosas cuando se utiliza en la clase ejemplos o actividades o materiales que no son el libro de texto o la explicación del profesor.				
59.- Me entero mejor de la explicación cuando hacemos los ejercicios en grupos y no solo las hace el profesor.				
60.- Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.				
61.-Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender				

Universidad Pontificia de Salamanca

matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.				
62.- Hacer ejercicios de matemáticas en grupos me ayuda a aprender y a disfrutar más de las clases de matemáticas.				
63.- Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.				
64.- A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas.				
65.- La asignatura por la que empiezo a hacer los deberes para casa es las matemáticas.				
66.- Cuando intervengo en clase y participo me lo paso mejor en clase y presto más atención.				
67.-Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.				

NOTA: Este Test de motivación se elaboró a partir d un modelo de *Cuestionario sobre creencias y actitudes acerca de las matemáticas*, que publicaron los profesores de la Universidad de Extremadura, Nuria Gil Ignacio, Eloisa Guerrero Barona y Lorenzo Blanco Nieto, (2006). “El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas”, en la *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa,* ISSN 1696 / 2005. Nº 8, Vol. 4 (1) 2006, pp. 47 – 72. Universidad de Extremadura.

Esta base se corrigió para adecuarla a la búsqueda de las motivaciones y se le añadieron veinte cuestiones más, con lo que se preparó el Test resultante, que se pasó a su cumplimentación en diciembre de 2012 antes de la investigación y la segunda vez se cumplimentó en enero- febrero de 2013 una vez transcurrida la experiencia investigadora.

Del Test se hicieron dos versiones con las mismas preguntas, pero en una de ellas se le suprimió la columna de de *Indiferente* para facilitar que los estudiantes se decantaran por las respuestas de acuerdo o en desacuerdo. Sin embargo para los estudiantes de 2º de la ESO se le facilitó la posible respuesta de *Indiferente.* Consultados algunos profesores de los grupos a investigar nos hallamos con diversidad de opiniones y en la dificultad de elegir una sola de las opciones, nos decantamos por las dos posibilidades, teniendo en cuenta que teníamos estudiantes de dos cursos distintos, se aplicó una forma en un curso y otra en el otro.

Anexo I.2.: TEST DE CONOCIMIENTO

<u>TEST DE CONOCMIENTOS DE ECUACIONES</u>

Universidad Pontificia de Salamanca

Instrucciones: Resuelve los siguientes ejercicios y problemas escribiendo todo el procedimiento y escribiendo los resultados en el recuadro de la solución.

Alumno:...

●◆ **Ecuaciones de 1^{er} grado:**

1.- $3x - 3 = -9$ **solución:**

sol: x=-2

2.- $2 \cdot (2x - 5) - 3 \cdot (x - 5) = 0$ **solución:**

sol: x=-5

3.- $\frac{4x}{3} - 6 = \frac{2x}{3} - 5$ **solución:**

sol: x=3/2

4.- $\frac{3x}{5} - 3 \cdot \frac{x-1}{4} = 1 - \frac{x+5}{10}$ **solución:**

sol: x=20

5.- Carlos tiene el triple de años que su hijo Antonio. Fernando, el hijo pequeño, tiene la mitad de años que Antonio, y entre los tres suman 63 años. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

Sol: Antonio= 14 años Fernando=7 años Carlos=42 años

Solución:

6.- En una bolsa hay bolas azules, blancas y rojas. El número de bolas rojas es igual al de bolas blancas más 14, y hay 6 bolas azules menos que blancas. Si en total hay 98 bolas, halla cuántas bolas hay de cada color.

Sol: blancas=30 rojas=44 azules=24

Solución:

7.- Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Nerea si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20 euros

Sol: 48 €

●♦ **Ecuaciones de 2º grado:**

8.- $x^2 = 11x$ **soluciones:**

Sols: x=0 x=11

9.- $-x^2 + 1 = 0$ **soluciones:**

Sols: x=-1 y x=1

10.- $x^2 - 7x + 10 = 0$ **soluciones:**

Sols: x=2 y x=5

11.- $-2x^2 + 1 - x = 0$ **soluciones:**

Sols: x=-1 y x=1/2

12.- $5x^2 + 3x - 3 + x = 3x^2 - 4x - 3$ **soluciones:**

Sols: x=0 y x=-4

13.- $(4 - 2x)^2 - (2x + 1)^2 = -5x^2$ **soluciones:**

Sols: x=3 y x=1

14.- $(x + 1)\left[\frac{3}{2} - 2(1 - x)\right] = 3x^2 + \frac{11(x-1)}{2}$ **soluciones:**

Sols x=1 x=-5

15.-Calcula la edad de Ana sabiendo que si al cuadrado de su edad se le resta el triple de su edad resulta nueve veces esta.

Sol 12 años

Solución:

●♦ **Sistemas de dos ecuaciones lineales:**

16.- Resuelve el siguiente sistema por el método que quieras:

$$\begin{cases} -x + 3y = 17 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

soluciones:

Sols: x=-2 y =5

17.- Resuelve el siguiente sistema gráficamente:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

18.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método que se quiera:

$$\begin{cases} \frac{X+1}{2} + \frac{y-1}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y-1}{2} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

soluciones:

Sols: x=2 y=1

19.- Las edades de dos niños suman 46 años. Hace 6 años, su diferencia era 30 años. ¿Cuál son sus edades?

Sols: 38 años y 8 años

Soluciones:

20.- En una granja se crían gallinas y conejos. Si en total hay 50 cabezas y 134 patas ¿cuántos animales hay de cada clase?

Sols 17 conejos y 33 gallinas

Soluciones:

GRACIAS POR TU COLABORACIÓN

Anexo I.3.: TEST DE CONOCIMIENTO SOLUCIONES

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO SEIS:

ANEXO II: RESULTADOS DEL TEST DE MOTIVACIÓN

ANEXO II.1: RESULTADOS DEL TEST DE MOTIVACIÓN DE LOS ALUMNOS DEL CURSO TERCERO ESO.

A) PREGUNTAS Y RESULTADOS DEL TEST DE MOTIVACIÓN 3º ESO:

Tabla 1. Pregunta 1.- *Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	57,58	58,06	36,67	50,00	37,50	38,71
De acuerdo	42,42	38,71	53,33	31,25	56,25	45,16
Desacuerdo	0,00	3,23	10,00	18,75	6,25	6,45
Muy en desacuerdo	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	9,68

Tabla 2. Pregunta 2.- *Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	0,00	3,33	0,00	0,00	3,23
De acuerdo	6,06	3,23	10,00	15,63	3,13	3,23
Desacuerdo	57,58	41,94	60,00	62,49	65,62	67,73
Muy desacuerdo	36,36	54,83	26,67	21,88	31,25	25,81

Tabla 3. Pregunta 3 *En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA	3ºB	3ºC

Universidad Pontificia de Salamanca

	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,15	6,45	30,00	15,63	6,25	6,45
De acuerdo	24,24	41,94	23,33	53,12	34,38	32,26
Desacuerdo	54,55	45,16	36,67	18,75	43,74	35,48
Muy desacuerdo	6,06	6,45	10,00	12,50	15,63	25,81

Tabla 4. Pregunta 4 *Casi todos los ejercicios de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	39,39	29,03	23,33	31,25	28,13	38,71
De acuerdo	42,43	45,16	50,00	40,62	56,24	38,71
Desacuerdo	15,15	25,81	20,00	18,75	15,63	16,13
Muy desacuerdo	3,03	0,00	6,67	9,38	0,00	6,45

Tabla 5. Pregunta 5 *Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,13	3,23	3,45	9,38	0,00	3,23
De acuerdo	31,25	29,03	34,48	37,50	18,75	16,13
Desacuerdo	49,99	58,06	44,83	34,37	56,25	58,06
Muy desacuerdo	15,63	9,68	17,24	18,75	25,00	22,58

Tabla 6. Pregunta 6 *La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,12	3,23	3,33	3,13	9,38	12,90
De acuerdo	18,18	9,68	30,00	18,75	25,00	29,04
Desacuerdo	45,46	61,28	50,00	59,37	43,74	45,16
Muy desacuerdo	24,24	25,81	16,67	18,75	21,88	12,90

Tabla 7. Pregunta 7 *El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,09	3,23	0,00	9,38	3,13	9,68
De acuerdo	18,18	29,03	17,24	9,38	21,88	25,81
Desacuerdo	51,52	54,84	51,73	53,11	40,61	51,61

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy desacuerdo	21,21	12,90	31,03	28,13	34,38	12,90

Tabla 8. Pregunta 8 *Sabiendo resolver los ejercicios que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	60,61	45,16	63,34	65,62	68,75	67,74
De acuerdo	36,36	54,84	30,00	21,88	25,00	32,26
Desacuerdo	0,00	0,00	3,33	12,50	6,25	0,00
Muy desacuerdo	3,03	0,00	3,33	0,00	0,00	0,00

Tabla 9. Pregunta 9 *Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	6,25	3,23	6,90	3,13	9,38	16,13
De acuerdo	31,25	12,90	24,14	28,13	31,25	19,35
Desacuerdo	43,75	64,52	51,72	56,24	46,87	64,52
Muy desacuerdo	18,75	19,35	17,24	12,50	12,50	0,00

Tabla 10. Pregunta 10 *Busco distintas maneras y métodos para resolver un ejercicio*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	21,88	20,00	20,00	6,25	9,38	22,58
De acuerdo	56,24	40,00	53,33	46,87	65,61	51,61
Desacuerdo	18,75	40,00	20,00	43,75	15,63	22,58
Muy desacuerdo	3,13	0,00	6,67	3,13	9,38	3,23

Tabla 11. Pregunta 11 *Aprendo mucho inventando nuevos ejercicios.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	21,88	10,00	6,67	6,25	19,35	19,35
De acuerdo	21,88	46,67	40,00	40,62	35,48	35,49
Desacuerdo	43,74	33,33	40,00	37,50	38,72	25,81
Muy desacuerdo	12,50	10,00	13,33	15,63	6,45	19,35

Tabla 12. Pregunta 12 El gusto por las matemáticas influye a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato en la que estén o no presentes. Datos en %.

Universidad Pontificia de Salamanca

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	51,52	45,16	53,33	53,12	53,12	45,16
De acuerdo	42,42	48,39	36,67	37,50	37,50	45,16
Desacuerdo	6,06	6,45	6,67	9,38	9,38	6,45
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,33	0,00	0,00	3,23

Tabla 13. Pregunta 13 *El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirte más valorado/a y admirado/a por los compañeros.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,12	22,58	13,33	18,75	12,50	32,26
De acuerdo	45,46	38,71	30,00	25,00	31,25	35,48
Desacuerdo	30,30	29,03	43,34	37,50	37,50	32,26
Muy desacuerdo	12,12	9,68	13,33	18,75	18,75	0,00

Tabla 14. Pregunta 14 *Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,09	9,68	16,67	9,38	9,38	9,68
De acuerdo	9,09	19,35	23,33	25,00	18,75	12,90
Desacuerdo	39,39	51,62	26,67	49,99	46,87	61,29
Muy desacuerdo	42,43	19,35	33,33	15,63	25,00	16,13

Tabla 15. Pregunta 15 *Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	16,13	10,00	6,25	9,38	9,68
De acuerdo	21,21	19,35	30,00	25,00	25,00	32,26
Desacuerdo	39,40	54,84	33,33	56,25	43,74	38,71
Muy desacuerdo	39,39	9,68	26,67	12,50	21,88	19,35

Tabla 16. Pregunta 16 *Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	60,61	67,74	46,66	40,63	56,25	51,62
De acuerdo	36,36	29,03	36,67	49,99	37,50	35,48

Universidad Pontificia de Salamanca

Desacuerdo	3,03	3,23	16,67	6,25	6,25	12,90
Muy desacuerdo	0,00	0,00	0,00	3,13	0,00	0,00

Tabla 17. Pregunta 17 *Cuando resuelvo un ejercicio suelo dudar de si el resultado es correcto.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,63	12,90	13,33	15,63	25,00	25,81
De acuerdo	49,99	48,39	46,67	28,13	31,25	45,16
Desacuerdo	21,88	35,48	36,67	53,11	37,50	19,35
Muy desacuerdo	12,50	3,23	3,33	3,13	6,25	9,68

Tabla 18. Pregunta 18 *Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	36,36	29,03	26,67	31,25	12,50	29,03
De acuerdo	48,49	48,39	46,66	46,87	43,75	48,39
Desacuerdo	12,12	22,58	16,67	18,75	37,50	19,35
Muy desacuerdo	3,03	0,00	10,00	3,13	6,25	3,23

Tabla 19. Pregunta 19 *Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,18	19,35	16,67	15,63	12,50	32,26
De acuerdo	42,43	51,62	39,99	49,99	56,24	41,93
Desacuerdo	39,39	29,03	36,67	21,88	28,13	22,58
Muy desacuerdo	0,00	0,00	6,67	12,50	3,13	3,23

Tabla 20. Pregunta 20 *Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando resuelvo ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,18	19,35	24,14	21,88	18,75	25,81
De acuerdo	66,67	48,39	44,82	62,49	53,12	51,61
Desacuerdo	12,12	32,26	27,59	12,50	21,88	22,58
Muy desacuerdo	3,03	0,00	3,45	3,13	6,25	0,00

Tabla 21. Pregunta 21 *Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.* Datos en %.

Universidad Pontificia de Salamanca

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	31,25	32,26	17,24	28,13	28,13	38,71
De acuerdo	56,24	61,29	62,07	53,11	49,99	48,38
Desacuerdo	9,38	6,45	17,24	15,63	15,63	9,68
Muy desacuerdo	3,13	0,00	3,45	3,13	6,25	3,23

Tabla 22. Pregunta 22 *La suerte influye a la hora de resolver con éxito un ejercicio de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	0,00	0,00	0,00	3,13	0,00
De acuerdo	9,09	19,35	10,34	9,38	3,13	12,90
Desacuerdo	48,49	54,84	41,38	40,63	40,63	41,94
Muy desacuerdo	42,42	25,81	48,28	49,99	53,11	45,16

Tabla 23. Pregunta 23 *En clase de matemáticas los/as profesores/as nos emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que me permiten relacionar las matemáticas con situaciones de mi vida diaria.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	24,24	25,81	20,69	15,63	31,25	25,81
De acuerdo	60,61	61,29	34,48	49,99	53,12	64,51
Desacuerdo	12,12	12,90	37,93	28,13	15,63	6,45
Muy desacuerdo	3,03	0,00	6,90	6,25	0,00	3,23

Tabla 24. Pregunta 24 *Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,15	19,35	7,14	6,90	26,67	29,03
De acuerdo	57,58	58,07	39,29	37,93	36,66	45,17
Desacuerdo	24,24	16,13	35,71	48,27	30,00	19,35
Muy desacuerdo	3,03	6,45	17,86	6,90	6,67	6,45

Tabla 25. Pregunta 25 *Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	72,73	74,19	24,14	28,13	37,50	35,48

Universidad Pontificia de Salamanca

De acuerdo	27,27	25,81	55,17	43,74	53,12	45,17
Desacuerdo	0,00	0,00	13,79	25,00	9,38	19,35
Muy desacuerdo	0,00	0,00	6,90	3,13	0,00	0,00

Tabla 26. Pregunta 26 *Para mis profesores/as de matemáticas soy un/a buen/a alumno/a.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	33,33	23,33	7,41	18,75	28,13	29,03
De acuerdo	53,34	60,01	70,37	62,49	56,24	54,84
Desacuerdo	10,00	13,33	14,81	15,63	9,38	9,68
Muy desacuerdo	3,33	3,33	7,41	3,13	6,25	6,45

Tabla 27. Pregunta 27 *Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	54,55	51,61	13,79	15,63	46,87	32,26
De acuerdo	42,42	48,39	75,86	68,74	40,63	54,84
Desacuerdo	3,03	0,00	6,90	15,63	12,50	6,45
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,45	0,00	0,00	6,45

Tabla 28. Pregunta 28 *Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	60,61	64,52	30,00	31,25	56,24	29,03
De acuerdo	33,33	29,03	53,33	62,50	28,13	58,07
Desacuerdo	6,06	6,45	10,00	6,25	15,63	12,90
Muy desacuerdo	0,00	0,00	6,67	0,00	0,00	0,00

Tabla 29. Pregunta 29 *Los/as profesores/as de matemáticas se interesan por mi evolución y rendimiento en la materia.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	48,48	48,39	16,67	12,50	34,38	26,67
De acuerdo	48,49	51,61	53,33	56,25	43,74	56,66
Desacuerdo	3,03	0,00	26,67	25,00	18,75	16,67
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,33	6,25	3,13	0,00

Tabla 30. Pregunta 30 *En clase de matemáticas los/as profesores/as valoran mi esfuerzo y reconocen mi trabajo diario en la asignatura.* Datos en %.

Universidad Pontificia de Salamanca

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	42,42	38,71	20,00	21,88	46,87	29,03
De acuerdo	51,52	54,84	46,66	59,37	28,13	54,84
Desacuerdo	6,06	6,45	26,67	12,50	25,00	12,90
Muy desacuerdo	0,00	0,00	6,67	6,25	0,00	3,23

Tabla 31. Pregunta 31 *Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	66,67	61,29	46,66	53,12	71,87	61,29
De acuerdo	30,30	38,71	36,67	37,50	25,00	29,03
Desacuerdo	3,03	0,00	6,67	6,25	3,13	6,45
Muy desacuerdo	0,00	0,00	10,00	3,13	0,00	3,23

Tabla 32. Pregunta 32 *Las matemáticas que nos enseñan en el instituto/colegio no les interesan a mis padres.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	0,00	0,00	0,00	6,45	0,00
De acuerdo	0,00	0,00	0,00	6,67	0,00	6,45
Desacuerdo	18,18	32,26	26,67	23,33	19,35	25,81
Muy desacuerdo	81,82	67,74	73,33	70,00	74,20	67,74

Tabla 33. Pregunta 33 *Algunos de mis padres era bastante bueno/a resolviendo ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	56,24	58,06	53,33	50,00	74,19	67,74
De acuerdo	34,38	35,48	36,67	43,33	12,90	25,81
Desacuerdo	6,25	3,23	3,33	6,67	9,68	6,45
Muy desacuerdo	3,13	3,23	6,67	0,00	3,23	0,00

Tabla 34. Pregunta 34 *Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	56,24	54,83	26,67	31,25	61,29	32,26
De acuerdo	28,13	32,26	36,67	37,49	22,58	54,83
Desacuerdo	12,50	9,68	23,33	21,88	12,90	9,68

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy desacuerdo	3,13	3,23	13,33	9,38	3,23	3,23

Tabla 35. Pregunta 35 *Mis amigos/as pasan de las matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	0,00	16,67	18,75	0,00	9,68
De acuerdo	15,15	23,33	33,33	40,62	16,13	38,71
Desacuerdo	60,61	50,00	43,33	31,25	61,29	38,71
Muy desacuerdo	24,24	26,67	6,67	9,38	22,58	12,90

Tabla 36. Pregunta 36 *Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	48,39	45,16	20,69	31,25	29,03	38,71
De acuerdo	38,71	29,03	31,04	31,25	48,39	38,71
Desacuerdo	12,90	25,81	31,03	25,00	22,58	9,68
Muy desacuerdo	0,00	0,00	17,24	12,50	0,00	12,90

Tabla 37. Pregunta 37 *La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	0,00	3,33	6,25	0,00	3,23
De acuerdo	3,03	16,13	30,00	21,88	12,90	9,68
Desacuerdo	39,39	54,84	50,00	25,00	48,39	48,38
Muy desacuerdo	57,58	29,03	16,67	46,87	38,71	38,71

Tabla 38. Pregunta 38 *El aumentar mis conocimientos matemáticos me hará sentir una persona competente en la sociedad.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	33,33	32,26	16,67	18,75	41,94	38,71
De acuerdo	54,55	48,39	53,33	50,00	41,93	41,94
Desacuerdo	9,09	19,35	23,33	18,75	16,13	12,90
Muy desacuerdo	3,03	0,00	6,67	12,50	0,00	6,45

Tabla 39. Pregunta 39 *Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA	3ºB	3ºC

Universidad Pontificia de Salamanca

	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,18	12,90	13,79	9,38	19,35	6,45
De acuerdo	39,40	48,39	37,94	46,86	38,71	45,16
Desacuerdo	30,30	22,58	37,93	28,13	32,26	32,26
Muy desacuerdo	12,12	16,13	10,34	15,63	9,68	16,13

Tabla 40. Pregunta 40 *Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	53,12	48,39	36,67	38,71	60,00	45,16
De acuerdo	46,88	45,16	50,00	48,38	33,33	48,38
Desacuerdo	0,00	6,45	10,00	9,68	6,67	3,23
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,33	3,23	0,00	3,23

Tabla 41. Pregunta 41 *La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando cómo resolver un ejercicio.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,75	12,90	13,33	12,90	3,33	12,90
De acuerdo	12,50	29,03	33,33	29,03	30,00	29,03
Desacuerdo	62,50	51,62	46,67	48,39	43,34	48,39
Muy desacuerdo	6,25	6,45	6,67	9,68	23,33	9,68

Tabla 42. Resultados a la pregunta 42 *Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,13	3,23	20,69	15,63	6,67	9,68
De acuerdo	3,13	6,45	17,24	28,13	33,33	22,58
Desacuerdo	59,36	58,06	48,28	34,36	43,33	51,61
Muy desacuerdo	34,38	32,26	13,79	21,88	16,67	16,13

Tabla 43. Resultados a la pregunta 43 *Disfruto los días que no tenemos clases de matemáticas porque no me interesan ni me atraen.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	0,00	16,67	15,63	6,67	12,90
De acuerdo	3,13	16,13	16,67	25,00	20,00	25,81
Desacuerdo	71,87	64,52	59,99	43,74	43,33	51,61
Muy desacuerdo	25,00	19,35	6,67	15,63	30,00	9,68

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 44. Pregunta 44 *Ante un ejercicio complicado suelo darme por vencido fácilmente*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	6,25	0,00	13,33	3,13	6,67	0,00
De acuerdo	28,13	25,81	36,67	18,75	30,00	41,94
Desacuerdo	46,87	51,61	43,33	56,24	43,33	41,93
Muy desacuerdo	18,75	22,58	6,67	21,88	20,00	16,13

Tabla 45. Pregunta 45 *Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	33,33	22,58	16,67	25,00	23,33	25,81
De acuerdo	46,67	54,84	36,67	34,37	30,00	45,16
Desacuerdo	16,67	22,58	36,66	31,25	33,34	29,03
Muy desacuerdo	3,33	0,00	10,00	9,38	13,33	0,00

Tabla 46. Pregunta 46 *Me angustio y siento miedo cuando el/la profesor/a me propone "por sorpresa" que resuelva un ejercicio.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,63	22,58	20,00	6,25	13,33	16,13
De acuerdo	28,13	29,03	23,33	28,13	20,00	29,03
Desacuerdo	37,49	35,49	50,00	49,99	50,00	45,16
Muy desacuerdo	18,75	12,90	6,67	15,63	16,67	9,68

Tabla 47. Pregunta 47 *Cuando resuelvo ejercicios en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	45,16	41,94	16,67	16,13	30,00	36,67
De acuerdo	45,16	45,16	49,99	35,48	46,67	46,66
Desacuerdo	9,68	6,45	26,67	32,26	13,33	6,67
Muy desacuerdo	0,00	6,45	6,67	16,13	10,00	10,00

Tabla 48. Pregunta 48 *Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un ejercicio empiezo a sentirme inseguro/a, desesperado/a, nervioso/a,….* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy de acuerdo	12,50	22,58	26,67	9,38	13,33	3,23
De acuerdo	46,87	41,94	36,67	37,49	50,00	48,38
Desacuerdo	28,13	29,03	33,33	25,00	30,00	41,94
Muy desacuerdo	12,50	6,45	3,33	28,13	6,67	6,45

Tabla 49. Pregunta 49 *Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	6,25	9,68	10,00	12,50	10,00	12,90
De acuerdo	28,13	48,39	30,00	18,75	40,00	41,94
Desacuerdo	53,12	22,58	46,67	37,50	33,33	32,26
Muy desacuerdo	12,50	19,35	13,33	31,25	16,67	12,90

Tabla 50. Pregunta 50 *Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un ejercicio matemático.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	64,51	61,29	56,66	53,12	50,00	41,94
De acuerdo	32,26	29,03	36,67	40,63	46,67	51,61
Desacuerdo	3,23	6,45	6,67	0,00	3,33	0,00
Muy desacuerdo	0,00	3,23	0,00	6,25	0,00	6,45

Tabla 51. Pregunta 51 *Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	25,00	29,03	6,67	15,63	23,33	12,90
De acuerdo	56,24	54,84	56,66	46,87	36,67	61,29
Desacuerdo	15,63	12,90	26,67	31,25	36,67	16,13
Muy desacuerdo	3,13	3,23	10,00	6,25	3,33	9,68

Tabla 52. Pregunta 52 *La resolución de los ejercicios exige esfuerzo, perseverancia y paciencia.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	58,06	45,16	27,59	37,50	48,39	35,48
De acuerdo	38,71	48,39	62,06	62,50	48,38	58,06
Desacuerdo	3,23	6,45	6,90	0,00	3,23	3,23
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,45	0,00	0,00	3,23

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 53. Pregunta 53 *Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	37,50	29,03	23,33	31,25	22,58	25,81
De acuerdo	53,12	61,29	50,01	49,99	48,39	61,29
Desacuerdo	6,25	6,45	13,33	15,63	29,03	12,90
Muy desacuerdo	3,13	3,23	13,33	3,13	0,00	0,00

Tabla 54. Pregunta 54 *Me gustan las clases de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	30,30	16,13	3,33	18,75	9,68	13,33
De acuerdo	69,70	77,42	56,67	40,62	54,83	56,67
Desacuerdo	0,00	6,45	20,00	28,13	25,81	23,33
Muy desacuerdo	0,00	0,00	20,00	12,50	9,68	6,67

Tabla 55. Pregunta 55 *En las clases de matemáticas suelo distraerme pensando en mis cosas, hablando con mis compañeros/as, etc. porque no me entero de nada, me aburro y lo estudio mejor por mi cuenta o me lo explica mejor mi profesor/a particular o el de la academia.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	3,23	13,33	3,23	6,45	12,90
De acuerdo	12,12	6,45	10,00	19,35	22,58	25,81
Desacuerdo	51,52	61,29	56,67	54,84	48,39	38,71
Muy desacuerdo	36,36	29,03	20,00	22,58	22,58	22,58

Tabla 56. Pregunta 56 *Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,18	19,35	13,33	12,50	22,58	25,81
De acuerdo	51,52	48,39	66,67	50,00	45,16	38,70
Desacuerdo	30,30	32,26	16,67	31,25	25,81	25,81
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,33	6,25	6,45	9,68

Tabla 57. Pregunta 57 *Estudio matemáticas porque mis padres son muy exigentes con la nota de mis exámenes.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy de acuerdo	0,00	3,23	0,00	6,25	12,90	12,90
De acuerdo	12,12	22,58	10,00	12,50	16,13	16,13
Desacuerdo	57,58	48,38	66,67	59,39	48,39	61,29
Muy desacuerdo	30,30	25,81	23,33	21,88	22,58	9,68

Tabla 58. Pregunta 58 *Me cuesta menos entender las cosas cuando se utiliza en la clase ejemplos o actividades o materiales que no son el libro de texto o la explicación del profesor.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	33,33	35,48	26,67	21,88	38,71	25,81
De acuerdo	54,55	51,62	50,00	53,12	41,94	45,16
Desacuerdo	12,12	12,90	20,00	18,75	19,35	19,35
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,33	6,25	0,00	9,68

Tabla 59. Pregunta 59 *Me entero mejor de la explicación cuando hacemos los ejercicios en grupos y no solo las hace el profesor.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	27,27	45,16	20,00	19,35	29,03	25,81
De acuerdo	42,43	45,16	53,34	32,26	41,93	51,61
Desacuerdo	27,27	6,45	23,33	41,94	25,81	19,35
Muy desacuerdo	3,03	3,23	3,33	6,45	3,23	3,23

Tabla 60. Pregunta 60 *Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	45,45	41,94	20,00	25,00	25,81	23,33
De acuerdo	45,46	51,61	63,33	59,37	51,61	73,34
Desacuerdo	9,09	6,45	10,00	15,63	19,35	3,33
Muy desacuerdo	0,00	0,00	6,67	0,00	3,23	0,00

Tabla 61. Pregunta 61 *Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,09	9,68	6,90	15,63	12,90	12,90
De acuerdo	24,24	19,35	6,90	15,63	9,68	12,90
Desacuerdo	30,30	38,71	58,61	43,74	41,94	51,62
Muy desacuerdo	36,37	32,26	27,59	25,00	35,48	22,58

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 62. Pregunta 62 *Hacer ejercicios de matemáticas en grupos me ayuda a aprender y a disfrutar más de las clases de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	21,88	45,16	6,67	16,13	20,00	29,03
De acuerdo	56,24	51,61	49,99	38,71	53,34	48,39
Desacuerdo	9,38	0,00	26,67	32,26	23,33	16,13
Muy desacuerdo	12,50	3,23	16,67	12,90	3,33	6,45

Tabla 63. Pregunta 63 *Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,15	22,58	13,33	18,75	20,00	29,03
De acuerdo	60,61	67,74	46,67	49,99	53,33	51,61
Desacuerdo	21,21	9,68	26,67	21,88	23,33	16,13
Muy desacuerdo	3,03	0,00	13,33	9,38	3,33	3,23

Tabla 64. Pregunta 64 *A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas*. Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	6,45	6,67	6,25	6,67	16,13
De acuerdo	9,09	12,90	16,67	18,75	10,00	32,26
Desacuerdo	57,58	58,07	53,33	43,75	50,00	41,93
Muy desacuerdo	33,33	22,58	23,33	31,25	33,33	9,68

Tabla 65. Pregunta 65 *La asignatura por la que empiezo a hacer los deberes para casa es las matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,18	22,58	23,33	31,25	26,67	35,48
De acuerdo	30,30	32,26	33,34	31,24	36,67	25,81
Desacuerdo	45,46	38,71	30,00	21,88	23,33	29,03
Muy desacuerdo	6,06	6,45	13,33	15,63	13,33	9,68

Tabla 66. Pregunta 66 *Cuando intervengo en clase y participo me lo paso mejor en clase y presto más atención.* Datos en %.

Alternativas	3ºA	3ºB	3ºC

Universidad Pontificia de Salamanca

	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	24,24	41,94	43,33	40,63	43,33	38,71
De acuerdo	72,73	45,16	46,67	43,74	40,00	51,61
Desacuerdo	3,03	12,90	6,67	15,63	16,67	6,45
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,33	0,00	0,00	3,23

Tabla 67. Pregunta 67 *Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.* Datos en %.

Alternativas	3ºA		3ºB		3ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	63,64	61,29	43,33	31,25	50,00	58,06
De acuerdo	30,30	32,26	43,34	46,87	40,00	32,26
Desacuerdo	6,06	0,00	13,33	12,50	10,00	9,68
Muy desacuerdo	0,00	6,45	0,00	9,38	0,00	0,00

Universidad Pontificia de Salamanca

Anexo II.2.: RESULTADOS DEL TEST DE MOTIVACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DEL CURSO DE SEGUNDO ESO

A) PREGUNTAS Y RESULTADOS DEL TEST DE MOTIVACIÓN. 3º ESO

Tabla 1. Pregunta 1.- *Las matemáticas son útiles y necesarias en todos los ámbitos de la vida.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,75	21,21	32,26	29,03	35,29	36,67
De acuerdo	65,61	60,61	54,83	51,62	55,89	33,33
Indiferente	9,38	18,18	9,68	12,90	5,88	23,33
Desacuerdo	3,13	0,00	0,00	6,45	2,94	6,67
Muy desacuerdo	3,13	0,00	3,23	0,00	0,00	0,00

Tabla 2. Pregunta 2 *Las matemáticas son difíciles, aburridas y alejadas de la realidad.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,03	0,00	3,23	0,00	2,94	3,45
De acuerdo	15,15	3,03	9,68	6,45	11,76	13,79
Indiferente	18,18	42,43	29,03	25,81	14,71	24,14
Desacuerdo	60,61	33,33	22,58	41,93	61,77	34,48
Muy desacuerdo	3,03	21,21	35,48	25,81	8,82	24,14

Tabla 3. Pregunta 3 *En matemáticas es fundamental aprenderse de memoria los conceptos, fórmulas y reglas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	27,27	30,31	32,25	16,13	26,47	17,24
De acuerdo	24,24	21,21	29,03	32,26	29,42	51,73
Indiferente	12,12	18,18	25,81	35,48	8,82	10,34
Desacuerdo	33,34	18,18	9,68	9,68	26,47	17,24
Muy desacuerdo	3,03	12,12	3,23	6,45	8,82	3,45

Tabla 4. Pregunta 4 *Casi todos los ejercicios de matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos, si se conoce la fórmula, regla o procedimiento que ha explicado el profesor o que figura en el libro de texto.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,15	30,31	36,66	19,35	29,41	33,33
De acuerdo	36,37	24,24	16,67	35,49	41,18	40,01

Universidad Pontificia de Salamanca

Indiferente	30,30	15,15	10,00	32,26	8,82	10,00
Desacuerdo	9,09	21,21	30,00	6,45	17,65	13,33
Muy desacuerdo	9,09	9,09	6,67	6,45	2,94	3,33

Tabla 5. Pregunta 5 *Las únicas matemáticas que me interesan son las que entran en el examen, porque son las más importantes y las que tengo que conocer.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,13	3,03	9,68	0,00	5,88	10,00
De acuerdo	12,50	15,15	12,90	3,23	11,76	13,33
Indiferente	40,61	36,37	25,81	16,13	20,59	20,00
Desacuerdo	21,88	21,21	29,03	61,29	32,36	36,67
Muy desacuerdo	21,88	24,24	22,58	19,35	29,41	20,00

Tabla 6. Pregunta 6 *La mejor forma de aprender matemáticas es a través del estudio individual*. Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,03	0,00	22,58	3,23	6,06	0,00
De acuerdo	18,18	0,00	12,90	9,68	12,12	20,00
Indiferente	9,09	30,30	32,26	51,61	33,34	33,33
Desacuerdo	36,37	54,55	16,13	22,58	21,21	46,67
Muy desacuerdo	33,33	15,15	16,13	12,90	27,27	0,00

Tabla 7. Pregunta 7 *El resultado al que llego tras intentar resolver un ejercicio es más importante que el proceso que ha seguido*. Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	6,25	3,03	6,45	0,00	3,03	3,33
De acuerdo	0,00	3,03	3,23	0,00	6,06	6,67
Indiferente	12,50	18,18	32,26	22,58	12,12	30,00
Desacuerdo	21,88	42,43	22,58	48,39	36,36	40,00
Muy desacuerdo	59,37	33,33	35,48	29,03	42,43	20,00

Tabla 8. Pregunta 8 *Sabiendo resolver los ejercicios que propone el profesor en clase, es posible solucionar otros del mismo tipo si sólo les han cambiado los datos.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	68,74	45,46	48,28	48,39	73,53	56,67
De acuerdo	15,63	39,39	41,38	45,16	17,65	36,67
Indiferente	6,25	9,09	10,34	6,45	2,94	3,33
Desacuerdo	3,13	6,06	0,00	0,00	2,94	0,00

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy desacuerdo	6,25	0,00	0,00	0,00	2,94	3,33

Tabla 9. Pregunta 9 *Las destrezas o habilidades que utilizo en clase para resolver ejercicios no tiene nada que ver con las que utilizo para resolver ejercicios en la vida cotidiana.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,03	0,00	9,68	0,00	11,76	0,00
De acuerdo	18,18	15,15	9,68	9,68	14,71	13,33
Indiferente	39,40	42,43	35,48	48,38	11,76	36,67
Desacuerdo	24,24	21,21	22,58	25,81	47,06	30,00
Muy desacuerdo	15,15	21,21	22,58	16,13	14,71	20,00

Tabla 10. Pregunta 10 *Busco distintas maneras y métodos para resolver un ejercicio.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	24,24	3,03	16,13	16,13	8,82	10,00
De acuerdo	36,37	27,27	38,70	58,06	47,07	43,34
Indiferente	9,09	45,46	25,81	25,81	11,76	23,33
Desacuerdo	18,18	12,12	9,68	0,00	23,53	10,00
Muy desacuerdo	12,12	12,12	9,68	0,00	8,82	13,33

Tabla 11. Pregunta 11 *Aprendo mucho inventando nuevos ejercicios.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,38	18,18	3,33	12,90	0,00	3,33
De acuerdo	18,75	9,09	26,67	16,13	20,59	30,00
Indiferente	34,36	48,49	30,00	41,94	47,05	36,67
Desacuerdo	9,38	12,12	26,67	16,13	14,71	16,67
Muy desacuerdo	28,13	12,12	13,33	12,90	17,65	13,33

Tabla 12. Pregunta 12 *El gusto por las matemáticas influye a la hora de escoger una determinada modalidad de bachillerato en la que estén o no presentes.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	66,67	45,46	29,03	29,03	41,19	36,67
De acuerdo	16,67	42,42	45,16	54,84	32,35	43,33
Indiferente	10,00	3,03	22,58	16,13	11,76	16,67
Desacuerdo	3,33	9,09	3,23	0,00	5,88	3,33
Muy desacuerdo	3,33	0,00	0,00	0,00	8,82	0,00

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 13. Pregunta 13 *El ser buen/a alumno/a en matemáticas (sacar buenas notas, tener buena actitud) te hace sentirte más valorado/a y admirado/a por los compañeros.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,38	15,15	19,35	19,35	20,59	10,00
De acuerdo	31,25	24,24	19,35	9,68	26,47	36,67
Indiferente	34,36	33,34	41,94	54,84	17,65	46,66
Desacuerdo	9,38	12,12	9,68	12,90	8,82	0,00
Muy desacuerdo	15,63	15,15	9,68	3,23	26,47	6,67

Tabla 14. Pregunta 14 *Si no comprendo las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí*. Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	6,06	0,00	12,90	3,23	8,82	0,00
De acuerdo	24,24	9,09	12,90	6,45	8,82	24,14
Indiferente	18,18	30,30	22,58	32,26	14,71	17,24
Desacuerdo	24,24	42,43	16,13	38,71	26,47	41,38
Muy desacuerdo	27,28	18,18	35,49	19,35	41,18	17,24

Tabla 15. Pregunta 15 *Mi rendimiento en las matemáticas depende en gran medida de la actitud del/a profesor/a hacia mí.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,23	6,06	6,45	9,68	11,76	6,67
De acuerdo	19,35	18,18	25,81	16,13	11,76	13,33
Indiferente	19,35	39,40	19,35	22,58	17,65	26,67
Desacuerdo	35,49	27,27	12,90	32,26	17,65	30,00
Muy desacuerdo	22,58	9,09	35,49	19,35	41,18	23,33

Tabla 16. Pregunta 16 *Cuando dedico más tiempo de estudio a las matemáticas obtengo mejores resultados en la resolución de ejercicios.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	37,49	39,39	41,93	32,26	47,06	27,59
De acuerdo	15,63	45,46	32,26	41,94	23,53	44,82
Indiferente	25,00	6,06	9,68	12,90	5,88	20,69
Desacuerdo	15,63	9,09	6,45	12,90	17,65	3,45
Muy desacuerdo	6,25	0,00	9,68	0,00	5,88	3,45

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 17. Pregunta 17 *Cuando resuelvo un ejercicio suelo dudar de si el resultado es correcto.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	21,88	12,12	16,13	6,45	14,71	10,00
De acuerdo	43,73	27,27	25,80	19,35	29,41	36,67
Indiferente	15,63	36,37	22,58	51,62	23,53	36,67
Desacuerdo	15,63	21,21	32,26	12,90	26,47	13,33
Muy desacuerdo	3,13	3,03	3,23	9,68	5,88	3,33

Tabla 18. Pregunta 18 *Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a los ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,13	6,06	16,13	12,90	23,53	10,00
De acuerdo	18,75	21,21	25,81	35,48	29,41	33,33
Indiferente	43,74	33,33	32,25	41,94	14,71	26,67
Desacuerdo	25,00	33,34	16,13	6,45	26,47	20,00
Muy desacuerdo	9,38	6,06	9,68	3,23	5,88	10,00

Tabla 19. Pregunta 19 *Me considero muy capaz y hábil en matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,23	0,00	6,45	6,45	5,88	10,00
De acuerdo	19,35	30,30	25,81	25,81	23,53	36,66
Indiferente	19,35	39,40	32,26	29,03	11,76	16,67
Desacuerdo	32,26	12,12	32,27	22,58	29,42	26,67
Muy desacuerdo	25,81	18,18	3,23	16,13	29,41	10,00

Tabla 20. Pregunta 20 *Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando resuelvo ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,38	15,15	19,35	6,67	17,65	16,67
De acuerdo	21,88	30,31	29,03	33,33	32,35	33,33
Indiferente	37,48	30,30	32,26	43,33	23,53	20,00
Desacuerdo	28,13	15,15	16,13	10,00	20,59	26,67
Muy desacuerdo	3,13	9,09	3,23	6,67	5,88	3,33

Tabla 21. Resultados a la pregunta 21 *Cuando me esfuerzo en la resolución de un ejercicio suelo dar con el resultado correcto.* Datos en %.

Universidad Pontificia de Salamanca

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,90	9,09	29,03	16,13	26,47	13,33
De acuerdo	45,17	54,55	19,35	38,71	41,18	50,00
Indiferente	12,90	15,15	32,27	29,03	17,65	26,67
Desacuerdo	16,13	15,15	12,90	12,90	8,82	6,67
Muy desacuerdo	12,90	6,06	6,45	3,23	5,88	3,33

Tabla 22. Pregunta 22 *La suerte influye a la hora de resolver con éxito un ejercicio de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,13	3,03	3,23	0,00	0,00	3,33
De acuerdo	3,13	3,03	16,14	9,68	5,88	6,67
Indiferente	37,50	33,33	3,23	35,48	20,59	23,33
Desacuerdo	37,49	39,40	38,71	32,26	26,47	20,00
Muy desacuerdo	18,75	21,21	38,71	22,58	47,06	46,67

Tabla 23. Pregunta 23 *En clase de matemáticas los/as profesores/as nos emplean gran variedad de medios y ejemplos prácticos que me permiten relacionar las matemáticas con situaciones de mi vida diaria.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	18,75	27,27	22,58	25,81	17,65	36,67
De acuerdo	34,36	21,21	32,27	35,48	52,94	40,00
Indiferente	34,38	30,31	19,35	35,48	5,88	13,33
Desacuerdo	9,38	12,12	19,35	3,23	17,65	10,00
Muy desacuerdo	3,13	9,09	6,45	0,00	5,88	0,00

Tabla 24. Pregunta 24 *Cuando los/as profesores/as nos proponen trabajos en grupo suele haber un alto nivel de interés y participación en clase*. Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,68	3,03	25,81	22,58	20,59	23,33
De acuerdo	38,71	18,18	32,25	41,93	29,41	33,34
Indiferente	32,26	66,67	29,03	25,81	32,36	30,00
Desacuerdo	6,45	9,09	3,23	6,45	11,76	10,00
Muy desacuerdo	12,90	3,03	9,68	3,23	5,88	3,33

Tabla 25. Pregunta 25 *Los/as profesores/as de matemáticas están siempre dispuestos/as a prestar ayuda y a aclarar las dudas y dificultades que surjan durante la clase.* Datos en %.

Universidad Pontificia de Salamanca

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	64,52	63,64	40,00	38,71	75,76	76,67
De acuerdo	35,48	30,30	40,00	45,16	21,21	13,33
Indiferente	0,00	3,03	13,34	12,90	3,03	6,67
Desacuerdo	0,00	0,00	3,33	3,23	0,00	0,00
Muy desacuerdo	0,00	3,03	3,33	0,00	0,00	3,33

Tabla 26. Pregunta 26 *Para mis profesores/as de matemáticas soy un/a buen/a alumno/a.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	6,45	9,09	23,33	3,23	9,38	17,86
De acuerdo	22,58	21,21	20,00	38,71	43,74	32,14
Indiferente	48,39	60,61	43,34	54,83	37,50	42,86
Desacuerdo	9,68	6,06	10,00	0,00	9,38	7,14
Muy desacuerdo	12,90	3,03	3,33	3,23	0,00	0,00

Tabla 27. Pregunta 27 *Mis relaciones con los/as profesores/as de matemáticas son satisfactorias*. Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,23	12,12	19,35	29,03	32,35	40,00
De acuerdo	58,06	36,36	48,39	38,71	41,18	43,33
Indiferente	25,81	39,40	29,03	29,03	20,59	10,00
Desacuerdo	6,45	12,12	3,23	3,23	5,88	6,67
Muy desacuerdo	6,45	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 28. Pregunta 28 *Los/as profesores/as de matemáticas que explican con bastante claridad y entusiasmo y son agradables hacen que gusten las matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	34,38	27,27	54,84	41,94	64,71	43,33
De acuerdo	37,49	51,52	19,35	41,93	32,35	50,01
Indiferente	21,88	15,15	19,35	12,90	2,94	3,33
Desacuerdo	6,25	6,06	3,23	3,23	0,00	3,33
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,23	0,00	0,00	0,00

Tabla 29. Pregunta 29 *Los/as profesores/as de matemáticas se interesan por mi evolución y rendimiento en la materia.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy de acuerdo	31,25	27,27	35,48	45,16	64,71	44,82
De acuerdo	49,99	42,43	45,16	41,94	26,47	41,38
Indiferente	15,63	24,24	16,13	12,90	8,82	6,90
Desacuerdo	3,13	3,03	3,23	0,00	0,00	6,90
Muy desacuerdo	0,00	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 30. Pregunta 30 *En clase de matemáticas los/as profesores/as valoran mi esfuerzo y reconocen mi trabajo diario en la asignatura.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	17,24	15,15	32,26	35,48	38,24	53,34
De acuerdo	31,03	45,46	25,81	51,62	41,17	33,33
Indiferente	41,39	30,30	19,35	12,90	17,65	10,00
Desacuerdo	10,34	6,06	16,13	0,00	2,94	3,33
Muy desacuerdo	0,00	3,03	6,45	0,00	0,00	0,00

Tabla 31. Pregunta 31 *Alguno de mis padres espera de mí buenos resultados en matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	62,49	45,46	54,84	64,51	61,77	56,67
De acuerdo	21,88	36,36	22,58	25,81	32,35	33,33
Indiferente	12,50	12,12	19,35	9,68	2,94	3,33
Desacuerdo	0,00	0,00	3,23	0,00	2,94	6,67
Muy desacuerdo	3,13	6,06	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 32. Pregunta 32 *Las matemáticas que nos enseñan en el instituto/colegio no les interesan a mis padres.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,90	9,09	20,00	3,23	14,71	10,00
De acuerdo	0,00	0,00	3,33	0,00	8,82	0,00
Indiferente	12,90	6,06	3,33	0,00	5,88	3,33
Desacuerdo	6,45	18,18	6,67	12,90	2,94	6,67
Muy desacuerdo	67,75	66,67	66,67	83,87	67,65	80,00

Tabla 33. Pregunta 33 *Alguno de mis padres era bastante bueno/a resolviendo ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	65,62	42,43	64,52	64,52	55,89	56,66

Universidad Pontificia de Salamanca

De acuerdo	21,88	24,24	19,35	19,35	26,47	26,67
Indiferente	6,25	24,24	16,13	12,90	11,76	10,00
Desacuerdo	6,25	6,06	0,00	3,23	5,88	6,67
Muy desacuerdo	0,00	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 34. Pregunta 34 *Alguno de mis padres me anima y ayuda con los ejercicios de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	45,15	39,40	35,48	41,94	45,46	44,83
De acuerdo	38,71	30,30	38,71	35,48	39,39	24,14
Indiferente	3,23	24,24	12,90	9,68	6,06	20,69
Desacuerdo	9,68	3,03	3,23	6,45	6,06	10,34
Muy desacuerdo	3,23	3,03	9,68	6,45	3,03	0,00

Tabla 35. Pregunta 35 *Mis amigos/as pasan de las matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	3,03	9,68	0,00	0,00	3,33
De acuerdo	6,45	3,03	3,23	6,45	2,94	10,00
Indiferente	32,26	27,27	22,58	32,26	29,41	23,33
Desacuerdo	12,90	33,33	45,16	35,48	35,30	36,67
Muy desacuerdo	48,39	33,34	19,35	25,81	32,35	26,67

Tabla 36. Pregunta 36 *Las matemáticas son importantes porque las profesiones más remuneradas económicamente están relacionadas con ellas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	40,63	18,18	35,48	16,13	39,39	30,00
De acuerdo	46,87	30,30	22,58	41,93	39,40	23,33
Indiferente	12,50	42,43	38,71	35,48	18,18	33,34
Desacuerdo	0,00	9,09	0,00	3,23	3,03	10,00
Muy desacuerdo	0,00	0,00	3,23	3,23	0,00	3,33

Tabla 37. Pregunta 37 *La gente a la que les gustan las matemáticas suelen ser un poco raras.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	6,06	3,23	0,00	0,00	6,67
De acuerdo	6,25	15,15	3,23	0,00	3,03	6,67
Indiferente	21,88	24,25	16,13	9,68	21,21	23,33

Universidad Pontificia de Salamanca

Desacuerdo	25,00	18,18	19,35	32,26	24,24	23,33
Muy desacuerdo	46,87	36,36	58,06	58,06	51,52	40,00

Tabla 38. Pregunta 38 *El aumentar mis conocimientos matemáticos me hará sentir una persona competente en la sociedad.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,63	15,15	16,13	16,67	19,35	26,67
De acuerdo	18,75	27,27	32,26	23,33	29,03	43,33
Indiferente	56,24	42,43	38,70	53,34	41,94	26,67
Desacuerdo	6,25	9,09	9,68	3,33	6,45	0,00
Muy desacuerdo	3,13	6,06	3,23	3,33	3,23	3,33

Tabla 39. Pregunta 39 *Las matemáticas son para cabezas inteligentes y creativas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	15,63	12,12	9,68	0,00	15,15	6,67
De acuerdo	34,36	18,18	19,35	29,03	24,24	36,66
Indiferente	21,88	42,43	29,03	48,39	12,12	16,67
Desacuerdo	12,50	24,24	25,81	12,90	15,15	20,00
Muy desacuerdo	15,63	3,03	16,13	9,68	33,34	20,00

Tabla 40. Pregunta 40 *Dominar las matemáticas me permitirá tener éxito en mis estudios posteriores.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	28,13	21,21	22,58	35,48	39,39	26,67
De acuerdo	56,24	57,58	45,16	51,61	39,40	50,00
Indiferente	6,25	12,12	29,03	9,68	9,09	16,67
Desacuerdo	3,13	6,06	0,00	3,23	12,12	3,33
Muy desacuerdo	6,25	3,03	3,23	0,00	0,00	3,33

Tabla 41. Pregunta 41 *La gente que es buena en matemáticas no tiene que gastar tiempo pensando cómo resolver un ejercicio.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,50	21,88	19,35	0,00	12,12	6,67
De acuerdo	15,63	9,38	19,35	19,35	30,31	30,00
Indiferente	25,00	21,86	22,58	48,39	21,21	23,33
Desacuerdo	28,12	34,38	12,90	22,58	24,24	26,67

Universidad Pontificia de Salamanca

Muy desacuerdo	18,75	12,50	25,82	9,68	12,12	13,33

Tabla 42. Pregunta 42 *Las clases de matemáticas se me hacen eternas, son muy pesadas, no estoy a gusto y siento deseos de salir corriendo.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	0,00	9,09	0,00	3,23	0,00	0,00
De acuerdo	0,00	15,15	0,00	9,68	0,00	6,67
Indiferente	0,00	36,37	0,00	19,35	0,00	36,66
Desacuerdo	0,00	24,24	0,00	51,61	0,00	30,00
Muy desacuerdo	0,00	15,15	0,00	16,13	0,00	26,67

Tabla 43. Pregunta 43 *Disfruto los días que no tenemos clases de matemáticas porque no me interesan ni me atraen.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	28,12	9,09	6,45	3,23	12,12	3,45
De acuerdo	18,75	9,09	12,90	16,13	9,09	10,34
Indiferente	15,63	54,55	45,17	38,71	36,37	31,03
Desacuerdo	28,12	15,15	12,90	35,48	27,27	27,59
Muy desacuerdo	9,38	12,12	22,58	6,45	15,15	27,59

Tabla 44. Pregunta 44 *Ante un ejercicio complicado suelo darme por vencido fácilmente.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,38	9,09	0,00	0,00	6,06	3,33
De acuerdo	15,63	24,25	26,67	6,45	15,15	16,67
Indiferente	18,75	24,24	23,33	22,58	12,12	30,00
Desacuerdo	37,49	39,39	23,33	51,62	48,49	40,00
Muy desacuerdo	18,75	3,03	26,67	19,35	18,18	10,00

Tabla 45. Pregunta 45 *Cuando me enfrento a un ejercicio experimento mucha curiosidad por conocer la solución.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	31,24	21,21	20,00	9,68	15,15	10,00
De acuerdo	15,63	18,18	29,99	22,58	42,43	56,67
Indiferente	12,50	45,46	26,67	58,06	18,18	16,67
Desacuerdo	28,13	12,12	16,67	6,45	12,12	13,33
Muy desacuerdo	12,50	3,03	6,67	3,23	12,12	3,33

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 46. Pregunta 46 *Me angustio y siento miedo cuando el/la profesor/a me propone "por sorpresa" que resuelva un ejercicio.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	21,88	15,15	16,67	6,45	3,03	6,67
De acuerdo	15,63	18,18	16,67	19,35	24,24	20,00
Indiferente	37,49	33,34	29,99	32,26	27,27	36,67
Desacuerdo	18,75	12,12	20,00	32,26	36,37	23,33
Muy desacuerdo	6,25	21,21	16,67	9,68	9,09	13,33

Tabla 47. Pregunta 47 *Cuando resuelvo ejercicios en grupo tengo más seguridad en mí mismo/a.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	37,48	15,15	33,34	19,35	27,27	20,00
De acuerdo	34,38	39,40	30,00	51,61	27,28	43,34
Indiferente	21,88	30,30	13,33	25,81	21,21	23,33
Desacuerdo	3,13	9,09	20,00	0,00	24,24	10,00
Muy desacuerdo	3,13	6,06	3,33	3,23	0,00	3,33

Tabla 48. Pregunta 48 *Cuando me atasco o bloqueo en la resolución de un ejercicio empiezo a sentirme inseguro/a, desesperado/a, nervioso/a.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	25,00	9,09	20,00	3,23	24,24	23,33
De acuerdo	37,49	36,37	20,00	22,58	33,34	40,00
Indiferente	21,88	33,33	30,00	32,25	12,12	20,00
Desacuerdo	6,25	21,21	16,67	25,81	24,24	16,67
Muy desacuerdo	9,38	0,00	13,33	16,13	6,06	0,00

Tabla 49. Pregunta 49 *Si no encuentro la solución de un ejercicio tengo la sensación de haber fracasado y de haber perdido el tiempo.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,13	6,06	6,67	6,45	12,12	13,33
De acuerdo	31,25	18,18	30,00	16,13	30,30	20,00
Indiferente	31,24	30,30	16,67	29,03	9,09	26,67
Desacuerdo	31,25	36,37	39,99	32,26	36,37	30,00
Muy desacuerdo	3,13	9,09	6,67	16,13	12,12	10,00

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 50. Pregunta 50 *Me provoca gran satisfacción llegar a resolver con éxito un ejercicio matemático.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	65,62	51,52	80,01	54,84	48,49	56,67
De acuerdo	25,00	36,36	13,33	22,58	39,39	36,67
Indiferente	6,25	9,09	3,33	16,13	6,06	3,33
Desacuerdo	0,00	0,00	3,33	6,45	3,03	0,00
Muy desacuerdo	3,13	3,03	0,00	0,00	3,03	3,33

Tabla 51. Pregunta 51 *Cuando fracasan mis intentos por resolver un ejercicio lo intento de nuevo.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	22,58	18,18	16,67	19,35	24,24	26,67
De acuerdo	35,48	30,31	46,66	45,17	45,46	30,00
Indiferente	16,13	30,30	20,00	29,03	6,06	33,33
Desacuerdo	25,81	21,21	16,67	6,45	18,18	10,00
Muy desacuerdo	0,00	0,00	0,00	0,00	6,06	0,00

Tabla 52. Pregunta 52 *La resolución de los ejercicios exige esfuerzo, perseverancia y paciencia.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	45,15	36,36	23,33	45,16	51,52	34,48
De acuerdo	38,71	42,43	46,67	51,61	42,42	51,73
Indiferente	9,68	18,18	30,00	3,23	3,03	10,34
Desacuerdo	3,23	0,00	0,00	0,00	3,03	3,45
Muy desacuerdo	3,23	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 53. Pregunta 53 *Suelo prestar atención en las clases de matemáticas y preguntar las dudas que me surgen porque me ayuda a entender, a aprender y me gusta la materia.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,90	18,18	23,33	16,13	21,21	30,00
De acuerdo	25,81	48,49	53,34	41,93	51,52	53,34
Indiferente	41,94	24,24	13,33	38,71	15,15	3,33
Desacuerdo	19,35	3,03	10,00	3,23	12,12	13,33
Muy desacuerdo	0,00	6,06	0,00	0,00	0,00	0,00

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 54. Pregunta 54 *Me gustan las clases de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,90	15,15	16,67	6,45	18,18	20,00
De acuerdo	12,90	21,21	26,67	32,26	27,27	36,66
Indiferente	29,03	30,31	33,32	45,16	33,34	30,00
Desacuerdo	16,13	18,18	16,67	12,90	12,12	6,67
Muy desacuerdo	29,04	15,15	6,67	3,23	9,09	6,67

Tabla 55. Pregunta 55 *En las clases de matemáticas suelo distraerme pensando en mis cosas, hablando con mis compañeros/as, etc. porque no me entero de nada, me aburro y lo estudio mejor por mi cuenta o me lo explica mejor mi profesor/a particular o el de la academia.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	6,45	3,03	10,00	0,00	0,00	6,67
De acuerdo	12,90	9,09	3,33	6,45	9,09	0,00
Indiferente	12,90	36,37	16,67	12,90	18,18	33,33
Desacuerdo	45,17	33,33	50,00	58,07	39,40	40,00
Muy desacuerdo	22,58	18,18	20,00	22,58	33,33	20,00

Tabla 56. Pregunta 56 *Cuando me salen los ejercicios tengo ganas de hacer más y cuando no entiendo o no me salen me cuesta hacer los deberes.* Datosen %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	19,35	24,24	29,99	22,58	18,18	23,33
De acuerdo	29,03	39,40	26,67	29,03	54,55	40,00
Indiferente	32,26	24,24	26,67	38,71	18,18	16,67
Desacuerdo	9,68	9,09	10,00	0,00	9,09	16,67
Muy desacuerdo	9,68	3,03	6,67	9,68	0,00	3,33

Tabla 57. Pregunta 57 *Estudio matemáticas porque mis padres son muy exigentes con la nota de mis exámenes.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	3,23	0,00	10,00	3,23	12,12	6,68
De acuerdo	19,35	12,12	10,00	12,90	27,27	23,33
Indiferente	48,39	45,46	46,67	35,48	15,15	23,33
Desacuerdo	19,35	30,30	23,33	41,94	27,28	23,33
Muy desacuerdo	9,68	12,12	10,00	6,45	18,18	23,33

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 58. Pregunta 58 *Me cuesta menos entender las cosas cuando se utiliza en la clase ejemplos o actividades o materiales que no son el libro de texto o la explicación del profesor.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	35,48	27,27	30,00	29,03	21,21	26,67
De acuerdo	45,16	48,49	30,00	45,17	42,43	46,67
Indiferente	6,45	21,21	23,33	12,90	27,27	13,33
Desacuerdo	3,23	0,00	10,00	12,90	3,03	10,00
Muy desacuerdo	9,68	3,03	6,67	0,00	6,06	3,33

Tabla 59. Pregunta 59 *Me entero mejor de la explicación cuando hacemos los ejercicios en grupos y no solo las hace el profesor.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	29,03	18,18	30,00	32,26	18,18	20,00
De acuerdo	25,81	27,27	33,33	25,81	39,40	36,67
Indiferente	35,48	48,49	26,67	35,47	27,27	33,33
Desacuerdo	6,45	6,06	6,67	3,23	12,12	6,67
Muy desacuerdo	3,23	0,00	3,33	3,23	3,03	3,33

Tabla 60. Pregunta 60 *Los ejercicios para casa me ayudan a entender la materia y a darme cuenta de las dificultades.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	33,33	15,15	20,69	25,81	39,39	20,00
De acuerdo	40,01	66,67	41,38	51,61	45,46	70,01
Indiferente	13,33	12,12	13,79	19,35	12,12	3,33
Desacuerdo	10,00	3,03	20,69	0,00	3,03	3,33
Muy desacuerdo	3,33	3,03	3,45	3,23	0,00	3,33

Tabla 61. Pregunta 61 *Usar el ordenador, webs de matemáticas me ayudan a aprender matemáticas y tengo más ganas de las clases de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	10,00	3,03	3,33	6,45	6,25	30,00
De acuerdo	13,33	12,12	10,00	19,35	9,38	20,00
Indiferente	36,67	27,27	40,00	38,72	31,25	30,00
Desacuerdo	30,00	30,31	20,00	16,13	18,75	13,33
Muy desacuerdo	10,00	27,27	26,67	19,35	34,37	6,67

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 62. Pregunta 62 *Hacer ejercicios de matemáticas en grupos me ayuda a aprender y a disfrutar más de las clases de matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	25,81	24,24	33,34	22,58	21,21	33,33
De acuerdo	54,83	27,28	26,67	58,07	36,37	43,34
Indiferente	12,90	27,27	23,33	19,35	30,30	13,33
Desacuerdo	3,23	15,15	13,33	0,00	6,06	6,67
Muy desacuerdo	3,23	6,06	3,33	0,00	6,06	3,33

Tabla 63. Pregunta 63 *Lo que aprendo en matemáticas me ayuda y lo utilizo en otras asignaturas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	9,68	9,09	6,90	6,90	15,63	26,67
De acuerdo	25,81	39,40	24,14	44,82	34,37	40,00
Indiferente	32,25	24,24	44,83	27,59	18,75	20,00
Desacuerdo	29,03	15,15	10,34	17,24	31,25	10,00
Muy desacuerdo	3,23	12,12	13,79	3,45	0,00	3,33

Tabla 64. Pregunta 64 *A la materia que le dedico más tiempo en casa es a las matemáticas*. Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	25,81	15,15	13,33	13,79	12,12	13,33
De acuerdo	16,13	30,30	20,00	20,69	21,21	26,67
Indiferente	29,03	36,37	43,34	37,93	21,21	20,00
Desacuerdo	16,13	18,18	13,33	27,59	27,28	30,00
Muy desacuerdo	12,90	0,00	10,00	0,00	18,18	10,00

Tabla 65. Pregunta 65 *La asignatura por la que empiezo a hacer los deberes para casa es las matemáticas.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	29,03	21,88	16,67	24,14	12,12	20,00
De acuerdo	29,03	31,25	26,67	31,04	39,40	26,67
Indiferente	29,03	31,24	36,66	31,03	27,27	23,33
Desacuerdo	12,91	12,50	16,67	13,79	15,15	16,67
Muy desacuerdo	0,00	3,13	3,33	0,00	6,06	13,33

Universidad Pontificia de Salamanca

Tabla 66. Pregunta 66 *Cuando intervengo en clase y participo me lo paso mejor en clase y presto más atención.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	12,90	24,24	46,67	48,28	18,18	36,67
De acuerdo	45,16	39,40	33,33	37,93	60,61	46,66
Indiferente	25,81	24,24	16,67	10,34	12,12	10,00
Desacuerdo	12,90	6,06	3,33	3,45	9,09	6,67
Muy desacuerdo	3,23	6,06	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabla 67. Pregunta 67 *Cuando me felicitan por hacer bien los ejercicios de casa, los exámenes, y por mi actuación tengo más ganas de trabajar en la asignatura.* Datos en %.

Alternativas	2ºA		2ºB		2ºC	
	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest	Pretest	Posttest
Muy de acuerdo	32,26	33,33	63,33	51,73	48,49	46,67
De acuerdo	41,93	36,37	16,67	37,93	27,27	30,00
Indiferente	25,81	24,24	13,33	10,34	18,18	20,00
Desacuerdo	0,00	3,03	6,67	0,00	6,06	3,33
Muy desacuerdo	0,00	3,03	0,00	0,00	0,00	0,00

Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXOS III: EJERCICIOS Y PROBLEMAS

CAPÍTULO VI

Anexo III.-1: TRABAJO DE ÁLGEBRA PREPARADO PARA EL GRUPO TIC

Miriam MÉNDEZ COCA

1.- SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Contenidos:

1.- Ficha de videos para la explicación de los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales.

2.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

3.- Ficha con videos para la de resolución de problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales.

4.- Ficha de prácticas de problemas en el aula de informática.

5.- ANEJO 1: WIRIS

6.- ANEJO 2: DESCARTES

7.- ANEJO 3: CON PAPAS

Universidad Pontificia de Salamanca

1.- SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales del profesor ***Juan Medina Molina***, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

I. Método de sustitución

Ejemplo1:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=275VK69OJPY

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/275VK69OJPY?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 2,20'

Ejemplo2:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -5x + 2y = -3 \end{cases}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=31bsDRLu7tk

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/31bsDRLu7tk?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 4,26'

Universidad Pontificia de Salamanca

II. Método de Igualación

Ejemplo:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -5y + 2y = -3 \end{cases}$$

- **Link:**

  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=fzCd19w0XLU

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/fzCd19w0XLU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 3,43'

III. Método de reducción:

Ejemplo:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x - 2y = -9 \end{cases}$$

- **Link:**

  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=PH3neALwpy4

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/PH3neALwpy4?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 2,14'

IV. Método Gráfico:

Ejemplo:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

- **Link:**

  http://www.youtube.com/watch?list=SPEF127489B7AD151E&v=fJ__PcO46Uw&feature=player_detailpage

Universidad Pontificia de Salamanca

<iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/fJ__PcO46Uw?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 4,36'

V. Sistemas de dos ecuaciones con fracciones:

Ejemplo:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{4}+\dfrac{5y-2}{6}=1 \\ \dfrac{-2x+3}{10}-\dfrac{3x-y}{4}=2 \end{cases}$$

- **Link:**

  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=WzSsiHksdtE

- **Duración:** 9,13'

Universidad Pontificia de Salamanca

2.- SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de sistemas de dos ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material WIRIS

- **Información:** resuelve ecuaciones rápidamente aunque no muestra el procedimiento.
- **Link:** http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/
- **Material:** ANEXO 1

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo Descartes

- **Información:** claro, completo y sencillo. Autor Miguel Angel Cabezón Ochoa.
- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones/index.htm

  Donde seleccionamos: sistemas de dos ecuaciones lineales.
- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página.

  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- **Manual:** ANEXO 2

Universidad Pontificia de Salamanca

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico, amplio e incluye ejercicios de teoría.
- **Link:**

  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm
- **Manual:** ANEXO3

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos. Las comprobaciones funcionan a veces.
- **Link:** http://conteni2.educarex.es/mats/11812/contenido/

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Problema de anchoas y atún

- **Enunciado:** Tres latas de anchoas y cinco de atún cuestan 6€. Una lata de anchoas y tres de atún cuestan 28€. ¿Cuánto cuesta la lata de anchoas y la lata de atún?

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=BeXyLIrIHo0

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/BeXyLIrIHo0?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 4,12'

Problema de coches y ruedas

- **Enunciado:** En un concesionario tenemos entre coches y motos 30 vehículos y 100 ruedas. ¿Cuántos coches y cuántas motos tenemos?

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=Aes3Z3msG3I

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/Aes3Z3msG3I?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,47'

Problema de cifras

- **Enunciado:** Las decenas de un número son el triple de las unidades. Si intercambiamos las cifras del número éste disminuye en 50 unidades. ¿Cuál es el número?

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=NP8LdzeBvn8

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/NP8LdzeBvn8?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 7,06'

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- PROBLEMAS CON SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de sistemas de dos ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico, amplio e incluye ejercicios de teoría.
- **Link:**

  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm

- **Manual:** ANEXO3

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos. Las comprobaciones funcionan a veces.
- **Link:**

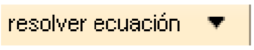
  http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

Material Interactivo Vitutor:

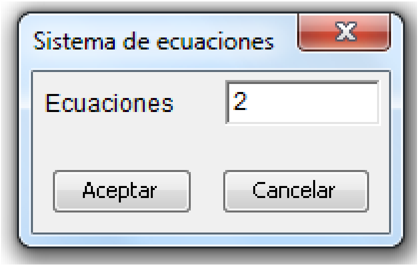
- **Información:**
- **Link:** http://www.vitutor.com/ecuaciones/sistemas/p_e.html

Universidad Pontificia de Salamanca

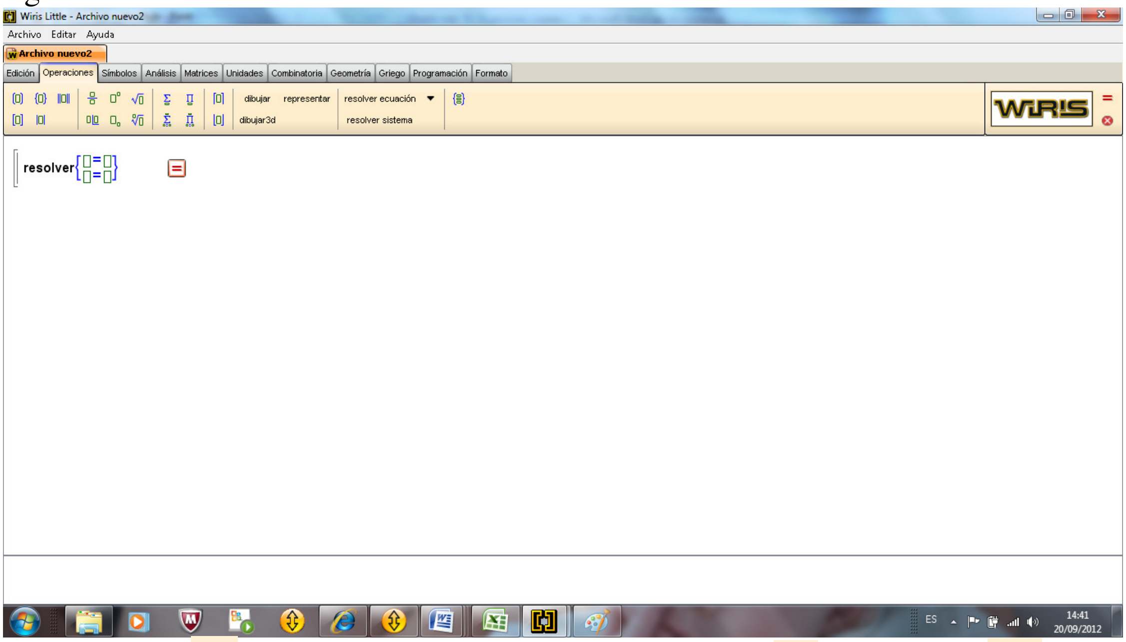
5.- Anejo 1: WIRIS

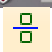
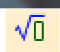
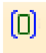
WIRIS: La herramienta principal para resolver ecuaciones es el botón 

Cuando queremos escribir las ecuaciones lo primero que pulsamos es este botón
Cuando queremos escribir un sistema lo primero que pulsamos es ese botón y a continuación nos sale una ventana preguntando cuántas ecuaciones tiene nuestro sistema



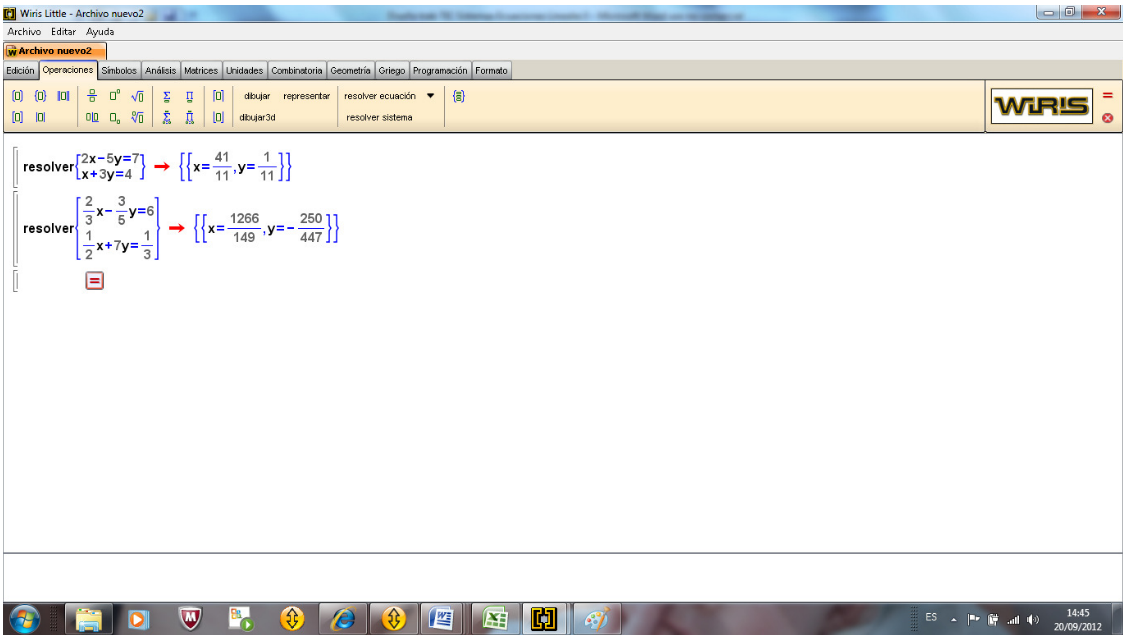
Ponemos el número de ecuaciones y damos a aceptar y nos queda la pantalla de la siguiente forma:

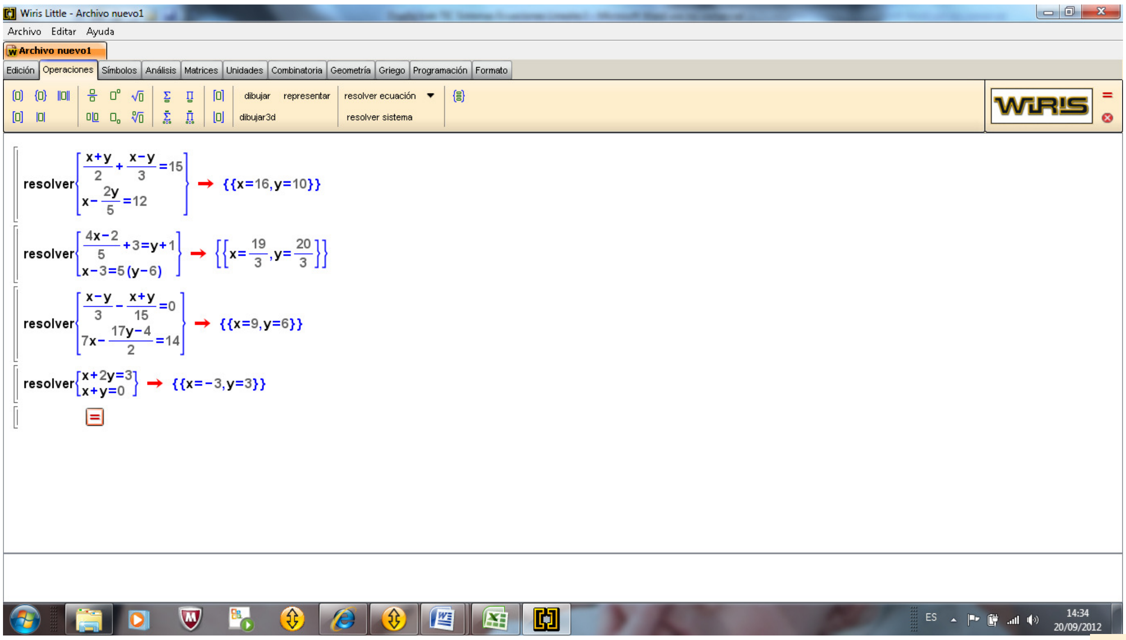


Los botones  nos sirven para escribir fracciones,  potencias,  raices cuadradas,  cualquier tipo de raiz. Además podemos utilizar los botones de  paréntesis,  corchetes, etc. Cuando hayas terminado de escribir la ecuación pulsa el botón.

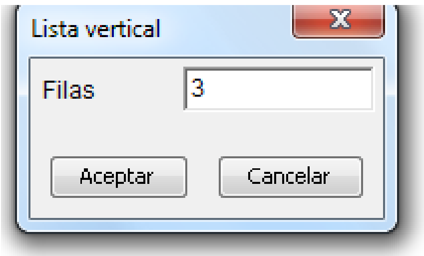
Y conseguirás el resultado p.e.

Universidad Pontificia de Salamanca



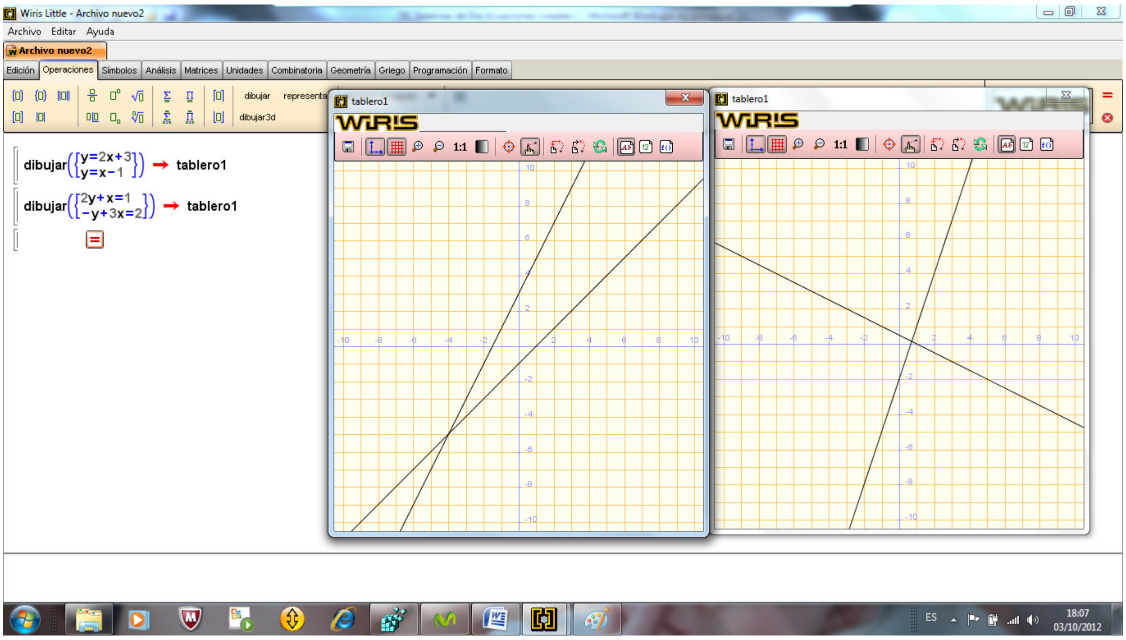


Forma de dibujar un sistema sería pulsar el botón de dibujar, luego pulsa el botón  para que nos pinte varias ecuaciones en el mismo dibujo



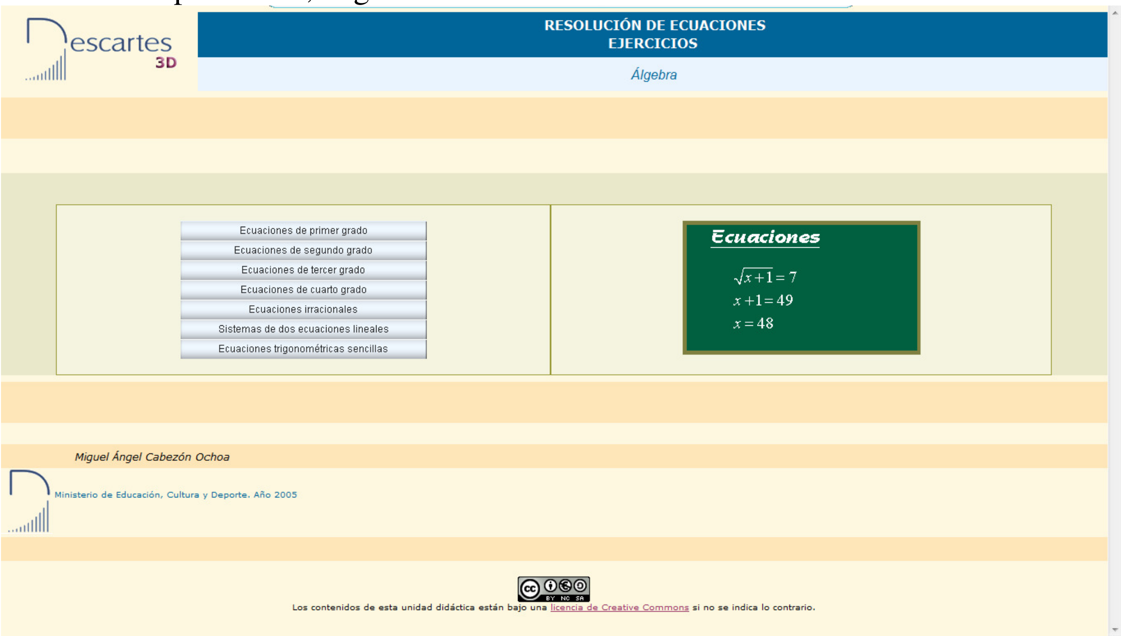
Luego escribimos las ecuaciones y damos al igual y aparece una ventana con el dibujo

Universidad Pontificia de Salamanca

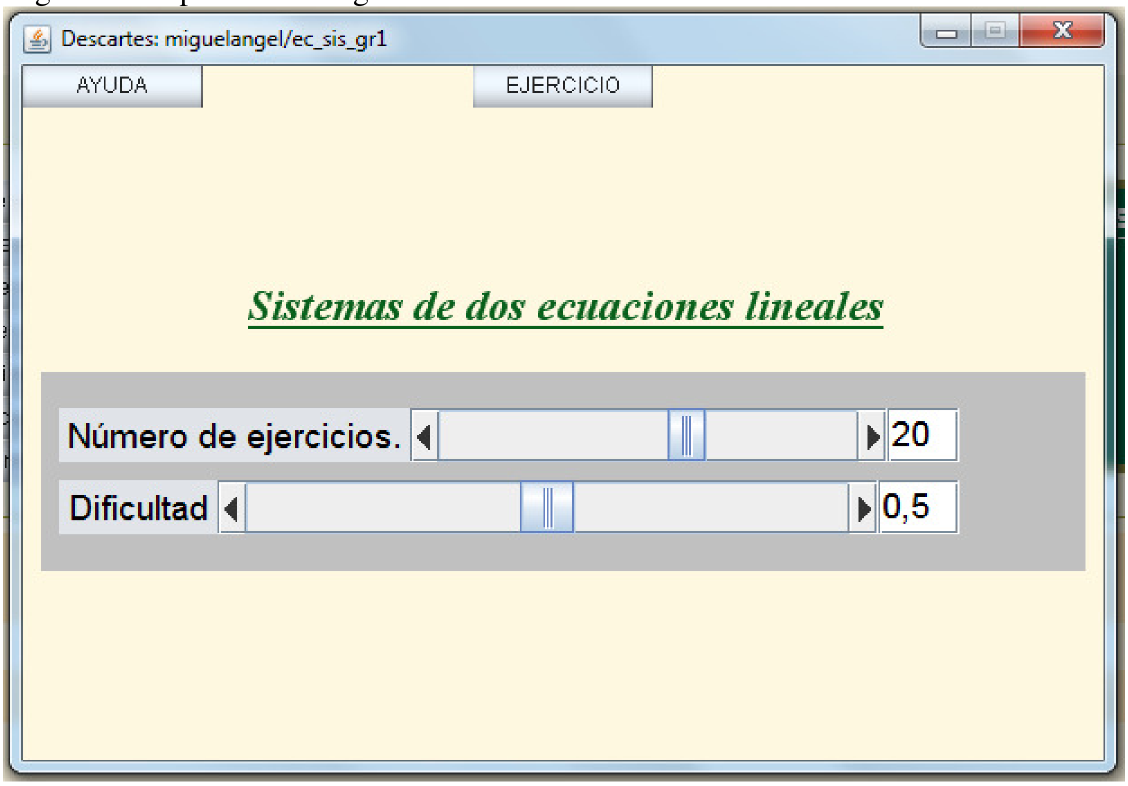

Wiris Little - Archivo nuevo2
Archivo Editar Ayuda
Archivo nuevo2
Edición Operaciones Símbolos Análisis Matrices Unidades Combinatoria Geometría Griego Programación Formato
dibujar representar
dibujar3d
dibujar({y=2x+3, y=x−1}) → tablero1
dibujar({2y+x=1, −y+3x=2}) → tablero1
tablero1
tablero1
18:07
03/10/2012

6.- Anejo 2: DESCARTES

Es un recurso gratuito ON-LINE del Ministerio de Educación y Cultura. Si entramos directamente por el link, llegamos.

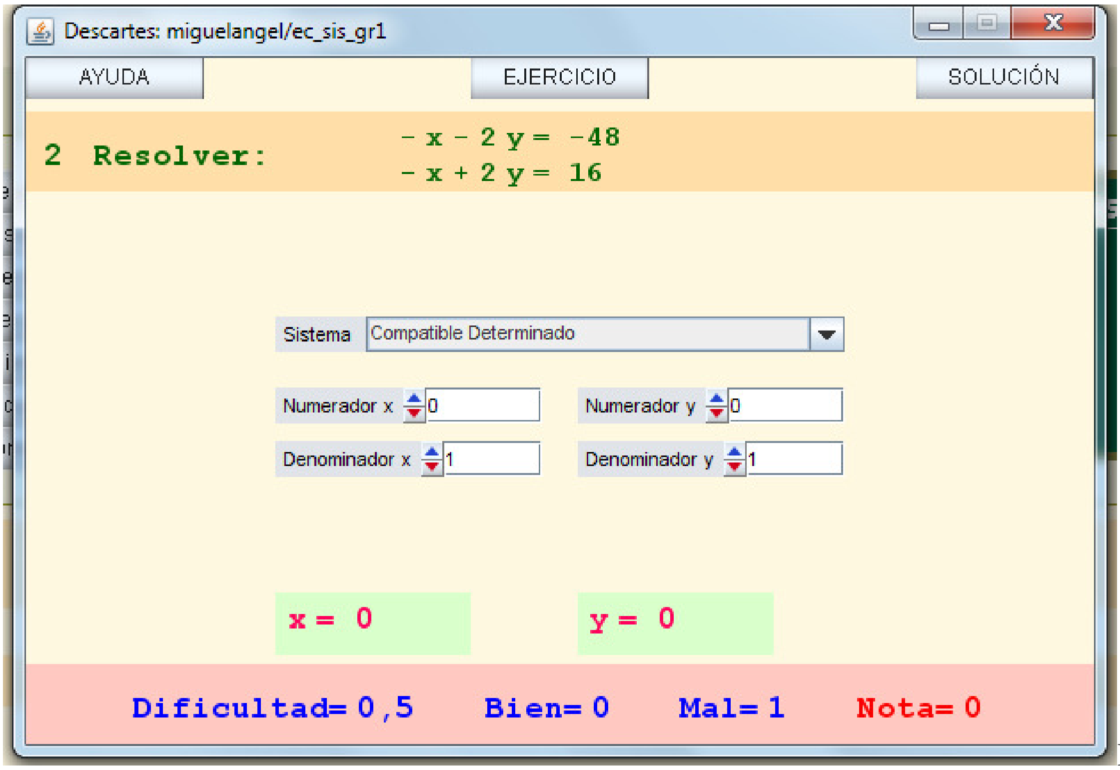


Desde donde podemos seleccionar SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES y llegamos a la pantalla emergente



Desde donde seleccionamos el número de ejercicios y la dificultad. Pulsamos EJERCICIO y sale la siguiente pantalla

Universidad Pontificia de Salamanca



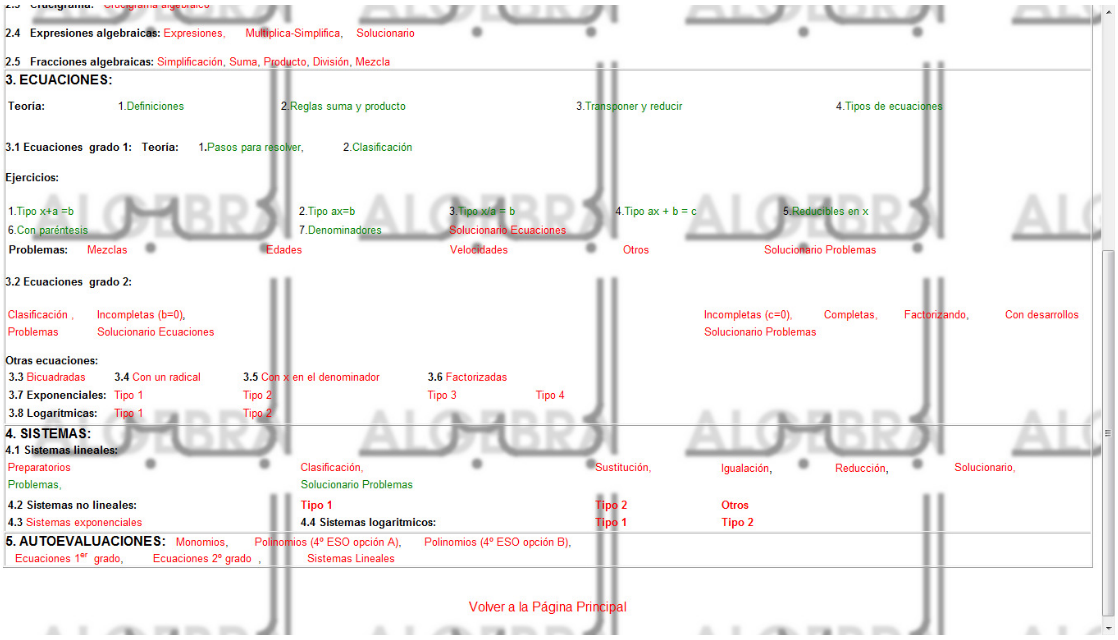
I

ntroduces que tipo de sistema es y cuáles son las soluciones. Pulsando a solución verifica si lo has hecho bien o no. Incluye un contador para ver el número de respuestas correctas y erróneas.

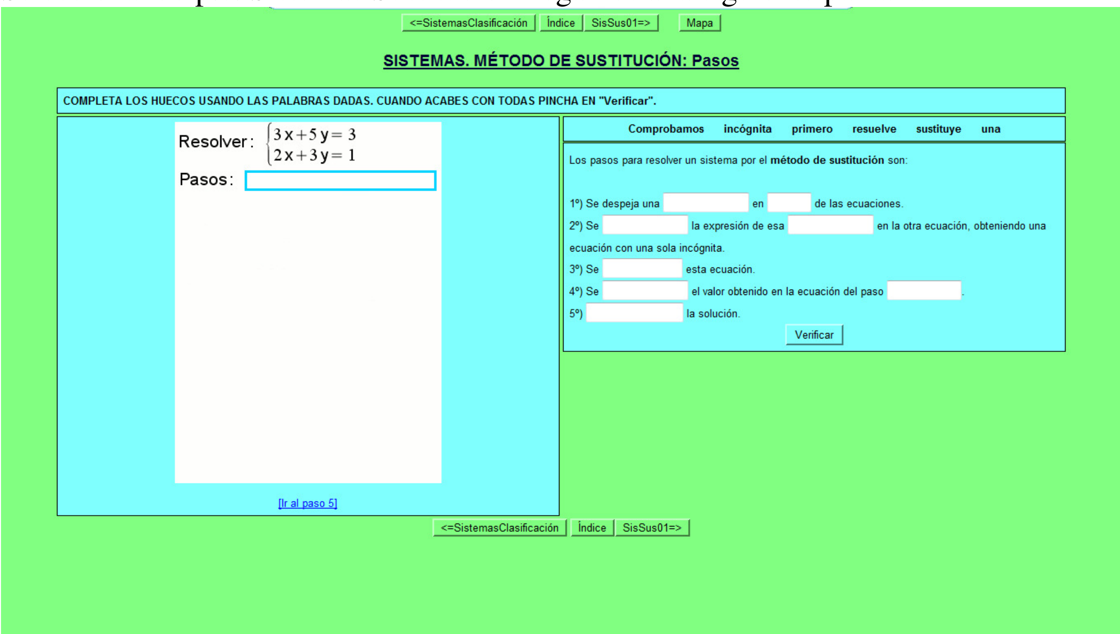
Universidad Pontificia de Salamanca

7.- Anejo 3: CON PAPAS

Es un recurso gratuito ON-LINE, para estudiar ecuaciones y resolver ejercicios problemas . A través del link llegamos al índice

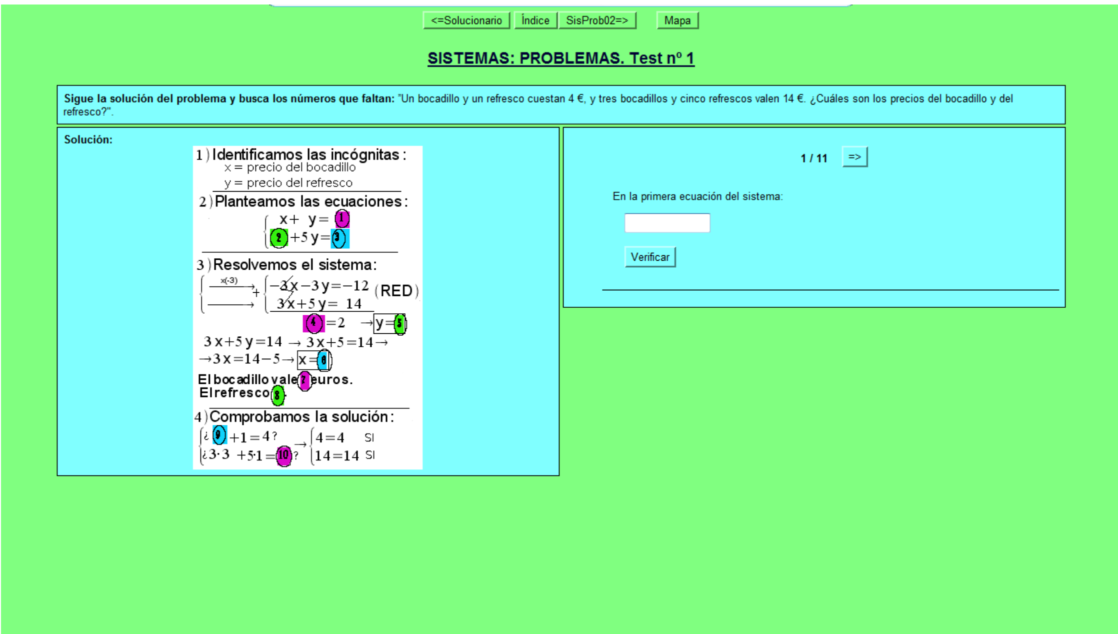


Seleccionando p.e. Sistemas Sustitución llegamos a la siguiente pantalla



Donde se resuelve un sistema por sustitución. Para volver la índice pulsar el botón y para pasar al siguiente ejercicio pulsar “SisSus “.
Cuando contestamos en los cuadritos de respuesta hay que verificar la solución para comprobar que es la correcta.
Para resolver problemas seleccionamos desde el índice problemas y llegamos.

Universidad Pontificia de Salamanca



Donde vamos completando la resolución del problema.

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO VI

ANEXO III.- 2: TRABAJO DE ÁLGEBRA PARA EL GRUPO TIC

Miriam MÉNDEZ COCA

ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

Contenidos:

1.- Ficha con videos para la explicación de ecuaciones de 1er grado con una incógnita.

2.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

3.- Ficha con videos para la explicación de resolución de problemas con una ecuación lineal con una incógnita.

4.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

5.- ANEJO 1: WIRIS

6.- ANEJO 2: DESCARTES

7.- ANEJO 3: CON PAPAS

Universidad Pontificia de Salamanca

1.- ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. DIA:………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de ecuaciones de 1er grado del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Ejemplo sencillo

- **Enunciado:**

  $$2x - 3 = -x + 9$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=Z6sOdZIuIE8

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/Z6sOdZIuIE8?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 2,11’

Ejemplo con paréntesis

- **Enunciado:**

  $$3(2x - 1) - 5(x - 3) = 6 - (7x - 4)$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=hdd4LezWfvM

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/hdd4LezWfvM?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 3,12’

Universidad Pontificia de Salamanca

Ejemplo3: con fracciones

- **Enunciado:**

  $$\frac{x-1}{4}-\frac{x+3}{6}=1-\frac{2(x-1)}{8}$$

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=79_NOikQT5I

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/79_NOikQT5I?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 4,37’

Universidad Pontificia de Salamanca

2.- ECUACIONES DE 1^er GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. DIA:………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material WIRIS

- **Información:** resuelve ecuaciones lineales de forma fácil aunque no vemos el procedimiento.
- **Link:** http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/
- **Manual:** ANEXO1

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo Descartes

- **Información:** Muy claro, completo y sencillo de usar. Autor Miguel Angel Cabezón Ochoa.
- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/indice.htm

  Donde seleccionamos: ecuaciones sencillas, ecuaciones con paréntesis y ecuaciones con denominadores.
- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página.

  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- **Manual:** ANEXO2

Universidad Pontificia de Salamanca

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico y amplio, incluye ejercicios de teoría.
- **Link:**

  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm

- **Manual:** ANEXO3

Material interactivo de Anaya

- **Información:** resuelve ecuaciones paso a paso.
- **Link:**

  http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/05.htm

  http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/06.htm

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos buenos. A menudo no funciona las comprobaciones.
- **Link:**

  http://conteni2.educarex.es/mats/11802/contenido/

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de problemas de ecuaciones de 1er grado del profesor ***Juan Medina Molina,*** profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Problema de botellas

- **Enunciado:** Una tienda vende en un día la mitad de las botellas que dispone. Al día siguiente vende el tercio de las que le quedaban con lo que cuenta con 20 botellas. ¿Cuánto tenía al principio?

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=0VO9VNStSOg

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/0VO9VNStSOg?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 5,44'

Problemas de móviles

- **Enunciado:** A las 10 de la mañana Juan sale de Cartagena hacia Valencia con una velocidad constante de 90km/h. A la misma hora sale Manuel de Valencia hacia Cartagena con una velocidad constante 80km/h . Si ambas ciudades se encuentran a una distancia de 340km ¿a qué distancia de Cartagena y a qué hora se encontrarán?

- **Link:**

  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=2ibWBNgewuw

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/2ibWBNgewuw?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 7,03'

Universidad Pontificia de Salamanca

Problemas de chicos y chicas

- **Enunciado:** A una fiesta asisten 40 personas. Al rato de empezar se va un chico quedando doble chicos que chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas había al principio?

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=61TT6d5D5qk

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/0VO9VNStSOg?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 4,25'

Problema de números

- **Enunciado:** La suma de tres números pares consecutivos es 18. ¿Cuáles son?

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=ZhAy51ouZlU

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/ZhAy51ouZlU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,05'

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Damos una serie de materiales para resolver ejercicios de ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material interactivo Descartes

- **Información:** Muy claro, completo y sencillo de usar. Autor Miguel Ángel Cabezón Ochoa.

- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/indice.htm

  Donde seleccionamos problemas. Tenemos algunos ejemplos y después tenemos la posibilidad de hacer 30 problemas. Incluye un contador que cuenta aciertos y errores. La resolución viene con procedimiento.

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página

  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

- **Manual:** ANEXO 2

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es amplio, incluye ejercicios de teoría.

- **Link:**

  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm

- **Manual:** ANEXO 3

Universidad Pontificia de Salamanca

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

- **Información:** con explicaciones y una explicación de todos los problemas tipos. Muy completo. No funciona las comprobaciones.

- **Link:**

  http://conteni2.educarex.es/mats/11803/contenido/

  http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo de Anaya

- **Información:** resuelve ecuaciones paso a paso.

- **Link:**

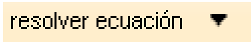
  http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/07.htm

Universidad Pontificia de Salamanca

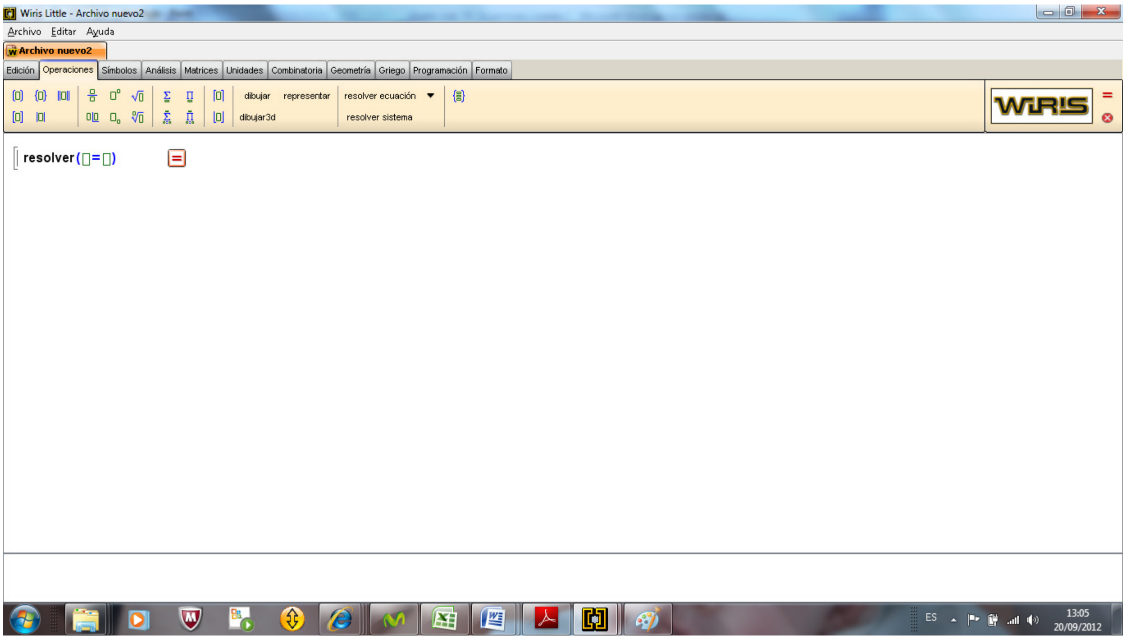
5.- ANEJO 1: WIRIS

Es un recurso gratuito ON-LINE y sencillo para resolver ecuaciones y sistemas y representar funciones y sistemas de funciones.

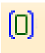
Resolver una ecuación:

La herramienta principal para resolver ecuaciones es el botón 

Cuando queremos resolver una ecuación pulsamos este botón

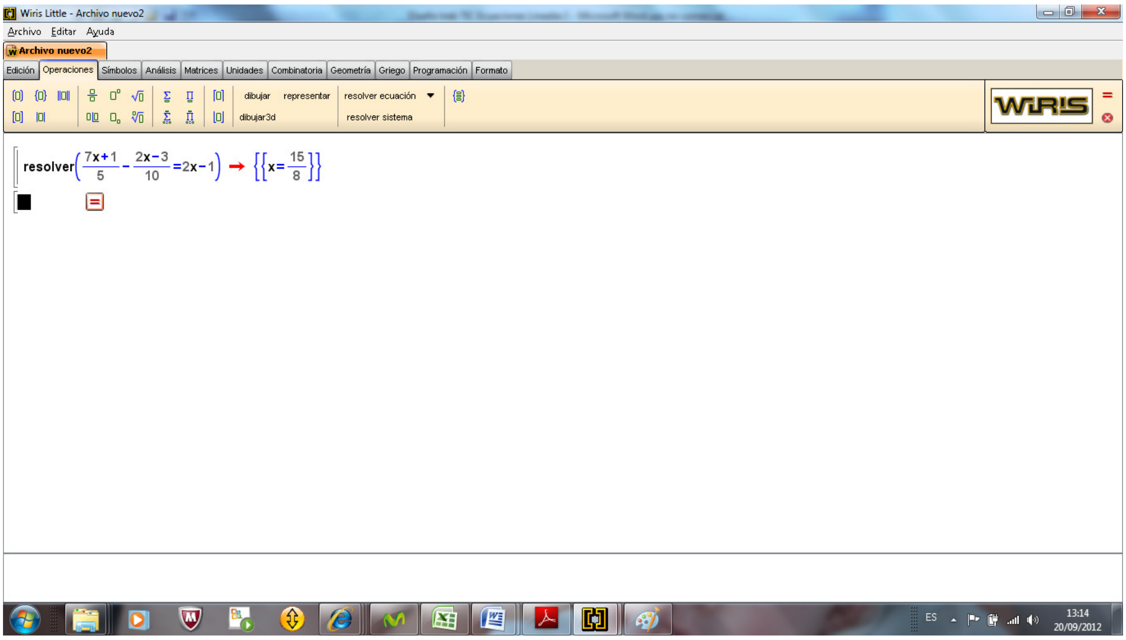


Luego en los cuadraditos de alrededor de la igualdad escribimos la ecuación. Los botones:

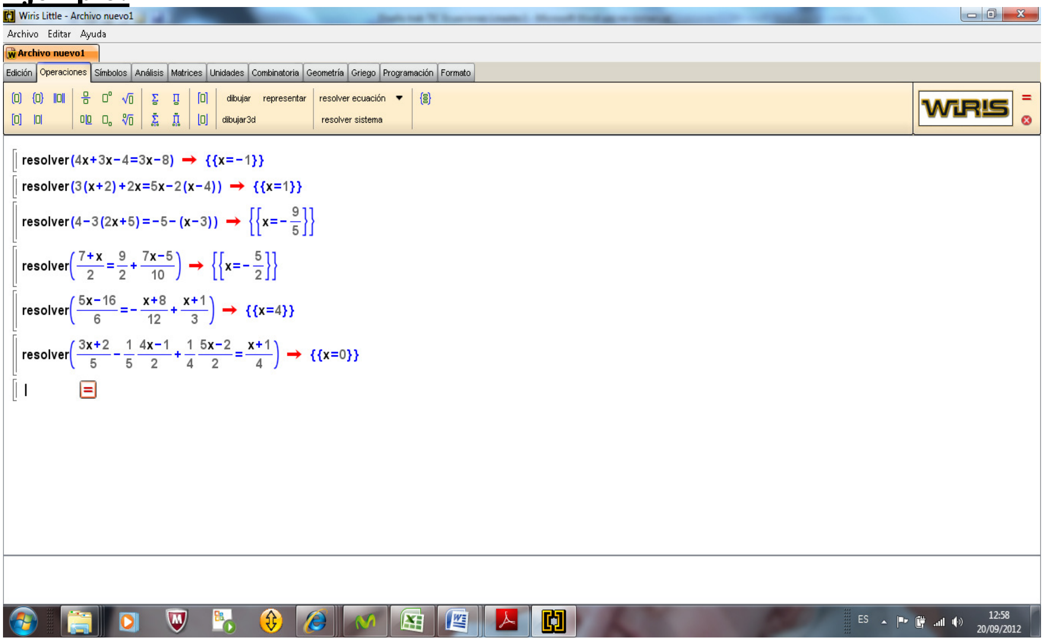
 para escribir fracciones,
 para escribir exponentes,
 para escribir raices cuadradas,
 para escribir raices de cualquier tipo,
 para escribir paréntesis,
 para escribir corchetes,
etc.

Cuando hayas terminado de escribir la ecuación pulsa el botón.  Y conseguirás el resultado p.e.

Universidad Pontificia de Salamanca



Ejemplo:

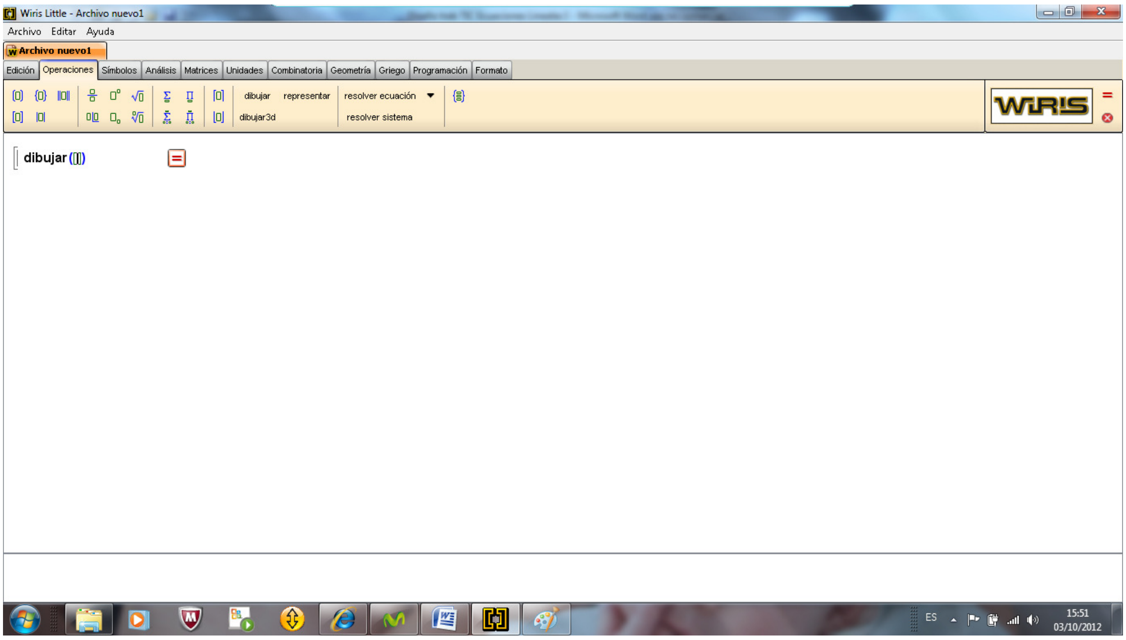


Representar funciones

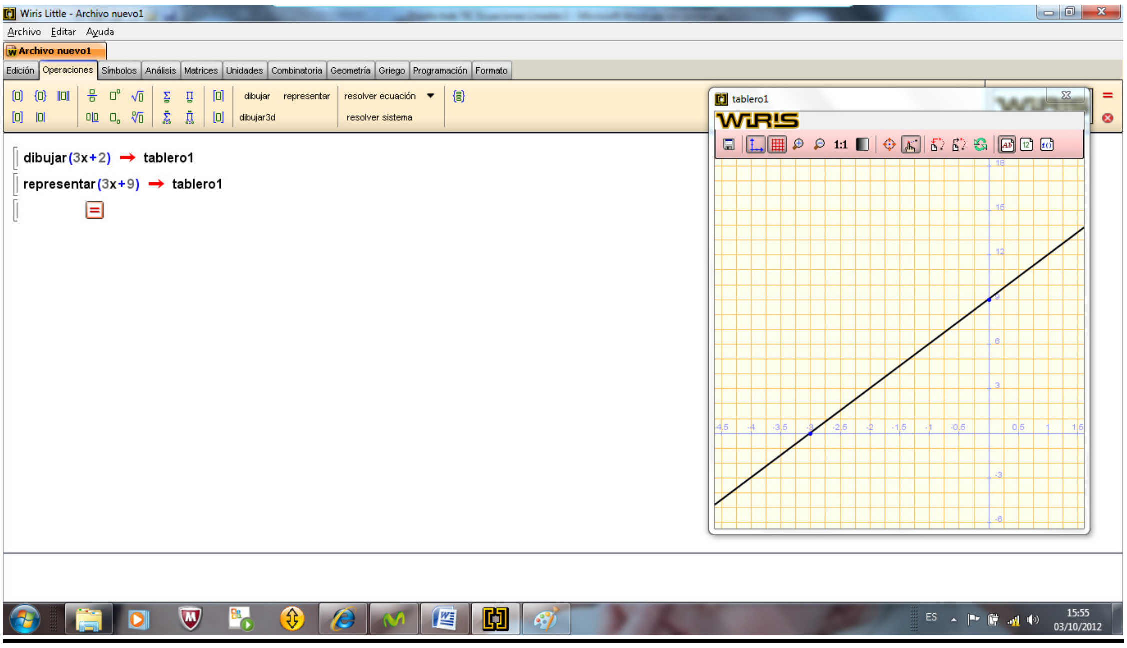
Para dibujar funciones lineales lo primero que hacemos es pulsar el botón 

y aparecerá la siguiente pantalla:

Universidad Pontificia de Salamanca



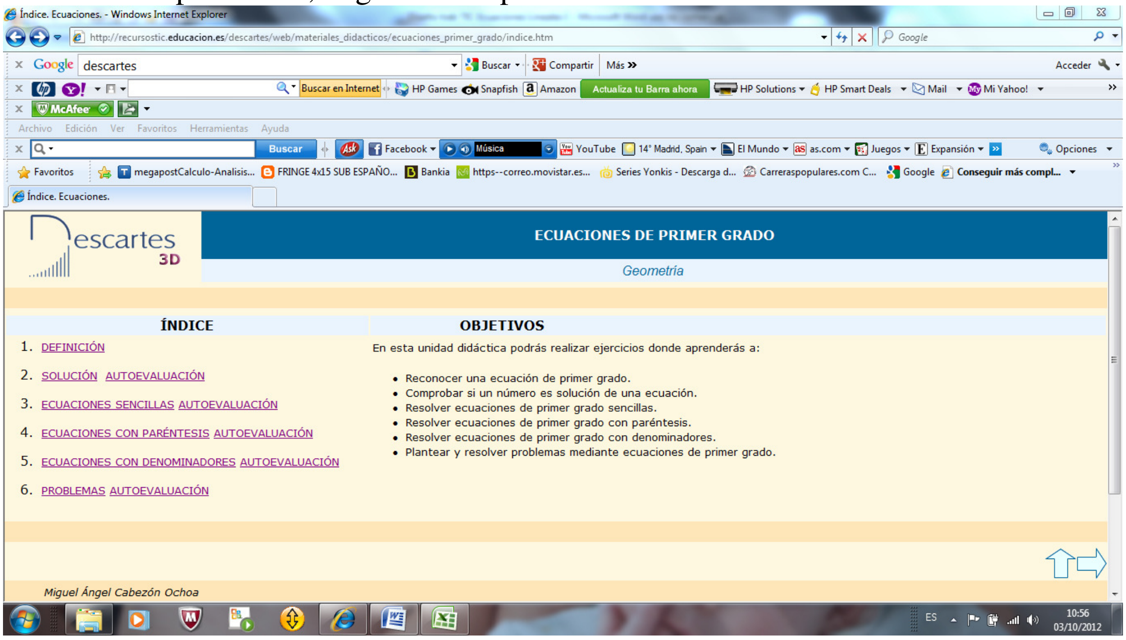
También podemos utilizar el botón representar. A continuación escribimos la función y al pulsar el igual aparece



Universidad Pontificia de Salamanca

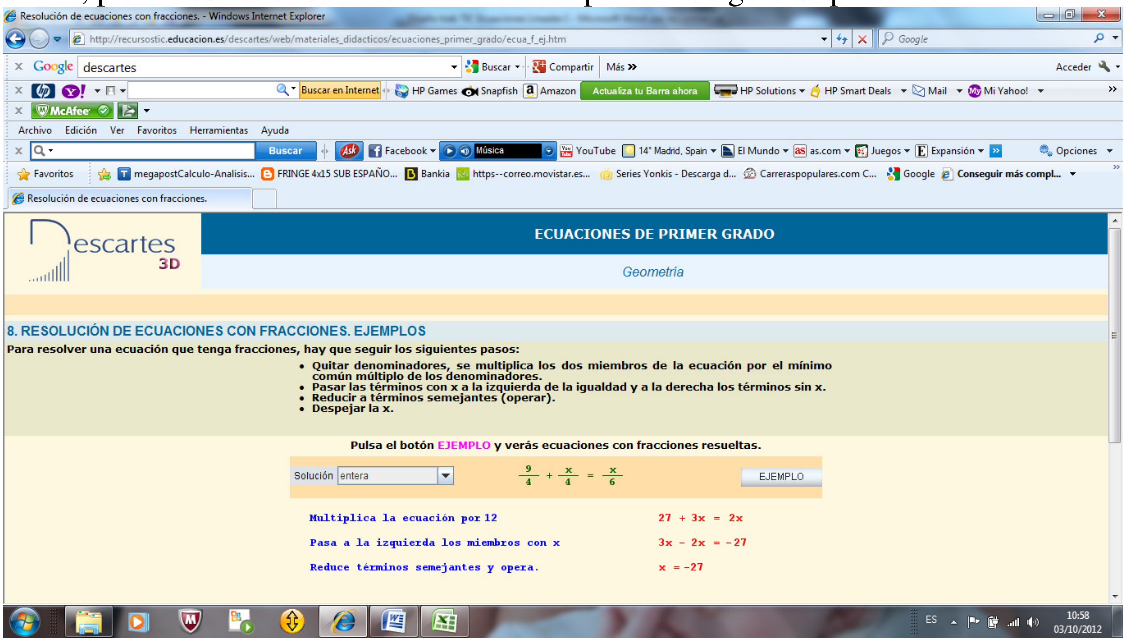
6.- ANEJO 2: DESCARTES

Es un recurso gratuito ON-LINE del Ministerio de Educación y Cultura. Si entramos directamente por el link, llegamos a la pantalla.

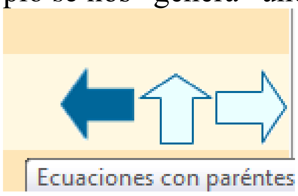


Ejercicios de Ecuaciones

Para llegar a los ejercicios de ecuaciones seleccionamos el tipo de ecuaciones que queremos, p.e. Ecuaciones con Denominadores aparece la siguiente pantalla:

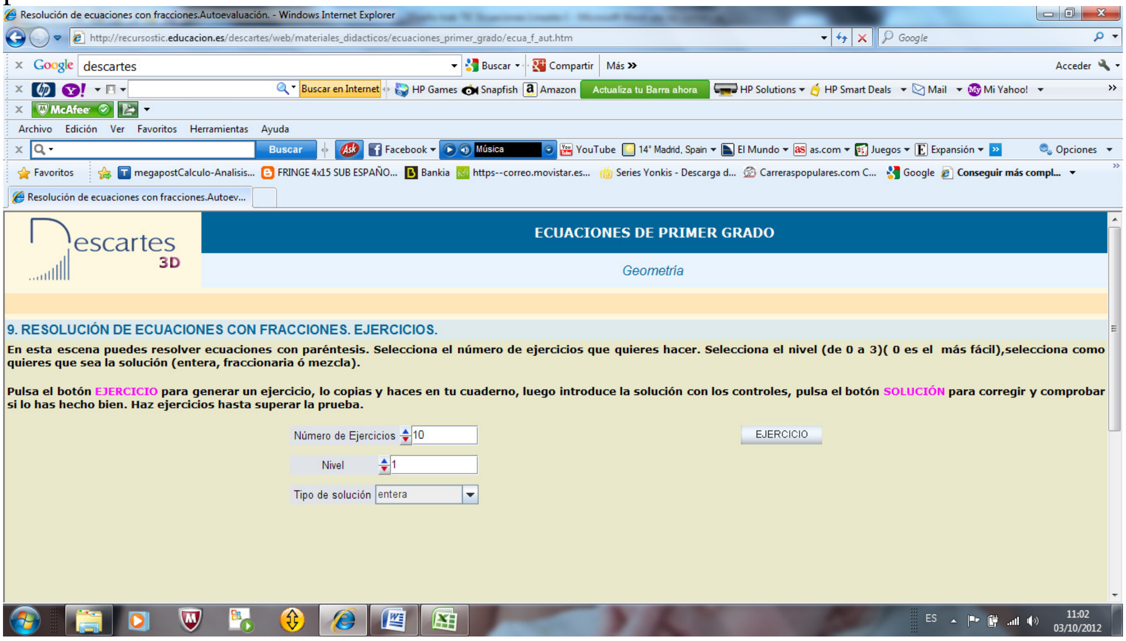


Donde podemos seleccionar el tipo de ejemplo que queremos: con solución entera o fraccionaria (pulsamos en solución y seleccionamos la que queramos). Pulsando ejemplo se nos "genera" uno nuevo. Hacia el final de la página vienen unas flehas.



Universidad Pontificia de Salamanca

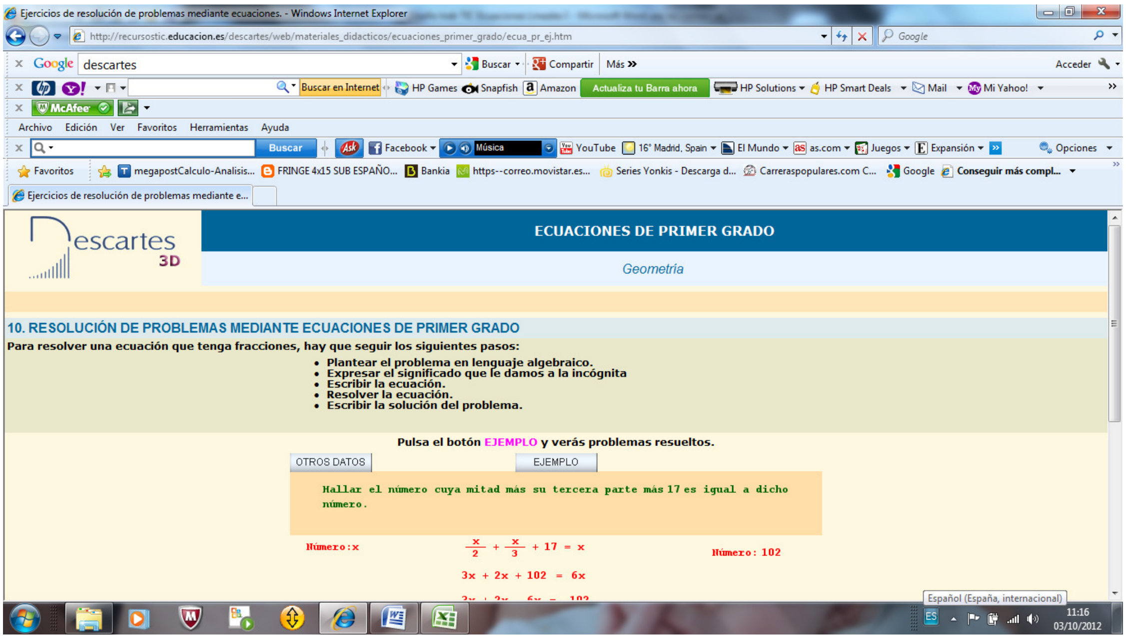
Pulsar la de la izquierda es irte a la página anterior, la de la derecha es ir a la página siguiente y la central es ir al índice. Si pulsamos a la siguiente llegamos a la siguiente pantalla.



Donde podemos seleccionar el número de ejercicios (hasta 30), el nivel (0, 1 ,2 ,3) y el tipo de solución (entera y fraccionaria) que queremos hacer. Al pulsar ejercicio se nos propone uno que resolvemos y ponemos la solución en la casilla o no. Al pulsar el botón solución aparece resuelta. Al pulsar ejercicio se nos propone otro ejercicio. Incluye un contador para ir contando el número de éxitos y errores.

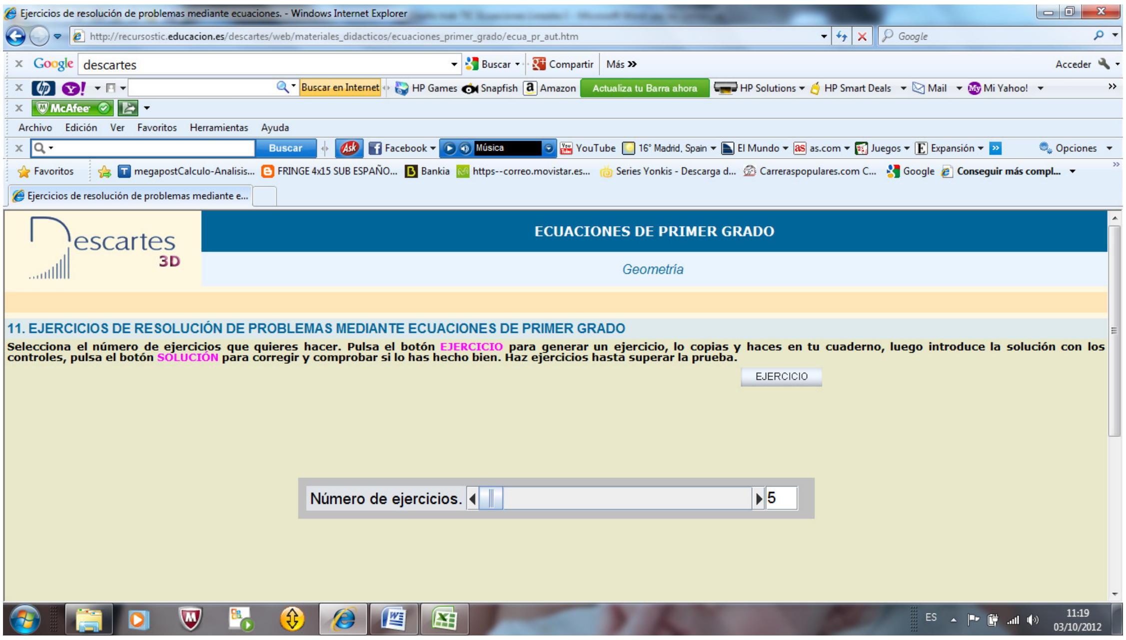
<u>Problemas de ecuaciones</u>

Desde la página del índice seleccionamos PROBLEMAS y llegamos a la siguiente pantalla.

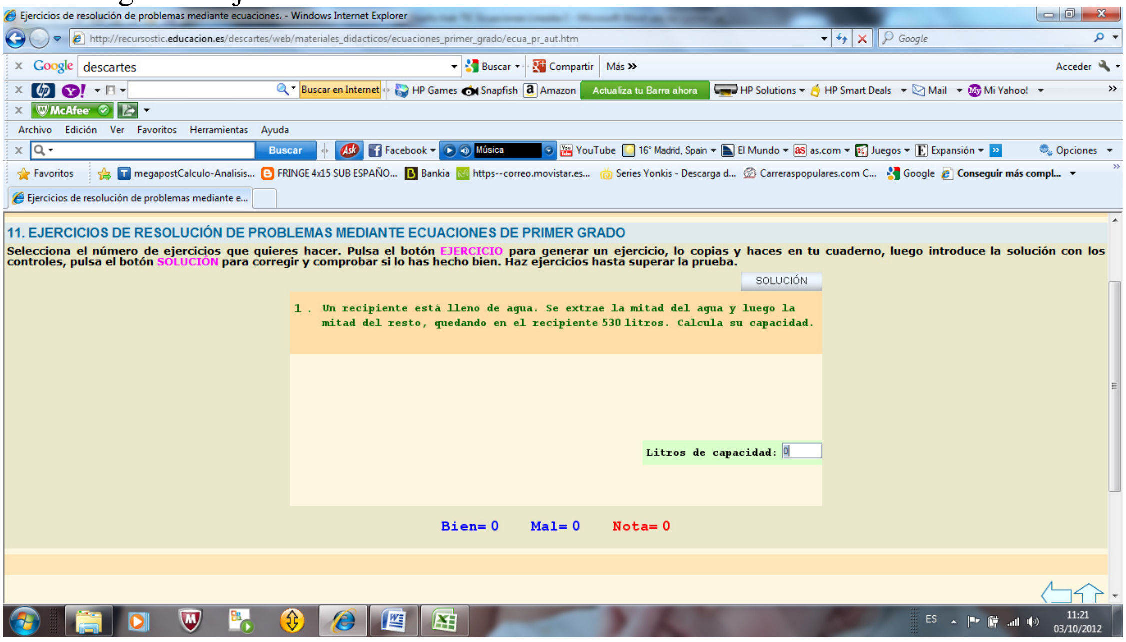


Donde podemos obtener diferentes ejemplos con solo pulsar el botón EJEMPLO, e incluso podemos tener el mismo ejemplo cambiando los datos pulsando al botón OTROS DATOS. Pulsando la flecha de siguiente que está al final de la pantalla en la esquina derecha llegamos

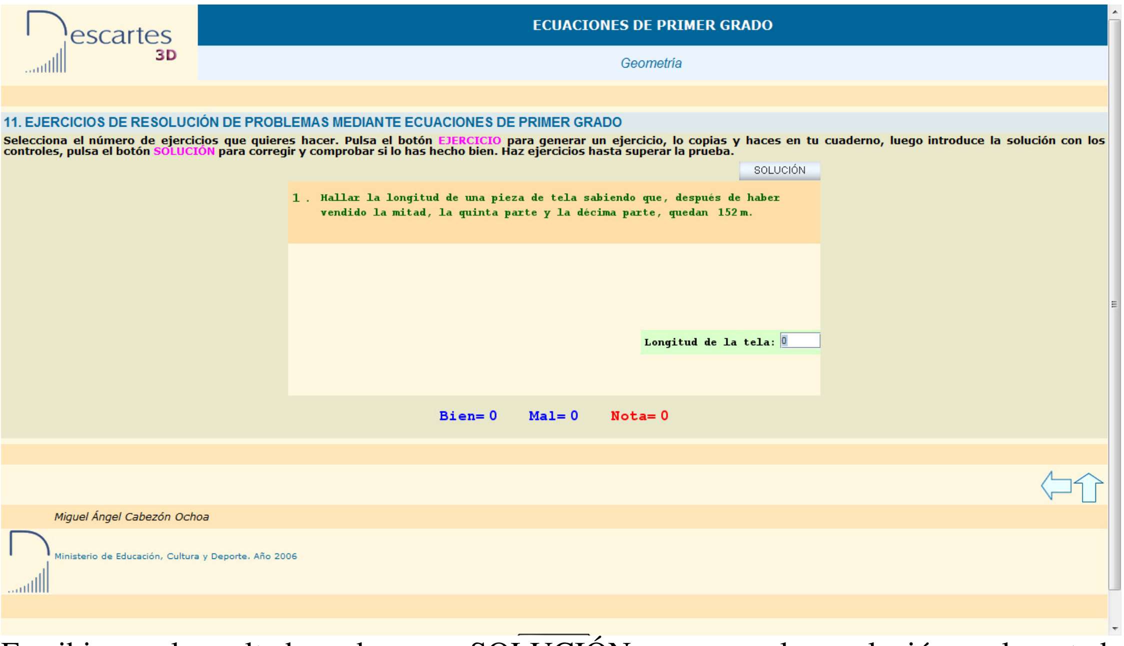
Universidad Pontificia de Salamanca



Donde podemos seleccionar hasta 30 problemas. Pulsando al botón EJERCICIO se genera el siguiente ejercicio



Universidad Pontificia de Salamanca



Escribimos el resultado y damos a SOLUCIÓN y aparece la resolución y el contador empieza a contar aciertos y errores. Para generar el siguiente una vez dado al botón SOLUCIÓN este se convierte en botón EJERCICIO que volvemos a pulsar para generar otro.

Lista de problemas que resuelve

1.- El perímetro de un triángulo isósceles mide 75cm. El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

2.-Laura tiene 54 años menos que su padre, y este tiene el triple de los años de su hija. Halla la edad de cada uno.

3.-Halla la longitud de una pieza de tela sabiendo que, después de haber vendido la mitad, la quinta parte y la decima parte, quedan 64m.

4.-El perímetro de un triángulo isósceles mide 132cm. El lado desigual del triángulo es la quinta parte de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

5.- Halla el número cuya mitad más su tercera parte más 1 es igual a dicho número.

6.-La suma de un número con su tercera y su quinta parte es 92. Calcula dicho número.

7.-Dos depósitos tienen igual capacidad. Están llenos de agua y de uno de ellos se sacan 3900 litros y del otro 7500 litros, quedando en el primero triple cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

8.-Hallar el número cuya mitad más su cuarta parte más 1 es igual a dicho número

9.- Hace 22 años, la edad de un hombre era el doble de la edad de su hija. Sabiendo que el padre tenía 22 años cuando nació su hija, halla las edades de ambos.

Universidad Pontificia de Salamanca

10.- El perímetro de un triángulo isósceles mide 165cm. El lado desigual del triángulo es la quinta parte de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo

11.- Dos depósitos tienen igual capacidad. Están llenos de agua y de cada uno de ellos se sacan 1700litros y del otro 10400litros, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

12.-Pedro tiene 10 años y su madre 54. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el triple de la edad de su hijo?

13.-Pedro tiene 12 años y su madre 56. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el triple de la edad de su hijo?

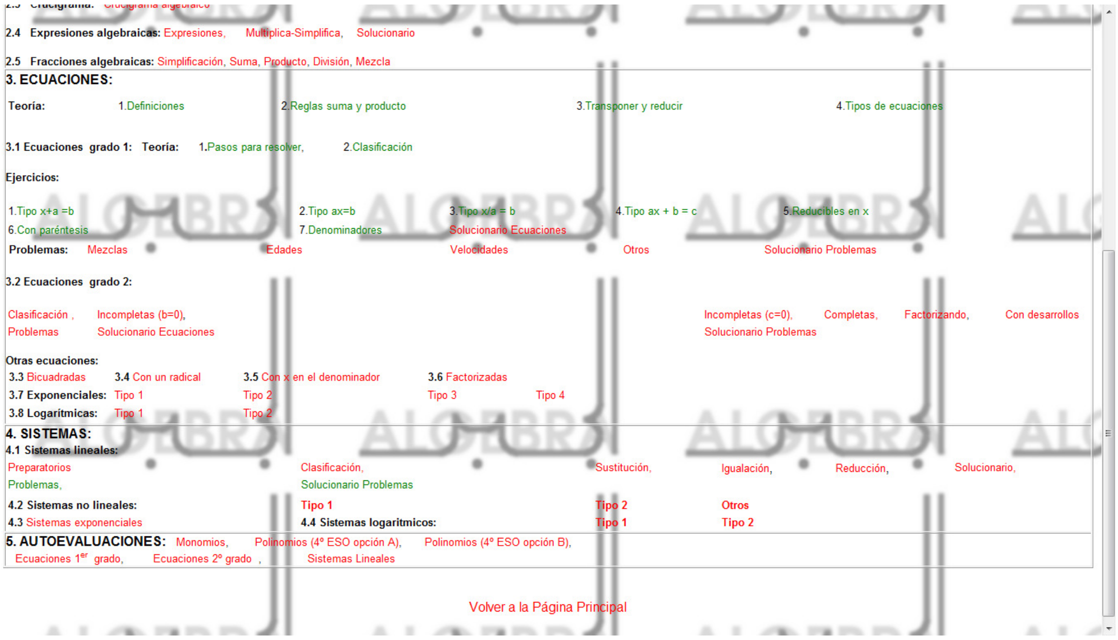
…

23.- Cristina tiene 6975 euros en billetes de 50 euros y de 5 euros. Si el número de billetes de 50 euros es el triple del número de billetes de 5 euros, ¿cuántos billetes tiene de cada clase?

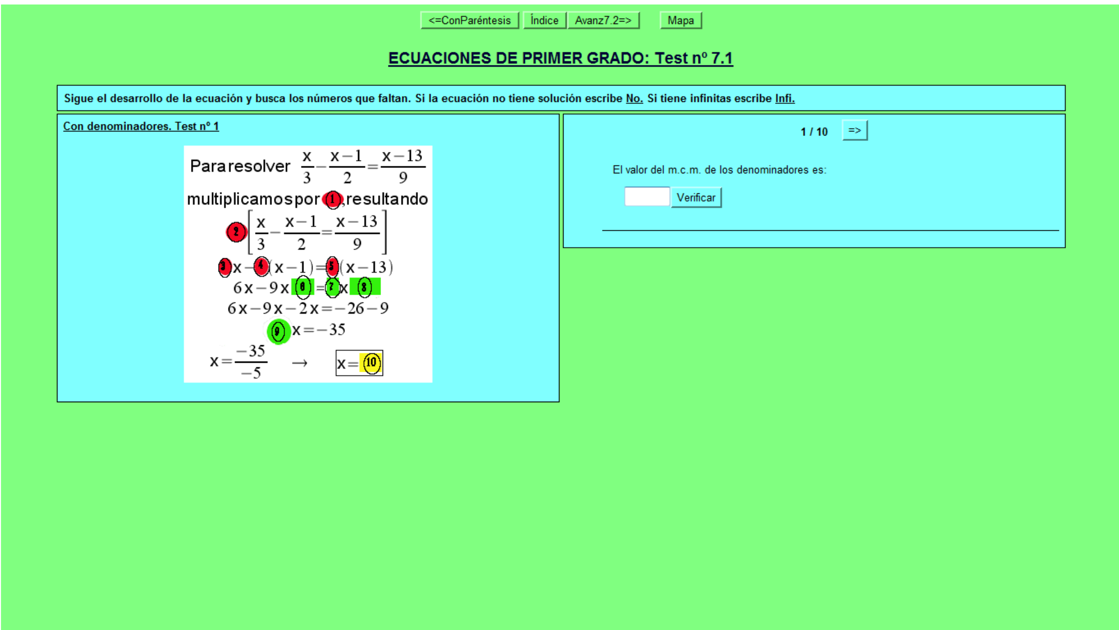
Universidad Pontificia de Salamanca

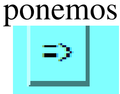
7.- ANEJO 3: CON PAPAS

Es un recurso gratuito ON-LINE, para estudiar ecuaciones y resolver ejercicios problemas . A través del link llegamos al índice



Seleccionando p.e. Ecuaciones de grado 1, Ejercicios: 7 con denominadores aparece

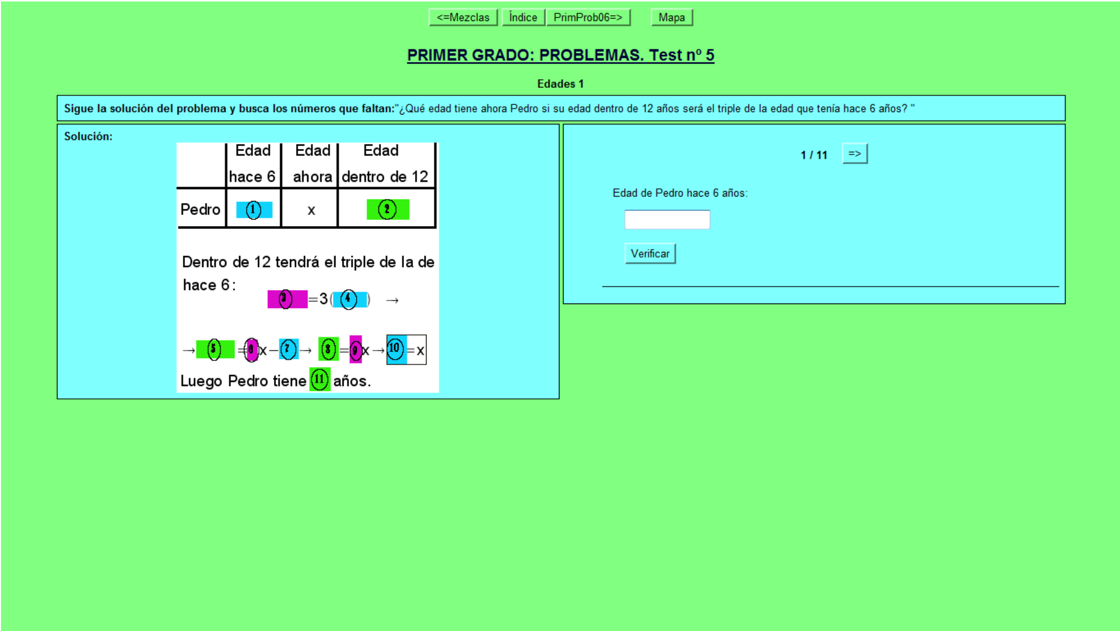


Tenemos que ir contestando en la casilla lo que nos van preguntando. Cuando ponemos algo damos al botón de verificar que corrige. Después de corregir pulsamos  para seguir a la siguiente cuestión.

Universidad Pontificia de Salamanca

Problemas

Seleccionamos en el menú en ecuaciones de grado 1: problemas de edades p.e.



Y vamos contestando a las preguntas, verificando la respuesta. Si no se nos genera la ventanita donde poner la respuesta pulsar el botón verificar y aparecerá. Para pasar al siguiente ejercicio pulsamos el botón arriba de la pantalla que pone PrimProb.

Universidad Pontificia de Salamanca

CAPÍTULO VI

ANEXO III.- 3: TRABAJO DE ÁLGEBRA PARA EL GRUPO TIC

Miriam MÉNDEZ COCA

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Contenidos:

1.- Ficha de videos para la explicación de ecuaciones de 2º grado con una incógnita.

2.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

3.- Ficha con videos para la explicación de resolución de problemas de 2º grado con una incógnita.

4.- Ficha de prácticas de problemas en el aula de informática.

5.- ANEJO 1: WIRIS

6.- ANEJO 2: DESCARTES

7.-ANEJO 3: CON PAPAS

Universidad Pontificia de Salamanca

1.- ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas y completas del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

I. Ecuaciones incompletas de 2ºgrado en una incógnita con b=0

- **Enunciado:**
  $\mathbf{x^2 - 16 = 0}$
- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=pniPJTdJjMg

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/pniPJTdJjMg?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 0,55’

II. Ecuaciones incompletas de 2º grado con una incógnita con c=0

- **Enunciado:**

  $\mathbf{x^2 + 4x = 0}$

- **Link:**

  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=w8DZ7ha-7LU

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/w8DZ7ha-7LU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 1,25’

Universidad Pontificia de Salamanca

III. Ecuaciones completas de 2ºgrado en una incógnita

Ejemplo sencillo

- **Enunciado**

  $$-x^2 - 6x + 7 = 0$$

- **Link:**

  http://www.youtube.com/watch?list=SP6BF0D52016B0483D&v=3xfLL5LYN8Q&feature=player_detailpage

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/3xfLL5LYN8Q?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 3,28’

Ejemplo con paréntesis

- **Enunciado:**

  $$x(x + 2) = -x^2 - 2(x - 3)$$

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=FE1M1nndzzU

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/FE1M1nndzzU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,45’

Ejemplo con fracciones

- **Enunciado:**

  $$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$$

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=baD0ZY-3ayI

- **Duración:** 8,07’

Universidad Pontificia de Salamanca

2.- ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de ecuaciones de 2º grado bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material WIRIS

- **Información:** resuelve ecuaciones fácilmente aunque no muestra el procedimiento.
- **Link:** http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/
- **Material:** ANEXO 1

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo Descartes

- **Información:** claro, completo y sencillo. Autor Miguel Ángel Cabezón Ochoa.
- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones2grado/inicio.htm

  Donde seleccionamos: ecuaciones incompletas, completas, y cuestiones teóricas.
- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página.

  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- **Manual:** ANEXO 2

Universidad Pontificia de Salamanca

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico, amplio e incluye ejercicios de teoría.
- **Link:**

  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm

- **Manual:** ANEXO3

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos. Las comprobaciones funcionan a veces.
- **Link:**

  http://conteni2.educarex.es/mats/11811/contenido/

  http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de problemas de ecuaciones de 2º grado del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Problema de producto de números

- **Enunciado:** Juan tiene 30 años más que Ana. Si multiplicamos sus edades el resultado es 130. ¿Cuántos años tiene cada uno?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?v=A3KwGM0CrSY

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/A3KwGM0CrSY?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 6,58'

Problema de áreas

- **Enunciado:** La base del rectángulo mide 3 metros más que el doble de la longitud de la altura. Calcula sus dimensiones sabiendo que su área es $65m^2$
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?v=ZbCEAKm6jQo&feature=relmfu

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/ZbCEAKm6jQo?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 5,21'

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver problemas de ecuaciones de 2º grado bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Básico y amplio, incluye ejercicios de teoría.
- **Link:**

  http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm
- **Manual:** ANEXO 3

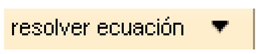
Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

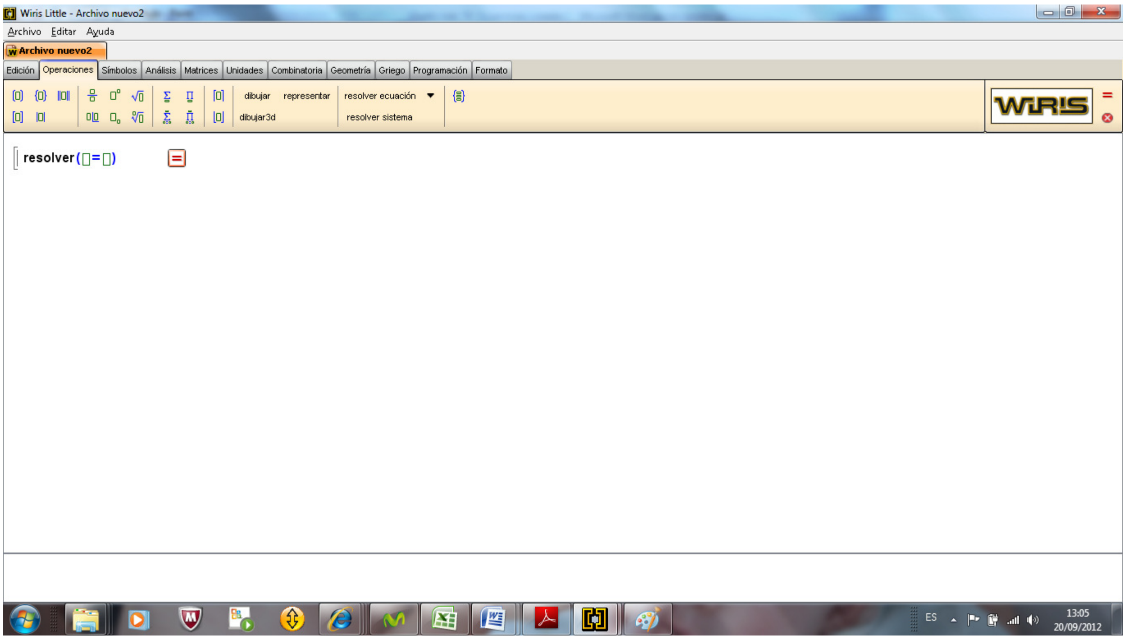
5.- ANEJO 1: WIRIS

Es un recurso gratuito ON-LINE y sencillo para resolver y dibujar ecuaciones y sistemas.

Resolver una ecuación:
La herramienta principal para resolver ecuaciones es el botón
Cuando queremos resolver una ecuación pulsamos este botón



Universidad Pontificia de Salamanca



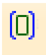
Luego en los cuadraditos de alrededor de la igualdad escribimos la ecuación. Los botones:

 para escribir fracciones,

 para escribir exponentes,

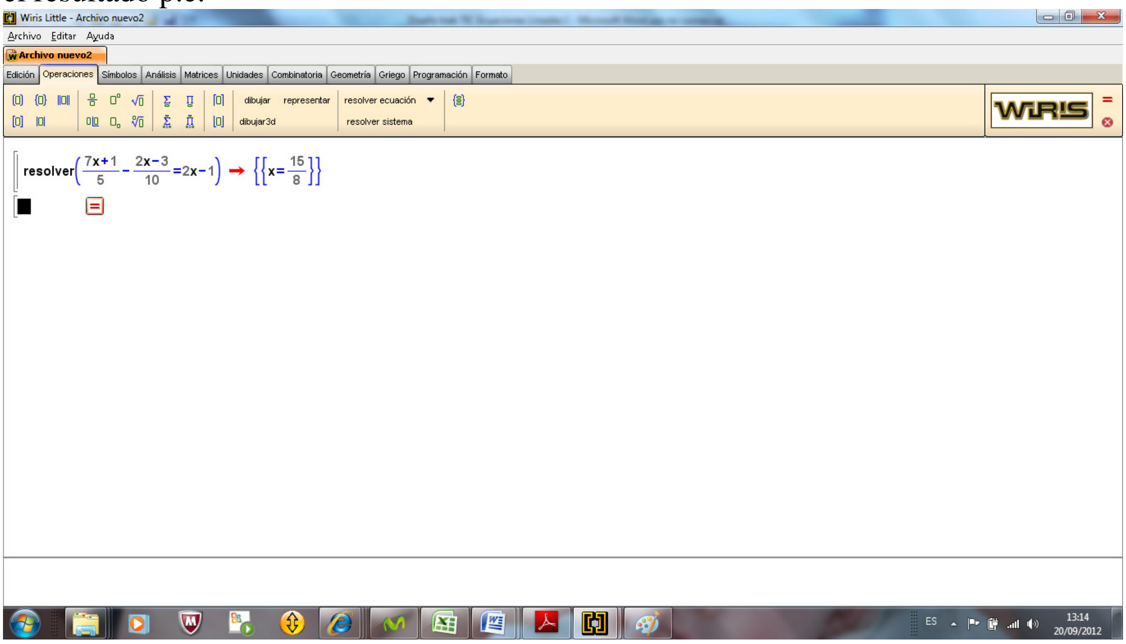
 para escribir raices cuadradas,

 para escribir raices de cualquier tipo,

 para escribir paréntesis,

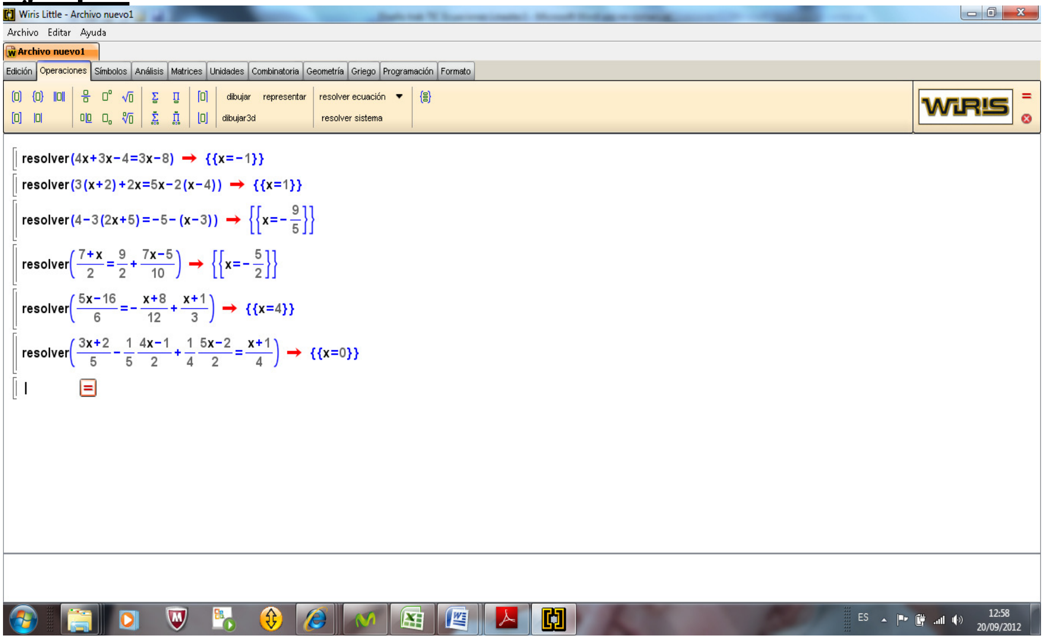
 para escribir corchetes, etc.

Cuando hayas terminado de escribir la ecuación pulsa el botón.  Y conseguirás el resultado p.e.



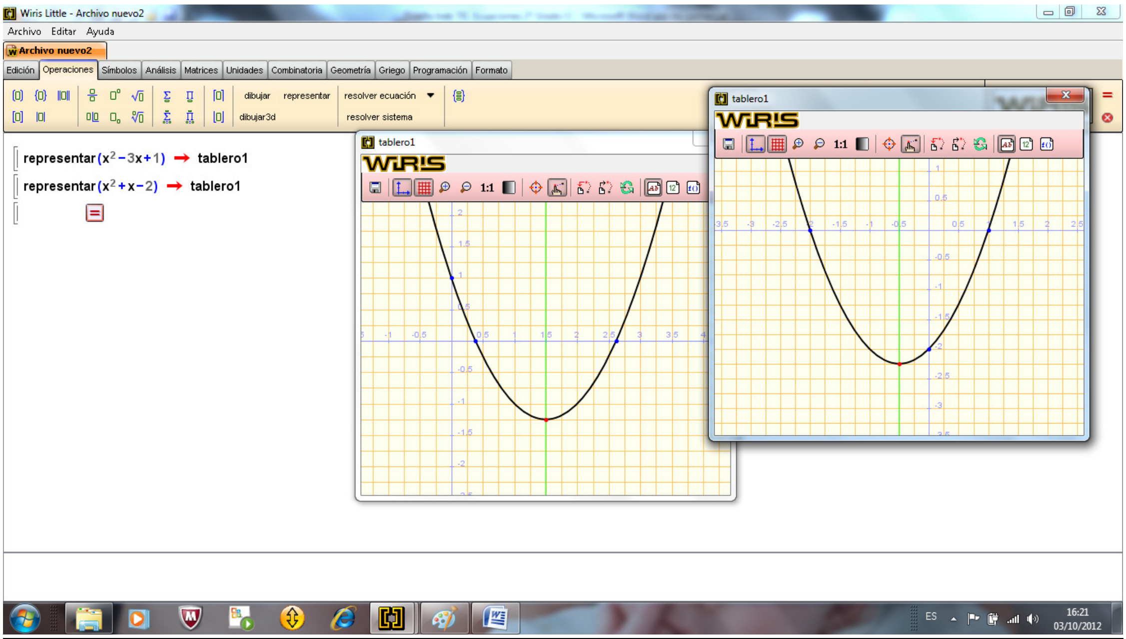
Universidad Pontificia de Salamanca

Ejemplo:



Representar una ecuación de 2º grado

Pulsando el botón de representar aparece en la pantalla para escribir una expresión algebraica. La escribimos y al pulsar el igual aparece la representación

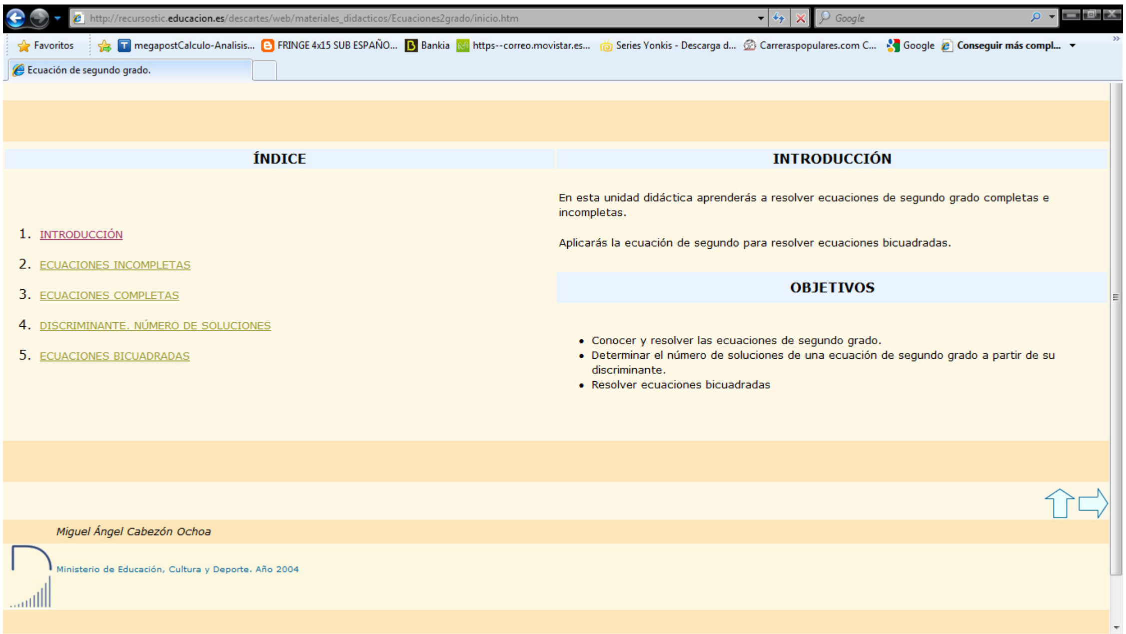


Una diferencia entre representar y dibujar es que al pulsar el botón de representar te indica los puntos de corte con los ejes y con dibujar no.

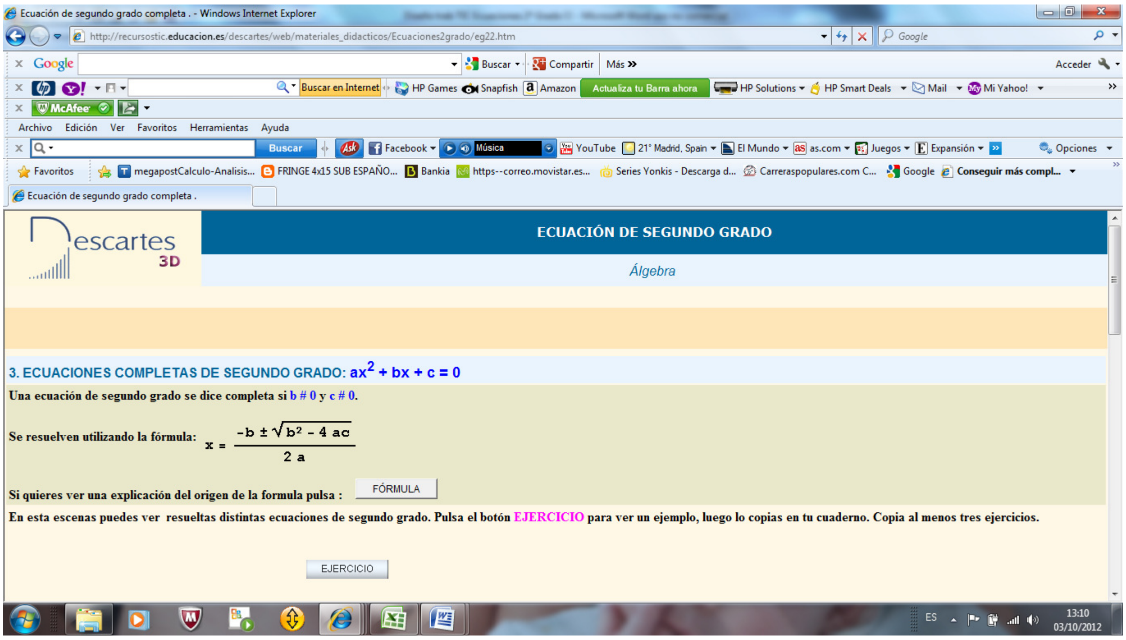
Universidad Pontificia de Salamanca

6.- ANEJO 2: DESCARTES

Es un recurso gratuito ON-LINE del Ministerio de Educación y Cultura. Si entramos directamente por el link, llegamos.

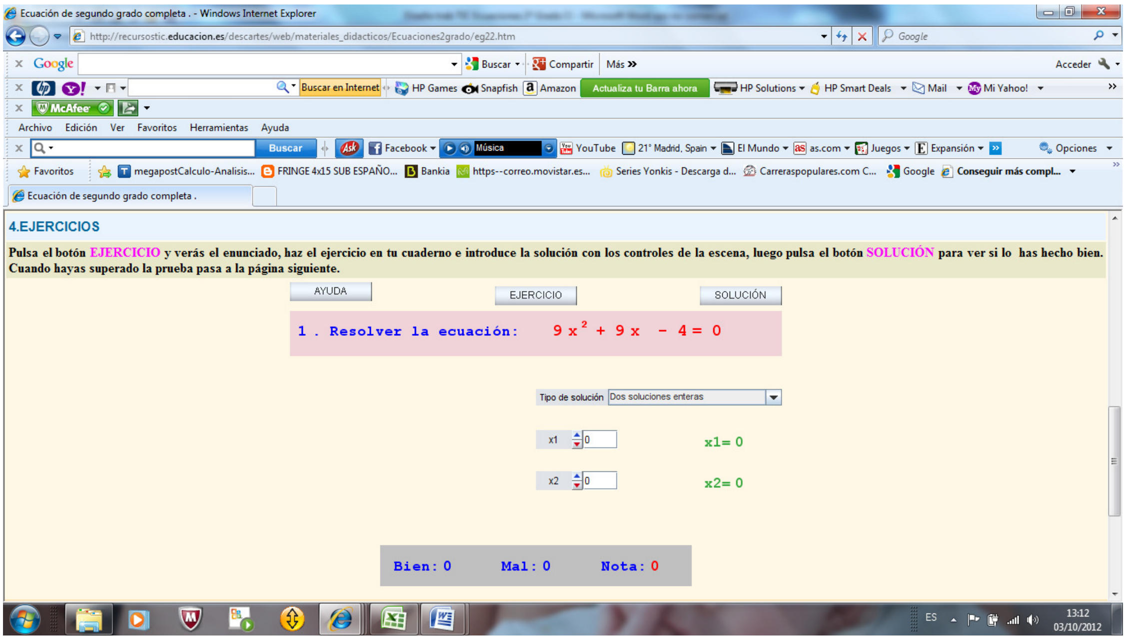


O bien seleccionando con el ratón o bien con las flechas nos podemos mover a la siguiente pantalla .p.e.



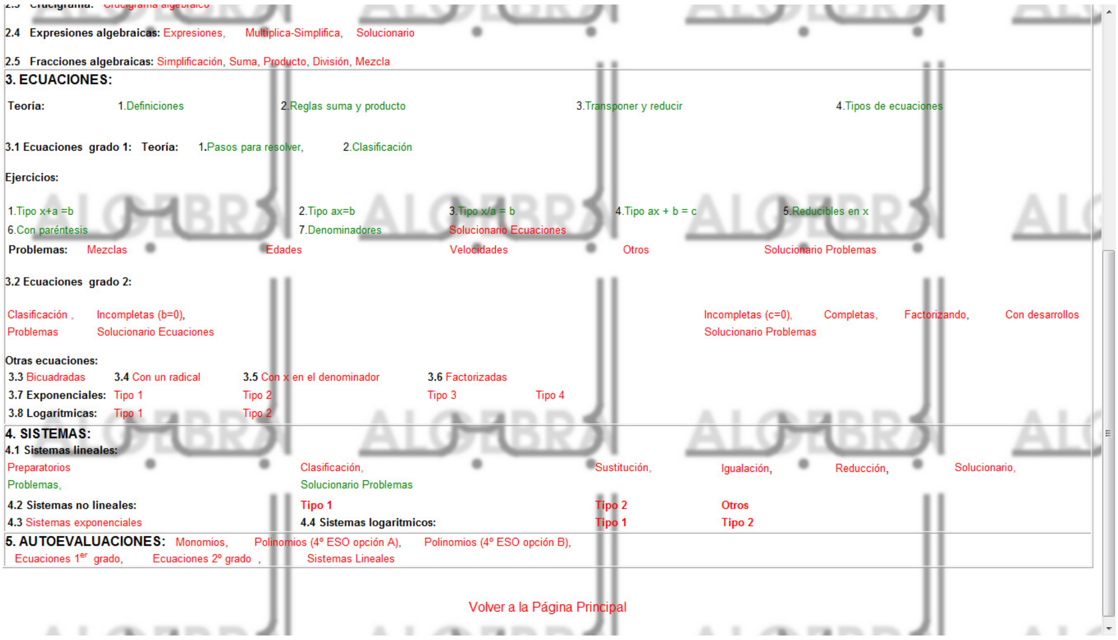
Donde se pueden nos dan la posibilidad de enseñarnos ejercicios resueltos o bien nos proponen ejercicios (hasta 10). Tiene incluido un contador para contar aciertos y errores.

Universidad Pontificia de Salamanca



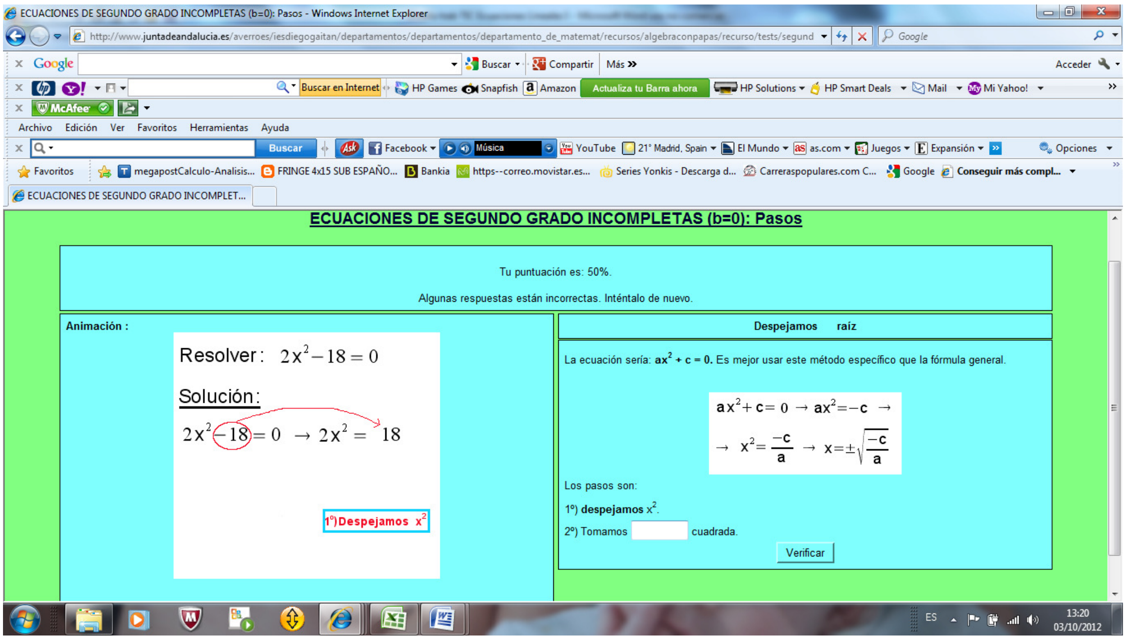
7.- ANEJO 3: CON PAPAS

Es un recurso gratuito ON-LINE, para estudiar ecuaciones y resolver ejercicios problemas . A través del link llegamos al índice



Universidad Pontificia de Salamanca

Seleccionando p.e. Ecuaciones de grado 2, incompletas (b=0) o incompletas (c=0) o completas accedemos a los ejercicios. Seleccionando incompletas (b=0) llegamos a la siguiente pantalla



Donde nos proponen preguntas a forma de test y vamos contestando. Pulsando el botón de verificar se comprueba el resultado.

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo VI:

ANEXO III. – 4: TRABAJO COOPERATIVO EN ÁLGEBRA

Miriam MÉNDEZ COCA

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

CONTENIDO:

1.- Sesión de explicación de cómo trabajar de forma cooperativa, motivación. Hacer los grupos.

2.- Ficha de explicación sobre los sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas.

3.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

4.- Ficha de explicación sobre los sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas.

5.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

6.- Ficha de problemas resueltos a partir de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas.

7.- Ficha de resolución de problemas de la ficha anterior.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.- SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:…………………………………………………

Instrucciones: Durante la clase vamos a identificar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Veremos la clasificación de un sistema por el nº de soluciones. Además indicaremos los tres métodos de resolver un sistema de dos ecuaciones y dos variables con un ejemplo, además de ver la forma gráfica. Al final proponemos unos ejercicios para realizar en casa.

0. Sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas. Nº de soluciones.
Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales y dos incógnitas. Se escribe:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ mx + ny = p \end{cases}$$

Donde **a, b, c, m, n** y **p** son números llamados coeficientes y las incógnitas son **x** e **y**.
Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es buscar las soluciones (x, y) que verifican las dos ecuaciones a la vez, es decir que son solución de las dos ecuaciones a la vez. Según el número de soluciones los sistemas se clasifican en:

- Compatible determinado, si la solución es única.
- Compatible indeterminado, si tiene infinitas soluciones.
- Incompatible, si no tiene soluciones.

I. Sistemas equivalentes.
Dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

- Se obtiene un sistema equivalente cambiando una o las dos ecuaciones por otra/s equivalentes.
- Se obtiene un sistema equivalente si a una ecuación del sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo sistema.

II. Resolución de sistemas: Método de sustitución.

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Paso 2: Despejad una incógnita en una de las ecuaciones, la que os resulte más fácil.

Paso 3: Sustituid la expresión obtenida en el paso 1 en la otra ecuación.

Paso 4: Resolved la ecuación resultante (ecuación de 1er grado con una incógnita), obteniendo el valor de una de las variables.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 5: Sustituid el valor de la incógnita obtenido en la ecuación del paso 1 despejada y hallad el valor de la otra incógnita.

Paso 6: Haced la comprobación. Sustituid los valores obtenidos de las variables en las ecuaciones comprobando que se verifican las igualdades.

Paso 7: Escribid la solución del sistema si la comprobación se ha verificado.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3\mathbf{x} - \mathbf{y} = 5 \\ \mathbf{x} - 2\mathbf{y} = 5 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Como ya está preparado seguimos

Paso 2: Despejad **x** de la segunda ecuación.

$$\mathbf{x} = 5 + 2\mathbf{y}$$

Paso 3: Sustituid la **x** de la primera ecuación por la expresión calculada anteriormente.

$$3(5 + 2\mathbf{y}) - \mathbf{y} = 5$$

Paso 4: Resolved la ecuación que ha quedado.

- Paréntesis:

$$15 + 6\mathbf{y} - \mathbf{y} = 5$$

- Pasamos todos términos con **y** a un lado de la = y los que no tengan **y** al otro:

$$6\mathbf{y} - \mathbf{y} = 5 - 15$$

$$5\mathbf{y} = -10$$

- Despejamos la **y**:

$$\mathbf{y} = \frac{-10}{5} = -2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación que despejamos al principio.

$$\mathbf{x} = 5 + 2\mathbf{y} = 5 + 2(-2)$$

$$\mathbf{x} = 5 - 4 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - (-2) = 5 \\ 1 - 2 \cdot (-2) = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 1 + 4 = 5 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $(\mathbf{x}, \quad \mathbf{y}) = (1, -2)$

<u>III. Resolución de sistemas: Método de Igualación:</u>

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Paso 2: Despejad una misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema, la que resulte más fácil.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 3: Igualad las expresiones obtenidas.
Paso 4: Resolved la ecuación resultante (ecuación de 1er grado con una incógnita) obteniendo el valor de una de las incógnitas.
Paso 5: Sustituid el valor de la incógnita obtenido en una de las ecuaciones despejadas al principio, la que resulte más fácil para hallar el valor de la otra incógnita.
Paso 6: Haced la comprobación.
Paso 7: Escribid la solución del sistema si la comprobación se ha verificado.
Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Como ya está preparado seguimos.
Paso 2: Despejad la **x** en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x = 2 + y \\ x = 7 - 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2 + y}{4} \\ x = 7 - 3y \end{cases}$$

Paso 3: Igualad las dos expresiones obtenidas.

$$\frac{2 + y}{4} = 7 - 3y$$

Paso 4: Resolved la ecuación resultante.

- Multiplicamos ambos lados de la igualdad por el m.c.m. :

$$2 + y = 28 - 12y$$

- Pasamos todos los términos con **y** a un lado de = y los que no tengan **y** al otro:

$$y + 12y = 28 - 2 \qquad 13y = 26$$

- Despejamos la **y:**

$$y = \frac{26}{13} = 2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** obtenido en una de las ecuaciones despejadas del principio.

$$x = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 6 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 - 2 = 2 \\ 1 + 3 \cdot 2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 - 2 = 2 \\ 1 + 6 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 2 \\ 7 = 7 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $(x, y) = (1, 2)$

IV. Resolución de sistemas: Método de reducción:

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Paso 2: Multiplicad cada ecuación por el número conveniente de modo que ambas ecuaciones tengan una de las incógnitas con el mismo coeficiente y con signo contrario.
Paso 3: Sumad ambas ecuaciones reduciendo el sistema a una sola ecuación con una sola incógnita.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 4: Resolved la ecuación obteniendo el valor de la incógnita.
Paso 5: Sustituid el valor de la incógnita calculado en cualquiera de las ecuaciones del sistema, calculando el valor de la segunda incógnita.
Paso 6: Haced la comprobación.
Paso 7: Escribid la solución del sistema si la comprobación se ha verificado.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando y ordenándolo.
Como ya está preparado seguimos.
Paso 2: Multiplicad la segunda ecuación por -3, para que la **x** de la segunda ecuación tenga el mismo coeficiente que la primera pero cambiado de signo.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ -3\,(x + 2y) = 8\,(-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$3x - 4y = -6$$

$$-3x - 6y = -24@$$

$$-10y = -30$$

Paso 4: Resolved la ecuación de 1er grado.

$$y = \frac{-30}{-10} = 3$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación segunda del sistema para obtener el valor de **x.**

$$x + 2 \cdot 3 = 8 \qquad x + 6 = 8 \qquad x = 8 - 6 = 2$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 + 2 \cdot 3 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 - 12 = -6 \\ 2 + 6 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6 = -6 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x, y) = (2, \quad 3)$

Ejercicios:

1.- Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\begin{cases} x - 5y = -8 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

2.- Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

3.- Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción.

$$\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} 3(-2x+1)-4y=1 \\ 4x-2(3y+1)=8 \end{cases}$$

5.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} y+2x=2 \\ 4x+2y=8 \end{cases}$$

6.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} y+3x=5 \\ 2x+6y=10 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

2.- RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……

Instrucciones: corregid los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, de no saber llegar al final. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\begin{cases} \mathbf{x - 5y = -8} \\ \mathbf{x + 3y = 0} \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Despejad la **x** en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} \mathbf{x = -8 + 5y} \\ \mathbf{x = -3y} \end{cases}$$

Paso 3: Igualad las dos expresiones obtenidas.

$$-8 + 5y = -3\mathbf{y}$$

Paso 4: Resolved la ecuación resultante.

- Pasamos todos los términos con **y** a un lado de = y los que no tengan **y** al otro:

$$\mathbf{5y + 3y = 8} \qquad\qquad \mathbf{8y = 8}$$

- Despejamos la **y:**

$$\mathbf{y = \frac{8}{8} = 1}$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** obtenido en una de las ecuaciones del principio.

$$\mathbf{x = -3 \cdot 1 = -3}$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} -3 - 5 \cdot 1 = -8 \\ -3 + 3 \cdot 1 = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -3 - 5 = -8 \\ -3 + 3 = 0 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $\mathbf{(x, y) = (-3, 1)}$

2.- Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\begin{cases} \mathbf{4x - y = 2} \\ \mathbf{x + 3y = 7} \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Como ya está preparado seguimos.
Paso 2: Despejad **x** de la segunda ecuación.

$$\mathbf{x = 7 - 3y}$$

Paso 3: Sustituid la **x** de la primera ecuación por la expresión calculada.

$$\mathbf{4(7 - 3y) - y = 2}$$

Paso 4: Resolved la ecuación que nos ha quedado.

- Paréntesis:

$$\mathbf{28 - 12y - y = 2}$$

- Pasamos todos los términos con **y** a un lado de = y los que no tengan **y** al otro:

$$\mathbf{-12y - y = 2 - 28}$$

$$\mathbf{-13y = -26}$$

- Despejamos la **y**:

$$\mathbf{y = \frac{-26}{-13} = 2}$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación que despejamos al principio.

$$\mathbf{x = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 6 = 1}$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 - 2 = 2 \\ 1 + 3 \cdot 2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 - 2 = 2 \\ 1 + 6 = 7 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $\mathbf{(x, \; y) = (1, 2)}$

3.- Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción.

$$\begin{cases} \mathbf{8x - 6y = -34} \\ \mathbf{5x + 3y = -1} \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.
Como ya está preparado seguimos.
Paso 2: Multiplicad la segunda ecuación por 2, para que la **y** de la segunda ecuación tenga el mismo coeficiente que la primera pero cambiado de signo.

$$\begin{cases} \mathbf{8x - 6y = -34} \\ \mathbf{2 \cdot (5x + 3y) = 2 \cdot (-1)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{8x - 6y = -34} \\ \mathbf{10x + 6y = -2} \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$\mathbf{8x - 6y = -34}$$

$\mathbf{10x + 6y = -2}$@

$$\mathbf{18x = -36}$$

Paso 4: Resolved la ecuación de 1er grado.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x=\frac{-36}{18}=-2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **x** en la ecuación primera ecuación del sistema para obtener el valor de **y.**

$$8\cdot(-2)-6y=-34 \qquad -16-6y=-34$$

$$-6y=-34+16=-18$$

$$y=\frac{-18}{-6}=3$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases}8\cdot(-2)-6\cdot 3=-34\\ 5\cdot(-2)+3\cdot 3=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}-16-18=-34\\ -10+9=-1\end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x,y)=(-2,\ 3)$

4.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases}3(-2x+1)-4y=1\\ 4x-2(3y+1)=8\end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

$$\begin{cases}-6x+3-4y=1\\ 4x-6y-2=8\end{cases} \qquad \begin{cases}-6x-4y=1-3\\ 4x-6y=8+2\end{cases} \qquad \begin{cases}-6x-4y=-2\\ 4x-6y=10\end{cases}$$

Paso2: Elegimos el método de reducción. Multiplicad la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3 para tener los mismos coeficientes de la **x** con distinto signo.

$$\begin{cases}2\cdot(-6x-4y)=2\cdot(-2)\\ 3\cdot(4x-6y)=3\cdot 10\end{cases} \qquad \begin{cases}-12x-8y=-4\\ 12x-18y=30\end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones reduciendo el sistema a una sola ecuación con una sola incógnita.

$$-12x-8y=-4$$

$$12x-18y=30$$@

$$-26y=26$$

Paso 4: Resolved la ecuación obteniendo el valor de **y**.

$$y=\frac{26}{-26}=-1$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la primera ecuación del sistema para obtener el valor de **x**.

$$-6x-4(-1)=-2 \qquad -6x+4=-2 \qquad -6x=-2-4 \qquad -6x=-6$$

$$x=\frac{-6}{-6}=1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases}3(-2\cdot 1+1)-4(-1)=1\\ 4\cdot 1-2(3(-1)+1)=8\end{cases} \quad \begin{cases}3(-2+1)+4=1\\ 4-2(-3+1)=8\end{cases} \quad \begin{cases}3(-1)+4=1\\ 4-2(-2)=8\end{cases} \quad \begin{cases}-3+4=1\\ 4+4=8\end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. (x, y)=(1, -1)

5.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{cases} \mathbf{y + 2x = 2} \\ \mathbf{4x + 2y = 8} \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

$$\begin{cases} \mathbf{2x + y = 2} \\ \mathbf{4x + 2y = 8} \end{cases}$$

Paso 2: Elegimos el método de reducción. Multiplicad la primera ecuación por -2 para que las dos ecuaciones tengan los mismos coeficientes en la **y** pero con distinto signo.

$$\begin{cases} -2 \cdot (\mathbf{2x + y}) = \mathbf{-2 \cdot 2} \\ \mathbf{4x + 2y = 8} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{-4x - 2y = -4} \\ \mathbf{4x + 2y = 8} \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$\mathbf{-4x - 2y = -4}$$

$$\mathbf{4x + 2y = 8@}$$

$$\mathbf{0 = 4}$$

¡¡ojo!! Hemos llegado a una ecuación imposible, incompatible. El sistema no tiene solución.

6.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} \mathbf{x + 3y = 5} \\ \mathbf{2x + 6y = 10} \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Elegimos el método de reducción. Multiplicad la primera ecuación por -2 para que las dos ecuaciones tengan los mismos coeficientes en la **y** pero con distinto signo.

$$\begin{cases} -2 \cdot (\mathbf{x + 3y}) = \mathbf{-2 \cdot 5} \\ \mathbf{2x + 6y = 10} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{-2x - 6y = -10} \\ \mathbf{2x + 6y = 10} \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$\mathbf{-2x - 6y = -10}$$

$$\mathbf{2x + 6y = 10@}$$

$$\mathbf{0 = 0}$$

¡¡ojo!! Si hubiéramos elegido otro método nos habría sucedido algo parecido. Esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES						
Día:						
Nombre:						
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
En los cálculos						
En los menos delante de los paréntesis						
En los menos delante de las fracciones						
Se ha equivocado en el método						
Por depiste						
No ha sabido terminar el ejercicio						
Otros						

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:………

Instrucciones: En la clase daremos el último método de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas, veremos un ejemplo de sistema con ecuaciones con fracciones, corregiremos los ejercicios del día anterior y se mandará más ejercicios

IV. Método Gráfico (Interpretación geométrica):

Paso 1: Despejad la incógnita **y** en las dos ecuaciones.
Paso 2: Calculad dos puntos de la primera ecuación dando valores cualesquiera a x.
Paso 3: Calculad dos puntos de la segunda ecuación dando valores cualesquiera a x.
Paso 4: Dibujad las dos rectas con la ayuda de los dos puntos calculado. El punto en el que se cortan que es la solución del sistema.

Paso 5: Escribid la solución.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \mathbf{x+y=4} \\ \mathbf{-3x+y=0} \end{cases}$$

Paso 1: Despejad y en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{y=4-x} \\ \mathbf{y=3x} \end{cases}$$

Paso 2: Calculad dos puntos de la primera ecuación.

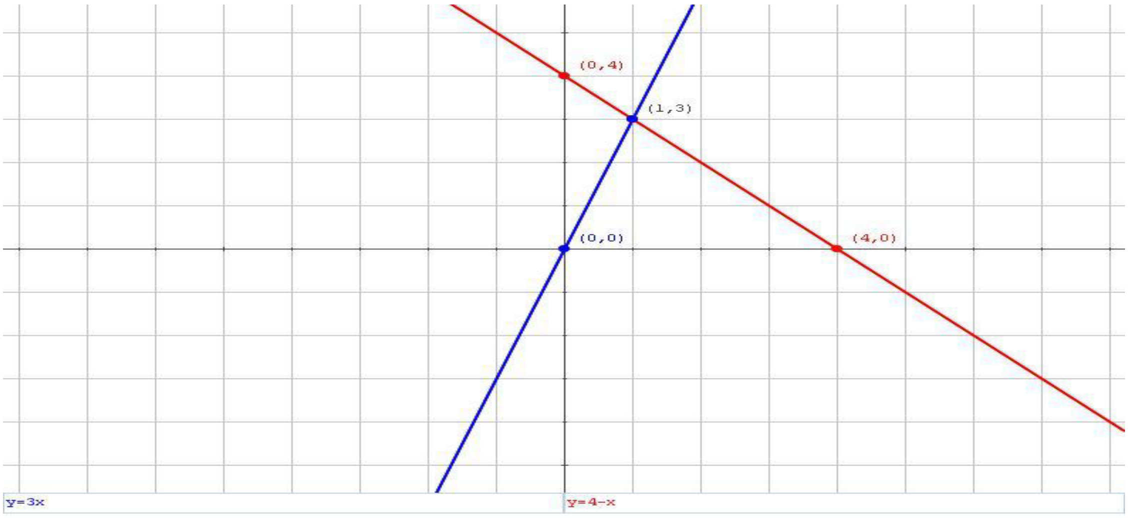
X	y=4-x	(x,y)
0	4-0=4	(0,4)
4	4-4=0	(4,0)

Paso 3: Calculad dos puntos de la segunda ecuación.

x	y=3x	(x,y)
0	3·0=0	(0,0)
1	3·1=3	(1,3)

Paso 4: Dibujad las dos gráficas.

Universidad Pontificia de Salamanca



Paso 5: Escribid la solución (x,y)=(1,3)

V. Sistemas de dos ecuaciones con fracciones.

Un sistema de ecuaciones con fracciones antes de aplicar cualquier método lo primero es pre-pararlo para que las ecuaciones no tengan fracciones.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{2y}{3} = 6 \\ \dfrac{-x}{10} + \dfrac{5y}{6} = -6 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{15} - \dfrac{5 \cdot 2y}{15} = \dfrac{15 \cdot 6}{15} \\ \dfrac{3 \cdot (-x)}{30} + \dfrac{5 \cdot 5y}{30} = -\dfrac{30 \cdot 6}{30} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = 180 \end{cases}$$

Paso 2: Si no nos han pedido resolver el sistema por un método concreto elegid el que resulte más conveniente. En este caso elegimos el método de reducción. Ya no hace falta multiplicad por nada ninguna ecuación porque el sistema ya esta listo.

Paso 3: Sumad las ecuaciones.

$$3x - 10y = 90$$

$$-3x + 25y = -180$$@

$$15y = -90$$

Paso 4: Resolved la ecuación de 1er grado.

$$y = \frac{-90}{15} = -6$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación 2ª del sistema para obtener el valor de **x.**

$$\frac{-x}{10}+\frac{5\cdot(-6)}{6}=-6$$
$$\frac{-x}{10}-5=-6$$
$$\frac{-x}{10}=-6+5$$
$$\frac{-x}{10}=-1$$
$$-x=-1\cdot 10$$
$$-x=-10$$
$$x=10$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases}\frac{10}{5}-\frac{2\cdot(-6)}{3}=6\\ \frac{-10}{10}+\frac{5\cdot(-6)}{6}=-6\end{cases}\qquad \begin{cases}2+4=6\\ -1-5=-6\end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x,y)=(10,-6)$

Ejercicios:

1.- Resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases}\frac{2}{3}x+y=-1\\ \frac{x+1}{3}+\frac{y-1}{6}=-1\end{cases}$$

2.- Resuelve por el método de sustitución e sistema:

$$\begin{cases}\frac{2-x}{3}+\frac{3+y}{6}=2\\ \frac{8-3x}{6}-\frac{2+y}{9}=2\end{cases}$$

3.- Resuelve por el método de igualación el sistema:

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2}+\frac{y+1}{4}=1\\ \frac{2x-1}{2}-\frac{2y+1}{6}=1\end{cases}$$

4.- Resuelve gráficamente el sistema:

$$\begin{cases}x+2y=3\\ x+y=0\end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- CORRECCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**……………………………… **GRUPO:**…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: corregid los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, de no saber llegar al final. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = -1 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{6} = -1 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{3} = \frac{-3}{3} \\ \frac{2(x+1)}{6} + \frac{y-1}{6} = \frac{-6}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x + 2 + y - 1 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$$

Paso 2: Resolved por el método de reducción. Multiplicamos la ecuación de arriba por **-1** para que tengan ambas ecuaciones el mismo coeficiente en **x** con signo contrario.

$$\begin{cases} -2x - 3y = 3 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad las ecuaciones.

$$-2x - 3y = 3$$

$$2x + y = -7@$$

$$-2y = -4$$

Paso4: Resolved la ecuación de 1er grado.

$$y = \frac{-4}{-2} = 2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la primera ecuación del sistema para obtener el valor de **x.**

$$\frac{2}{3}x + 2 = -1$$

$$\frac{2}{3}x = -1 - 2$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x = -\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{-9}{2}$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\frac{(-9)}{2} + 2 = -1 \\ \frac{\frac{-9}{2} + 1}{3} + \frac{2-1}{6} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 + 2 = -1 \\ \frac{\frac{-9+2}{2}}{3} + \frac{1}{6} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 = -1 \\ \frac{-7}{6} + \frac{1}{6} = -1 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x, y) = \left(\frac{-9}{2}, \quad 2\right)$

2.- Resuelve por el método de sustitución e sistema:

$$\begin{cases} \frac{2-x}{3} + \frac{3+y}{6} = 2 \\ \frac{8-3x}{6} - \frac{2+y}{9} = 2 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

- Fracciones equivalentes $\begin{cases} \frac{2(2-x)}{6} + \frac{3+y}{6} = \frac{2 \cdot 6}{6} \\ \frac{3(8-3x)}{18} - \frac{2(2+y)}{18} = \frac{18 \cdot 2}{18} \end{cases}$
- Multiplicamos por el m.c.m. $\begin{cases} 4 - 2x + 3 + y = 12 \\ 24 - 9x - 4 - 2y = 36 \end{cases}$
- Agrupamos, operamos y ordenamos $\begin{cases} -2x + y = 5 \\ -9x - 2y = 16 \end{cases}$

Paso 2: Resolved por el método de sustitución. Despejamos la **y** en la primera ecuación.

$y = 5 + 2x$

Paso 3: Sustituid la **y** de la segunda ecuación por la expresión que acabamos de hallar.

$$-9x - 2(5 + 2x) = 16$$

Paso 4: Resolved la ecuación que nos ha quedado.

$$-9x - 10 - 4x = 16$$

$$-9x - 4x = 16 + 10$$

$$-13x = 26$$

$$x = \frac{26}{-13} = -2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **x** en la ecuación que despejamos al principio.

$$y = 5 + 2(-2) = 5 - 4 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} \frac{2-(-2)}{3} + \frac{3+1}{6} = 2 \\ \frac{8-3(-2)}{6} - \frac{2+1}{9} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2+2}{3} + \frac{4}{6} = 2 \\ \frac{8+6}{6} - \frac{2+1}{9} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{3} + \frac{4}{6} = 2 \\ \frac{14}{6} - \frac{3}{9} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \\ \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. La solución del sistema es (x, y)=(-2,1)

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- Resuelve por el método de igualación el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{4} = 1 \\ \frac{2x-1}{2} - \frac{2y+1}{6} = 1 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

- Fracciones equivalentes $\begin{cases} \frac{2(x-1)}{4} + \frac{y+1}{4} = \frac{4}{4} \\ \frac{3(2x-1)}{6} - \frac{2y+1}{6} = \frac{6}{6} \end{cases}$
- Multiplicamos por el m.c.m. $\begin{cases} 2x-2+y+1=4 \\ 6x-3-2y-1=6 \end{cases}$
- Agrupamos, operamos y ordenamos $\begin{cases} 2x+y=4+2-1 \\ 6x-2y=6+3+1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 6x-2y=10 \end{cases}$$

Paso 2: Resolved por el método de igualación. Despejamos la **y** en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = 5-2x \\ y = \frac{10-6x}{-2} = \frac{6x-10}{2} \end{cases}$$

Paso 3: Igualad las expresiones obtenidas.

$$5-2x = \frac{6x-10}{2}$$

Paso 4: Resolved la ecuación resultante (ecuación de 1er grado con una incógnita) obteniendo el valor de **x**.

$$\frac{2(5-2x)}{2} = \frac{6x-10}{2}$$

$$10-4x = 6x-10$$

$$-4x-6x = -10-10$$

$$-10x = -20$$

$$x = \frac{-20}{-10} = 2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **x** en una de las ecuaciones despejadas para hallar **y**.

$$y = 5-2\cdot 2 = 5-4 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} \frac{2-1}{2} + \frac{1+1}{4} = 1 \\ \frac{2\cdot 2-1}{2} - \frac{2\cdot 1+1}{6} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2-1}{2} + \frac{1+1}{4} = 1 \\ \frac{4-1}{2} - \frac{2+1}{6} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{6} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. La solución del sistema es (x, y)=(2,1)

4.- Resuelve gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 1: Despejad y en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-x}{2} \\ y = -x \end{cases}$$

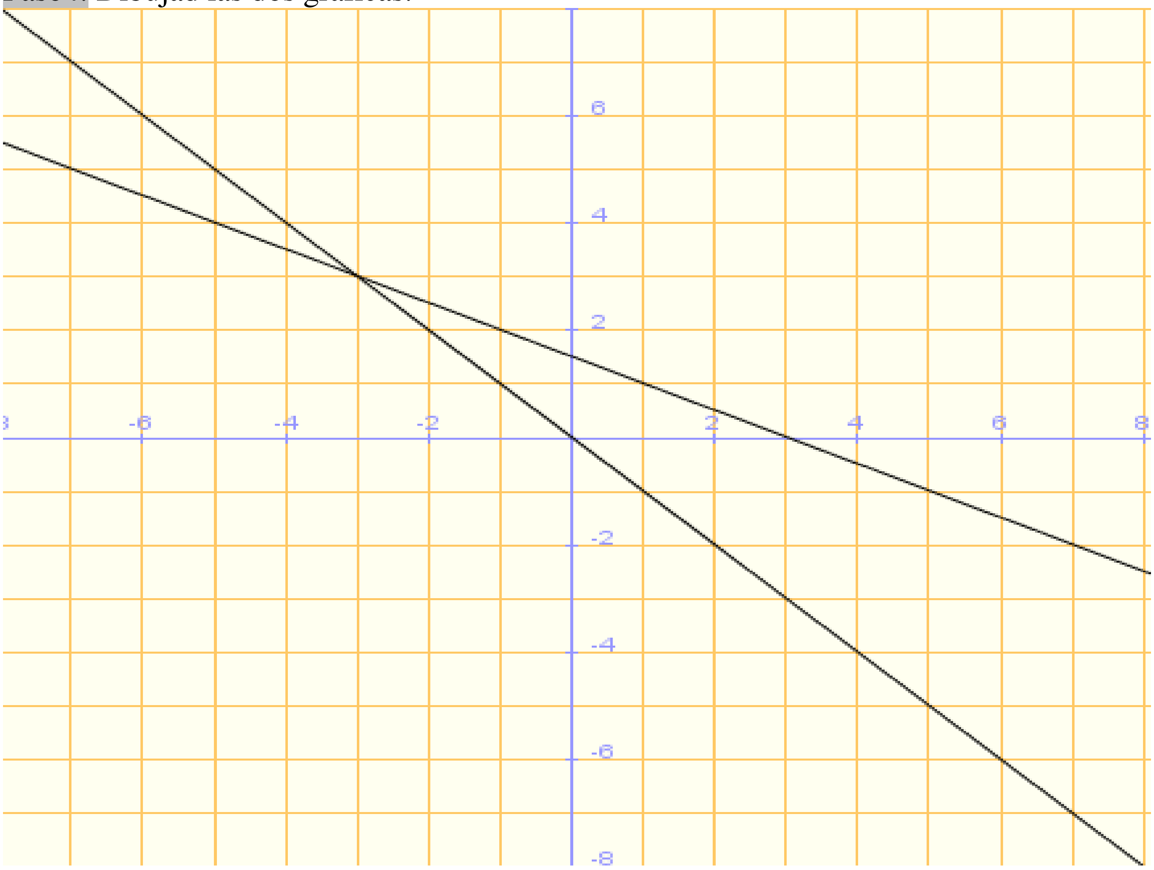
Paso 2: Calculad dos puntos de la primera ecuación.

x	$y = \dfrac{3-x}{2}$	(x,y)
3	0	(3,0)
1	1	(1,1)

Paso 3: Calculad dos puntos de la segunda ecuación.

x	y=-x	(x,y)
0	0	(0,0)
1	-1	(1,-1)

Paso4: Dibujad las dos gráficas:



Paso 5: Escribid la solución (x,y)=(-3,3)

TABLA DE ERRORES
Día:
Nombre:

Universidad Pontificia de Salamanca

Errores	**1**	**2**	**3**	**4**
En los cálculos				
En los menos delante de los paréntesis				
En los menos delante de las fracciones				
En el procedimiento				
Por despiste				
No ha sabido terminar el ejercicio				
En la comprobación				
Otros				

Universidad Pontificia de Salamanca

5.- PROBLEMAS DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Instrucciones: Vamos a ver un procedimiento general de cómo resolver un problema de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. A continuación veremos algunos tipos que resolveremos y luego propondremos algunos problemas para resolver.

●♦**Procedimiento.**

Paso 1: Entended bien el enunciado del problema. Para ello leed el problema las veces que haga falta, recordando problemas parecidos, cambiando palabras del enunciado por otras que resulten más familiares, pensando que el problema es algo propio que nos sucede a nosotros. También puede ayuda hacer dibujos, esquemas, tablas.

Paso 2: Identificad los datos y las relaciones entres ellos. Elegid las incógnitas asignándolas una letra. Si se ha hecho un esquema, tabla o dibujo conviene escribir en él los datos y las incógnitas. Transformad las relaciones entre los datos al lenguaje algebraico.

Paso 3: Plantead el sistema teniendo en cuenta las relaciones o condiciones que deben verificar las incógnitas.

Paso 4: Resolved el sistema por el método más adecuado.

Paso 5: Comprobad si el resultado tiene sentido y escribid la solución al problema. No olvides las unidades.

●♦**Ejemplos:**

Nota: problemas resueltos con una ecuación de 1^er^ grado también se pueden resolver con un sistema.

1.-Problema de edades

Una madre tiene el triple de edad que su hija. Si la madre tuviese 30 años menos y el hijo 8 años más, los dos tendrían la misma edad. ¿Cuáles son las edades de la madre y del hijo?

Paso 1: Entended y representad el problema.

Si la hija tiene 12 años la madre tendría 3·12=36

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: edad de la madre

y: edad del hijo

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} \mathbf{x = 3y} \\ \mathbf{x - 30 = y + 8} \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hago por igualación.

- Despejamos la **x** en las dos ecuaciones: $\begin{cases} \mathbf{x = 3y} \\ \mathbf{x = y + 38} \end{cases}$
- Igualamos las dos expresiones obtenidas: $\mathbf{3y = y + 38}$
- Resolvemos la ecuación de 1^er^ grado. Despejamos **y**: $\mathbf{3y - y = 38}$

$$\mathbf{2y = 38}$$

$$\mathbf{y = \frac{38}{2} = 19}$$

- Con el valor de **y** calculo **x** en la primera ecuación: $\mathbf{x = 3 \cdot 19 = 57}$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 57 = 3 \cdot 19 \\ 57 - 30 = 19 + 8 \end{cases}$$

La solución: la madre tiene 57 años y la hija tiene 19 años.

2.- Problema de alumnos

La clase de 3º de ESO realizó una excursión a Mérida con motivo de visitar el Museo de Arte Romano. ¿Cuántos chicos y chicas fueron de excursión sabiendo que en total eran 44 alumnos y que el número de chicas es el triple que el de chicos?

Paso 1: Entended y representad el problema.

chi-

chi-	chi-	chi-

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : nº de chicos

y : nº de chicas

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 44 \\ 3x = y \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos la variable **y** en la segunda ecuación: $y = 3x$
- Sustituimos la expresión de la **y** en la primera ecuación: $x + 3x = 44$
- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **x**: $4x = 44$

$$x = \frac{44}{4} = 11$$

- Sustituimos el valor de **x** en la primera ecuación y conseguimos **y**: $y = 3 \cdot 11 = 33$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 11 + 33 = 44 \\ 3 \cdot 11 = 33 \end{cases}$$

La solución: 11 chicos y 33 chicas

3.-Problema de gallinas y conejos

En una granja de conejos y pollos, el número de cabezas es de 100. ¿Cuántos pollos y conejos habrá en la granja sabiendo que el número de patas es de 320?

Paso 1: Entended y representad el problema.

Cabezas

Nº conejos

Nºgalli-

Universidad Pontificia de Salamanca

Patas: los conejos tienen 4 patas y las gallinas 2

Nº conejos	Nº conejos	Nº conejos	Nº conejos

Nºgalli-	Nºgalli-

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : nº de conejos

y : nº de pollos

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 2y = 320 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos una variable: $x = 100 - y$
- Sustituimos en la otra ecuación la expresión: $4(100 - y) + 2y = 320$
- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **y**: $400 - 4y + 2y = 320$

$$-4y + 2y = 320 - 400$$

$$-2y = -80$$

$$y = \frac{-80}{-2} = 40$$

- Sustituimos el valor de **y** en la primera ecuación y conseguimos **x**:

$$x = 100 - 40 = 60$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 60 + 40 = 100 \\ 4 \cdot 60 + 2 \cdot 40 = 320 \end{cases} \quad \begin{cases} 100 = 100 \\ 240 + 80 = 320 \end{cases}$$

La solución: 60 conejos y 40 pollos

4.-Problema de puntuación

Sabiendo que la puntuación obtenida por Paloma en un examen de Álgebra de 20 preguntas ha sido 9,5 y que por cada pregunta acertada consigue un punto y que por cada pregunta no contestada o errónea se le quita medio punto, calcula el número de preguntas acertadas y el de preguntas no contestadas o erróneas

Paso 1: Entended y representad el problema.

Nº aciertos +	Nº errores o nc -

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

Universidad Pontificia de Salamanca

x : nº de preguntas acertadas
y : nº de preguntas erróneas o no contestadas

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x \cdot 1 - y \cdot 0,5 = 9,5 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

- Las dos ecuaciones tienen el mismo coeficiente en la incógnita **x** con distinto signo.

- Sumamos las dos ecuaciones:

$$x + y = 20$$
$$-x + 0,5y = -9,5@$$

$$1,5y = 10,5$$

- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **y**:

$$y = 10,\frac{5}{1},5 = 7$$

- Sustituimos el valor de **y** en la primera ecuación y conseguimos **x**: $x + 7 = 20$

$$x = 20 - 7 = 13$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 13 + 7 = 20 \\ 13 \cdot 1 - 7 \cdot 0,5 = 9,5 \end{cases} \quad \begin{cases} 20 = 20 \\ 13 - 3,5 = 9,5 \end{cases}$$

La solución: 13 aciertos y 7 erróneas o no contestadas

5.-Problema cifras

Halla un número de dos cifras de manera que la suma de las cifras sea 15 y que dicho número sea 9 unidades mayor que el número que se obtiene al invertir sus cifras

Paso 1: Entended y representad el problema.

Como la x son las decenas el número sería 10x+y

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : cifra de las decenas
y : cifra de las unidades

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 10x + y = 10y + x + 9 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

- Preparamos el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 10x - x + y - 10y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 9x - 9y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- Las dos ecuaciones tienen el mismo coeficiente en la incógnita **x** pero con distinto signo.

- Sumamos las dos ecuaciones:

$$x + y = 15$$
$$x - y = 1$$
$$2x = 16$$

- Resolvemos la ecuación de 1^er^ grado. Despejamos **x**: $x = \dfrac{16}{2} = 8$

- Sustituimos el valor de **x** en la primera ecuación y conseguimos **y**: $8 + y = 15$

$y = 15 - 8 = 7$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 8 + 7 = 15 \\ 10 \cdot 8 + 7 = 10 \cdot 7 + 8 + 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 15 = 15 \\ 80 + 7 = 70 + 8 + 9 \end{cases}$$

La solución: el número es 87

•♦Ejercicios:

1.- Un librero vende 84 libros a dos precios distintos, unos a 45€ y otros a 36€, obteniendo de la venta 3105€. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

2.- Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, $\frac{8}{3}$.

3.- Si Javier regala a Beatriz 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él. Si Beatriz da 6 de sus CDs a Javier, entonces será él que tenga el doble que ella. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?

4.-Pedro y María van todos los miércoles de compras al mercadillo. Los dos han comprado en el mismo puesto. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de la camiseta y del pantalón?

5.- Las edades de un padre y su hijo suman 46 años, halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que sus edades difieren en 32 años.

Universidad Pontificia de Salamanca

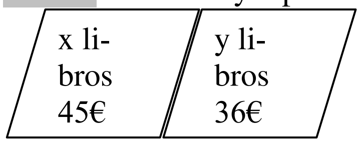
6.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:…………………………………………………

Instrucciones: corregiremos los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de planteamiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, en la solución, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Un librero vende 84 libros a dos precios distintos, unos a 45€ y otros a 36€, obteniendo de la venta 3105€ ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : libros de 45€
y : libros de 36€

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ 45x + 36y = 3105 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos la variable **x**: $x = 84 - y$
- Sustituimos en la otra ecuación la expresión: $45(84 - y) + 36y = 3105$
- Resolvemos la ecuación. Despejamos **y**:

$$3780 - 45y + 36y = 3105$$

- Pasamos los términos con **y** a un lado de la igualdad

$$-45y + 36y = 3105 - 3780$$

$$-9y = -675$$

$$y = \frac{-675}{-9} = 75$$

- Despejamos **x**: $x = 84 - 75 = 9$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 9 + 75 = 84 \\ 45 \cdot 9 + 36 \cdot 75 = 3105 \end{cases} \quad \begin{cases} 84 = 84 \\ 405 + 2700 = 3105 \end{cases} \quad \begin{cases} 84 = 84 \\ 3105 = 3105 \end{cases}$$

La solución: 9 libros de 45€ y 75 libros de 36€.

Universidad Pontificia de Salamanca

2.- Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, $\frac{8}{3}$.
Paso 1: Entended y representad el problema.
Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : nº 1

y : nº 2

Paso 3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 154 \\ \frac{x}{y} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos una variable $\quad x = 154 - y$

- Sustituimos en la otra ecuación la expresión $\quad \frac{154 - y}{y} = \frac{8}{3}$

- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **y**: $\quad 3(154 - y) = 8y$

$$462 - 3y = 8y$$

$$462 = 8y + 3y$$

$$11y = 462$$

$$y = \frac{462}{11} = 42$$

- Despejamos **x**: $\quad x = 154 - 42 = 112$

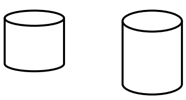
Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 9 + 75 = 84 \\ 45 \cdot 9 + 36 \cdot 75 = 3105 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 84 = 84 \\ 405 + 2700 = 3105 \end{cases} \qquad \begin{cases} 84 = 84 \\ 3105 = 3105 \end{cases}$$

La solución: nº1: 112 nº2: 42

3.- Si Javier regala a Beatriz 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él. Si Beatriz da 6 de sus CDs a Javier, entonces será él que tenga el doble que ella. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?
Paso 1: Entended y representad el problema.

Nº CDs 

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: nº de CDs de Javier

Universidad Pontificia de Salamanca

y: nº de CDs de Beatriz

Paso 3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} 2(\mathbf{x}-\mathbf{4}) = \mathbf{y}+\mathbf{4} \\ \mathbf{x}+\mathbf{6} = \mathbf{2}(\mathbf{y}-\mathbf{6}) \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

- Preparamos el sistema:

$$\begin{cases} 2\mathbf{x}-\mathbf{8} = \mathbf{y}+\mathbf{4} \\ \mathbf{x}+\mathbf{6} = \mathbf{2y}-\mathbf{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{8}+\mathbf{4} \\ \mathbf{x}-\mathbf{2y} = -\mathbf{12}-\mathbf{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mathbf{x}-\mathbf{y} = \mathbf{12} \\ \mathbf{x}-\mathbf{2y} = -\mathbf{18} \end{cases}$$

- Multiplicamos por -2 la primera ecuación:

$$\begin{cases} -4\mathbf{x}+\mathbf{2y} = -\mathbf{24} \\ \mathbf{x}-\mathbf{2y} = -\mathbf{18} \end{cases}$$

- Sumamos las ecuaciones:

$$-4\mathbf{x}+\mathbf{2y} = -\mathbf{24}$$

$\mathbf{x}-\mathbf{2y} = -\mathbf{18}$@

$$-\mathbf{3x} = -\mathbf{42}$$

- Resolvemos la ecuación. Despejamos **x**:

$$\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{42}}{-\mathbf{3}} = \mathbf{14}$$

- Despejamos **y**:

$$2\cdot 14-12 = \mathbf{y}$$

$$28-12 = \mathbf{y}$$

$$16 = \mathbf{y}$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} \mathbf{2}(14-\mathbf{4}) = 16+\mathbf{4} \\ 14+6 = 2(16-6) \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\cdot 10 = 2\mathbf{0} \\ 14+6 = 2\cdot\mathbf{10} \end{cases}$$

La solución: Javier tiene 14 CDs y Beatriz tiene 16 CDs

Universidad Pontificia de Salamanca

4.-Pedro y María van todos los miércoles de compras al mercadillo. Los dos han comprado en el mismo puesto. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de la camiseta y del pantalón?

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: precio del pantalón en €

y: precio de la camiseta en €

Paso 3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} 2\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{22} \\ \mathbf{3x} + \mathbf{2y} = \mathbf{39} \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

- Multiplicamos por -2 la 1ª ecuación:

$$\begin{cases} -\mathbf{4x} - \mathbf{2y} = -\mathbf{44} \\ \mathbf{3x} + \mathbf{2y} = \mathbf{39} \end{cases}$$

- Sumamos las ecuaciones:

$$-\mathbf{4x} - \mathbf{2y} = -\mathbf{44}$$

$$\mathbf{3x} + \mathbf{2y} = \mathbf{39}@$$

$$-\mathbf{x} = -\mathbf{5}$$

- Resolvemos la ecuación. Despejamos **x:**

$$\mathbf{x} = \mathbf{5}$$

- Despejamos **y** :

$$2 \cdot 5 + \mathbf{y} = \mathbf{22}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{22} - \mathbf{10}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{12}$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 12 = 22 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 12 = 39 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10 + 12 = 22 \\ 15 + 24 = 39 \end{cases}$$

La solución: El pantalón cuesta 5 € y la camiseta 12€

Universidad Pontificia de Salamanca

5.- Las edades de un padre y su hijo suman 46 años, halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que sus edades difieren en 32 años.

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: la edad del padre

y: la edad del hijo

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} \mathbf{x+y=46} \\ \mathbf{x-y=32} \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por reducción.

- Las dos ecuaciones tienen el mismo coeficiente en la incógnita **y** pero con distinto signo:

- Sumamos las dos ecuaciones:

$$\mathbf{x+y=46}$$

$$\mathbf{x-y=32}@$$

$$\mathbf{2x=78}$$

- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **x**: $\mathbf{x=\frac{78}{2}=39}$

- Calculamos el valor de **y**: $39+\mathbf{y=46}$

$$\mathbf{y=46-39=7}$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 39+7=46 \\ 39-7=32 \end{cases}$$

La solución: el padre tiene 39 años y el hijo 7 años

TABLA DE ERRORES					
Día:					
Nombre:					
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
En los cálculos					
En los menos delante de los paréntesis					
En los menos delante de las fracciones					
Se ha equivocado en el planteamiento					
Por despiste					
No ha sabido terminar el ejercicio					
Otros					

Universidad Pontificia de Salamanca

Capítulo VI

ANEXO II. – 2: TRABAJO COOPERATIVO EN ÁLGEBRA

Miriam MÉNDEZ COCA

ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

1.- Sesión de explicación de cómo trabajar de forma cooperativa, motivación. Hacer los grupos.

2.- Ficha de explicación sobre las ecuaciones de 1er grado.

3.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

4.- Ficha de problemas resueltos a través de ecuaciones de 1er grado.

5.- Ficha de resolución de problemas de la ficha anterior.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.- ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: Durante la clase vamos a recordar como:

- identificar una ecuación de 1er grado,
- conseguir ecuaciones equivalentes,
- resolver una ecuación de 1er grado,
- interpretación geométrica.

Daremos unos ejercicios para hacer en casa o durante la clase si da tiempo.

0. Identificar una ecuación de 1er grado con una incógnita:

Es una igualdad entre expresiones algebraicas (e.d. letras y números) que se puede reducir a la forma general $\mathbf{ax+b=0}$, donde a, b son números reales y a≠0 siempre.

La solución de una ecuación de 1er grado es $\mathbf{x=\frac{-b}{a}}$.

I. Conseguir ecuaciones equivalentes:

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Es decir dada cualquier ecuación de 1er grado con una incógnita siempre podemos llegar a otra equivalente (que tenga la misma solución que la de inicio) de la forma $\mathbf{ax+b=0}$ cuya solución es $\mathbf{x=\frac{-b}{a}}$.

Se puede conseguir una ecuación equivalente si:

- se suma a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,
- se resta a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,
- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero,
- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero.

II. Como resolver una ecuación de 1er grado con una incógnita:

A continuación vamos a recordar el procedimiento para resolver una ecuación de 1er grado con una incógnita. Para ello daremos tres ejemplos y seguiremos SIEMPRE el mismo procedimiento:

Ejemplo 1:

$\mathbf{3x+2=5x+6}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!:
Como no hay ningún paréntesis seguimos al siguiente paso.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.
Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!
Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.
$3x - 5x = 6 - 2$
Paso 5: Operad y despejad la incógnita.
$-2x = 4$
$x = \frac{4}{-2} = -2$
Paso 6: Haced la comprobación.
$3(-2) + 2 = 5(-2) + 6$
$-6 + 2 = -10 + 6$
$-4 = -4$

Ejemplo 2 (con paréntesis):
$2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$
Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!:
$2x + 2 - 3x + 6 = x + 6$
Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.
Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!
Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.
$2x - 3x - x = 6 - 2 - 6$
Paso 5: Operad y despejad la incógnita.
$-2x = -2$
$x = \frac{-2}{-2} = 1$
Paso 6: Haced la comprobación.
$2(1 + 1) - 3(1 - 2) = 1 + 6$
$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$
$4 + 3 = 7$
Ejemplo 3 (con fracciones):
$$\frac{1}{4} - 5(x - 3) - \frac{3(2x - 1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x - 1}{2} - \frac{1}{2}$$
Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!:
$\frac{1}{4} - 5x + 15 - \frac{6x - 3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x - 1}{2} - \frac{1}{2}$
$\frac{1}{4} - 5x + 15 - \frac{6x - 3}{2} = \frac{3x - 1}{4} - \frac{1}{2}$
Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\frac{1}{4}-\frac{4\cdot 5x}{4}+\frac{4\cdot 15}{4}-\frac{2(6x-3)}{4}=\frac{3x-1}{4}-\frac{2\cdot 1}{4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{20x}{4}+\frac{60}{4}-\frac{12x-6}{4}=\frac{3x-1}{6}-\frac{2}{4}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

$1-20x+60-12x+6=3x-1-2$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$-20x-12x-3x=-1-2-60-6-1 \qquad -35x=-70$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$x=\frac{-70}{-35}=2$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\frac{1}{4}-5(2-3)-\frac{3(2\cdot 2-1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 2-1}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}-5\cdot(-1)-\frac{3(4-1)}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{6-1}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+5-\frac{3(3)}{2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+5-\frac{9}{2}=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{5\cdot 4}{4}-\frac{9\cdot 2}{2}=\frac{5}{4}-\frac{1\cdot 2}{4}$$

$$\frac{1+20-18}{4}=\frac{5-2}{4}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

II. Interpretación geométrica:

Vamos a estudiar la interpretación geométrica.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$2x+2=x+6$

Al resolverla obtenemos:

$2x-x=6-2$

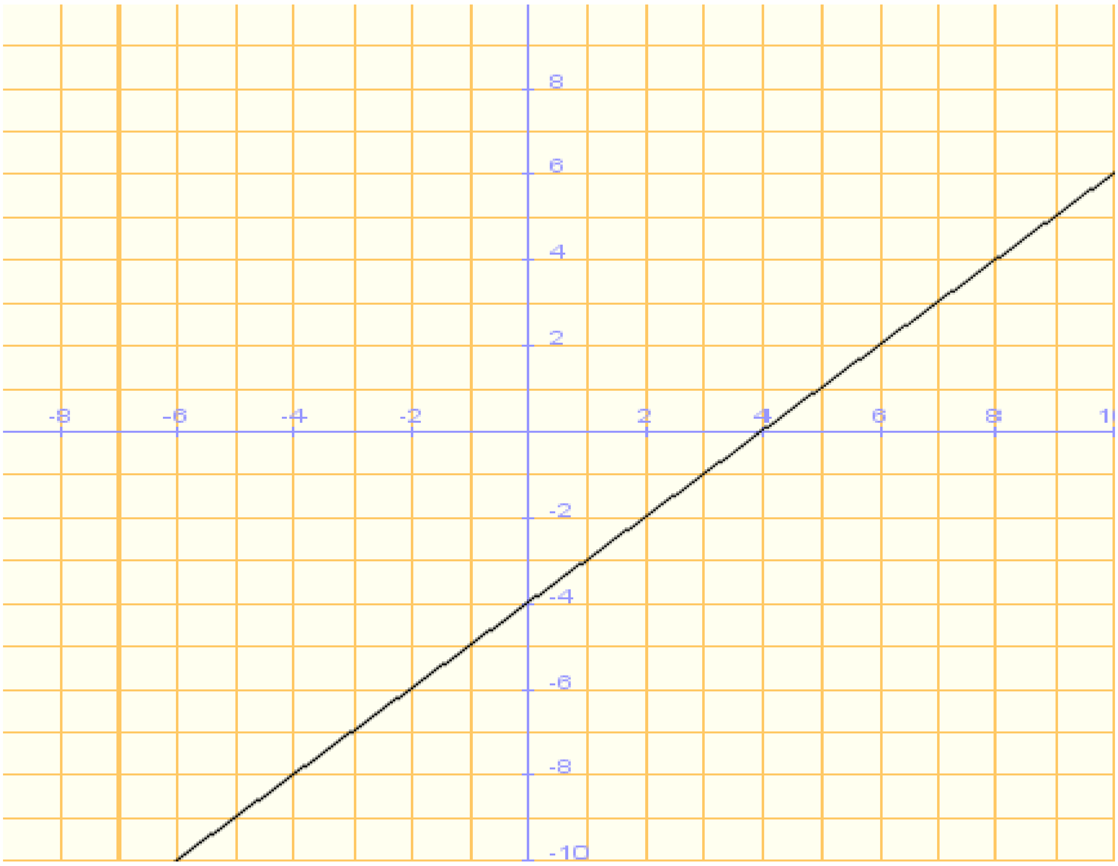
$x=4$

Si representamos la recta:

$y=x-4$

Nos damos cuenta que la solución $x=4 \;\; y=0$, es el punto que corta la recta al eje de abscisas.

Universidad Pontificia de Salamanca



IV. Ejercicios:

Resolved las siguientes ecuaciones, indicando cada paso que dais:

a) $4x + 3x - 4 = 3x - 8$

b) $2x + 3 - (x + 1) = x + 3$

c) $3(x + 2) + 2x = 5x - 2(x - 4)$

d) $5 - 3(2x + 5) = -5 - (2x - 3)$

e) $\frac{7 + x}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7x - 2}{10}$

f) $-5 \cdot \frac{3 - x}{6} = -\frac{x + 10}{12} + \frac{x - 5}{3}$

g) $\frac{3x - 2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4x - 4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5x - 2}{2} = \frac{x + 1}{4} + \frac{3x}{40}$

Universidad Pontificia de Salamanca

2.-RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corregiremos los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $4x + 3x - 4 = 3x - 8$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!
Como no hay paréntesis seguimos al siguiente paso.
Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.
Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!
Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$4x + 3x - 3x = -8 + 4$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$4x = -4$

$$x = \frac{-4}{4} = -1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) - 4 = 3 \cdot (-1) - 8$$

$$-4 - 3 - 4 = -3 - 8$$
$$-11 = -11$$

b) $2x + 3 - (x + 1) = x + 3$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

$2x + 3 - x - 1 = x + 3$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.
Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!
Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$2x - x - x = 3 - 3 + 1$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$0x = 2$

$0 = 2$

Esta ecuación no tiene solución.
Paso 6: Haced la comprobación.

Universidad Pontificia de Salamanca

No hay solución no hay comprobación.

c) $3(x+2)+2x=5x-2(x-4)$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!
$3x+6+2x=5x-2x+8$
Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.
Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!
Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$3x+2x-5x+2x=8-6$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.
$2x=2$

$$x=\frac{2}{2}=1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$3(1+2)+2\cdot 1=5\cdot 1-2(1-4)$$

$$3\cdot 3+2=5-2(-3)$$

$$11=11$$

d) $5-3(2x+5)=-5-(2x-3)$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!
$5-6x-15=-5-2x+3$
Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.
Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.
Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!
Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$-6x+2x=-5+3+15-5$$

Paso 5: Operad y despejar la incógnita.
$-4x=8$

$$x=\frac{8}{-4}=-2$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 6: Haced la comprobación.

$$5-3(2(-2)+5)=-5-(2(-2)-3)$$

$$5-3(-4+5)=-5-(-4-3)$$

$5-3(1)=-5-(-7)$

$$5-3=-5+7$$

$$2=2$$

e) $\dfrac{7+x}{2}=\dfrac{9}{2}+\dfrac{7x-2}{10}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

Como no tenemos paréntesis seguimos al siguiente paso.

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

$$\frac{5(7+x)}{10}=\frac{5\cdot 9}{10}+\frac{7x-2}{10}$$

$$\frac{35+5x}{10}=\frac{45}{10}+\frac{7x-2}{10}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

$35+5x=45+7x-2$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$5x-7x=45-2-35$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$-2x=8$

$$x=\frac{8}{-2}=-4$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\frac{7+(-4)}{2}=\frac{9}{2}+\frac{7(-4)-2}{10}$$

$$\frac{7-4}{2}=\frac{9}{2}+\frac{-28-2}{10}$$

$$\frac{3}{2}=\frac{9}{2}-\frac{-30}{10}$$

$$\frac{3\cdot 5}{10}=\frac{5\cdot 9}{10}+\frac{-30}{10}$$

$$\frac{15}{10}=\frac{45-30}{10}$$

$$\frac{15}{10}=\frac{15}{10}$$

f) $-5\cdot\dfrac{3-x}{6}=-\dfrac{x+10}{12}+\dfrac{x-5}{3}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

$$-\frac{15-5x}{6}=-\frac{x+10}{12}+\frac{x-5}{3}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

$$-\frac{2(15-5x)}{12}=-\frac{x+10}{12}+\frac{4(x-5)}{12}$$
$$-\frac{30-10x}{12}=-\frac{x+10}{12}+\frac{4x-20}{12}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

$-30+10x=-x-10+4x-20$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$10x+x-4x=-10-20+30$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$7x=0$

$$x=\frac{0}{7}=0$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$-5\cdot\frac{3-0}{6}=-\frac{0+10}{12}+\frac{0-5}{3}$$

$$-5\cdot\frac{3}{6}=-\frac{10}{12}+\frac{-5}{3}$$
$$-\frac{15}{6}=-\frac{10}{12}+\frac{-5}{3}$$
$$-\frac{2\cdot15}{12}=-\frac{10}{12}+\frac{4\cdot(-5)}{12}$$
$$\frac{-30}{12}=-\frac{10}{12}+\frac{-20}{12}$$
$$\frac{-30}{12}=\frac{-30}{12}$$

g) $\dfrac{3x-2}{5}-\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4x-4}{2}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{5x-2}{2}=\dfrac{x+1}{4}+\dfrac{3x}{40}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

$$\frac{3x-2}{5}-\frac{4x-4}{10}+\frac{5x-2}{8}=\frac{x+1}{4}+\frac{3x}{40}$$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

$$\frac{8(3x-2)}{40}-\frac{4(4x-4)}{40}+\frac{5(5x-2)}{40}=\frac{10(x+1)}{40}+\frac{3x}{40}$$

$$\frac{24x-16}{40}-\frac{16x-16}{40}+\frac{25x-10}{40}=\frac{10x+10}{40}+\frac{3x}{40}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

$24x-16-16x+16+25x-10=10x+10+3x$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$24x-16x+25x-10x-3x=10+16-16+10$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$20x=20$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x = \frac{20}{20} = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\frac{3\cdot 1-2}{5} - \frac{1}{5}\cdot\frac{4\cdot 1-4}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5\cdot 1-2}{2} = \frac{1+1}{4} + \frac{3\cdot 1}{40}$$

$$\frac{3-2}{5} - \frac{4-4}{10} + \frac{5-2}{8} = \frac{2}{4} + \frac{3}{40}$$

$$\frac{8\cdot 1}{40} - \frac{4\cdot 0}{40} + \frac{5\cdot 3}{40} = \frac{20}{40} + \frac{3}{40}$$

$$\frac{8+15}{40} = \frac{23}{40}$$

$$\frac{23}{40} = \frac{23}{40}$$

TABLA DE ERRORES							
Día:							
Nombre:							
Errores	**A**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**
En los cálculos							
En los menos delante de los paréntesis							
En los menos delante de las fracciones							
Por despiste							
Otros							

Ejercicios:

a) $2(2-3x) - 3(3-2x) = 4(x+1) + 3(4-5x)$

b) $\frac{x-3}{5} = \frac{x+1}{3} - 2$

c) $\frac{2x-4}{3} = 3 - \frac{4+x}{2}$

d) $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4} - 1\right) - \frac{x-1}{2} = 2x$

e) $\frac{x+2}{2} - \frac{x+3}{3} = -\frac{x-4}{4} + \frac{x-5}{5}$

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: Vamos a ver un procedimiento general de cómo resolver un problema de 1er grado con una incógnita. A continuación veremos algunos tipos que resolveremos y luego propondremos algunos problemas para resolver.

•♦Procedimiento

Paso 1: Entended bien el enunciado del problema. Para ello leed el problema las veces que haga falta, recordando problemas parecidos, cambiando palabras del enunciado por otras que resulten más familiares, pensando que el problema es algo propio que nos sucede a nosotros. También puede ayuda hacer dibujos, esquemas, tablas.

Paso 2: Identificad los datos y las relaciones entres ellos. Elegid la incógnita asignándole una letra. Si se ha hecho un esquema, tabla o dibujo conviene escribir en él los datos y las incógnitas. Transformad las relaciones entre los datos al lenguaje algebraico.

Paso 3: Plantead la ecuación teniendo en cuenta las relaciones o condiciones que debe verificar la incógnita.

Paso 4: Resolved la ecuación.

Paso 5: Comprobad si el resultado tiene sentido y escribid la solución al problema. No olvides las unidades.

•♦Ejemplos:

Hay varios tipos de problemas que se resuelven a través de una ecuación de 1er grado.

- problemas numéricos: p.e. calcula números sucesivos;

- problemas de tablas: p.e. los de la edad, los de mezclas;

- problemas gráficos: p.e. los de móviles, figuras geométricos

Ejemplo de problema numérico

Calcula tres números consecutivos tales que la suma de los tres sea igual al doble del segundo.

Paso 1: Entended y representad el problema.

Ejemplo de números consecutivos son p.e.: 5, 5+1, 5+2

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas

Primer número: x Segundo número x+1 Tercer número x+2

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$\mathbf{x + (x+1) + (x+2) = 2(x+1)}$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$\mathbf{3x + 3 = 2x + 2}$

$\mathbf{3x - 2x = 2 - 3}$

$$\mathbf{x = -1}$$

Paso 5: Verificad y escribid el resultado.

Las soluciones son tres números. Sabemos uno, calculamos los otros dos

Universidad Pontificia de Salamanca

$x + 1 = -1 + 1 = 0$ $x + 2 = -1 + 2 = 1$

La solución es -1, 0 , 1

Ejemplo de Problema de tablas (de edades)

Águeda y David tienen respectivamente 8 y 2 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Águeda será el doble de la de David?

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Actualmente	Dentro de ¿? años
Águeda	8	
David	2	

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=nº de años que tienen que pasar

	Actualmente	Dentro de x años
Águeda	8	8+x
David	2	2+x

Paso3: Plantead la ecuación.

$8 + x = 2(2 + x)$

Paso4: Resolved la ecuación.

$$8 + x = 4 + 2x$$

$x - 2x = 4 - 8$

$-x = -4$

$x = 4$

Paso5: Verificad y escribid la solución.

Dentro de 4 años Águeda tendrá el doble que David

Ejemplo de Problema con tablas (de mezclas)

Un ganadero fabrica pienso para sus animales mezclando trigo y cebada de la siguiente forma: por cada 25 kg de trigo echa 15 kg de cebada que le cuesta 10 céntimos cada kg. Al final, resulta que el kg de pienso le cuesta a 15 céntimos, ¿cuánto le cuesta el kg de trigo?

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Trigo	Cebada	Mezcla
Precio (céntimos €/kg)		10	15
Cantidad	25	15	25+15
Dinero (céntimos €)		15·10	

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x= precio del trigo

Universidad Pontificia de Salamanca

	Trigo	Cebada	Mezcla
Precio (céntimos €/kg)	X	10	15
Cantidad (kg)	25	15	25+15
Dinero (céntimos €)	25x	15·10	15(25+15)

Paso 3: Plantead la ecuación.

$25x + 150 = 600$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$25x = 600 - 150$

$x = \frac{450}{25} = 18$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

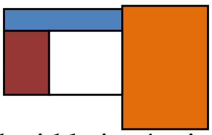
80kg del azúcar del tipo A

200-80=120kg del azúcar del tipo B

Ejemplo de Problema con gráficos

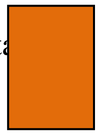
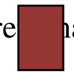
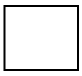
Se ha plantado 1/5 de la superficie de la huerta con pimientos; 1/15 con patatas; 2/3 con berenjenas, y el resto, que son 240m^2, con tomates. ¿Qué superficie tiene la huerta?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

Superficie total de la huerta x

$\frac{1}{5}x$ pimientos  $\frac{1}{15}x$ pat $\frac{2}{3}x$ bereas 240m^2  tomates

Paso 3: Plantead la ecuación.

$\frac{1}{5}x + \frac{1}{15}x + \frac{2}{3}x + 240 = x$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$\frac{3x}{15} + \frac{x}{15} + \frac{10x}{15} + \frac{15 \cdot 240}{15} = \frac{15x}{15}$

$\frac{14x - 15x}{15} = \frac{-3600}{15}$

$-x = -3600$

$x = 3600$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

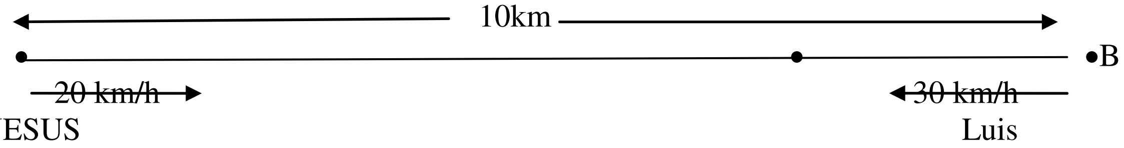
La superficie de la huerta son 3600m^2

Ejemplo de Problema con gráficos (móviles)

Universidad Pontificia de Salamanca

Jesús sale de paseo con una bici llevando una velocidad de 20km/h. Al mismo tiempo, a una distancia de 10km, sale un Luis, un amigo suyo a su encuentro, a una velocidad de 30km/h. ¿A cuántos km está Jesús de su casa en el momento de su encuentro?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
t= horas que tienen que pasar para encontrarse
recordad: $espacio = velocidad \cdot tiempo$

Paso 3: Plantead la ecuación.
$20\,\mathbf{t} + \mathbf{30t} = \mathbf{10}$

Paso 4: Resolved la ecuación.
$50\mathbf{t} = \mathbf{10}$
$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{50}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,2}$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.
Lo que hemos calculado es el tiempo que tardan en encontrarse que son 0,2 horas pero los que nos piden es a cuántos km está Jesús de su casa cuando se encuentran
$0{,}2 \cdot 20 = \mathbf{4}km$
<u>Jesús está a 4km de su casa</u>.

•♦Ejercicios:
1.-Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Carmen si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20€.
2.-El precio de una bicicleta ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96€. ¿Cuál era el precio inicial?
3.-La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?
4.-Calcula cuántos litros de aceite de orujo de 1,6€/l tenemos que añadir a un bidón que contiene 60l de aceite de oliva de 2,8€/l para obtener una mezcla de 2,5€/l.
5.-Tres amigos trabajan 20, 30 y 50 días en un negocio. Al cabo de tres meses, se reparten los beneficios correspondiendo al tercero 300€ más que el segundo. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

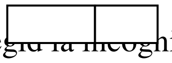
Universidad Pontificia de Salamanca

4.- RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corregiremos los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de planteamiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, en la solución, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

1.-Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Carmen si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20€.

Paso 1: Entended y representad el problema.

20€ 

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x= dinero que ha costado el abrigo

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = 20$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$\frac{3x}{12} + \frac{2x}{12} = \frac{12 \cdot 20}{12}$$

$$3x + 2x = 240$$

$$5x = 240$$

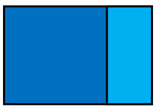
$$x = \frac{240}{5} = 48$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

El abrigo ha costado 48€.

2.- El precio de una bicicleta ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96€. ¿Cuál era el precio inicial?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=precio de una bicicleta

15% de x sube en diciembre

20% del precio de la bicicleta en diciembre baja en enero

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x + \frac{15}{100}x - \frac{20}{100\left(x + \frac{15}{100}x\right)} = x - 6,96$$

$$\frac{15}{100}x - \frac{20}{100\left(x + \frac{15}{100}x\right)} = -6,96$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$\frac{15}{100}x - \frac{20}{100}x - \frac{300}{10000}x = -6,96$$
$$\frac{1500}{10000}x - \frac{2000}{10000}x - \frac{300}{10000}x = -6,96$$
$$1500x - 2000x - 300x = -69600$$
$$-800x = -69600$$
$$x = \frac{-69600}{-800} = 87$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.
El precio de la bicicleta era 87 €.

3.-La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Actual	Dentro de 14 años
Edad padre		
Edad hijo		

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
x=años del hijo actualmente

	Actual	Dentro de 14 años
Edad padre	3x	3x+14
Edad hijo	X	x+14

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$3x + 14 = 2(x + 14)$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$3x + 14 = 2x + 28$$
$$3x - 2x = 28 - 14$$
$$x = 14$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.
La edad del hijo actualmente es de 14 años y la del padre actualmente es de 3·14=42 años.

4.-Calcula cuántos litros de aceite de orujo de 1,6€/l tenemos que añadir a un bidón que contiene 60l de aceite de oliva de 2,8€/l para obtener una mezcla de 2,5€/l.

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Aceite Orujo	Aceite de oliva	Mezcla
Precio	1,6€/l	2,8€/l	2,5€/l
Litro		60	
Total			

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
x=litros de aceite de orujo

	Aceite Orujo	Aceite de oliva	Mezcla
Precio	1,6€/l	2,8€/l	2,5€/l
Litro	X	60	60+x
Total	1,6x	2,8·60	2,5(60+x)

Paso 3: Plantead la ecuación.

$1{,}6\mathbf{x} + 2{,}8 \cdot 60 = 2{,}5(60 + \mathbf{x})$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$1{,}6\mathbf{x} + 168 = 150 + 2{,}5\mathbf{x}$

$1{,}6\mathbf{x} - 2{,}5\mathbf{x} = 150 - 168$

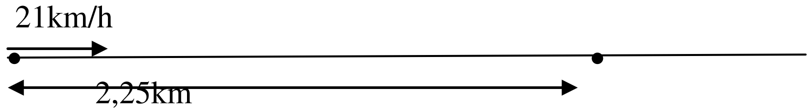
$-0{,}9\mathbf{x} = -18$

$\mathbf{x} = \frac{-18}{-0{,}9} = 20$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.
20litros de aceite de orujo.

5.-Un ciclista que va a 21km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25km. ¿Qué velocidad lleva el que va delante?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
x=velocidad del que va delante, el que va más lento

$\frac{3}{4}21$ km que recorre el que va más deprisa

$\frac{3}{4}\mathbf{x} + 2{,}25$ km que recorre el que va más lento

Paso 3: Plantead la ecuación.

$\frac{3}{4}21 = \frac{3}{4}\mathbf{x} + 2{,}25$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$15{,}75 = 0{,}75\mathbf{x} + 2{,}25$

$15{,}75 - 2{,}25 = 0{,}75\mathbf{x}$

$13{,}5 = 0{,}75\mathbf{x}$

$\mathbf{x} = 13,\frac{5}{0},75 = 18$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.
El otro ciclista va a 18km/h

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES					
Día:					
Nombre:					
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
No entiende el problema					
No sabe elegir la incógnita					
No plantea bien la relación entre los datos					
No ha hecho bien el planteamiento de la ecuación					
Resuelta mal la ecuación por despiste					
Resuelta mal la ecuación por error de cálculo					
Resuelta mal la ecuación por procedimiento					
Da mal el resultado					
Otros					

Ejercicios:

1.- Con 3,5€ más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25€. ¿Cuánto dinero tengo?

2.- Al mezclar 30kg de pintura con 50kg de otra calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30€/kg. Si el precio de la pintura barata es la mitad que el de la otra, ¿Cuál es el precio del kilo de cada clase de pintura?

3.- La distancia entre dos ciudades, A y B, es 280 km. Un tren sale de A a 80km/h, y media hora más tarde sale un coche de B hacia A que tarda 1,2horas en cruzarse con el tren. ¿Qué velocidad lleva el coche?

4.- Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

5.- De un depósito se sacan 2/7 de su contenido; después, 40 litros, y por último, 5/11 del agua restante, quedando aún 60 l. ¿Cuánta agua había en el depósito?

Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO II. – 3: TRABAJO COOPERATIVO EN ÁLGEBRA

Miriam MÉNDEZ COCA

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

1.- Sesión de explicación de cómo trabajar de forma cooperativa, motivación. Hacer los grupos.

2.- Ficha de explicación sobre las ecuaciones de 2º grado incompletas.

3.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

4.- Ficha de explicación sobre las ecuaciones de 2º grado completas.

5.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

6.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

7.- Ficha de problemas resueltos a partir de ecuaciones de 2º grado.

8.- Ficha de resolución de problemas de la ficha anterior.

Universidad Pontificia de Salamanca

1.- ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………

Instrucciones: Durante la clase vamos a aprender a:
- identificar una ecuación de 2º grado,
- identificar los coeficientes de una ecuación de 2º grado
- a conseguir una ecuación equivalente
- a resolver las ecuaciones de 2º grado incompletas.

Luego propondremos unos ejercicios que tenéis que resolver siguiendo el procedimiento que os enseñamos.

0. Identificación de la ecuación de 2º grado o cuadrática en una sola variable. Nº de soluciones.

Es una igualdad entre expresiones algebraicas que se puede reducir a la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, donde a, b, c son números reales y a≠0.

Una ecuación de 2º grado puede tener solución y entonces se dice que la ecuación es **compatible** o no tenerla y entonces se dice que es una ecuación **incompatible**. En caso de tener solución puede tener dos soluciones, una solución doble.

Ejemplos:

1.-Identificar si es una ecuación de 2º grado con una variable.

Ecuación	2ºgrado con una variable si/no	¿?
$-z^2- 5z^2=3z+2$	Si	
$x+3x^2+z^2=4$	No	Porque hay más de 1 variable: z y x
$(3x+5)(x^2-6)=7$	No	Calculando el paréntesis tenemos una igualdad de grado 3
$(x-1)(x+1)=8x$	Si	
$3,1x^2+6x=7x^2+9$	Si	
$\frac{3(x+3)}{5} - \frac{(x+3)(x-2)}{2} = 9$	Si	

(añadir las que el profesor/a quiera y crea adecuadas)

2.- Identificar en una ecuación de 2º grado con una variable los coeficientes a, b, c.

Ecuación	A	b	c
$-z^2 -z=2$	-1	-1	-2
$7=z^2$	-1	0	7
$3x^2+2x=5x^2+7$	-2	2	-7
$(x-1)(x+1)=0$	1	0	-1
$\frac{-3}{7}x^2 - \sqrt{2} + 3,3x = 0$	$\frac{-3}{7}$	3,3	$-\sqrt{2}$

(añadir las que el profesor/a quiera y crea adecuadas)

I. Conseguir ecuaciones equivalentes.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Se puede conseguir una ecuación equivalente si:

- se suma a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,
- se resta a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,

Universidad Pontificia de Salamanca

- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero,

- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero.

II. Soluciones de ecuaciones incompletas de 2ºgrado en una incógnita

Se dice que una ecuación de 2º grado en una incógnita cuando al menos hay algún coeficiente que es 0, salvo a≠0

- **Si b=0. Las soluciones de la ecuación si tiene son** $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Ejemplo:

$2x^2 - 100 = -3x^2 + 80$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$2x^2 - 100 + 3x^2 - 80 = 0$

$5x^2 - 180 = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

a=5 b=0 c= - 180

Paso 3: Calculad las soluciones.

$x^2 = \frac{180}{5} = 36$

$$x_1 = \sqrt{36} = 6 \qquad x_2 = -\sqrt{36} = -6$$

- **Si c=0. Una solución de la ecuación es 0 y la otra solución es** $\frac{-b}{a}$

Ejemplo:

$x^2 + 2x = -2x^2 - 25x$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$x^2 + 2x + 2x^2 + 25x = 0$

$3x^2 + 27x = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 3 \quad b = 27 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$x(3x + 27) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{-27}{3} = -9$

- **Si b=0 y c=0. Tiene una solución doble igual a 0**

Ejemplo:

$3x^2 = 2x^2$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$3x^2 - 2x^2 = 0$

$x^2 = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$x = 0$

III. Ejercicios:

a) $5x^2 - 20 = 0$

b) $3x^2 - 12x = 0$

c) $3x^2 = 0$

d) $-7x^2 = 0$

e) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

f) $x^2 + 16 = 0$

g) $(x - 4)(x + 4) = 9$

Universidad Pontificia de Salamanca

2.- RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corregid los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar igualdades notables, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $5x^2 - 20 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegad a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$5x^2 + 0x - 20 = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 5 \quad b = 0 \quad c = -20$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{20}{5}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

b) $3x^2 - 12x = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$3x^2 - 12x + 0 = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 3 \quad b = -12 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$x(3x - 12) = 0$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{12}{3} = 4$$

c) $3x^2 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$3x^2 + 0x + 0 = 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = 3 \quad b = 0 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.
$x = 0 \ (\text{doble})$

d) $-7x^2 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$-7x^2 + 0x + 0 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = -7 \quad b = 0 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.
$x = 0 \ (\text{doble})$

e) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$2x^2 - x - 3 - 1 - x + 4 = 0$$

$$2x^2 - 2x + 0 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = 2 \quad b = -2 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.
$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{2} = 1$

f) $x^2 + 16 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + 16 = 0$$

Paso2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 16$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$x = \pm\sqrt{\frac{-16}{1}}$ no tiene soluciones reales

g) $(x - 4)(x + 4) = 9$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 - 16 = 9$$

$$x^2 - 9 - 16 = 0$$

$$x^2 - 25 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -25$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{1}} = \pm 5$$

$x_1 = -5 \quad x_2 = 5$

TABLA DE ERRORES							
Día:							
Nombre:							
Errores	**a**	**b**	**c**	**d**	**E**	**F**	**g**
En los cálculos							
En los menos delante de los paréntesis							
En los menos delante de las fracciones							
En las igualdades notables							
Por despiste							
Otros							

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: Durante esta ficha vamos a:

- recordar las igualdades notables
- calcular el discriminante y a partir del signo del discriminante saber si la ecuación de 2º grado tiene o no solución y cuántas.
- resolver una ecuación completa de segundo grado.

0. Recordar las igualdades notables.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

I. Soluciones de ecuaciones de 2º grado. Discriminante.

Decimos que la ecuación de 2º grado con una incógnita es completa si en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$ ninguno de sus coeficientes es cero, es decir, a≠0, b≠0 y c≠0. La ecuación de segundo grado completa si tiene solución son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas fórmulas también sirven para resolver las ecuaciones de 2º grado incompletas.

Llamamos **discriminante** al valor del interior de la raíz, es decir, $b^2 - 4ac$ Dependiendo del signo del discriminante podemos saber si la ecuación tiene una solución doble, dos soluciones reales o ninguna solución real.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ → la ecuación tiene dos soluciones reales es compatible
- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ → la ecuación tiene una solución doble real es compatible
- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ → la ecuación no tiene solución real o es incompatible

Recordar: forma de resolver una ecuación de 2º grado:

Soluciones de ecuaciones de 2º grado			
Coeficientes cero	**Ecuación**	**Soluciones**	**Observaciones**
b=0 y c=0	$ax^2=0$	x=0 (solución doble)	
b=0 y c≠0	$ax^2+c=0$	$x_1 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ $x_2 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$	No hay soluciones reales si $\frac{-c}{a} < 0$
b≠0 y c=0	$ax^2+bx=0$ o $x(ax+b)=0$	$x_1=0$ $x_2 = \frac{-b}{a}$	
b≠0 y c≠0	$ax^2+bx+c=0$	$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	No hay soluciones reales si $b^2 - 4ac \geq 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

Ejemplos

1.- Calcula el discriminante, y elige el número de soluciones que tiene

Ecuación	**Discriminante**	**Soluciones**
$2x^2+x+2=0$	$1^2- 4\cdot 2\cdot 2= - 15$	0
$x^2-6x+9=0$	$(-6)^2- 4\cdot 1\cdot 9=0$	1
$3x^2-5x-8=0$	$(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-8)=25+96=121$	2
$-3x^2-4x+5=0$	$(-4)^2-4\cdot(-3)\cdot 5=16+60=76$	2

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado.

$$(x-1)^2 = x-1$$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2+1-2x-x+1=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a=1 \quad b=-3 \quad c=2$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{3\pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

3.- Resolvemos la siguiente ecuación de 2º grado con fracciones.

$$\frac{(x-1)(x+2)}{12} - \frac{(x+1)(x-2)}{6} - 1 = \frac{x-3}{3}$$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis: $\frac{x^2+x-2}{12} - \frac{x^2-x-2}{6} - 1 = \frac{x-3}{3}$

- Reducid las fracciones a común denominador: $\frac{x^2+x-2}{12} - \frac{2(x^2-x-2)}{12} - \frac{12}{12} = \frac{4(x-3)}{12}$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$$x^2+x-2-2(x^2-x-2)-12 = 4(x-3)$$

$$x^2+x-2-2x^2+2x+4-12 = 4x-12$$

- - Reducid a una ecuación general.

$$x^2+x-2-2x^2+2x+4-12-4x+12 = 0$$

$$-x^2-x+2=0$$

$$x^2+x-2=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -2$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ejercicios:

1.-Resolver ecuaciones de 2º grado

a) $(x-2)(x+2) = 5$

b) $2x^2 = 6x$

c) $x^2 - \frac{x}{3} = 2x^2$

d) $\frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}$

e) $3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14$

f) $\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corrige los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con igualdades notables, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $(x-2)(x+2)=5$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2-4=5$$
$$x^2-9=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a=1 \quad b=0 \quad c=-9$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

$$x_1=3 \qquad x_2=-3$$

b) $2x^2=6x$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$2x^2-6x=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, .c

$a=2 \quad b=-6 \quad c=0$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1=0 \qquad x_2=\frac{6}{2}=3$$

c) $x^2-\frac{x}{3}=2x^2$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis:
- Reducid las fracciones a común denominador:

$\frac{3x^2}{3}-\frac{x}{3}=\frac{3\cdot 2x^2}{3}$

$\frac{3x^2}{3}-\frac{x}{3}=\frac{6x^2}{3}$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$$3x^2-x=6x^2$$

- Reducid a una ecuación general.

$$3x^2-x-6x^2=0$$

$-3x^2-x=0$

$3x^2+x=0$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 3 \quad b = 1 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{-3}$$

d) $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x-1}{4} = \dfrac{2x(x-3)}{6} + \dfrac{17}{12}$

Paso1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis: $\dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{4x-1}{4} = \dfrac{2x^2-6x}{6} + \dfrac{17}{12}$
- Reducid las fracciones a común denominador:

$$\frac{6\cdot 3x^2}{12} - \frac{3(4x-1)}{12} = \frac{2(2x^2-6x)}{12} + \frac{17}{12}$$

$$\frac{18x^2}{12} - \frac{12x-3}{12} = \frac{4x^2-12x}{12} + \frac{17}{12}$$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17$

- Reducid a una ecuación general.

$18x^2 - 4x^2 - 12x + 12x + 3 - 17 = 0$

$14x^2 - 14 = 0$

$x^2 - 1 = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -1$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$$

e) $3x^2 - 4x + 5(x^2-2) = \dfrac{3x(x-2)}{2} + 14$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis: $3x^2 - 4x + 5x^2 - 10 = \dfrac{3x^2-6x}{2} + 14$
- Reducid las fracciones a común denominador:

$$\frac{2\cdot 3x^2}{2} - \frac{2\cdot 4x}{2} + \frac{2\cdot 5x^2}{2} - \frac{2\cdot 10}{2} = \frac{3x^2-6x}{2} + \frac{2\cdot 14}{2}$$

$$\frac{6x^2}{2} - \frac{8x}{2} + \frac{10x^2}{2} - \frac{20}{2} = \frac{3x^2-6x}{2} + \frac{28}{2}$$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28$

- Reducid a una ecuación general.

$6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 - 3x^2 + 6x - 28 = 0$

$13x^2 - 2x - 48 = 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = 13 \quad b = -2 \quad c = -48$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{26} = \frac{2 \pm \sqrt{2500}}{26} = \frac{2 \pm 50}{26}$$

$$x_1 = \frac{52}{26} = 2 \qquad x_2 = \frac{-48}{26} = \frac{-24}{13}$$

f) $\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis:
-

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x^2 - 2x + 1}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{x^2 - 4x + 4}{6} = \frac{1}{6}$$

- Reducid las fracciones a común denominador:
-

$$\frac{6(x+1)}{12} - \frac{3(x^2 - 2x + 1)}{12} - \frac{4(x+2)}{12} + \frac{2(x)^2 - 4x + 4)}{12} = \frac{2}{12}$$
$$\frac{6x+6}{12} - \frac{3x^2 - 6x + 3}{12} - \frac{4x+8}{12} + \frac{2x^2 - 8x + 8}{12} = \frac{2}{12}$$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.
-

$6x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 - 4x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 = 2$

- Reducid a una ecuación general.

$6x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 - 4x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 - 2 = 0$

$-x^2 + 1 = 0$

$x^2 - 1 = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -1$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{-(-1)}{1}} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$$

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES						
Día:						
Nombre:						
Errores	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
En los cálculos						
En los menos delante de los paréntesis						
En los menos delante de las fracciones						
En las igualdades notables						
Por depiste						
No sabe las fórmulas						
Otros						

Ejercicios:

a) $3x^2 - 12x = 0$

b) $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 8 = 0$

d) $4x^2 + 100 = 0$

e) $x^2 + x + 3 = 0$

f) $x^2 + 9x + 20 = 0$

g) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

h) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

5.- RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………

Instrucciones: corrige los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar igualdades notables, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $-3x^2 + 12x = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.
$-3x^2 + 12x = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = -3 \quad b = 12 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{-12}{-3} = 4$$

b) $x - 3x^2 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.
$-3x^2 + x = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = -3 \quad b = 1 \quad c = 0$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

c) $2x^2 - 8 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.
$2x^2 - 8 = 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 2 \quad b = 0 \quad c = 8$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{8}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

d) $4x^2 + 100 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$4x^2 + 100 = 0$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 4 \quad b = 0 \quad c = 100$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{-100}{4}} = \pm\sqrt{-25}$$ no tiene soluciones reales

e) $x^2 + x + 3 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + x + 3 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 1 \quad b = 1 \quad c = 3$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$ no tiene soluciones reales

f) $x^2 + 9x + 20 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$a = 1 \quad b = 9 \quad c = 20$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-9 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9+1}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad x_2 = \frac{-9-1}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

g) $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x - [(2x)^2 + (-1)^2 + 2(2x)(-1)] = 8x$$

$$x^2 + 16 + 8x - [4x^2 + 1 - 4x] = 8x$$

$$x^2 + 16 + 8x - 4x^2 - 1 + 4x - 8x = 0$$

$$-3x^2 + 4x + 15 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = -3 \quad b = 3 \quad c = 15$
Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-3)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{-6} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{-6} = \frac{-4 \pm 14}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-4+14}{-6} = \frac{10}{-6} = \frac{-5}{3} \qquad x_2 = \frac{-4-14}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

h) $(2x-3)(2x+3) - x(x+1) - 5 = 0$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$(2x)^2 - 3^2 - x^2 - x - 5 = 0$$

$$4x^2 - 9 - x^2 - x - 5 = 0$$

$$3x^2 - x - 14 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.
$a = 3 \quad b = -1 \quad c = -14$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{1 \pm 13}{6}$$

$$x_1 = \frac{1+13}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \qquad x_2 = \frac{1-13}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

TABLA DE ERRORES								
Día:								
Nombre:								
Errores	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
En los cálculos								
En los menos delante de los paréntesis								
En los menos delante de las fracciones								
En las igualdades notables								
Por despiste								
No sabe las fórmulas								
Otros								

Ejercicios:

a) $\frac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \frac{(3x-1)^2 - 9}{2}$

b) $\frac{x}{3}(x-1) - \frac{x}{4}(x+1) + \frac{3x+4}{12} = 0$

c) $(2x+1)^2 = 4 + (x+2)(x-2)$

d) $3x^2 = 0$

e) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

f) $-4x^2 + 100 = 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

6.- PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**………………………………
GRUPO:…………………...
NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha vamos a aprender:

- La interpretación geométrica de una ecuación de 2º grado
- un procedimiento general para resolver un problema de ecuaciones de 2º grado con una incógnita.

Propondremos problemas para resolver.

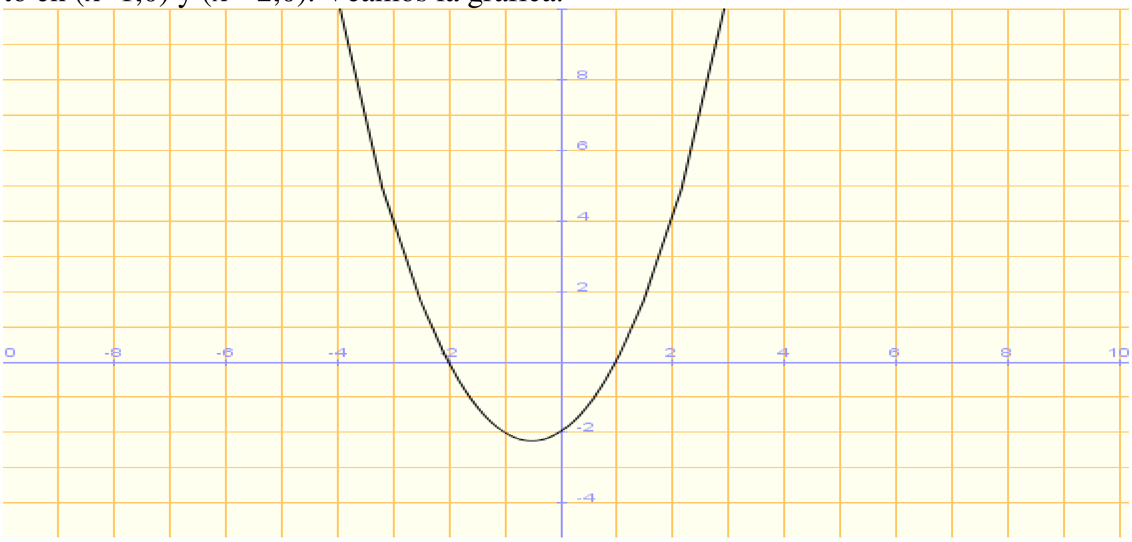
•♦Interpretación geométrica de la solución de una ecuación de 2º grado.
Las soluciones de una ecuación de segundo grado son los puntos de la parábola que tiene como ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que cortan el eje de abscisas.

Ejemplo:
Dada la ecuación: $x^2 + x - 2 = 0$.
Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Si pintamos la función $y = x^2 + x - 2$ es una parábola que corta al eje de abscisas justo en (x=1,0) y (x=-2,0). Veamos la gráfica.



•♦Procedimiento para resolver problemas de ecuaciones de 2º grado
Paso 1: Entended bien el enunciado del problema. Para ello leed el problema las veces que haga falta, recordando problemas parecidos, cambiando palabras del enunciado por

Universidad Pontificia de Salamanca

otras que nos resulten más familiares, pensando que el problema es algo propio que nos sucede a nosotros. También puede ayuda hacer dibujos, esquemas, tablas.
Paso 2: Identificad los datos y las relaciones entres ellos. Elegid la incógnita asignándole una letra. Si se ha hecho un esquema, tabla o dibujo conviene escribir en él los datos y las incógnitas. Transformad las relaciones entre los datos al lenguaje algebraico.
Paso 3: Plantead la ecuación teniendo en cuenta las relaciones o condiciones que debe verificar la incógnita.
Paso 4: Resolved la ecuación.
Paso 5: Comprobad si el resultado tiene sentido y escribid la solución al problema. No olvides las unidades.

●♦Ejemplo:
Los lados de un rectángulo miden 7 y 9 cm. Si se amplían los lados en una misma cantidad, la nueva área es de 143cm^2 ¿Cuánto se ha ampliado cada lado?
Paso 1: Entended y representad el problema.

pequeño 7cm

grande 7+
+

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
x=los cm que aumentamos cada lado

pequeño 7cm

grande 7+x
+x

área de un rectángulo: largo x ancho
Paso 3: Plantead la ecuación.

$$(9+\mathbf{x})(7+\mathbf{x}) = 143$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$63 + 9x + 7x + x^2 = 143$

$\mathbf{x^2 + 16x + 63 - 143 = 0}$

$\mathbf{x^2 + 16x - 80 = 0}$

$$\mathbf{x} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot(-80)}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256+320}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-16 \pm 24}{2}$$

$x_1 = 4$ y $x_2 -20$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.
La segunda solución es negativa y no tiene sentido ya que los lados no pueden tener medidas negativas. Luego la solución es 4 cm lo que se ha aumentado cada lado.

●♦Ejercicios:
1.- Halla el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumenta en 395 unidades cuadradas.
2.- Calcula dos números enteros tales que su diferencia sea 2 y la suma de sus cuadrados sea 164.
3.- Encuentra el número tal que multiplicado por su cuarta parte sea igual al doble del número menos 3 unidades.
4.- Calcula el número tal que la suma de él y su cuadrado suman 30.

Universidad Pontificia de Salamanca

7.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corrige los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Halla el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumenta en 395 unidades cuadradas

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
x=lo que mide el lado del cuadrado antes de aumentarlo
área  es x^2

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$(x+5)^2 = x^2 + 395$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x = x^2 + 395$$
$$x^2 + 25 + 10x - x^2 - 395 = 0$$
$$10x - 370 = 0$$
$$x = \frac{370}{10} = 37$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.
El lado mide 37 unidades

2.-Calcula dos números naturales tales que su diferencia sea 2 y la suma de sus cuadrados sea 164.

Paso 1: Entended y representad el problema.
p.e el número 2 y el 4 tienen de diferencia 2

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
x=número más pequeño
x+2=otro número

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x^2 + (x+2)^2 = 164$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$x^2 + x^2 + 4 + 4x = 164$$
$$2x^2 + 4x - 160 = 0$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-160)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{1296}}{4} = \frac{-4 \pm 36}{4}$$
$$x_1 = \frac{-4 - 36}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$
$$x_2 = \frac{-4 + 36}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución:

Una solución puede ser -10 y -10+2=-8 pero no son naturales, luego no es solución.
La solución es 8 y 8+2=10

3.-Encuentra el número tal que multiplicado por su cuarta parte sea igual al doble del número menos 3 unidades

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.
x=número

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x \cdot \frac{1}{4} x = 2x - 3$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$$
$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{2 \cdot 4}{4}x + \frac{3 \cdot 4}{4} = 0$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$a = 1 \quad b = -8 \quad c = 12$$
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$
$$x_1 = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$
$$x_2 = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución
Tenemos dos soluciones x_1=6 y x_2=2.

Universidad Pontificia de Salamanca

4.- Calcula el número tal que la suma de él y su cuadrado suman 30.
Paso 1: Entended y representad el problema

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas
x=número desconocido

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x + x^2 = 30$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -30$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-1 - 11}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución:

Tenemos dos soluciones 5 y -6

TABLA DE ERRORES				
Día:				
Nombre:				
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**
No entiende el problema				
No sabe elegir la incógnita				
No plantea bien la relación entre los datos				
No ha hecho bien el planteamiento de la ecuación				
Resuelta mal la ecuación por despiste				
Resuelta mal la ecuación por error de cálculo				
Resuelta mal la ecuación por procedimiento				
Da mal el resultado				
Otros				

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Contenidos:

1.- Ficha de explicación del trabajo cooperativo: cómo hacer los grupos, desarrollo de las clases y cómo evaluar.

2.- Ficha de explicación sobre las ecuaciones de 2º grado incompletas.

3.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

4.- Ficha de explicación sobre las ecuaciones de 2º grado completas.

5.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

6.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

7.- Ficha de problemas resueltos a partir de ecuaciones de 2º grado.

8.- Ficha de resolución de problemas de la ficha anterior.

Universidad Pontificia de Salamanca

INICIO

Objetivo:

- ✓ Aprender a resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
- ✓ Asumir la responsabilidad del propio aprendizaje y ser consciente de cómo ayudar y cooperar al aprendizaje de sus compañeros.
- ✓ Adquirir habilidades sociales: cómo trabajar en grupo, cómo coordinar sus esfuerzos y cómo resolver los conflictos constructivamente.
- ✓ Conseguir y mantener una actitud positiva ante la materia.

Desarrollo:

Durante la primera sesión se recomienda explicarles en qué va a consistir el trabajo, como se van a desarrollar las clases, como se les va a evaluar. Además se recomienda hacer los grupos, situarles dentro de la clase y darles cierta motivación ya que es una forma nueva para ellos de trabajar.

- ✓ *Grupos:* Se recomienda hacer los grupos de tres personas. Si sobra alguna persona hacer dos grupos de dos personas. En un número reducido que evite que haya personas que no trabajen. Los grupos los hace el profesor tratando que sean lo más heterogeneos posibles, es decir, en un grupo coincidan alumno que se le da bien las matemáticas y le guste, otro alumno menos aventajado y otro alumno que se le de mal o que tenga mala actitud hacia la materia. Se situará al grupo dentro de la clase de forma que todos los miembros se puedan mirar y ver.
- ✓ *Explicación del trabajo:*Se recomienda hablarles de la doble responsabilidad, ya que son mayores, de su aprendizaje y de la de sus compañeros. No es sólo que el alumno aprenda sino que sus compañeros también aprendan. Por eso se harán los examenes. Además se les debe decir que deben avanzar al unísono, es decir, si un compañero todabía no lo entiende se debe buscar la forma que entienda lo que estamos haciendo, con buenas formas y respeto. El trabajo, el esfuerzo de cada uno es importante y repercutirá en el grupo. Recordar lo importante que es el tratar bien a los compañeros, expresarse respetando el turno, hablar en un tono de voz adecuado, no perder el tiempo, etc.(Se puede pedirles a ellos que creen que es importante cuando se trabaja en grupo).
- ✓ *Motivación:* Una forma de motivarles es decirles que se va a evaluar también el grupo y la nota que el grupo alcance modificará la de cada uno de sus miembros, se puede hacer por porcentaje;
  p.e.: nota_alumno=75%nota_individual_del_alumno + 25% nota_grupo.
  Además el trabajo en grupo les prepara para los trabajos del futuro y es una forma de irles preparando en ciertas habilidades que en el futuro les serán necesarias.

Universidad Pontificia de Salamanca

- ✓ *Planteamiento de la tarea:* Cada día se les dará una ficha bien como las que están desarrolladas en este documento o bien se les marcará la parte del libro de texto u otros materiales indicando al grupo lo que tienen que trabajar durante la clase, los ejercicios que tienen que hacer, o/y que tienen que corregir. Si el profesor considera que el grupo es suficiente maduro se les puede dar el material evitando la explicación propia del profesor sino una vez hecho los grupos el profesor da una breve explicación breve (10-15 minutos) y después reparte las fichas para que trabajen. En la sesión que toca corregir ejercicios se les puede repartir las soluciones y si hay alguna duda que se repite en varios grupos el profesor puede aclararla en alto.
- ✓ *Revisión y control de la efectividad:* El profesor pasará por las mesas para ver si se han hecho los ejercicios del día anterior, si han hecho toda la tarea que tenían que hacer durante la clase, si todos los miembros se están implicando y colaborando, resolver dudas, preguntar aleatoriamente a los alumnos (preferentemente al que tiene más dificultades) para ver si se están enterando. Además el profesor detecta cuando el grupo no avanza e interviene si es necesario; observa las dificultades en las interacciones de los componentes del grupo y busca modos de resolverlos; enfatiza la legitimidad de estar en desacuerdo y la obligación de argumentar para defender las propias ideas; no permite que ningún estudiante domine la discusión de modo que excluya o limite seriamente la contribución de los demás. Además se les puede pedir las tablas de revisión de los errores de los ejercicios.

Evaluación:

Nota individual: Cada alumno obtendrá una nota individual conseguida por la nota del examen, si ha hecho los deberes cada día, su actitud en clase y las preguntas que pueda hacer cada día el profesor cuando se pasea por los grupos, o bien como el profesor desee evaluar a su alumno.

Nota del grupo: Además habrá una nota por grupo p.e

- cada día el grupo puede ganar puntos si todos los miembros del grupo han hecho los deberes ganan 3 puntos,
- si todos los miembros del grupo han aprobado el examen del profesor ganan otros 5 puntos,
- si todos los miembros del grupo han sacado más de un 6 tienen 6 puntos,
- si el alumno que ha preguntado el profesor en el grupo sabe explicar el ejercicio ganan 3 puntos,
- si han trabajado en clase adecuadamente, terminando la tarea, y con buen ambiente entre los miembros del grupo otros 2 puntos,
- si se han puesto puntualmente a trabajar 1 punto,

Universidad Pontificia de Salamanca

- no dejar a nadie atrás, ninguno de los miembros puede no haber entendido lo anterior, tienen que avanzar juntos
- respetar el turno de palabra, no hablar cuando otro este hablando y no descalificar a nadie, valorando las aportaciones o dudas de todos 3 puntos

Al final del trabajo la puntuación del grupo se traducirá en una nota p.e una forma podría ser esta:

Menos de 5 puntos un 1
Ente 5-10 puntos un 3
Entre 10-15 puntos un 5
Entre 15-20 puntos un 7
Entre 20-25 puntos un 9

Por encima de 25 puntos un 10.

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**…………………………… **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: Durante la clase vamos a aprender a:

- identificar una ecuación de 2º grado,

- identificar los coeficientes de una ecuación de 2º grado

- a conseguir una ecuación equivalente

- a resolver las ecuaciones de 2º grado incompletas.

Luego propondremos unos ejercicios que tenéis que resolver siguiendo el procedimiento que os enseñamos.

0. Identificación de la ecuación de 2º grado o cuadrática en una sola variable. Nº de soluciones.

Es una igualdad entre expresiones algebraicas que se puede reducir a la forma $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$, donde a, b, c son números reales y a≠0.

Una ecuación de 2º grado puede tener solución y entonces se dice que la ecuación es **compatible** o no tenerla y entonces se dice que es una ecuación **incompatible**. En caso de tener solución puede tener dos soluciones, una solución doble.

Ejemplos:

1.-Identificar si es una ecuación de 2º grado con una variable.

Ecuación	2ºgrado con una variable si/no	¿?
$-z^2-5z^2=3z+2$	Si	
$x+3x^2+z^2=4$	No	Porque hay más de 1 variable: z y x
$(3x+5)(x^2-6)=7$	No	Calculando el paréntesis tenemos una igualdad de grado 3
$(x-1)(x+1)=8x$	Si	
$3,1x^2+6x=7x^2+9$	Si	
$\frac{3(x+3)}{5}-\frac{(x+3)(x-2)}{2}=9$	Si	

(añadir las que el profesor/a quiera y crea adecuadas)

Universidad Pontificia de Salamanca

2.- Identificar en una ecuación de 2º grado con una variable los coeficientes a, b, c.

Ecuación	A	b	c
$-z^2-z=2$	-1	-1	-2
$7=z^2$	-1	0	7
$3x^2+2x=5x^2+7$	-2	2	-7
(x-1)(x+1)=0	1	0	-1
$\frac{-3}{7}x^2-\sqrt{2}+3{,}3x=0$	$\frac{-3}{7}$	3,3	$-\sqrt{2}$

(añadir las que el profesor/a quiera y crea adecuadas)

I. Conseguir ecuaciones equivalentes.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Se puede conseguir una ecuación equivalente si:

- se suma a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,
- se resta a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,
- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero,
- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero.

II. Soluciones de ecuaciones incompletas de 2ºgrado en una incógnita

Se dice que una ecuación de 2º grado en una incógnita cuando al menos hay algún coeficiente que es 0, salvo a≠0

- **Si b=0. Las soluciones de la ecuación si tiene son** $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Ejemplo:

$$2x^2-100=-3x^2+80$$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$2x^2-100+3x^2-80=0$$

$$5x^2-180=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

a=5 b=0 c= - 180

Paso 3: Calculad las soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x^2 = \frac{180}{5} = 36$$

$$x_1 = \sqrt{36} = 6 \quad x_2 = -\sqrt{36} = -6$$

- **Si c=0. Una solución de la ecuación es 0 y la otra solución es $\frac{-b}{a}$**

Ejemplo:

$$x^2 + 2x = -2x^2 - 25x$$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + 2x + 2x^2 + 25x = 0$$

$$3x^2 + 27x = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 3 \quad b = 27 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x(3x + 27) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{-27}{3} = -9$$

- **Si b=0 y c=0. Tiene una solución doble igual a 0**

Ejemplo:

$$3x^2 = 2x^2$$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$3x^2 - 2x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \;\; b = 0 \;\; c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x = 0$$

III. Ejercicios:

a) $5x^2 - 20 = 0$

b) $3x^2 - 12x = 0$

c) $3x^2 = 0$

d) $-7x^2 = 0$

e) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

f) $x^2 + 16 = 0$

g) $(x - 4)(x + 4) = 9$

Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corregid los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar igualdades notables, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $\mathbf{5x^2 - 20 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegad a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$5x^2 + 0x - 20 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 5 \quad b = 0 \quad c = -20$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{20}{5}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$$

b) $\mathbf{3x^2 - 12x = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$3x^2 - 12x + 0 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 3 \quad b = -12 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x(3x - 12) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{12}{3} = 4$$

Universidad Pontificia de Salamanca

c) $\mathbf{3x^2 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$3x^2 + 0x + 0 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 3 \quad b = 0 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = 0 \text{ (doble)}$$

d) $\mathbf{-7x^2 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$-7x^2 + 0x + 0 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = -7 \quad b = 0 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = 0 \text{ (doble)}$$

e) $\mathbf{2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$2x^2 - x - 3 - 1 - x + 4 = 0$$
$$2x^2 - 2x + 0 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 2 \quad b = -2 \quad c = 0$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{2} = 1$$

f) $\mathbf{x^2 + 16 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + 16 = 0$$

Paso2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 16$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{-16}{1}}\ \text{no tiene soluciones reales}$$

g) $\mathbf{(x-4)(x+4) = 9}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 - 16 = 9$$
$$x^2 - 9 - 16 = 0$$
$$x^2 - 25 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -25$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{1}} = \pm 5$$

$$x_1 = -5 \quad x_2 = 5$$

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES							
Día:							
Nombre:							
Errores	**a**	**b**	**c**	**d**	**E**	**F**	**g**
En los cálculos							
En los menos delante de los paréntesis							
En los menos delante de las fracciones							
En las igualdades notables							
Por despiste							
No ha hecho el ejercicio							
Otros							

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:………………. DIA:……………………………. GRUPO:…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: Durante esta ficha vamos a:

- recordar las igualdades notables
- calcular el discriminante y a partir del signo del discriminante saber si la ecuación de 2º grado tiene o no solución y cuántas.
- resolver una ecuación completa de segundo grado.

0. Recordar las igualdades notables.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

I. Soluciones de ecuaciones de 2º grado. Discriminante.

Decimos que la ecuación de 2º grado con una incógnita es completa si en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$ ninguno de sus coeficientes es cero, es decir, a≠0, b≠0 y c≠0.

La ecuación de segundo grado completa si tiene solución son:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Estas fórmulas también sirven para resolver las ecuaciones de 2º grado incompletas.

Llamamos **discriminante** al valor del interior de la raíz, es decir, $\mathbf{b^2 - 4ac}$ Dependiendo del signo del discriminante podemos saber si la ecuación tiene una solución doble, dos soluciones reales o ninguna solución real.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ → la ecuación tiene dos soluciones reales es compatible

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ → la ecuación tiene una solución doble real es compatible

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ → la ecuación no tiene solución real o es incompatible

Recordar: forma de resolver una ecuación de 2º grado:

Soluciones de ecuaciones de 2º grado			
Coeficientes cero	**Ecuación**	**Soluciones**	**Observaciones**

Universidad Pontificia de Salamanca

b=0 y c=0	$ax^2=0$	x=0 (solución doble)	
b=0 y c≠0	$ax^2+c=0$	$x_1=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$ $x_2=\sqrt{\frac{-c}{a}}$	No hay soluciones reales si $\frac{-c}{a}<0$
b≠0 y c=0	$ax^2+bx=0$ o $x(ax+b)=0$	$x_1=0$ $x_2=\frac{-b}{a}$	
b≠0 y c≠0	$ax^2+bx+c=0$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	No hay soluciones reales si $b^2-4ac\geq 0$

Ejemplos

1.- Calcula el discriminante, y elige el número de soluciones que tiene

Ecuación	Discriminante	Soluciones
$2x^2+x+2=0$	1^2- 4·2·2= - 15	0
x^2-6x+9=0	$(-6)^2$- 4·1·9=0	1
$3x^2$-5x-8=0	$(-5)^2$-4·3·(-8)=25+96=121	2
$-3x^2$-4x+5=0	$(-4)^2$-4·(-3)·5=16+60=76	2

2.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado.

$$(x-1)^2=x-1$$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2+1-2x-x+1=0$$

$$x^2-3x+2=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a=1 \quad b=-3 \quad c=2$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}$$

$$x_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2 \qquad x_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

3.- Resolvemos la siguiente ecuación de 2º grado con fracciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\frac{(x-1)(x+2)}{12}-\frac{(x+1)(x-2)}{6}-1=\frac{x-3}{3}$$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis: $\frac{x^2+x-2}{12}-\frac{x^2-x-2}{6}-1=\frac{x-3}{3}$
- Reducid las fracciones a común denominador: $\frac{x^2+x-2}{12}-\frac{2(x^2-x-2)}{12}-\frac{12}{12}=\frac{4(x-3)}{12}$
- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$$x^2+x-2-2(x^2-x-2)-12=4(x-3)$$
$$x^2+x-2-2x^2+2x+4-12=4x-12$$

- - Reducid a una ecuación general.

$$x^2+x-2-2x^2+2x+4-12-4x+12=0$$
$$-x^2-x+2=0$$
$$x^2+x-2=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a=1 \quad b=1 \quad c=-2$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}$$

$$x_1=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$x_2=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Ejercicios:

1.-Resolver ecuaciones de 2º grado

a) $(x-2)(x+2)=5$
b) $2x^2=6x$
c) $x^2-\frac{x}{3}=2x^2$
d) $\frac{3x^2}{2}-\frac{4x-1}{4}=\frac{2x(x-3)}{6}+\frac{17}{12}$
e) $3x^2-4x+5(x^2-2)=\frac{3x(x-2)}{2}+14$
f) $\frac{x+1}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{x+2}{3}+\frac{(x-2)^2}{6}=\frac{1}{6}$

Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corrige los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con igualdades notables, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $\mathbf{(x-2)(x+2)=5}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2-4=5$$

$$x^2-9=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a=1 \quad b=0 \quad c=-9$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

$$x_1=3 \qquad x_2=-3$$

b) $\mathbf{2x^2=6x}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$2x^2-6x=0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, .c

$$a=2 \quad b=-6 \quad c=0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1=0 \qquad x_2=\frac{6}{2}=3$$

Universidad Pontificia de Salamanca

c) $\mathbf{x^2 - \frac{x}{3} = 2x^2}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis:

- Reducid las fracciones a común denominador:

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{x}{3} = \frac{3 \cdot 2x^2}{3}$$

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{x}{3} = \frac{6x^2}{3}$$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$$3x^2 - x = 6x^2$$

- Reducid a una ecuación general.

$$3x^2 - x - 6x^2 = 0$$

$$-3x^2 - x = 0$$

$$3x^2 + x = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 3 \quad b = 1 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{-3}$$

d) $\mathbf{\frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x(x-3)}{6} + \frac{17}{12}}$

Paso1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis: $\frac{3x^2}{2} - \frac{4x-1}{4} = \frac{2x^2-6x}{6} + \frac{17}{12}$

- Reducid las fracciones a común denominador:

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\frac{6 \cdot 3x^2}{12} - \frac{3(4x-1)}{12} = \frac{2(2x^2-6x)}{12} + \frac{17}{12}$$

$$\frac{18x^2}{12} - \frac{12x-3}{12} = \frac{4x^2-12x}{12} + \frac{17}{12}$$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$$18x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 17$$

- Reducid a una ecuación general.

$$18x^2 - 4x^2 - 12x + 12x + 3 - 17 = 0$$

$$14x^2 - 14 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -1$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$$

e) $\mathbf{3x^2 - 4x + 5(x^2 - 2) = \frac{3x(x-2)}{2} + 14}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis: $3x^2 - 4x + 5x^2 - 10 = \frac{3x^2-6x}{2} + 14$

- Reducid las fracciones a común denominador:

$$\frac{2 \cdot 3x^2}{2} - \frac{2 \cdot 4x}{2} + \frac{2 \cdot 5x^2}{2} - \frac{2 \cdot 10}{2} = \frac{3x^2 - 6x}{2} + \frac{2 \cdot 14}{2}$$

$$\frac{6x^2}{2} - \frac{8x}{2} + \frac{10x^2}{2} - \frac{20}{2} = \frac{3x^2 - 6x}{2} + \frac{28}{2}$$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$$6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 = 3x^2 - 6x + 28$$

- Reducid a una ecuación general.

$$6x^2 - 8x + 10x^2 - 20 - 3x^2 + 6x - 28 = 0$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$13x^2 - 2x - 48 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 13 \quad b = -2 \quad c = -48$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{2 \cdot 13} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 2496}}{26} = \frac{2 \pm \sqrt{2500}}{26} = \frac{2 \pm 50}{26}$$

$$x_1 = \frac{52}{26} = 2 \qquad x_2 = \frac{-48}{26} = \frac{-24}{13}$$

f) $\frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

- Haced los productos y paréntesis: $\frac{x+1}{2} - \frac{x^2-2x+1}{4} - \frac{x+2}{3} + \frac{x^2-4x+4}{6} = \frac{1}{6}$

- Reducid las fracciones a común denominador:

$$\frac{6(x+1)}{12} - \frac{3(x^2-2x+1)}{12} - \frac{4(x+2)}{12} + \frac{2(x^2-4x+4)}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\frac{6x+6}{12} - \frac{3x^2-6x+3}{12} - \frac{4x+8}{12} + \frac{2x^2-8x+8}{12} = \frac{2}{12}$$

- Quitad los denominadores multiplicando la ecuación por el m.c.m.

$$6x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 - 4x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 = 2$$

- Reducid a una ecuación general.

$$6x + 6 - 3x^2 + 6x - 3 - 4x - 8 + 2x^2 - 8x + 8 - 2 = 0$$

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \quad b = 0 \quad c = -1$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x = \pm\sqrt{\frac{-(-1)}{1}} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$$

TABLA DE ERRORES						
Día:						
Nombre:						
Errores	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
En los cálculos						
En los menos delante de los paréntesis						
En los menos delante de las fracciones						
En las igualdades notables						
Por depiste						
No sabe las fórmulas						
No ha hecho el ejercicio						
Otros						

Ejercicios:

a) $3x^2 - 12x = 0$

b) $x - 3x^2 = 0$

c) $2x^2 - 8 = 0$

d) $4x^2 + 100 = 0$

e) $x^2 + x + 3 = 0$

f) $x^2 + 9x + 20 = 0$

g) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

h) $(2x - 3)(2x + 3) - x(x + 1) - 5 = 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:…………………………….** **GRUPO:…………………..**

NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………

Instrucciones: corrige los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar igualdades notables, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $\mathbf{-3x^2 + 12x = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$-3x^2 + 12x = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = -3 \quad b = 12 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x_1 = 0 \;\; x_2 = \frac{-12}{-3} = 4$$

b) $\mathbf{x - 3x^2 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$-3x^2 + x = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = -3 \quad b = 1 \quad c = 0$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x_1 = 0 \text{ y } x_2 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

c) $\mathbf{2x^2 - 8 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$2x^2 - 8 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 2 \quad b = 0 \quad c = 8$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{8}{2}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

d) $\mathbf{4x^2 + 100 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$4x^2 + 100 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 4 \quad b = 0 \quad c = 100$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \pm\sqrt{\frac{-100}{4}} = \pm\sqrt{-25} \quad \text{no tiene soluciones reales}$$

e) $\mathbf{x^2 + x + 3 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x^2 + x + 3 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = 3$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\cdot 3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} \text{ no tiene soluciones reales}$$

f) $\mathbf{x^2 + 9x + 20 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + 9x + 20 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 1 \quad b = 9 \quad c = 20$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 1\cdot 20}}{2\cdot 1} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-9 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9+1}{2} = \frac{-8}{2} = -4 \qquad x_2 = \frac{-9-1}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

g) $\mathbf{(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 8x}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$x^2 + 4^2 + 2\cdot 4\cdot x - [(2x)^2 + (-1)^2 + 2(2x)(-1)] = 8x$$

$$x^2 + 16 + 8x - [4x^2 + 1 - 4x] = 8x$$
$$x^2 + 16 + 8x - 4x^2 - 1 + 4x - 8x = 0$$
$$-3x^2 + 4x + 15 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = 15$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-3)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{-6} = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{-6} = \frac{-4 \pm 14}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-4+14}{-6} = \frac{10}{-6} = \frac{-5}{3} \qquad x_2 = \frac{-4-14}{-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

h) $\mathbf{(2x-3)(2x+3) - x(x+1) - 5 = 0}$

Paso 1: Operad la ecuación hasta llegar a la ecuación en forma general. OJO CON LAS IGUALDADES NOTABLES, LOS MENOS DELANTE DE LOS PARÉNTESIS Y LOS MENOS DELANTE DE LAS FRACCIONES.

$$(2x)^2 - 3^2 - x^2 - x - 5 = 0$$
$$4x^2 - 9 - x^2 - x - 5 = 0$$
$$3x^2 - x - 14 = 0$$

Paso 2: Identificad los coeficientes a, b, c.

$$a = 3 \quad b = -1 \quad c = -14$$

Paso 3: Calculad las soluciones.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-14)}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{1 \pm 13}{6}$$

$$x_1 = \frac{1+13}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \qquad x_2 = \frac{1-13}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

TABLA DE ERRORES								
Día:								
Nombre:								
Errores	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**	**h**
En los cálculos								
En los menos delante de los paréntesis								
En los menos delante de las fracciones								
En las igualdades notables								
Por despiste								
No sabe las fórmulas								
No ha hecho el ejercicio								
Otros								

Universidad Pontificia de Salamanca

Ejercicios:

a) $\frac{(5x-4)(5x+4)}{4} = \frac{(3x-1)^2-9}{2}$

b) $\frac{x}{3}(x-1) - \frac{x}{4}(x+1) + \frac{3x+4}{12} = 0$

c) $(2x+1)^2 = 4 + (x+2)(x-2)$

d) $3x^2 = 0$

e) $2x^2 - x - 3 - 1 = x - 4$

f) $-4x^2 + 100 = 0$

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**……………………………… **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha vamos a aprender:

- La interpretación geométrica de una ecuación de 2º grado
- un procedimiento general para resolver un problema de ecuaciones de 2º grado con una incógnita.

Propondremos problemas para resolver.

•♦ Interpretación geométrica de la solución de una ecuación de 2º grado.

Las soluciones de una ecuación de segundo grado son los puntos de la parábola que tiene como ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que cortan el eje de abscisas.

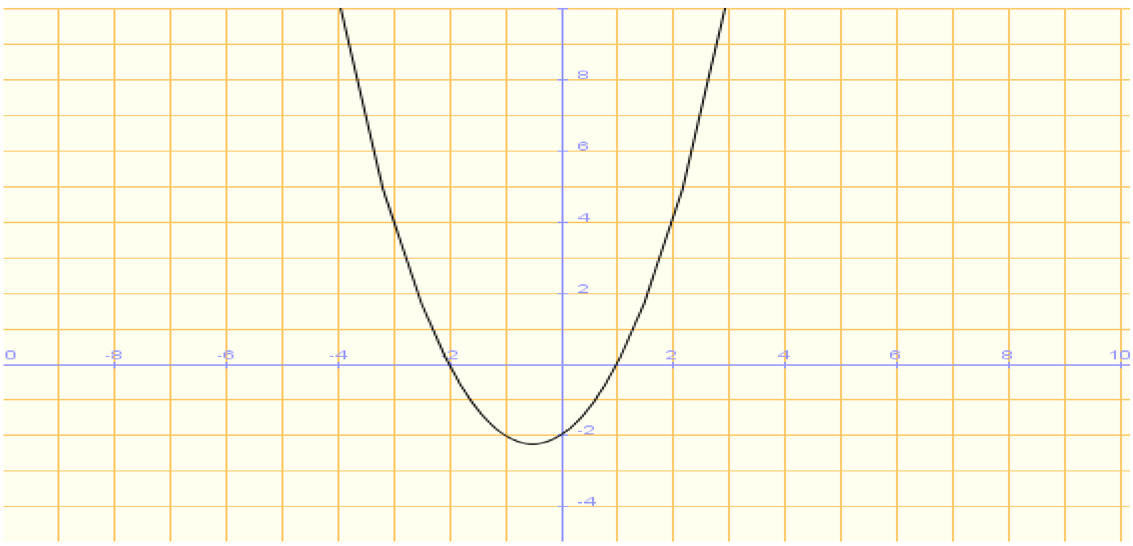
Ejemplo:

Dada la ecuación: $x^2 + x - 2 = 0$.

Las soluciones de esta ecuación son: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Si pintamos la función $y = x^2 + x - 2$ es una parábola que corta al eje de abscisas justo en (x=1,0) y (x=-2,0). Veamos la gráfica.



Universidad Pontificia de Salamanca

•♦Procedimiento para resolver problemas de ecuaciones de 2º grado

Paso 1: Entended bien el enunciado del problema. Para ello leed el problema las veces que haga falta, recordando problemas parecidos, cambiando palabras del enunciado por otras que nos resulten más familiares, pensando que el problema es algo propio que nos sucede a nosotros. También puede ayuda hacer dibujos, esquemas, tablas.

Paso 2: Identificad los datos y las relaciones entres ellos. Elegid la incógnita asignándole una letra. Si se ha hecho un esquema, tabla o dibujo conviene escribir en él los datos y las incógnitas. Transformad las relaciones entre los datos al lenguaje algebraico.

Paso 3: Plantead la ecuación teniendo en cuenta las relaciones o condiciones que debe verificar la incógnita.

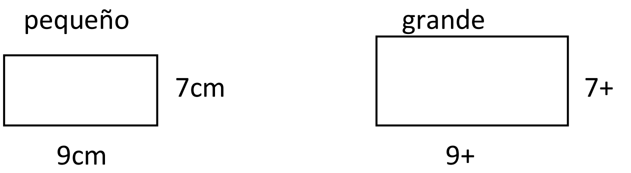
Paso 4: Resolved la ecuación.

Paso 5: Comprobad si el resultado tiene sentido y escribid la solución al problema. No olvides las unidades.

•♦Ejemplo:

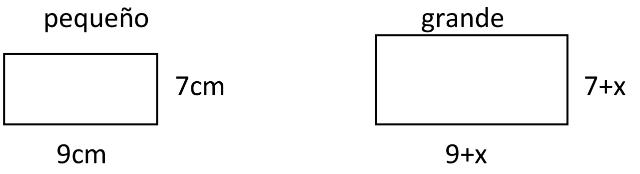
Los lados de un rectángulo miden 7 y 9 cm. Si se amplían los lados en una misma cantidad, la nueva área es de 143cm^2 ¿Cuánto se ha ampliado cada lado?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=los cm que aumentamos cada lado



área de un rectángulo: largo x ancho

Paso 3: Plantead la ecuación.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$(9 + \mathrm{x})(7 + \mathrm{x}) = 143$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$63 + 9x + 7x + x^2 = 143$$

$$\mathrm{x}^2 + 16\mathrm{x} + 63 - 143 = 0$$

$$\mathrm{x}^2 + 16\mathrm{x} - 80 = 0$$

$$\mathrm{x} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-80)}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 320}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-16 \pm 24}{2}$$

$x_1 = 4$ y $x_2 - 20$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

La segunda solución es negativa y no tiene sentido ya que los lados no pueden tener medidas negativas. Luego la solución es 4 cm lo que se ha aumentado cada lado.

●♦**Ejercicios:**

1.- Halla el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumenta en 395 unidades cuadradas.

2.- Calcula dos números enteros tales que su diferencia sea 2 y la suma de sus cuadrados sea 164.

3.- Encuentra el número tal que multiplicado por su cuarta parte sea igual al doble del número menos 3 unidades.

4.- Calcula el número tal que la suma de él y su cuadrado suman 30.

Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corrige los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Halla el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumenta en 395 unidades cuadradas

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=lo que mide el lado del cuadrado antes de aumentarlo

área  es x^2

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 395$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$x^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot x = x^2 + 395$$

$$x^2 + 25 + 10x - x^2 - 395 = 0$$

$$10x - 370 = 0$$

$$x = \frac{370}{10} = 37$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

El lado mide 37 unidades

2.-Calcula dos números naturales tales que su diferencia sea 2 y la suma de sus cuadrados sea 164.

Paso 1: Entended y representad el problema.

p.e el número 2 y el 4 tienen de diferencia 2

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=número más pequeño

x+2=otro número

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x^2 + (x+2)^2 = 164$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$x^2 + x^2 + 4 + 4x = 164$$

$$2x^2 + 4x - 160 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-160)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 1280}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{1296}}{4} = \frac{-4 \pm 36}{4}$$

$$x_1 = \frac{-4 - 36}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$

$$x_2 = \frac{-4 + 36}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

Una solución puede ser -10 y -10+2=-8 pero no son naturales, luego no es solución.

La solución es 8 y 8+2=10

3.-Encuentra el número tal que multiplicado por su cuarta parte sea igual al doble del número menos 3 unidades

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=número

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x \cdot \frac{1}{4}x = 2x - 3$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3 = 0$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{2 \cdot 4}{4}x + \frac{3 \cdot 4}{4} = 0$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -8 \quad c = 12$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{8 + 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{8 - 4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución

Tenemos dos soluciones x_1=6 y x_2=2.

4.- Calcula el número tal que la suma de él y su cuadrado suman 30.

Paso 1: Entended y representad el problema

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas

x=número desconocido

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x + x^2 = 30$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$x^2 + x - 30 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -30$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{-1 - 11}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

Tenemos dos soluciones 5 y -6

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES				
Día:				
Nombre:				
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**
No entiende el problema				
No sabe elegir la incógnita				
No plantea bien la relación entre los datos				
No ha hecho bien el planteamiento de la ecuación				
Resuelta mal la ecuación por despiste				
Resuelta mal la ecuación por error de cálculo				
Resuelta mal la ecuación por procedimiento				
Da mal el resultado				
No ha hecho el ejercicio				
Otros				

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

Contenidos:

1.- Ficha de explicación del trabajo cooperativo: cómo hacer los grupos, desarrollo de las clases y cómo evaluar.

2.- Ficha de explicación sobre las ecuaciones de 1er grado.

3.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

4.- Ficha de problemas resueltos a través de ecuaciones de 1er grado.

5.- Ficha de resolución de problemas de la ficha anterior.

Universidad Pontificia de Salamanca

INICIO

Objetivo:

- ✓ Aprender a resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- ✓ Asumir la responsabilidad del propio aprendizaje y ser consciente de cómo ayudar y cooperar al aprendizaje de sus compañeros.
- ✓ Adquirir habilidades sociales: cómo trabajar en grupo, cómo coordinar sus esfuerzos y cómo resolver los conflictos constructivamente.
- ✓ Conseguir y mantener una actitud positiva ante la materia.

Desarrollo:

Durante la primera sesión se recomienda explicarles en qué va a consistir el trabajo, como se van a desarrollar las clases, como se les va a evaluar. Además se recomienda hacer los grupos, situarles dentro de la clase y darles cierta motivación ya que es una forma nueva para ellos de trabajar.

- ✓ *Grupos:* Se recomienda hacer los grupos de tres personas. Si sobra alguna persona hacer dos grupos de dos personas. En un número reducido que evite que haya personas que no trabajen. Los grupos los hace el profesor tratando que sean lo más heterogeneos posibles, es decir, en un grupo coincidan alumno que se le da bien las matemáticas y le guste, otro alumno menos aventajado y otro alumno que se le de mal o que tenga mala actitud hacia la materia. Se situará al grupo dentro de la clase de forma que todos los miembros se puedan mirar y ver.
- ✓ *Explicación del trabajo:*Se recomienda hablarles de la doble responsabilidad, ya que son mayores, de su aprendizaje y de la de sus compañeros. No es sólo que el alumno aprenda sino que sus compañeros también aprendan. Por eso se harán los examenes. Además se les debe decir que deben avanzar al unísono, es decir, si un compañero todabía no lo entiende se debe buscar la forma que entienda lo que estamos haciendo, con buenas formas y respeto. El trabajo, el esfuerzo de cada uno es importante y repercutirá en el grupo. Recordar lo importante que es el tratar bien a los compañeros, expresarse respetando el turno, hablar en un tono de voz adecuado, no perder el tiempo, etc.(Se puede pedirles a ellos que creen que es importante cuando se trabaja en grupo).
- ✓ *Motivación:* Una forma de motivarles es decirles que se va a evaluar también el grupo y la nota que el grupo alcance modificará la de cada uno de sus miembros, se puede hacer por porcentaje;

  p.e.: nota_alumno=75%nota_individual_del_alumno + 25% nota_grupo.

  Además el trabajo en grupo les prepara para los trabajos del futuro y es una forma de irles preparando en ciertas habilidades que en el futuro les serán necesarias.

Universidad Pontificia de Salamanca

- ✓ *Planteamiento de la tarea:* Cada día se les dará una ficha bien como las que están desarrolladas en este documento o bien se les marcará la parte del libro de texto u otros materiales indicando al grupo lo que tienen que trabajar durante la clase, los ejercicios que tienen que hacer, o/y que tienen que corregir. Si el profesor considera que el grupo es suficiente maduro se les puede dar el material evitando la explicación propia del profesor sino una vez hecho los grupos el profesor da una breve explicación breve (10-15 minutos) y después reparte las fichas para que trabajen. En la sesión que toca corregir ejercicios se les puede repartir las soluciones y si hay alguna duda que se repite en varios grupos el profesor puede aclararla en alto.
- ✓ *Revisión y control de la efectividad:* El profesor pasará por las mesas para ver si se han hecho los ejercicios del día anterior, si han hecho toda la tarea que tenían que hacer durante la clase, si todos los miembros se están implicando y colaborando, resolver dudas, preguntar aleatoriamente a los alumnos (preferentemente al que tiene más dificultades) para ver si se están enterando. Además el profesor detecta cuando el grupo no avanza e interviene si es necesario; observa las dificultades en las interacciones de los componentes del grupo y busca modos de resolverlos; enfatiza la legitimidad de estar en desacuerdo y la obligación de argumentar para defender las propias ideas; no permite que ningún estudiante domine la discusión de modo que excluya o limite seriamente la contribución de los demás. Además se les puede pedir las tablas de revisión de los errores de los ejercicios.

Evaluación:

Nota individual: Cada alumno obtendrá una nota individual conseguida por la nota del examen, si ha hecho los deberes cada día, su actitud en clase y las preguntas que pueda hacer cada día el profesor cuando se pasea por los grupos, o bien como el profesor desee evaluar a su alumno.

Nota del grupo: Además habrá una nota por grupo p.e

- cada día el grupo puede ganar puntos si todos los miembros del grupo han hecho los deberes ganan 3 puntos,
- si todos los miembros del grupo han aprobado el examen del profesor ganan otros 5 puntos,
- si todos los miembros del grupo han sacado más de un 6 tienen 6 puntos,
- si el alumno que ha preguntado el profesor en el grupo sabe explicar el ejercicio ganan 3 puntos,
- si han trabajado en clase adecuadamente, terminando la tarea, y con buen ambiente entre los miembros del grupo otros 2 puntos,
- si se han puesto puntualmente a trabajar 1 punto,

Universidad Pontificia de Salamanca

- no dejar a nadie atrás, ninguno de los miembros puede no haber entendido lo anterior, tienen que avanzar juntos
- respetar el turno de palabra, no hablar cuando otro este hablando y no descalificar a nadie, valorando las aportaciones o dudas de todos 3 puntos

Al final del trabajo la puntuación del grupo se traducirá en una nota p.e una forma podría ser esta:

Menos de 5 puntos un 1
Ente 5-10 puntos un 3
Entre 10-15 puntos un 5
Entre 15-20 puntos un 7
Entre 20-25 puntos un 9
Por encima de 25 puntos un 10.

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**……………………………… **GRUPO:**…………………...

NOMBRE Y APELLIDOS:……

Instrucciones: Durante la clase vamos a recordar como:

- identificar una ecuación de 1er grado,
- conseguir ecuaciones equivalentes,
- resolver una ecuación de 1er grado,
- interpretación geométrica.

Daremos unos ejercicios para hacer en casa o durante la clase si da tiempo.

0. Identificar una ecuación de 1er grado con una incógnita:

Es una igualdad entre expresiones algebraicas (e.d. letras y números) que se puede reducir a la forma general $\mathbf{ax+b=0}$, donde a, b son números reales y a≠0 siempre.

La solución de una ecuación de 1er grado es $\mathbf{x=\frac{-b}{a}}$.

I. Conseguir ecuaciones equivalentes:

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Es decir dada cualquier ecuación de 1er grado con una incógnita siempre podemos llegar a otra equivalente (que tenga la misma solución que la de inicio) de la forma $\mathrm{ax+b=0}$ cuya solución es $\mathrm{x=\frac{-b}{a}}$.

Se puede conseguir una ecuación equivalente si:

- se suma a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,
- se resta a ambos lados de la igualdad el mismo número o expresión algebraica,
- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero,
- se multiplica ambos lados de la igualdad por el mismo número o expresión algebraica distinta de cero.

II. Como resolver una ecuación de 1er grado con una incógnita:

Universidad Pontificia de Salamanca

A continuación vamos a recordar el procedimiento para resolver una ecuación de 1er grado con una incógnita. Para ello daremos tres ejemplos y seguiremos SIEMPRE el mismo procedimiento:

Ejemplo 1:

$$3x + 2 = 5x + 6$$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!:

Como no hay ningún paréntesis seguimos al siguiente paso.

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$3x - 5x = 6 - 2$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$-2x = 4$$

$$x = \frac{4}{-2} = -2$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$3(-2) + 2 = 5(-2) + 6$$

$$-6 + 2 = -10 + 6$$

$$-4 = -4$$

Ejemplo 2 (con paréntesis):

$$2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!:

$$2x + 2 - 3x + 6 = x + 6$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$2x - 3x - x = 6 - 2 - 6$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$-2x = -2$$

$$x = \frac{-2}{-2} = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$2(1+1) - 3(1-2) = 1 + 6$$

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$$

$$4 + 3 = 7$$

Ejemplo 3 (con fracciones):

$$\frac{1}{4} - 5(x-3) - \frac{3(2x-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x-1}{2} - \frac{1}{2}$$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!:

$$\frac{1}{4} - 5x + 15 - \frac{6x-3}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3x-1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - 5x + 15 - \frac{6x-3}{2} = \frac{3x-1}{4} - \frac{1}{2}$$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

$$\frac{1}{4} - \frac{4 \cdot 5x}{4} + \frac{4 \cdot 15}{4} - \frac{2(6x-3)}{4} = \frac{3x-1}{4} - \frac{2 \cdot 1}{4} \qquad \frac{1}{4} - \frac{20x}{4} + \frac{60}{4} - \frac{12x-6}{4} = \frac{3x-1}{6} - \frac{2}{4}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

Universidad Pontificia de Salamanca

$$1 - 20x + 60 - 12x + 6 = 3x - 1 - 2$$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$-20x - 12x - 3x = -1 - 2 - 60 - 6 - 1 \qquad -35x = -70$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$x = \frac{-70}{-35} = 2$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\frac{1}{4} - 5(2-3) - \frac{3(2\cdot 2-1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot 2-1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} - 5\cdot(-1) - \frac{3(4-1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6-1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + 5 - \frac{3(3)}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + 5 - \frac{9}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{5\cdot 4}{4} - \frac{9\cdot 2}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1\cdot 2}{4}$$

$$\frac{1+20-18}{4} = \frac{5-2}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

II. Interpretación geométrica:

Vamos a estudiar la interpretación geométrica.

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$2x + 2 = x + 6$$

Al resolverla obtenemos:

$$2x - x = 6 - 2$$

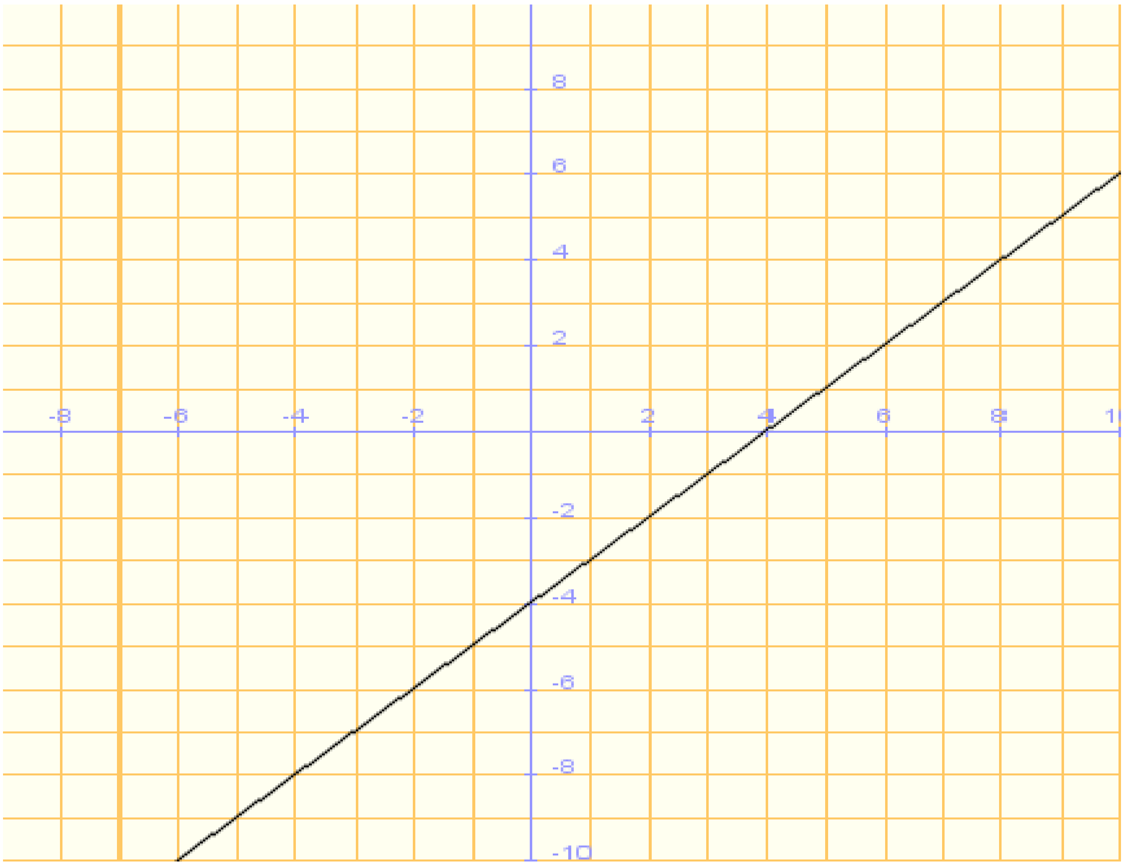
$$x = 4$$

Si representamos la recta:

$$y = x - 4$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Nos damos cuenta que la solución $x = 4$ $y = 0$, es el punto que corta la recta al eje de abscisas.



IV. Ejercicios:

Resolved las siguientes ecuaciones, indicando cada paso que dais:

a) $4x + 3x - 4 = 3x - 8$
b) $2x + 3 - (x + 1) = x + 3$
c) $3(x + 2) + 2x = 5x - 2(x - 4)$
d) $5 - 3(2x + 5) = -5 - (2x - 3)$
e) $\frac{7+x}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7x-2}{10}$
f) $-5 \cdot \frac{3-x}{6} = -\frac{x+10}{12} + \frac{x-5}{3}$
g) $\frac{3x-2}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4x-4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5x-2}{2} = \frac{x+1}{4} + \frac{3x}{40}$

Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corregiremos los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

a) $\mathbf{4x + 3x - 4 = 3x - 8}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

Como no hay paréntesis seguimos al siguiente paso.

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

Como no hay fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$4x + 3x - 3x = -8 + 4$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$4x = -4$$

$$x = \frac{-4}{4} = -1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) - 4 = 3 \cdot (-1) - 8$$

$$-4 - 3 - 4 = -3 - 8$$

$$-11 = -11$$

b) $\mathbf{2x + 3 - (x + 1) = x + 3}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

Universidad Pontificia de Salamanca

$$2x + 3 - x - 1 = x + 3$$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$2x - x - x = 3 - 3 + 1$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$0x = 2$$

$$0 = 2$$

Esta ecuación no tiene solución.

Paso 6: Haced la comprobación.

No hay solución no hay comprobación.

c) $\mathbf{3(x + 2) + 2x = 5x - 2(x - 4)}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

$$3x + 6 + 2x = 5x - 2x + 8$$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$3x + 2x - 5x + 2x = 8 - 6$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2} = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$3(1 + 2) + 2 \cdot 1 = 5 \cdot 1 - 2(1 - 4)$$

$$3 \cdot 3 + 2 = 5 - 2(-3)$$

$$11 = 11$$

d) $\mathbf{5 - 3(2x + 5) = -5 - (2x - 3)}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

$$5 - 6x - 15 = -5 - 2x + 3$$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

Como no tenemos fracciones seguimos al siguiente paso.

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$-6x + 2x = -5 + 3 + 15 - 5$$

Paso 5: Operad y despejar la incógnita.

$$-4x = 8$$

$$x = \frac{8}{-4} = -2$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$5 - 3(2(-2) + 5) = -5 - (2(-2) - 3)$$

$$5 - 3(-4 + 5) = -5 - (-4 - 3)$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$5 - 3(1) = -5 - (-7)$$

$$5{-}3 = -5 + 7$$

$$2 = 2$$

e) $\frac{\mathbf{7+x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{7x-2}}{\mathbf{10}}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

Como no tenemos paréntesis seguimos al siguiente paso.

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

$$\frac{5(7+x)}{10} = \frac{5\cdot 9}{10} + \frac{7x-2}{10}$$

$$\frac{35+5x}{10} = \frac{45}{10} + \frac{7x-2}{10}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

$$35 + 5x = 45 + 7x - 2$$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$5x - 7x = 45 - 2 - 35$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$-2x = 8$$

$$x = \frac{8}{-2} = -4$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\frac{7+(-4)}{2} = \frac{9}{2} + \frac{7(-4)-2}{10}$$

$$\frac{7-4}{2} = \frac{9}{2} + \frac{-28-2}{10}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{2} - \frac{-30}{10}$$

$$\frac{3\cdot 5}{10} = \frac{5\cdot 9}{10} + \frac{-30}{10}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\frac{15}{10} = \frac{45-30}{10}$$

$$\frac{15}{10} = \frac{15}{10}$$

f) $\mathbf{-5 \cdot \frac{3-x}{6} = -\frac{x+10}{12} + \frac{x-5}{3}}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

$$-\frac{15-5x}{6} = -\frac{x+10}{12} + \frac{x-5}{3}$$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

$$-\frac{2(15-5x)}{12} = -\frac{x+10}{12} + \frac{4(x-5)}{12}$$

$$-\frac{30-10x}{12} = -\frac{x+10}{12} + \frac{4x-20}{12}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

$$-30 + 10x = -x - 10 + 4x - 20$$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$10x + x - 4x = -10 - 20 + 30$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$7x = 0$$

$$x = \frac{0}{7} = 0$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$-5 \cdot \frac{3-0}{6} = -\frac{0+10}{12} + \frac{0-5}{3}$$

$$-5 \cdot \frac{3}{6} = -\frac{10}{12} + \frac{-5}{3}$$

$$-\frac{15}{6} = -\frac{10}{12} + \frac{-5}{3}$$

$$-\frac{2 \cdot 15}{12} = -\frac{10}{12} + \frac{4 \cdot (-5)}{12}$$

$$\frac{-30}{12} = -\frac{10}{12} + \frac{-20}{12}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\frac{-30}{12}=\frac{-30}{12}$$

g) $\frac{3x-2}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x-4}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5x-2}{2}=\frac{x+1}{4}+\frac{3x}{40}$

Paso 1: Haced los productos y resolved los paréntesis ¡¡¡OJO CON LOS SIGNOS!!!

$$\frac{3x-2}{5}-\frac{4x-4}{10}+\frac{5x-2}{8}=\frac{x+1}{4}+\frac{3x}{40}$$

Paso 2: Reducid las fracciones a común denominador haciendo el m.c.m. de los denominadores.

$$\frac{8(3x-2)}{40}-\frac{4(4x-4)}{40}+\frac{5(5x-2)}{40}=\frac{10(x+1)}{40}+\frac{3x}{40}$$

$$\frac{24x-16}{40}-\frac{16x-16}{40}+\frac{25x-10}{40}=\frac{10x+10}{40}+\frac{3x}{40}$$

Paso 3: Multiplicad toda la ecuación por el m.c.m. ¡¡¡OJO CON EL SIGNO DELANTE DE LA FRACCIÓN!!!

$$24x-16-16x+16+25x-10=10x+10+3x$$

Paso 4: Pasad los términos que tengan x a un lado de la igualdad y los términos que no tengan x al otro lado.

$$24x-16x+25x-10x-3x=10+16-16+10$$

Paso 5: Operad y despejad la incógnita.

$$20x=20$$

$$x=\frac{20}{20}=1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\frac{3\cdot 1-2}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4\cdot 1-4}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5\cdot 1-2}{2}=\frac{1+1}{4}+\frac{3\cdot 1}{40}$$

$$\frac{3-2}{5}-\frac{4-4}{10}+\frac{5-2}{8}=\frac{2}{4}+\frac{3}{40}$$

$$\frac{8\cdot 1}{40}-\frac{4\cdot 0}{40}+\frac{5\cdot 3}{40}=\frac{20}{40}+\frac{3}{40}$$

$$\frac{8+15}{40}=\frac{23}{40}$$

$$\frac{23}{40}=\frac{23}{40}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES							
Día:							
Nombre:							
Errores	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**
En los cálculos							
En los menos delante de los paréntesis							
En los menos delante de las fracciones							
Por despiste							
No he hecho el ejercicio							
Otros							

Ejercicios:

a) $2(2-3x)-3(3-2x)=4(x+1)+3(4-5x)$

b) $\frac{x-3}{5}=\frac{x+1}{3}-2$

c) $\frac{2x-4}{3}=3-\frac{4+x}{2}$

d) $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{4}-1\right)-\frac{x-1}{2}=2x$

e) $\frac{x+2}{2}-\frac{x+3}{3}=-\frac{x-4}{4}+\frac{x-5}{5}$

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**…………………………….. **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:……

Instrucciones: Vamos a ver un procedimiento general de cómo resolver un problema de 1er grado con una incógnita. A continuación veremos algunos tipos que resolveremos y luego propondremos algunos problemas para resolver.

•♦ Procedimiento

Paso 1: Entended bien el enunciado del problema. Para ello leed el problema las veces que haga falta, recordando problemas parecidos, cambiando palabras del enunciado por otras que resulten más familiares, pensando que el problema es algo propio que nos sucede a nosotros. También puede ayuda hacer dibujos, esquemas, tablas.

Paso 2: Identificad los datos y las relaciones entres ellos. Elegid la incógnita asignándole una letra. Si se ha hecho un esquema, tabla o dibujo conviene escribir en él los datos y las incógnitas. Transformad las relaciones entre los datos al lenguaje algebraico.

Paso 3: Plantead la ecuación teniendo en cuenta las relaciones o condiciones que debe verificar la incógnita.

Paso 4: Resolved la ecuación.

Paso 5: Comprobad si el resultado tiene sentido y escribid la solución al problema. No olvides las unidades.

•♦ Ejemplos:

Hay varios tipos de problemas que se resuelven a través de una ecuación de 1er grado.

- problemas numéricos: p.e. calcula números sucesivos;
- problemas de tablas: p.e. los de la edad, los de mezclas;
- problemas gráficos: p.e. los de móviles, figuras geométricos

Ejemplo de problema numérico

Calcula tres números consecutivos tales que la suma de los tres sea igual al doble del segundo.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 1: Entended y representad el problema.

Ejemplo de números consecutivos son p.e.: 5, 5+1, 5+2

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas

Primer número: x Segundo número x+1 Tercer número x+2

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 2(x + 1)$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$3x + 3 = 2x + 2$$

$$3x - 2x = 2 - 3$$

$$x = -1$$

Paso 5: Verificad y escribid el resultado.

Las soluciones son tres números. Sabemos uno, calculamos los otros dos

$x + 1 = -1 + 1 = 0$ $x + 2 = -1 + 2 = 1$

La solución es -1, 0 , 1

Ejemplo de Problema de tablas (de edades)

Águeda y David tienen respectivamente 8 y 2 años. ¿Al cabo de cuántos años la edad de Águeda será el doble de la de David?

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Actualmente	Dentro de ¿? años
Águeda	8	
David	2	

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=nº de años que tienen que pasar

	Actualmente	Dentro de x años
Águeda	8	8+x
David	2	2+x

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso3: Plantead la ecuación.

$$8 + x = 2(2 + x)$$

Paso4: Resolved la ecuación.

$$8 + x = 4 + 2x$$

$$x - 2x = 4 - 8$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

Paso5: Verificad y escribid la solución.

Dentro de 4 años Águeda tendrá el doble que David

Ejemplo de Problema con tablas (de mezclas)

Un ganadero fabrica pienso para sus animales mezclando trigo y cebada de la siguiente forma: por cada 25 kg de trigo echa 15 kg de cebada que le cuesta 10 céntimos cada kg. Al final, resulta que el kg de pienso le cuesta a 15 céntimos, ¿cuánto le cuesta el kg de trigo?

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Trigo	Cebada	Mezcla
Precio (céntimos €/kg)		10	15
Cantidad	25	15	25+15
Dinero (céntimos €)		15·10	

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x= precio del trigo

	Trigo	Cebada	Mezcla
Precio (céntimos €/kg)	X	10	15
Cantidad (kg)	25	15	25+15
Dinero (céntimos €)	25x	15·10	15(25+15)

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$25x + 150 = 600$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$25x = 600 - 150$$

$$x = \frac{450}{25} = 18$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

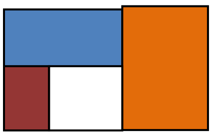
80kg del azúcar del tipo A

200-80=120kg del azúcar del tipo B

Ejemplo de Problema con gráficos

Se ha plantado 1/5 de la superficie de la huerta con pimientos; 1/15 con patatas; 2/3 con berenjenas, y el resto, que son 240m^2, con tomates. ¿Qué superficie tiene la huerta?

Paso 1: Entended y representad el problema.

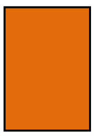


Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

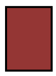
Superficie total de la huerta x

$\frac{1}{5}$x pimientos

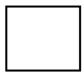
$\frac{1}{15}$x patatas



$\frac{2}{3}$x berenjenas



240m^2 tomates



Paso 3: Plantead la ecuación.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{15}x + \frac{2}{3}x + 240 = x$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$\frac{3x}{15} + \frac{x}{15} + \frac{10x}{15} + \frac{15 \cdot 240}{15} = \frac{15x}{15}$$

$$\frac{14x - 15x}{15} = \frac{-3600}{15}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$-x = -3600$$

$$x = 3600$$

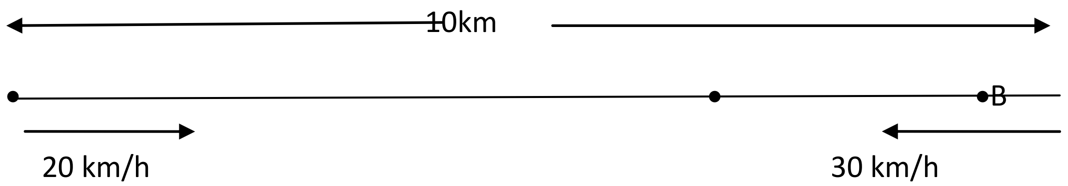
Paso 5: Verificad y escribid la solución.

La superficie de la huerta son $3600m^2$

Ejemplo de Problema con gráficos (móviles)

Jesús sale de paseo con una bici llevando una velocidad de 20km/h. Al mismo tiempo, a una distancia de 10km, sale un Luis, un amigo suyo a su encuentro, a una velocidad de 30km/h. ¿A cuántos km está Jesús de su casa en el momento de su encuentro?

Paso 1: Entended y representad el problema.



JESUS Luis

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

t= horas que tienen que pasar para encontrarse

recordad: $espacio = velocidad \cdot tiempo$

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$20\,t + 30t = 10$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$50t = 10$$

$$t = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

Lo que hemos calculado es el tiempo que tardan en encontrarse que son 0,2 horas pero los que nos piden es a cuántos km está Jesús de su casa cuando se encuentran

$$0{,}2 \cdot 20 = 4km$$

Jesús está a 4km de su casa.

Universidad Pontificia de Salamanca

●♦**Ejercicios:**

1.-Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Carmen si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20€.

2.-El precio de una bicicleta ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96€. ¿Cuál era el precio inicial?

3.-La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

4.-Calcula cuántos litros de aceite de orujo de 1,6€/l tenemos que añadir a un bidón que contiene 60l de aceite de oliva de 2,8€/l para obtener una mezcla de 2,5€/l.

5.-Tres amigos trabajan 20, 30 y 50 días en un negocio. Al cabo de tres meses, se reparten los beneficios correspondiendo al tercero 300€ más que el segundo. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

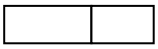
Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: corregiremos los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de planteamiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, en la solución, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

1.-Calcula cuánto ha costado el abrigo nuevo de Carmen si la cuarta parte del dinero que ha pagado por él más la sexta parte de su precio son 20€.

Paso 1: Entended y representad el problema.

20€ 

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x= dinero que ha costado el abrigo

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = 20$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$\frac{3x}{12} + \frac{2x}{12} = \frac{12 \cdot 20}{12}$$

$$3x + 2x = 240$$

$$5x = 240$$

$$x = \frac{240}{5} = 48$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

El abrigo ha costado 48€.

2.- El precio de una bicicleta ha subido un 15% en diciembre y ha bajado un 20% en enero. De esta forma, el precio inicial ha disminuido en 6,96€. ¿Cuál era el precio inicial?

Paso 1: Entended y representad el problema.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=precio de una bicicleta

15% de x sube en diciembre

20% del precio de la bicicleta en diciembre baja en enero

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$x+\frac{15}{100}x-\frac{20}{100}\left(x+\frac{15}{100}x\right)=x-6{,}96$$

$$\frac{15}{100}x-\frac{20}{100}\left(x+\frac{15}{100}x\right)=-6{,}96$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$\frac{15}{100}x-\frac{20}{100}x-\frac{300}{10000}x=-6{,}96$$

$$\frac{1500}{10000}x-\frac{2000}{10000}x-\frac{300}{10000}x=-6{,}96$$

$$1500x-2000x-300x=-69600$$

$$-800x=-69600$$

$$x=\frac{-69600}{-800}=87$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

El precio de la bicicleta era 87 €.

3.-La edad actual de un padre es el triple que la de su hijo y dentro de 14 años será el doble. ¿Qué edad tiene cada uno?

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Actual	Dentro de 14 años
Edad padre		
Edad hijo		

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

Universidad Pontificia de Salamanca

x=años del hijo actualmente

	Actual	Dentro de 14 años
Edad padre	3x	3x+14
Edad hijo	X	x+14

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$3x + 14 = 2(x + 14)$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$3x + 14 = 2x + 28$$

$$3x - 2x = 28 - 14$$

$$x = 14$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

La edad del hijo actualmente es de 14 años y la del padre actualmente es de 3·14=42 años.

4.-Calcula cuántos litros de aceite de orujo de 1,6€/l tenemos que añadir a un bidón que contiene 60l de aceite de oliva de 2,8€/l para obtener una mezcla de 2,5€/l.

Paso 1: Entended y representad el problema.

	Aceite Orujo	Aceite de oliva	Mezcla
Precio	1,6€/l	2,8€/l	2,5€/l
Litro		60	
Total			

Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=litros de aceite de orujo

	Aceite Orujo	Aceite de oliva	Mezcla
Precio	1,6€/l	2,8€/l	2,5€/l
Litro	X	60	60+x
Total	1,6x	2,8·60	2,5(60+x)

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$1{,}6x + 2{,}8 \cdot 60 = 2{,}5(60 + x)$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$1{,}6x + 168 = 150 + 2{,}5x$$

$$1{,}6x - 2{,}5x = 150 - 168$$

$$-0{,}9x = -18$$

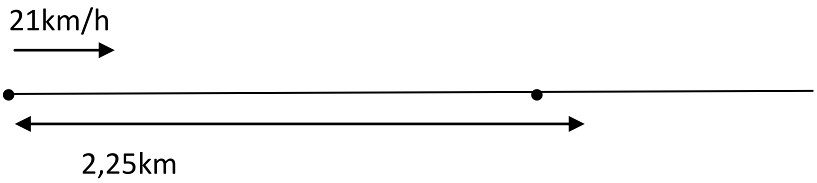
$$x = \frac{-18}{-0{,}9} = 20$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

20litros de aceite de orujo.

5.-Un ciclista que va a 21km/h tarda tres cuartos de hora en alcanzar a otro que le lleva una ventaja de 2,25km. ¿Qué velocidad lleva el que va delante?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid la incógnita y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x=velocidad del que va delante, el que va más lento

$\frac{3}{4}21$ km que recorre el que va más deprisa

$\frac{3}{4}x + 2{,}25$ km que recorre el que va más lento

Paso 3: Plantead la ecuación.

$$\frac{3}{4}21 = \frac{3}{4}x + 2{,}25$$

Paso 4: Resolved la ecuación.

$$15{,}75 = 0{,}75x + 2{,}25$$

$$15{,}75 - 2{,}25 = 0{,}75x$$

$$13{,}5 = 0{,}75x$$

$$x = \frac{13{,}5}{0{,}75} = 18$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

El otro ciclista va a 18km/h

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES					
Día:					
Nombre:					
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
No entiende el problema					
No sabe elegir la incógnita					
No plantea bien la relación entre los datos					
No ha hecho bien el planteamiento de la ecuación					
Resuelta mal la ecuación por despiste					
Resuelta mal la ecuación por error de cálculo					
Resuelta mal la ecuación por procedimiento					
Da mal el resultado					
No ha hecho el ejercicio					
Otros					

Ejercicios:

1.- Con 3,5€ más del dinero que tengo, podría comprar la camiseta de mi equipo. Si tuviera el doble, me sobrarían 7,25€. ¿Cuánto dinero tengo?

2.- Al mezclar 30kg de pintura con 50kg de otra calidad inferior, obtenemos una mezcla a 3,30€/kg. Si el precio de la pintura barata es la mitad que el de la otra, ¿Cuál es el precio del kilo de cada clase de pintura?

3.- La distancia entre dos ciudades, A y B, es 280 km. Un tren sale de A a 80km/h, y media hora más tarde sale un coche de B hacia A que tarda 1,2horas en cruzarse con el tren. ¿Qué velocidad lleva el coche?

4.- Un padre de 43 años tiene dos hijos de 9 y 11 años. ¿Cuántos años han de transcurrir para que entre los dos hijos igualen la edad del padre?

5.- De un depósito se sacan 2/7 de su contenido; después, 40 litros, y por último, 5/11 del agua restante, quedando aún 60 l. ¿Cuánta agua había en el depósito?

Universidad Pontificia de Salamanca

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Contenido:

1.- Ficha de explicación del trabajo cooperativo: cómo hacer los grupos, desarrollo de las clases y cómo evaluar.

2.- Ficha de explicación sobre los sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas.

3.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

4.- Ficha de explicación sobre los sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas.

5.- Ficha de resolución de ejercicios de la ficha anterior.

6.- Ficha de problemas resueltos a partir de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas.

7.- Ficha de resolución de problemas de la ficha anterior.

Universidad Pontificia de Salamanca

INICIO

Objetivo:

- ✓ Aprender a resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- ✓ Asumir la responsabilidad del propio aprendizaje y ser consciente de cómo ayudar y cooperar al aprendizaje de sus compañeros.
- ✓ Adquirir habilidades sociales: cómo trabajar en grupo, cómo coordinar sus esfuerzos y cómo resolver los conflictos constructivamente.
- ✓ Conseguir y mantener una actitud positiva ante la materia.

Desarrollo:

Durante la primera sesión se recomienda explicarles en qué va a consistir el trabajo, como se van a desarrollar las clases, como se les va a evaluar. Además se recomienda hacer los grupos, situarles dentro de la clase y darles cierta motivación ya que es una forma nueva para ellos de trabajar.

- ✓ *Grupos:* Se recomienda hacer los grupos de tres personas. Si sobra alguna persona hacer dos grupos de dos personas. En un número reducido que evite que haya personas que no trabajen. Los grupos los hace el profesor tratando que sean lo más heterogeneos posibles, es decir, en un grupo coincidan alumno que se le da bien las matemáticas y le guste, otro alumno menos aventajado y otro alumno que se le de mal o que tenga mala actitud hacia la materia. Se situará al grupo dentro de la clase de forma que todos los miembros se puedan mirar y ver.
- ✓ *Explicación del trabajo:*Se recomienda hablarles de la doble responsabilidad, ya que son mayores, de su aprendizaje y de la de sus compañeros. No es sólo que el alumno aprenda sino que sus compañeros también aprendan. Por eso se harán los examenes. Además se les debe decir que deben avanzar al unísono, es decir, si un compañero todabía no lo entiende se debe buscar la forma que entienda lo que estamos haciendo, con buenas formas y respeto. El trabajo, el esfuerzo de cada uno es importante y repercutirá en el grupo. Recordar lo importante que es el tratar bien a los compañeros, expresarse respetando el turno, hablar en un tono de voz adecuado, no perder el tiempo, etc.(Se puede pedirles a ellos que creen que es importante cuando se trabaja en grupo).
- ✓ *Motivación:* Una forma de motivarles es decirles que se va a evaluar también el grupo y la nota que el grupo alcance modificará la de cada uno de sus miembros, se puede hacer por porcentaje;
  p.e.: nota_alumno=75%nota_individual_del_alumno + 25% nota_grupo.

Universidad Pontificia de Salamanca

Además el trabajo en grupo les prepara para los trabajos del futuro y es una forma de irles preparando en ciertas habilidades que en el futuro les serán necesarias.

- ✓ *Planteamiento de la tarea:* Cada día se les dará una ficha bien como las que están desarrolladas en este documento o bien se les marcará la parte del libro de texto u otros materiales indicando al grupo lo que tienen que trabajar durante la clase, los ejercicios que tienen que hacer, o/y que tienen que corregir. Si el profesor considera que el grupo es suficiente maduro se les puede dar el material evitando la explicación propia del profesor sino una vez hecho los grupos el profesor da una breve explicación breve (10-15 minutos) y después reparte las fichas para que trabajen. En la sesión que toca corregir ejercicios se les puede repartir las soluciones y si hay alguna duda que se repite en varios grupos el profesor puede aclararla en alto.
- ✓ *Revisión y control de la efectividad:* El profesor pasará por las mesas para ver si se han hecho los ejercicios del día anterior, si han hecho toda la tarea que tenían que hacer durante la clase, si todos los miembros se están implicando y colaborando, resolver dudas, preguntar aleatoriamente a los alumnos (preferentemente al que tiene más dificultades) para ver si se están enterando. Además el profesor detecta cuando el grupo no avanza e interviene si es necesario; observa las dificultades en las interacciones de los componentes del grupo y busca modos de resolverlos; enfatiza la legitimidad de estar en desacuerdo y la obligación de argumentar para defender las propias ideas; no permite que ningún estudiante domine la discusión de modo que excluya o limite seriamente la contribución de los demás. Además se les puede pedir las tablas de revisión de los errores de los ejercicios.

Evaluación:

Nota individual: Cada alumno obtendrá una nota individual conseguida por la nota del examen, si ha hecho los deberes cada día, su actitud en clase y las preguntas que pueda hacer cada día el profesor cuando se pasea por los grupos, o bien como el profesor desee evaluar a su alumno.

Nota del grupo: Además habrá una nota por grupo p.e

- cada día el grupo puede ganar puntos si todos los miembros del grupo han hecho los deberes ganan 3 puntos,
- si todos los miembros del grupo han aprobado el examen del profesor ganan otros 5 puntos,
- si todos los miembros del grupo han sacado más de un 6 tienen 6 puntos,
- si el alumno que ha preguntado el profesor en el grupo sabe explicar el ejercicio ganan 3 puntos,

Universidad Pontificia de Salamanca

- si han trabajado en clase adecuadamente, terminando la tarea, y con buen ambiente entre los miembros del grupo otros 2 puntos,
- si se han puesto puntualmente a trabajar 1 punto,
- no dejar a nadie atrás, ninguno de los miembros puede no haber entendido lo anterior, tienen que avanzar juntos
- respetar el turno de palabra, no hablar cuando otro este hablando y no descalificar a nadie, valorando las aportaciones o dudas de todos 3 puntos

Al final del trabajo la puntuación del grupo se traducirá en una nota p.e una forma podría ser esta:

Menos de 5 puntos un 1
Ente 5-10 puntos un 3
Entre 10-15 puntos un 5
Entre 15-20 puntos un 7
Entre 20-25 puntos un 9

Por encima de 25 puntos un 10.

Universidad Pontificia de Salamanca

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**…………………………….. **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:…………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: Durante la clase vamos a identificar un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Veremos la clasificación de un sistema por el nº de soluciones. Además indicaremos los tres métodos de resolver un sistema de dos ecuaciones y dos variables con un ejemplo, además de ver la forma gráfica. Al final proponemos unos ejercicios para realizar en casa.

0. Sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas. Nº de soluciones.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales y dos incógnitas. Se escribe:

$$\begin{cases} \mathbf{ax + by = c} \\ \mathbf{mx + ny = p} \end{cases}$$

Donde **a, b, c, m, n** y **p** son números llamados coeficientes y las incógnitas son **x** e **y**.

Resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es buscar las soluciones (x, y) que verifican las dos ecuaciones a la vez, es decir que son solución de las dos ecuaciones a la vez. Según el número de soluciones los sistemas se clasifican en:

- Compatible determinado, si la solución es única.
- Compatible indeterminado, si tiene infinitas soluciones.
- Incompatible, si no tiene soluciones.

I. Sistemas equivalentes.

Dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

- Se obtiene un sistema equivalente cambiando una o las dos ecuaciones por otra/s equivalentes.

- Se obtiene un sistema equivalente si a una ecuación del sistema se le suma o resta otra ecuación del mismo sistema.

II. Resolución de sistemas: Método de sustitución.

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Despejad una incógnita en una de las ecuaciones, la que os resulte más fácil.

Paso 3: Sustituid la expresión obtenida en el paso 1 en la otra ecuación.

Paso 4: Resolved la ecuación resultante (ecuación de 1er grado con una incógnita), obteniendo el valor de una de las variables.

Paso 5: Sustituid el valor de la incógnita obtenido en la ecuación del paso 1 despejada y hallad el valor de la otra incógnita.

Paso 6: Haced la comprobación. Sustituid los valores obtenidos de las variables en las ecuaciones comprobando que se verifican las igualdades.

Paso 7: Escribid la solución del sistema si la comprobación se ha verificado.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos

Paso 2: Despejad **x** de la segunda ecuación.

$$x = 5 + 2y$$

Paso 3: Sustituid la **x** de la primera ecuación por la expresión calculada anteriormente.

$$3(5 + 2y) - y = 5$$

Paso 4: Resolved la ecuación que ha quedado.

- Paréntesis:

$$15 + 6y - y = 5$$

- Pasamos todos términos con **y** a un lado de la = y los que no tengan **y** al otro:

$$6y - y = 5 - 15$$

$$5y = -10$$

- Despejamos la **y**:

$$y = \frac{-10}{5} = -2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación que despejamos al principio.

$$x = 5 + 2y = 5 + 2(-2)$$

Universidad Pontificia de Salamanca

$$x = 5 - 4 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - (-2) = 5 \\ 1 - 2 \cdot (-2) = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 + 2 = 5 \\ 1 + 4 = 5 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $(x,\ y) = (1, -2)$

III. Resolución de sistemas: Método de Igualación:

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Paso 2: Despejad una misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema, la que resulte más fácil.

Paso 3: Igualad las expresiones obtenidas.

Paso 4: Resolved la ecuación resultante (ecuación de 1^{er} grado con una incógnita) obteniendo el valor de una de las incógnitas.

Paso 5: Sustituid el valor de la incógnita obtenido en una de las ecuaciones despejadas al principio, la que resulte más fácil para hallar el valor de la otra incógnita.

Paso 6: Haced la comprobación.

Paso 7: Escribid la solución del sistema si la comprobación se ha verificado.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Despejad la **x** en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} 4x = 2 + y \\ x = 7 - 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{2+y}{4} \\ x = 7 - 3y \end{cases}$$

Paso 3: Igualad las dos expresiones obtenidas.

$$\frac{2+y}{4} = 7 - 3y$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 4: Resolved la ecuación resultante.

- Multiplicamos ambos lados de la igualdad por el m.c.m. :
$$2 + y = 28 - 12y$$
- Pasamos todos los términos con **y** a un lado de = y los que no tengan **y** al otro:

$$y + 12y = 28 - 2 \qquad 13y = 26$$

- Despejamos la **y:**
$$y = \frac{26}{13} = 2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** obtenido en una de las ecuaciones despejadas del principio.

$$x = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 6 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 4 \cdot 1 - 2 = 2 \\ 1 + 3 \cdot 2 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 - 2 = 2 \\ 1 + 6 = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 2 \\ 7 = 7 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $(x, y) = (1, 2)$

IV. Resolución de sistemas: Método de reducción:

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Paso 2: Multiplicad cada ecuación por el número conveniente de modo que ambas ecuaciones tengan una de las incógnitas con el mismo coeficiente y con signo contrario.

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones reduciendo el sistema a una sola ecuación con una sola incógnita.

Paso 4: Resolved la ecuación obteniendo el valor de la incógnita.

Paso 5: Sustituid el valor de la incógnita calculado en cualquiera de las ecuaciones del sistema, calculando el valor de la segunda incógnita.

Paso 6: Haced la comprobación.

Paso 7: Escribid la solución del sistema si la comprobación se ha verificado.

Ejemplo:

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Multiplicad la segunda ecuación por -3, para que la **x** de la segunda ecuación tenga el mismo coeficiente que la primera pero cambiado de signo.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ -3\,(x + 2y) = 8\,(-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{c} 3x - 4y = -6 \\ -3x - 6y = -24 \\ \hline -10y = -30 \end{array}$$

Paso 4: Resolved la ecuación de 1er grado.

$$y = \frac{-30}{-10} = 3$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación segunda del sistema para obtener el valor de **x.**

$$x + 2 \cdot 3 = 8 \qquad x + 6 = 8 \qquad x = 8 - 6 = 2$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 + 2 \cdot 3 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 - 12 = -6 \\ 2 + 6 = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} -6 = -6 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x, y) = (2,\ 3)$

Ejercicios:

1.- Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\begin{cases} x - 5y = -8 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

2.- Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

3.- Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

4.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$$

5.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} y + 2x = 2 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

6.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} y + 3x = 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**……………………………. **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:…………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: corregid los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, de no saber llegar al final. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación.

$$\begin{cases} x - 5y = -8 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Despejad la **x** en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} x = -8 + 5y \\ x = -3y \end{cases}$$

Paso 3: Igualad las dos expresiones obtenidas.

$$-8 + 5y = -3y$$

Paso 4: Resolved la ecuación resultante.

- Pasamos todos los términos con **y** a un lado de = y los que no tengan **y** al otro:

$$5y + 3y = 8 \qquad\qquad 8y = 8$$

- Despejamos la **y:**

$$y = \frac{8}{8} = 1$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** obtenido en una de las ecuaciones del principio.

$$x = -3 \cdot 1 = -3$$

Paso 6: Haced la comprobación.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{cases} -3-5\cdot 1=-8 \\ -3+3\cdot 1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3-5=-8 \\ -3+3=0 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $(x,y)=(-3,1)$

2.- Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución.

$$\begin{cases} 4x-y=2 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Despejad **x** de la segunda ecuación.

$$x=7-3y$$

Paso 3: Sustituid la **x** de la primera ecuación por la expresión calculada.

$$4(7-3y)-y=2$$

Paso 4: Resolved la ecuación que nos ha quedado.

- Paréntesis:

$$28-12y-y=2$$

- Pasamos todos los términos con **y** a un lado de = y los que no tengan **y** al otro:

$$-12y-y=2-28$$

$$-13y=-26$$

- Despejamos la **y**:

$$y=\frac{-26}{-13}=2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación que despejamos al principio.

$$x=7-3\cdot 2=7-6=1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 4\cdot 1-2=2 \\ 1+3\cdot 2=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4-2=2 \\ 1+6=7 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución del sistema. $(x,\ y)=(1,2)$

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- Resuelve el siguiente sistema por el método de reducción.

$$\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Multiplicad la segunda ecuación por 2, para que la **y** de la segunda ecuación tenga el mismo coeficiente que la primera pero cambiado de signo.

$$\begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 2 \cdot (5x + 3y) = 2 \cdot (-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x - 6y = -34 \\ 10x + 6y = -2 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{c} 8x - 6y = -34 \\ 10x + 6y = -2 \\ \hline 18x = -36 \end{array}$$

Paso 4: Resolved la ecuación de 1er grado.

$$x = \frac{-36}{18} = -2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **x** en la ecuación primera ecuación del sistema para obtener el valor de **y.**

$$8 \cdot (-2) - 6y = -34 \qquad -16 - 6y = -34 \qquad -6y = -34 + 16 = -18$$

$$y = \frac{-18}{-6} = 3$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 8 \cdot (-2) - 6 \cdot 3 = -34 \\ 5 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -16 - 18 = -34 \\ -10 + 9 = -1 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x, y) = (-2,\ 3)$

4.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} 3(-2x + 1) - 4y = 1 \\ 4x - 2(3y + 1) = 8 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

$$\begin{cases} -6x + 3 - 4y = 1 \\ 4x - 6y - 2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x - 4y = 1 - 3 \\ 4x - 6y = 8 + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x - 4y = -2 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$$

Paso2: Elegimos el método de reducción. Multiplicad la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3 para tener los mismos coeficientes de la **x** con distinto signo.

$$\begin{cases} 2 \cdot (-6x - 4y) = 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (4x - 6y) = 3 \cdot 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones reduciendo el sistema a una sola ecuación con una sola incógnita.

$$\begin{array}{c} -12x - 8y = -4 \\ 12x - 18y = 30 \\ \hline -26y = 26 \end{array}$$

Paso 4: Resolved la ecuación obteniendo el valor de **y**.

$$y = \frac{26}{-26} = -1$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la primera ecuación del sistema para obtener el valor de **x**.

$$-6x - 4(-1) = -2 \quad -6x + 4 = -2 \quad -6x = -2 - 4 \quad -6x = -6$$

$$x = \frac{-6}{-6} = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} 3(-2 \cdot 1 + 1) - 4(-1) = 1 \\ 4 \cdot 1 - 2(3(-1) + 1) = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(-2 + 1) + 4 = 1 \\ 4 - 2(-3 + 1) = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(-1) + 4 = 1 \\ 4 - 2(-2) = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 + 4 = 1 \\ 4 + 4 = 8 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. (x, y)=(1, -1)

5.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} y + 2x = 2 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

Paso 2: Elegimos el método de reducción. Multiplicad la primera ecuación por -2 para que las dos ecuaciones tengan los mismos coeficientes en la **y** pero con distinto signo.

$$\begin{cases} -2 \cdot (2x + y) = -2 \cdot 2 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{c} -4x - 2y = -4 \\ 4x + 2y = 8 \\ \hline 0 = 4 \end{array}$$

¡¡ojo!! Hemos llegado a una ecuación imposible, incompatible. El sistema no tiene solución.

6.- Resuelve el siguiente sistema por el método que consideres más conveniente.

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

Como ya está preparado seguimos.

Paso 2: Elegimos el método de reducción. Multiplicad la primera ecuación por -2 para que las dos ecuaciones tengan los mismos coeficientes en la **y** pero con distinto signo.

$$\begin{cases} -2 \cdot (x + 3y) = -2 \cdot 5 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x - 6y = -10 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{c} -2x - 6y = -10 \\ 2x + 6y = 10 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

¡¡ojo!! Si hubiéramos elegido otro método nos habría sucedido algo parecido. Esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES						
Día:						
Nombre:						
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
En los cálculos						
En los menos delante de los paréntesis						
En los menos delante de las fracciones						
Se ha equivocado en el método						
Por depiste						
No ha sabido terminar el ejercicio						
No ha hecho el ejercicio						
Otros						

Universidad Pontificia de Salamanca

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**…………………………….. **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En la clase daremos el último método de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas, veremos un ejemplo de sistema con ecuaciones con fracciones, corregiremos los ejercicios del día anterior y se mandará más ejercicios

IV. Método Gráfico (Interpretación geométrica):

Paso 1: Despejad la incógnita **y** en las dos ecuaciones.

Paso 2: Calculad dos puntos de la primera ecuación dando valores cualesquiera a x.

Paso 3: Calculad dos puntos de la segunda ecuación dando valores cualesquiera a x.

Paso 4: Dibujad las dos rectas con la ayuda de los dos puntos calculado. El punto en el que se cortan que es la solución del sistema.

Paso 5: Escribid la solución.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$$

Paso 1: Despejad y en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 3x \end{cases}$$

Paso 2: Calculad dos puntos de la primera ecuación.

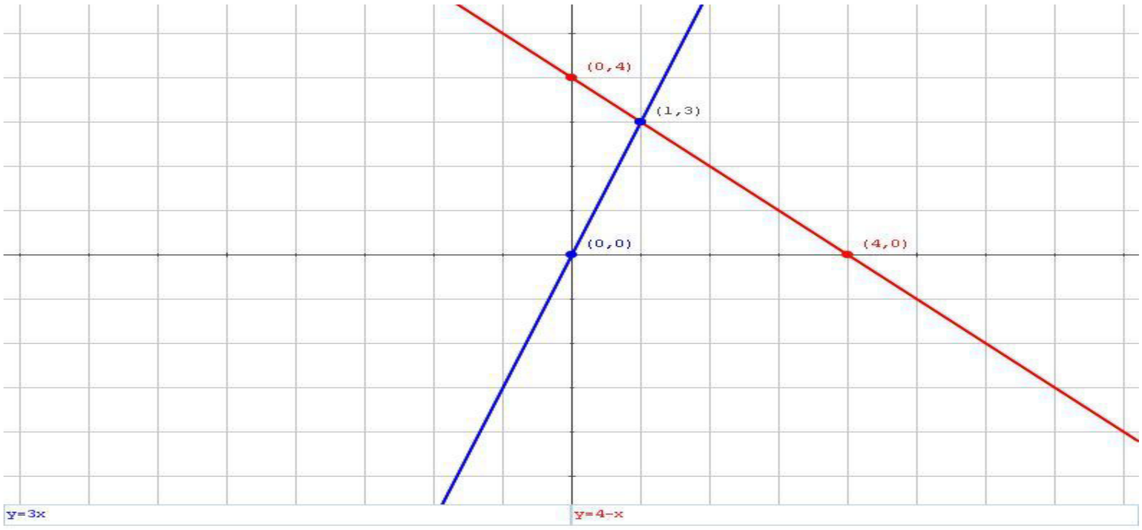
X	y=4-x	(x,y)
0	4-0=4	(0,4)
4	4-4=0	(4,0)

Paso 3: Calculad dos puntos de la segunda ecuación.

x	y=3x	(x,y)
0	3·0=0	(0,0)
1	3·1=3	(1,3)

Paso 4: Dibujad las dos gráficas.

Universidad Pontificia de Salamanca



Paso 5: Escribid la solución (x,y)=(1,3)

V. Sistemas de dos ecuaciones con fracciones.

Un sistema de ecuaciones con fracciones antes de aplicar cualquier método lo primero es pre-pararlo para que las ecuaciones no tengan fracciones.

Ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 6 \\ \frac{-x}{10} + \frac{5y}{6} = -6 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

$$\begin{cases} \frac{3x}{15} - \frac{5 \cdot 2y}{15} = \frac{15 \cdot 6}{15} \\ \frac{3 \cdot (-x)}{30} + \frac{5 \cdot 5y}{30} = -\frac{30 \cdot 6}{30} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = 180 \end{cases}$$

Paso 2: Si no nos han pedido resolver el sistema por un método concreto elegid el que resulte más conveniente. En este caso elegimos el método de reducción. Ya no hace falta multiplicad por nada ninguna ecuación porque el sistema ya esta listo.

Paso 3: Sumad las ecuaciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{array}{r} 3x - 10y = 90 \\ -3x + 25y = -180 \\ \hline 15y = -90 \end{array}$$

Paso 4: Resolved la ecuación de 1er grado.

$$y = \frac{-90}{15} = -6$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la ecuación 2ª del sistema para obtener el valor de **x.**

$$\frac{-x}{10} + \frac{5 \cdot (-6)}{6} = -6$$

$$\frac{-x}{10} - 5 = -6$$

$$\frac{-x}{10} = -6 + 5$$

$$\frac{-x}{10} = -1$$

$$-x = -1 \cdot 10$$

$$-x = -10$$

$$x = 10$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} \frac{10}{5} - \frac{2 \cdot (-6)}{3} = 6 \\ \frac{-10}{10} + \frac{5 \cdot (-6)}{6} = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 + 4 = 6 \\ -1 - 5 = -6 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x, y) = (10, -6)$

Ejercicios:

1.- Resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = -1 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{6} = -1 \end{cases}$$

2.- Resuelve por el método de sustitución e sistema:

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{cases} \frac{2-x}{3}+\frac{3+y}{6}=2 \\ \frac{8-3x}{6}-\frac{2+y}{9}=2 \end{cases}$$

3.- Resuelve por el método de igualación el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}+\frac{y+1}{4}=1 \\ \frac{2x-1}{2}-\frac{2y+1}{6}=1 \end{cases}$$

4.- Resuelve gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

CORRECCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**…………………………… **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: corregid los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de procedimiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, de despiste, de no saber llegar al final. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Resuelve el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = -1 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{6} = -1 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

$$\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{3} = \frac{-3}{3} \\ \frac{2(x+1)}{6} + \frac{y-1}{6} = \frac{-6}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x + 2 + y - 1 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$$

Paso 2: Resolved por el método de reducción. Multiplicamos la ecuación de arriba por **-1** para que tengan ambas ecuaciones el mismo coeficiente en **x** con signo contrario.

$$\begin{cases} -2x - 3y = 3 \\ 2x + y = -7 \end{cases}$$

Paso 3: Sumad las ecuaciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{array}{r} -2x - 3y = 3 \\ 2x + y = -7 \\ \hline -2y = -4 \end{array}$$

Paso4: Resolved la ecuación de 1er grado.

$$y = \frac{-4}{-2} = 2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **y** en la primera ecuación del sistema para obtener el valor de **x.**

$$\frac{2}{3}x + 2 = -1$$

$$\frac{2}{3}x = -1 - 2$$

$$x = -\frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{-9}{2}$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\frac{(-9)}{2} + 2 = -1 \\ \frac{\frac{-9}{2}+1}{3} + \frac{2-1}{6} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 + 2 = -1 \\ \frac{\frac{-9+2}{2}}{3} + \frac{1}{6} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 = -1 \\ \frac{-7}{6} + \frac{1}{6} = -1 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. $(x, y) = (\frac{-9}{2},\ 2)$

2.- Resuelve por el método de sustitución e sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2-x}{3} + \dfrac{3+y}{6} = 2 \\ \dfrac{8-3x}{6} - \dfrac{2+y}{9} = 2 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

- Fracciones equivalentes $\begin{cases} \frac{2(2-x)}{6} + \frac{3+y}{6} = \frac{2 \cdot 6}{6} \\ \frac{3(8-3x)}{18} - \frac{2(2+y)}{18} = \frac{18 \cdot 2}{18} \end{cases}$
- Multiplicamos por el m.c.m. $\begin{cases} 4 - 2x + 3 + y = 12 \\ 24 - 9x - 4 - 2y = 36 \end{cases}$
- Agrupamos, operamos y ordenamos $\begin{cases} -2x + y = 5 \\ -9x - 2y = 16 \end{cases}$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Resolved por el método de sustitución. Despejamos la **y** en la primera ecuación.

$$y = 5 + 2x$$

Paso 3: Sustituid la **y** de la segunda ecuación por la expresión que acabamos de hallar.

$$-9x - 2(5 + 2x) = 16$$

Paso 4: Resolved la ecuación que nos ha quedado.

$$-9x - 10 - 4x = 16$$
$$-9x - 4x = 16 + 10$$
$$-13x = 26$$
$$x = \frac{26}{-13} = -2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **x** en la ecuación que despejamos al principio.

$$y = 5 + 2(-2) = 5 - 4 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} \frac{2-(-2)}{3} + \frac{3+1}{6} = 2 \\ \frac{8-3(-2)}{6} - \frac{2+1}{9} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2+2}{3} + \frac{4}{6} = 2 \\ \frac{8+6}{6} - \frac{2+1}{9} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{3} + \frac{4}{6} = 2 \\ \frac{14}{6} - \frac{3}{9} = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \\ \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. La solución del sistema es (x, y)=(-2,1)

3.- Resuelve por el método de igualación el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{4} = 1 \\ \frac{2x-1}{2} - \frac{2y+1}{6} = 1 \end{cases}$$

Paso 1: Preparad el sistema haciendo los paréntesis, quitando denominadores y ordenándolo.

- Fracciones equivalentes $\begin{cases} \frac{2(x-1)}{4} + \frac{y+1}{4} = \frac{4}{4} \\ \frac{3(2x-1)}{6} - \frac{2y+1}{6} = \frac{6}{6} \end{cases}$
- Multiplicamos por el m.c.m. $\begin{cases} 2x - 2 + y + 1 = 4 \\ 6x - 3 - 2y - 1 = 6 \end{cases}$
- Agrupamos, operamos y ordenamos $\begin{cases} 2x + y = 4 + 2 - 1 \\ 6x - 2y = 6 + 3 + 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x - 2y = 10 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Resolved por el método de igualación. Despejamos la **y** en las dos ecuaciones.

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ y = \dfrac{10 - 6x}{-2} = \dfrac{6x - 10}{2} \end{cases}$$

Paso 3: Igualad las expresiones obtenidas.

$$5 - 2x = \frac{6x - 10}{2}$$

Paso 4: Resolved la ecuación resultante (ecuación de 1^{er} grado con una incógnita) obteniendo el valor de **x**.

$$\frac{2(5 - 2x)}{2} = \frac{6x - 10}{2}$$

$$10 - 4x = 6x - 10$$

$$-4x - 6x = -10 - 10$$

$$-10x = -20$$

$$x = \frac{-20}{-10} = 2$$

Paso 5: Sustituid el valor de **x** en una de las ecuaciones despejadas para hallar **y**.

$$y = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

Paso 6: Haced la comprobación.

$$\begin{cases} \frac{2-1}{2} + \frac{1+1}{4} = 1 \\ \frac{2\cdot 2-1}{2} - \frac{2\cdot 1+1}{6} = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{2-1}{2} + \frac{1+1}{4} = 1 \\ \frac{4-1}{2} - \frac{2+1}{6} = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{6} = 1 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

Paso 7: Escribid la solución. La solución del sistema es (x, y)=(2,1)

4.- Resuelve gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Paso 1: Despejad y en las dos ecuaciones.

Universidad Pontificia de Salamanca

$$\begin{cases} y = \dfrac{3-x}{2} \\ y = -x \end{cases}$$

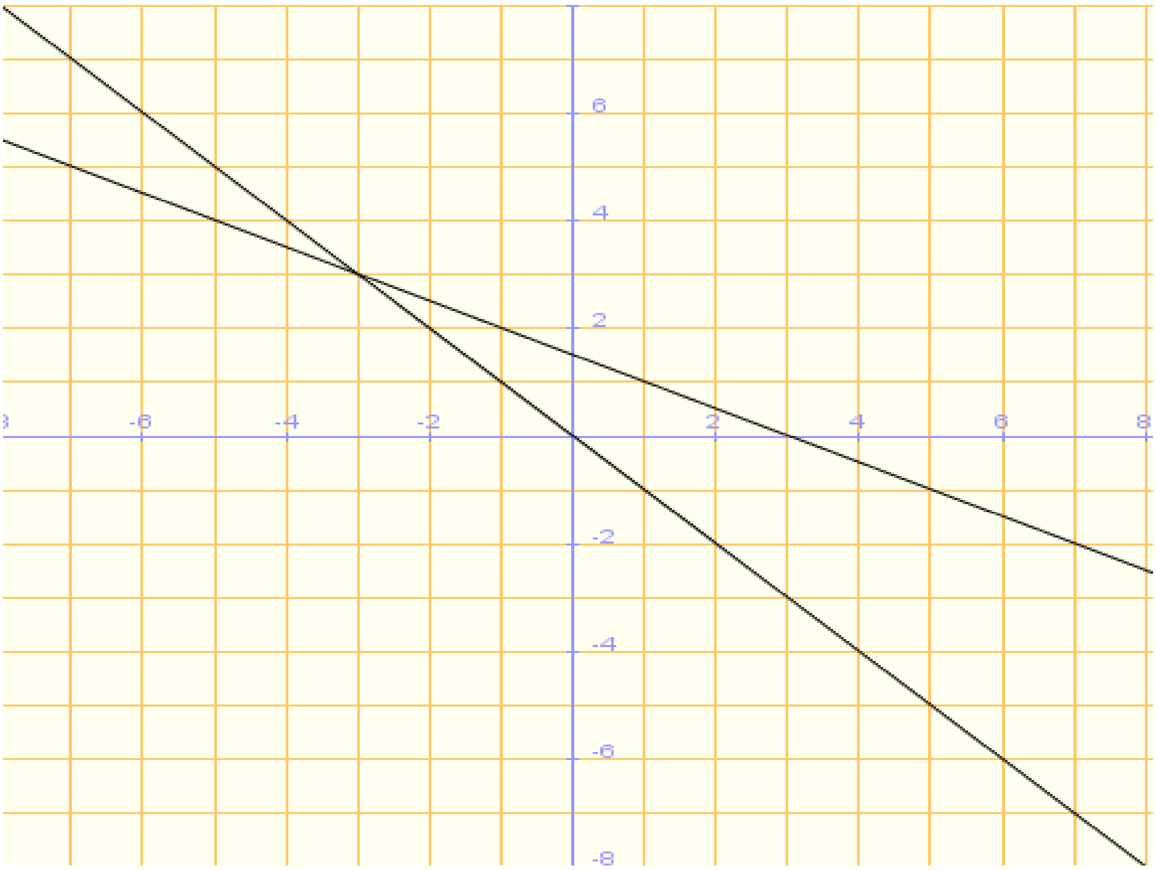
Paso 2: Calculad dos puntos de la primera ecuación.

x	$y = \frac{3-x}{2}$	(x,y)
3	0	(3,0)
1	1	(1,1)

Paso 3: Calculad dos puntos de la segunda ecuación.

x	y=-x	(x,y)
0	0	(0,0)
1	-1	(1,-1)

Paso4: Dibujad las dos gráficas:



Paso 5: Escribid la solución (x,y)=(-3,3)

Universidad Pontificia de Salamanca

TABLA DE ERRORES				
Día:				
Nombre:				
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**
En los cálculos				
En los menos delante de los paréntesis				
En los menos delante de las fracciones				
En el procedimiento				
Por despiste				
No ha sabido terminar el ejercicio				
En la comprobación				
No ha hecho el ejercicio				
Otros				

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Instrucciones: Vamos a ver un procedimiento general de cómo resolver un problema de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. A continuación veremos algunos tipos que resolveremos y luego propondremos algunos problemas para resolver.

•♦ Procedimiento.

Paso 1: Entended bien el enunciado del problema. Para ello leed el problema las veces que haga falta, recordando problemas parecidos, cambiando palabras del enunciado por otras que resulten más familiares, pensando que el problema es algo propio que nos sucede a nosotros. También puede ayuda hacer dibujos, esquemas, tablas.

Paso 2: Identificad los datos y las relaciones entres ellos. Elegid las incógnitas asignándolas una letra. Si se ha hecho un esquema, tabla o dibujo conviene escribir en él los datos y las incógnitas. Transformad las relaciones entre los datos al lenguaje algebraico.

Paso 3: Plantead el sistema teniendo en cuenta las relaciones o condiciones que deben verificar las incógnitas.

Paso 4: Resolved el sistema por el método más adecuado.

Paso 5: Comprobad si el resultado tiene sentido y escribid la solución al problema. No olvides las unidades.

•♦ Ejemplos:

Nota: problemas resueltos con una ecuación de 1er grado también se pueden resolver con un sistema.

1.-Problema de edades

Una madre tiene el triple de edad que su hija. Si la madre tuviese 30 años menos y el hijo 8 años más, los dos tendrían la misma edad. ¿Cuáles son las edades de la madre y del hijo?

Paso 1: Entended y representad el problema.

Si la hija tiene 12 años la madre tendría 3·12=36

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: edad de la madre

Universidad Pontificia de Salamanca

y: edad del hijo

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x = 3y \\ x - 30 = y + 8 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hago por igualación.

- Despejamos la **x** en las dos ecuaciones: $\begin{cases} x = 3y \\ x = y + 38 \end{cases}$
- Igualamos las dos expresiones obtenidas: $3y = y + 38$
- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **y**: $3y - y = 38$

$2y = 38$

$y = \frac{38}{2} = 19$

- Con el valor de **y** calculo **x** en la primera ecuación: $x = 3 \cdot 19 = 57$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 57 = 3 \cdot 19 \\ 57 - 30 = 19 + 8 \end{cases}$$

La solución: la madre tiene 57 años y la hija tiene 19 años.

2.- Problema de alumnos

La clase de 3º de ESO realizó una excursión a Mérida con motivo de visitar el Museo de Arte Romano. ¿Cuántos chicos y chicas fueron de excursión sabiendo que en total eran 44 alumnos y que el número de chicas es el triple que el de chicos?

Paso 1: Entended y representad el problema.

chicos		chicas	chicas	chicas

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : nº de chicos

y : nº de chicas

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 44 \\ 3x = y \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos la variable **y** en la segunda ecuación: $y = 3x$
- Sustituimos la expresión de la **y** en la primera ecuación: $x + 3x = 44$
- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **x**: $4x = 44$

$$x = \frac{44}{4} = 11$$

- Sustituimos el valor de **x** en la primera ecuación y conseguimos **y**: $y = 3 \cdot 11 = 33$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 11 + 33 = 44 \\ 3 \cdot 11 = 33 \end{cases}$$

La solución: 11 chicos y 33 chicas

3.-Problema de gallinas y conejos

En una granja de conejos y pollos, el número de cabezas es de 100. ¿Cuántos pollos y conejos habrá en la granja sabiendo que el número de patas es de 320?

Paso 1: Entended y representad el problema.

Cabezas

Nº conejos	Nºgallinas

Patas: los conejos tienen 4 patas y las gallinas 2

Nº conejos	Nº conejos	Nº conejos	Nº conejos

Nºgallinas	Nºgallinas

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : nº de conejos

y : nº de pollos

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 2y = 320 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos una variable: $x = 100 - y$
- Sustituimos en la otra ecuación la expresión: $4(100 - y) + 2y = 320$
- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **y**: $400 - 4y + 2y = 320$

$$-4y + 2y = 320 - 400$$

$$-2y = -80$$

$$y = \frac{-80}{-2} = 40$$

- Sustituimos el valor de **y** en la primera ecuación y conseguimos **x**:

$$x = 100 - 40 = 60$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 60 + 40 = 100 \\ 4 \cdot 60 + 2 \cdot 40 = 320 \end{cases} \quad \begin{cases} 100 = 100 \\ 240 + 80 = 320 \end{cases}$$

La solución: 60 conejos y 40 pollos

4.-Problema de puntuación

Sabiendo que la puntuación obtenida por Paloma en un examen de Álgebra de 20 preguntas ha sido 9,5 y que por cada pregunta acertada consigue un punto y que por cada pregunta no contestada o errónea se le quita medio punto, calcula el número de preguntas acertadas y el de preguntas no contestadas o erróneas

Paso 1: Entended y representad el problema.

Nº aciertos +	Nº errores o nc -

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : nº de preguntas acertadas

y : nº de preguntas erróneas o no contestadas

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x \cdot 1 - y \cdot 0{,}5 = 9{,}5 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

Universidad Pontificia de Salamanca

- Las dos ecuaciones tienen el mismo coeficiente en la incógnita **x** con distinto signo.
- Sumamos las dos ecuaciones: $$\begin{array}{r} x+y=20 \\ -x+0{,}5y=-9{,}5 \\ \hline 1{,}5y=10{,}5 \end{array}$$
- Resolvemos la ecuación de 1^er^ grado. Despejamos **y**: $y=\frac{10{,}5}{1{,}5}=7$
- Sustituimos el valor de **y** en la primera ecuación y conseguimos **x**: $x+7=20$

$$x=20-7=13$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 13+7=20 \\ 13\cdot 1-7\cdot 0{,}5=9{,}5 \end{cases} \quad \begin{cases} 20=20 \\ 13-3{,}5=9{,}5 \end{cases}$$

La solución: 13 aciertos y 7 erróneas o no contestadas

5.-Problema cifras

Halla un número de dos cifras de manera que la suma de las cifras sea 15 y que dicho número sea 9 unidades mayor que el número que se obtiene al invertir sus cifras

Paso 1: Entended y representad el problema.

Como la x son las decenas el número sería 10x+y

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : cifra de las decenas

y : cifra de las unidades

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 10x+y=10y+x+9 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

- Preparamos el sistema.

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 10x-x+y-10y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 9x-9y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

- Las dos ecuaciones tienen el mismo coeficiente en la incógnita **x** pero con distinto signo.
- Sumamos las dos ecuaciones: $$\begin{array}{c} x+y=15 \\ x-y=1 \\ \hline 2x=16 \end{array}$$
- Resolvemos la ecuación de 1^er grado. Despejamos **x**: $x=\frac{16}{2}=8$
- Sustituimos el valor de **x** en la primera ecuación y conseguimos **y**: $8+y=15$

$$y=15-8=7$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 8+7=15 \\ 10\cdot 8+7=10\cdot 7+8+9 \end{cases} \quad \begin{cases} 15=15 \\ 80+7=70+8+9 \end{cases}$$

La solución: el número es 87

●♦**Ejercicios:**

1.- Un librero vende 84 libros a dos precios distintos, unos a 45€ y otros a 36€, obteniendo de la venta 3105€. ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

2.- Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, $\frac{8}{3}$.

3.- Si Javier regala a Beatriz 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él. Si Beatriz da 6 de sus CDs a Javier, entonces será él que tenga el doble que ella. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?

4.-Pedro y María van todos los miércoles de compras al mercadillo. Los dos han comprado en el mismo puesto. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de la camiseta y del pantalón?

5.- Las edades de un padre y su hijo suman 46 años, halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que sus edades difieren en 32 años.

Universidad Pontificia de Salamanca

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES

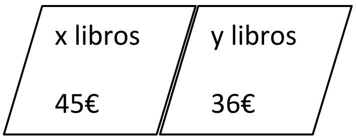
HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:**…………………………….. **GRUPO:**…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:…………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: corregiremos los ejercicios de acuerdo a la hoja de soluciones, comprobando si se ha seguido el procedimiento. Ser consciente si se han cometido errores de planteamiento, de operar con paréntesis, con fracciones, de cálculo, en la solución, de despiste, etc. Apuntar en la hoja de revisión.

1.- Un librero vende 84 libros a dos precios distintos, unos a 45€ y otros a 36€, obteniendo de la venta 3105€ ¿Cuántos libros vendió de cada clase?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : libros de 45€

y : libros de 36€

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ 45x + 36y = 3105 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos la variable **x**: $x = 84 - y$
- Sustituimos en la otra ecuación la expresión: $45(84 - y) + 36y = 3105$
- Resolvemos la ecuación. Despejamos **y**: $3780 - 45y + 36y = 3105$
- Pasamos los términos con **y** a un lado de la igualdad

$$-45y + 36y = 3105 - 3780$$

$$-9y = -675$$

$$y = \frac{-675}{-9} = 75$$

- Despejamos **x**: $x = 84 - 75 = 9$

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 9+75=84 \\ 45\cdot 9+36\cdot 75=3105 \end{cases} \quad \begin{cases} 84=84 \\ 405+2700=3105 \end{cases} \quad \begin{cases} 84=84 \\ 3105=3105 \end{cases}$$

La solución: 9 libros de 45€ y 75 libros de 36€.

2.- Halla dos números naturales tales que su suma sea 154, y su cociente, $\frac{8}{3}$.

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x : nº 1

y : nº 2

Paso 3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x+y=154 \\ \frac{x}{y}=\frac{8}{3} \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de sustitución.

- Despejamos una variable $x=154-y$
- Sustituimos en la otra ecuación la expresión $\frac{154-y}{y}=\frac{8}{3}$
- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **y**: $3(154-y)=8y$

$$462-3y=8y$$
$$462=8y+3y$$
$$11y=462$$
$$y=\frac{462}{11}=42$$

- Despejamos **x**: $x=154-42=112$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

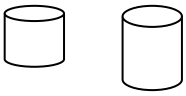
$$\begin{cases} 9+75=84 \\ 45\cdot 9+36\cdot 75=3105 \end{cases} \quad \begin{cases} 84=84 \\ 405+2700=3105 \end{cases} \quad \begin{cases} 84=84 \\ 3105=3105 \end{cases}$$

La solución: nº1: 112 nº2: 42

Universidad Pontificia de Salamanca

3.- Si Javier regala a Beatriz 4 de sus discos, ella tendrá el doble que él. Si Beatriz da 6 de sus CDs a Javier, entonces será él que tenga el doble que ella. ¿Cuántos CDs tiene cada uno?

Paso 1: Entended y representad el problema.



Nº CDs

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: nº de CDs de Javier

y: nº de CDs de Beatriz

Paso 3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} 2(x-4) = y+4 \\ x+6 = 2(y-6) \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

- Preparamos el sistema:

$$\begin{cases} 2x-8 = y+4 \\ x+6 = 2y-12 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x-y = 8+4 \\ x-2y = -12-6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x-y = 12 \\ x-2y = -18 \end{cases}$$

- Multiplicamos por -2 la primera ecuación:

$$\begin{cases} -4x+2y = -24 \\ x-2y = -18 \end{cases}$$

- Sumamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{c} -4x+2y=-24 \\ x-2y=-18 \\ \hline -3x=-42 \end{array}$$

- Resolvemos la ecuación. Despejamos **x**:

$$x = \frac{-42}{-3} = 14$$

- Despejamos **y**:

$$2 \cdot 14 - 12 = y$$
$$28 - 12 = y$$
$$16 = y$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 2(14-4) = 16+4 \\ 14+6 = 2(16-6) \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot 10 = 20 \\ 14+6 = 2 \cdot 10 \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

La solución: Javier tiene 14 CDs y Beatriz tiene 16 CDs

4.-Pedro y María van todos los miércoles de compras al mercadillo. Los dos han comprado en el mismo puesto. María ha adquirido 2 camisetas y un pantalón por un total de 22 euros, y Pedro ha pagado 39 euros por 3 camisetas y 2 pantalones. ¿Cuál es el precio de la camiseta y del pantalón?

Paso 1: Entended y representad el problema.

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: precio del pantalón en €

y: precio de la camiseta en €

Paso 3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 22 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por el método de reducción.

- Multiplicamos por -2 la 1ª ecuación: $\begin{cases} -4x - 2y = -44 \\ 3x + 2y = 39 \end{cases}$
- Sumamos las ecuaciones: $\begin{array}{c} -4x-2y=-44 \\ 3x+2y=39 \\ \hline -x=-5 \end{array}$
- Resolvemos la ecuación. Despejamos **x:** $x = 5$
- Despejamos **y** : $2 \cdot 5 + y = 22$, $y = 22 - 10$, $y = 12$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 12 = 22 \\ 3 \cdot 5 + 2 \cdot 12 = 39 \end{cases} \quad \begin{cases} 10 + 12 = 22 \\ 15 + 24 = 39 \end{cases}$$

La solución: El pantalón cuesta 5 € y la camiseta 12€

5.- Las edades de un padre y su hijo suman 46 años, halla la edad de cada uno de ellos sabiendo que sus edades difieren en 32 años.

Paso 1: Entended y representad el problema.

Universidad Pontificia de Salamanca

Paso 2: Elegid las incógnitas y traducid las relaciones a expresiones algebraicas.

x: la edad del padre

y: la edad del hijo

Paso3: Plantead el sistema.

$$\begin{cases} x + y = 46 \\ x - y = 32 \end{cases}$$

Paso 4: Resolved el sistema por el método más conveniente. Lo hacemos por reducción.

- Las dos ecuaciones tienen el mismo coeficiente en la incógnita **y** pero con distinto signo:
- Sumamos las dos ecuaciones: $\begin{array}{c} x+y=46 \\ x-y=32 \\ \hline 2x=78 \end{array}$
- Resolvemos la ecuación de 1er grado. Despejamos **x**: $x = \frac{78}{2} = 39$
- Calculamos el valor de **y**: $39 + y = 46$

$$y = 46 - 39 = 7$$

Paso 5: Verificad y escribid la solución.

$$\begin{cases} 39 + 7 = 46 \\ 39 - 7 = 32 \end{cases}$$

La solución: el padre tiene 39 años y el hijo 7 años

TABLA DE ERRORES					
Día:					
Nombre:					
Errores	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
En los cálculos					
En los menos delante de los paréntesis					
En los menos delante de las fracciones					
Se ha equivocado en el planteamiento					
Por despiste					
No ha sabido terminar el ejercicio					
No ha hecho el ejercicio					
Otros					

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

Contenidos:

1.- Ficha de explicación del material para profesores.

2.- Ficha de videos para la explicación de ecuaciones de 2º grado con una incógnita.

3.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

4.- Ficha con videos para la explicación de resolución de problemas de 2º grado con una incógnita.

5.- Ficha de prácticas de problemas en el aula de informática.

6.- ANEXO 1: WIRIS

7.- ANEXO 2: DESCARTES

8.-ANEXO 3: CON PAPAS

Universidad Pontificia de Salamanca

INICIO

Objetivo:

- ✓ Aprender a resolver las ecuaciones de 2^o grado y saber resolver los problemas utilizando las ecuaciones de 2^o grado.
- ✓ Utilizar recursos tecnológicos para estudiar, resolver a ejercicios y aprender a resolver problemas.
- ✓ Confiar en las propias capacidades para resolver ejercicios y problemas.

Desarrollo:

El profesor desarrollará la clase utilizando bien estos materiales u otros según crea más convenientes. En las fichas teoricas el profesor puede hacer la explicación y luego poner los viedeos a modo de ejemplo preguntando dudas o repitiendolos las veces que haga falta.

En las sesiones de ordenador se pueden utilizar los materiales descritos en el documento o bien utilizar otros que el profesor crea más adecuados. Si no se pueden hacer ninguna sesión en el aula de informática también se puede utilizar el proyector.

Evaluación: Se informará al alumno que se valorara la actitud ante los materiales que se utilicen. Si esta atento, si se comporta adecuadamente en la sala de ordenadores centrandose en la materia. Incluso se les puede pasar un test o tener que entregar una hoja con ecuaciones resueltas en la sesión de ordenadores.

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:……………………………..** **GRUPO:…………………..**

NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de ecuaciones de 2º grado incompletas y completas del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

I. Ecuaciones incompletas de 2ºgrado en una incógnita con b=0

- **Enunciado:**

$$\mathbf{x^2 - 16 = 0}$$

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=pniPJTdJjMg

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/pniPJTdJjMg?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 0,55'

II. Ecuaciones incompletas de 2º grado con una incógnita con c=0

- **Enunciado:**

$$\mathbf{x^2 + 4x = 0}$$

- **Link:**
  http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=w8DZ7ha-7LU

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/w8DZ7ha-7LU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 1,25'

Universidad Pontificia de Salamanca

III. Ecuaciones completas de 2ºgrado en una incógnita

Ejemplo sencillo

- **Enunciado**

$$-x^2 - 6x + 7 = 0$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?list=SP6BF0D52016B0483D&v=3xfLL5LYN8Q&feature=player_detailpage

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/3xfLL5LYN8Q?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,28’

Ejemplo con paréntesis

- **Enunciado:**

$$x(x+2) = -x^2 - 2(x-3)$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=FE1M1nndzzU

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/FE1M1nndzzU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,45’

Ejemplo con fracciones

- **Enunciado:**

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5(x-2)^2}{6} = \frac{1}{6}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SP6BF0D52016B0483D&v=baD0ZY-3ayI

- **Duración:** 8,07’

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de ecuaciones de 2º grado bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material WIRIS

- **Información:** resuelve ecuaciones fácilmente aunque no muestra el procedimiento.
- **Link:** http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/
- **Material:** ANEXO 1

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo Descartes

- **Información:** claro, completo y sencillo. Autor Miguel Ángel Cabezón Ochoa.
- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones2grado/inicio.htm
  Donde seleccionamos: ecuaciones incompletas, completas, y cuestiones teóricas.
- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- **Manual:** ANEXO 2

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico, amplio e incluye ejercicios de teoría.
- **Link:** http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm
- **Manual:** ANEXO3

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

Universidad Pontificia de Salamanca

- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos. Las comprobaciones funcionan a veces.
- **Link:**
  http://conteni2.educarex.es/mats/11811/contenido/
  http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:……………………………..** **GRUPO:…………………..**

NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de problemas de ecuaciones de 2º grado del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Problema de producto de números

- **Enunciado:** Juan tiene 30 años más que Ana. Si multiplicamos sus edades el resultado es 130. ¿Cuántos años tiene cada uno?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?v=A3KwGM0CrSY <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/A3KwGM0CrSY?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 6,58’

Problema de áreas

- **Enunciado:** La base del rectángulo mide 3 metros más que el doble de la longitud de la altura. Calcula sus dimensiones sabiendo que su área es $65m^2$
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?v=ZbCEAKm6jQo&feature=relmfu <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/ZbCEAKm6jQo?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 5,21’

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS DE ECUACIONES DE 2º GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver problemas de ecuaciones de 2º grado bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Básico y amplio, incluye ejercicios de teoría.
- **Link:** http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm
- **Manual:** ANEXO 3

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO 1: WIRIS

Es un recurso gratuito ON-LINE y sencillo para resolver y dibujar ecuaciones y sistemas.

Resolver una ecuación:

La herramienta principal para resolver ecuaciones es el botón

Cuando queremos resolver una ecuación pulsamos este botón

Luego en los cuadraditos de alrededor de la igualdad escribimos la ecuación. Los botones:

para escribir fracciones,

para escribir exponentes,

para escribir raices cuadradas,

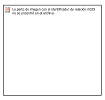
para escribir raices de cualquier tipo,

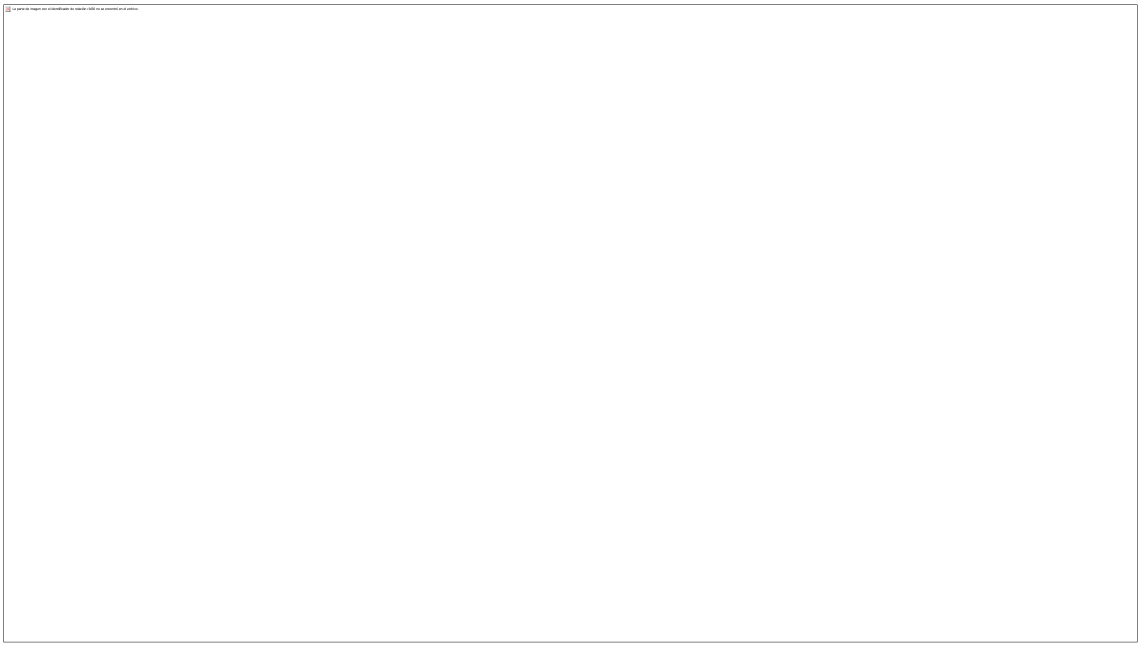
para escribir paréntesis,

para escribir corchetes,

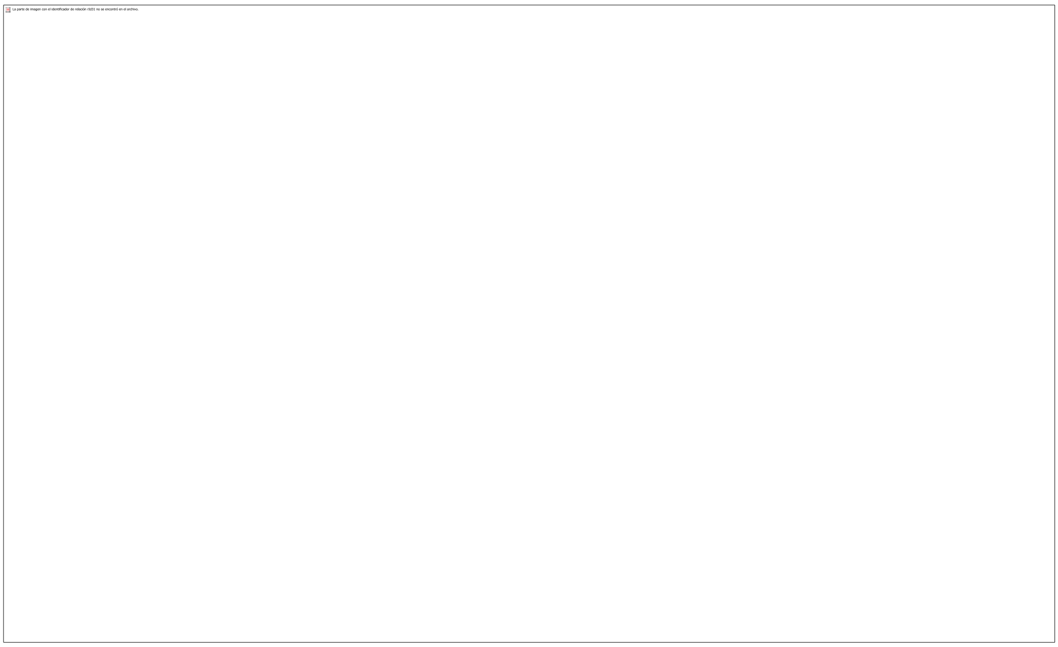
etc.

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuando hayas terminado de escribir la ecuación pulsa el botón.  Y conseguirás el resultado p.e.



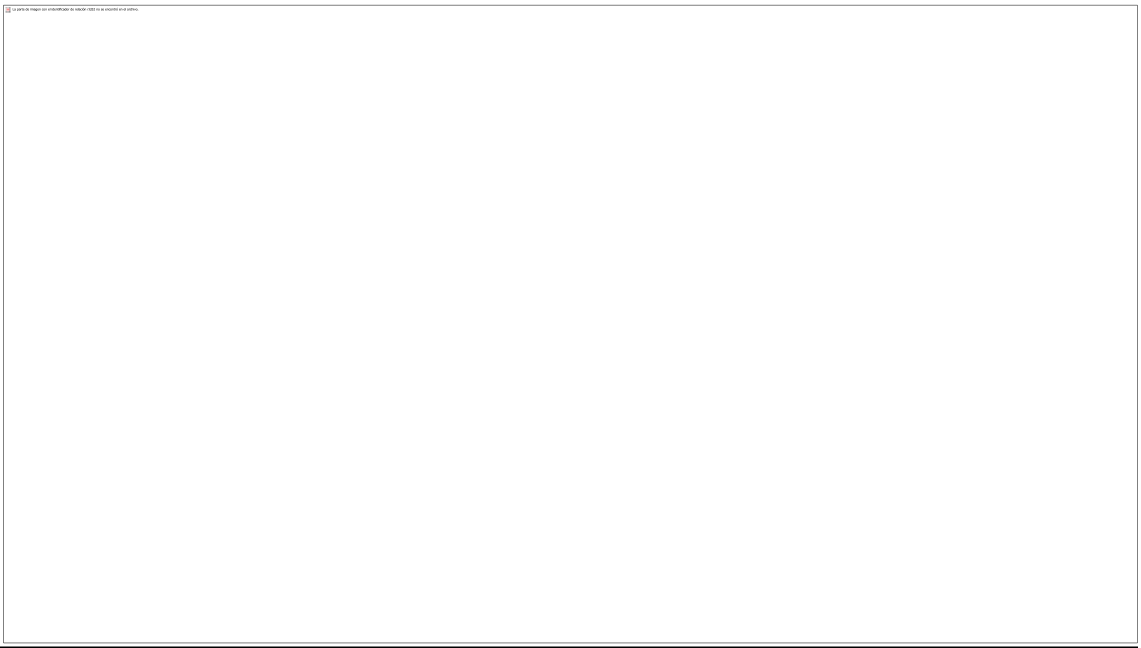
Ejemplo:



Representar una ecuación de 2º grado

Pulsando el botón de representar aparece en la pantalla para escribir una expresión algebraica. La escribimos y al pulsar el igual aparece la representación

Universidad Pontificia de Salamanca

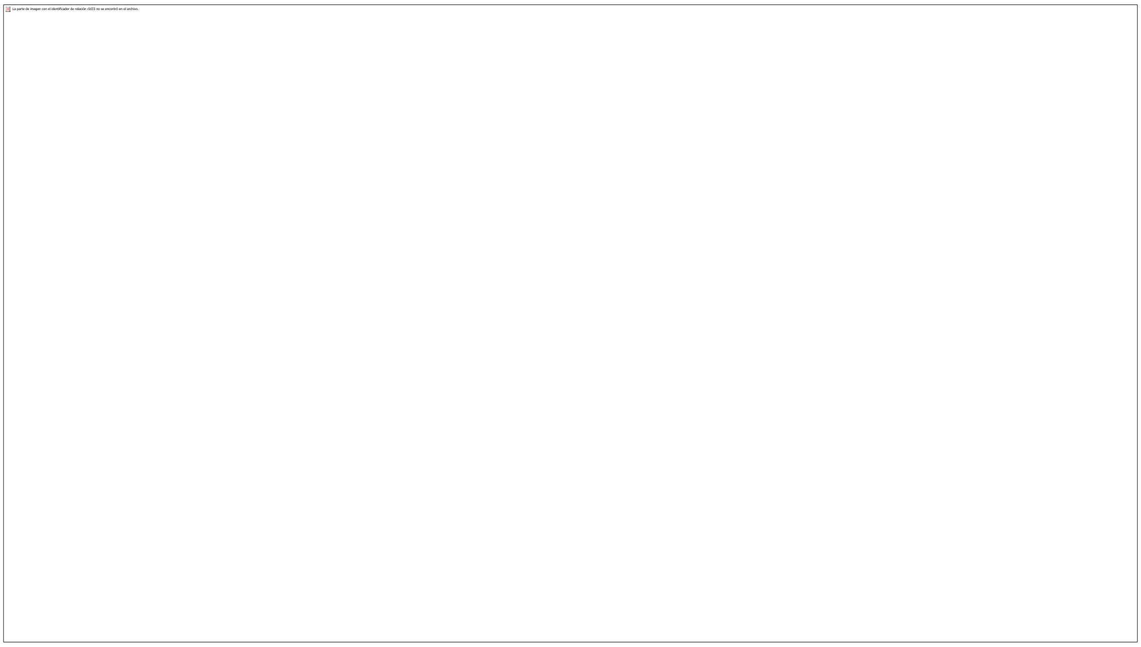


Una diferencia entre representar y dibujar es que al pulsar el botón de representar te indica los puntos de corte con los ejes y con dibujar no.

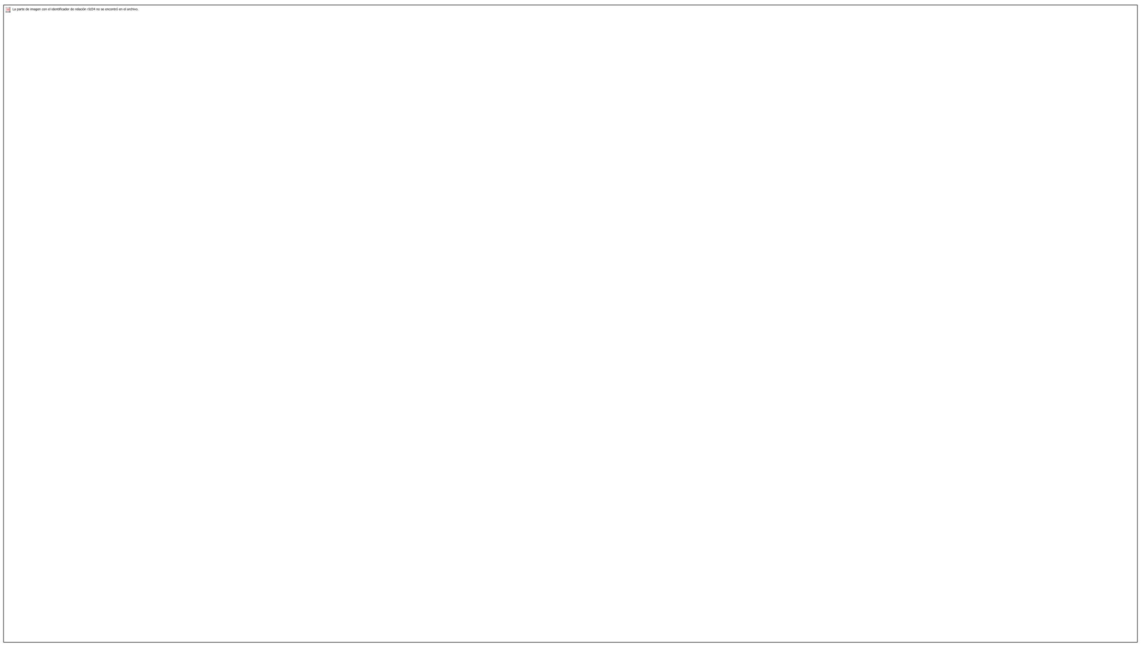
Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO 2: DESCARTES

Es un recurso gratuito ON-LINE del Ministerio de Educación y Cultura. Si entramos directamente por el link, llegamos.



O bien seleccionando con el ratón o bien con las flechas nos podemos mover a la siguiente pantalla .p.e.



Donde se pueden nos dan la posibilidad de enseñarnos ejercicios resueltos o bien nos proponen ejercicios (hasta 10). Tiene incluido un contador para contar aciertos y errores.

Universidad Pontificia de Salamanca

La parte de imagen con el identificador de relación rId35 no se encontró en el archivo.

Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO 3: CON PAPAS

Es un recurso gratuito ON-LINE, para estudiar ecuaciones y resolver ejercicios problemas . A través del link llegamos al índice

Seleccionando p.e. Ecuaciones de grado 2, incompletas (b=0) o incompletas (c=0) o completas accedemos a los ejercicios. Seleccionando incompletas (b=0) llegamos a la siguiente pantalla

Donde nos proponen preguntas a forma de test y vamos contestando. Pulsando el botón de verificar se comprueba el resultado.

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

Contenidos:

1.- Ficha de explicación del material para profesores.

2.- Ficha con videos para la explicación de ecuaciones de 1er grado con una incógnita.

3.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

4.- Ficha con videos para la explicación de resolución de problemas con una ecuación lineal con una incógnita.

5.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

6.- ANEXO1: WIRIS

7.- ANEXO2: DESCARTES

8.- ANEXO3: CON PAPAS

Universidad Pontificia de Salamanca

INICIO

Objetivo:

- ✓ Aprender a resolver las ecuaciones de 1er grado y saber resolver los problemas utilizando las ecuaciones de 1er grado.
- ✓ Utilizar recursos tecnológicos para estudiar, resolver ejercicios y aprender a resolver problemas.
- ✓ Confiar en las propias capacidades para resolver ejercicios y problemas.

Desarrollo:

El profesor desarrollará la clase utilizando bien estos materiales u otros según crea más convenientes. En las fichas teoricas el profesor puede hacer la explicación y luego poner los viedeos a modo de ejemplo preguntando dudas o repitiendolos las veces que haga falta.

En las sesiones de ordenador se pueden utilizar los materiales descritos en el documento o bien utilizar otros que el profesor crea más adecuados. Si no se pueden hacer ninguna sesión en el aula de informática también se puede utilizar el proyector.

Evaluación: Se informará al alumno que se valorara la actitud ante los materiales que se utilicen. Si esta atento, si se comporta adecuadamente en la sala de ordenadores centrandose en la materia. Incluso se les puede pasar un test o tener que entregar una hoja con ecuaciones resueltas en la sesión de ordenadores.

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. DIA:…………………………… GRUPO:…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de ecuaciones de 1er grado del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Ejemplo sencillo

- **Enunciado:**

$$2x - 3 = -x + 9$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=Z6sOdZIuIE8

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/Z6sOdZIuIE8?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 2,11’

Ejemplo con paréntesis

- **Enunciado:**

$$3(2x - 1) - 5(x - 3) = 6 - (7x - 4)$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=hdd4LezWfvM

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/hdd4LezWfvM?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,12’

Ejemplo3: con fracciones

- **Enunciado:**

$$\frac{x-1}{4} - \frac{x+3}{6} = 1 - \frac{2(x-1)}{8}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=79_NOikQT5I

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/79_NOikQT5I?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 4,37’

Universidad Pontificia de Salamanca

ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:………………………………** **GRUPO:…………………..**

NOMBRE Y APELLIDOS:………………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material WIRIS

- **Información:** resuelve ecuaciones lineales de forma fácil aunque no vemos el procedimiento.
- **Link:** http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/
- **Manual:** ANEXO1

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo Descartes

- **Información:** Muy claro, completo y sencillo de usar. Autor Miguel Angel Cabezón Ochoa.
- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/indice.htm
  Donde seleccionamos: ecuaciones sencillas, ecuaciones con paréntesis y ecuaciones con denominadores.
- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página.
  http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- **Manual:** ANEXO2

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico y amplio, incluye ejercicios de teoría.
- **Link:**

Universidad Pontificia de Salamanca

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm

- **Manual:** ANEXO3

Material interactivo de Anaya

- **Información:** resuelve ecuaciones paso a paso.
- **Link:**
  http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/05.htm
  http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/06.htm

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos buenos. A menudo no funciona las comprobaciones.
- **Link:**
  http://conteni2.educarex.es/mats/11802/contenido/

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1er GRADO CON UNA INCÓGNITA

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. DIA:…………………………….. GRUPO:…………………..

NOMBRE Y APELLIDOS:…………………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de problemas de ecuaciones de 1er grado del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Problema de botellas

- **Enunciado:** Una tienda vende en un día la mitad de las botellas que dispone. Al día siguiente vende el tercio de las que le quedaban con lo que cuenta con 20 botellas. ¿Cuánto tenía al principio?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=0VO9VNStSOg

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/0VO9VNStSOg?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 5,44'

Problemas de móviles

- **Enunciado:** A las 10 de la mañana Juan sale de Cartagena hacia Valencia con una velocidad constante de 90km/h. A la misma hora sale Manuel de Valencia hacia Cartagena con una velocidad constante 80km/h . Si ambas ciudades se encuentran a una distancia de 340km ¿a qué distancia de Cartagena y a qué hora se encontrarán?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=2ibWBNgewuw

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/2ibWBNgewuw?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 7,03'

Problemas de chicos y chicas

Universidad Pontificia de Salamanca

- **Enunciado:** A una fiesta asisten 40 personas. Al rato de empezar se va un chico quedando doble chicos que chicas. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas había al principio?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=61TT6d5D5qk

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/0VO9VNStSOg?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 4,25'

Problema de números

- **Enunciado:** La suma de tres números pares consecutivos es 18. ¿Cuáles son?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPCF692041D7E99C52&v=ZhAy51ouZlU

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/ZhAy51ouZlU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,05'

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS CON ECUACIONES DE 1^er GRADO CON UNA INCÓGNITA DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Damos una serie de materiales para resolver ejercicios de ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material interactivo Descartes

- **Información:** Muy claro, completo y sencillo de usar. Autor Miguel Ángel Cabezón Ochoa.
- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/indice.htm
  Donde seleccionamos problemas. Tenemos algunos ejemplos y después tenemos la posibilidad de hacer 30 problemas. Incluye un contador que cuenta aciertos y errores. La resolución viene con procedimiento.
- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- **Manual:** ANEXO 2

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es amplio, incluye ejercicios de teoría.
- **Link:** http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm
- **Manual:** ANEXO 3

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

- **Información:** con explicaciones y una explicación de todos los problemas tipos. Muy completo. No funciona las comprobaciones.
- **Link:**
  http://conteni2.educarex.es/mats/11803/contenido/
  http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

Videos

Universidad Pontificia de Salamanca

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo de Anaya

- **Información:** resuelve ecuaciones paso a paso.
- **Link:**

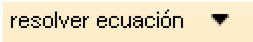
  http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/07.htm

Universidad Pontificia de Salamanca

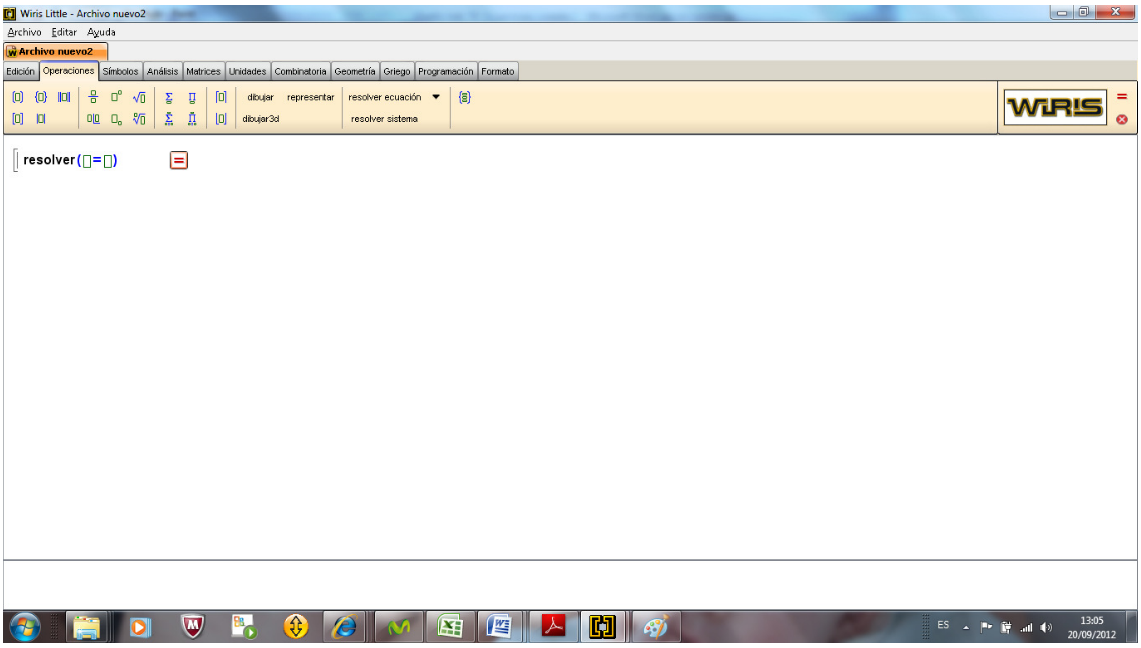
ANEXO1: WIRIS

Es un recurso gratuito ON-LINE y sencillo para resolver ecuaciones y sistemas y representar funciones y sistemas de funciones.

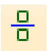
Resolver una ecuación:

La herramienta principal para resolver ecuaciones es el botón 

Cuando queremos resolver una ecuación pulsamos este botón



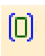
Luego en los cuadraditos de alrededor de la igualdad escribimos la ecuación. Los botones:

 para escribir fracciones,

 para escribir exponentes,

 para escribir raices cuadradas,

 para escribir raices de cualquier tipo,

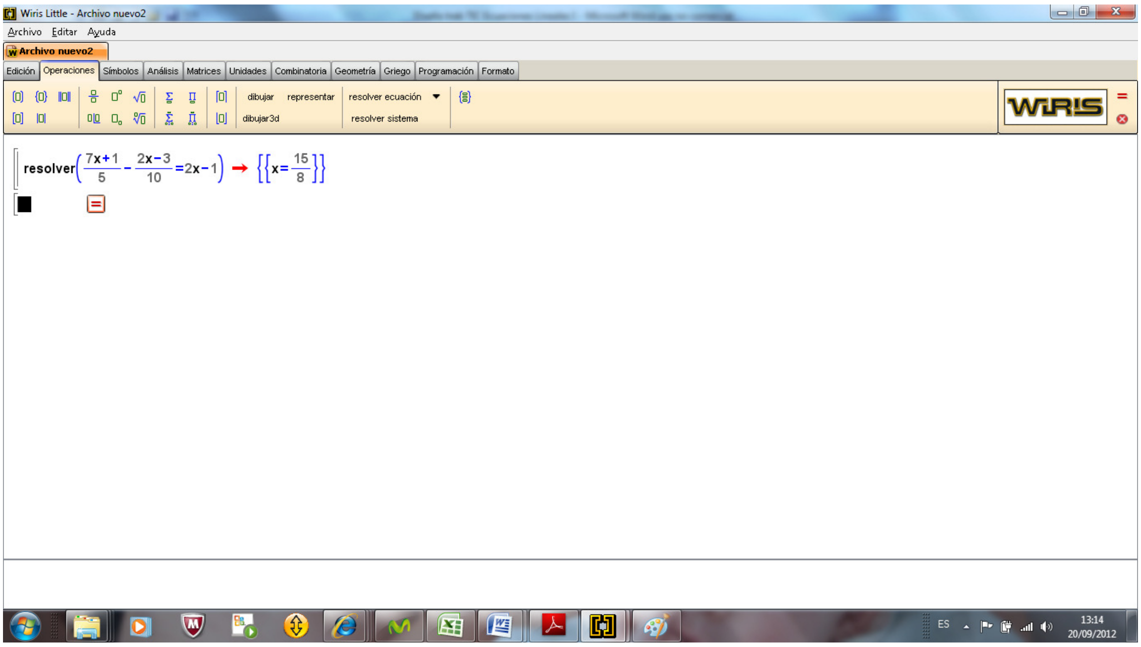
 para escribir paréntesis,

 para escribir corchetes,

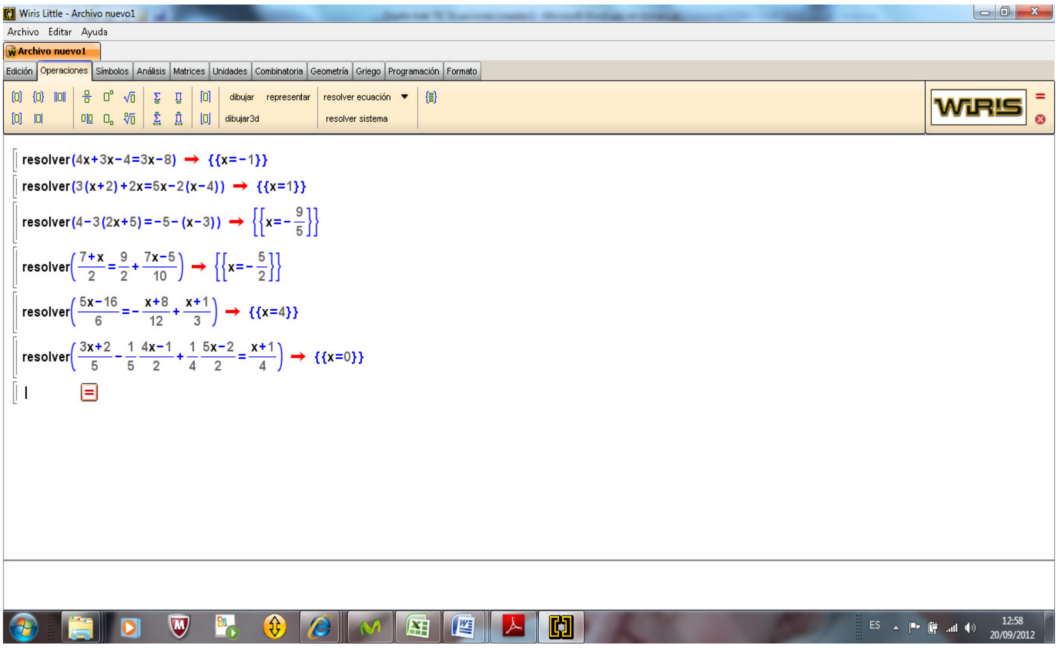
etc.

Universidad Pontificia de Salamanca

Cuando hayas terminado de escribir la ecuación pulsa el botón.  Y conseguirás el resultado p.e.



Ejemplo:

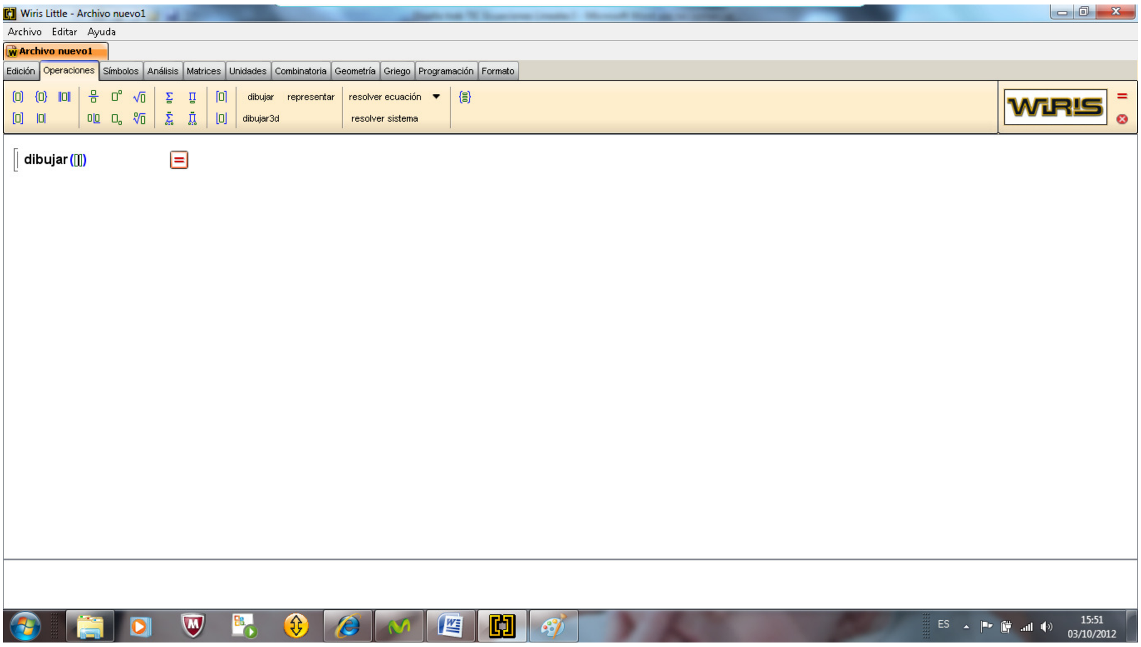


Representar funciones

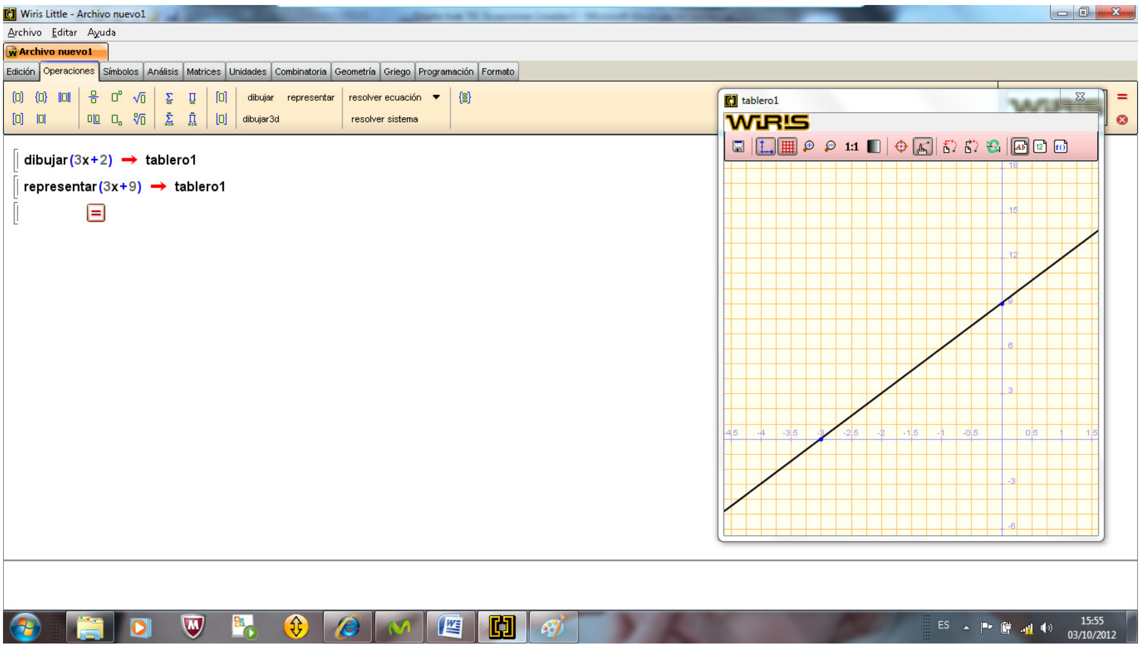
Para dibujar funciones lineales lo primero que hacemos es pulsar el botón 

y aparecerá la siguiente pantalla:

Universidad Pontificia de Salamanca



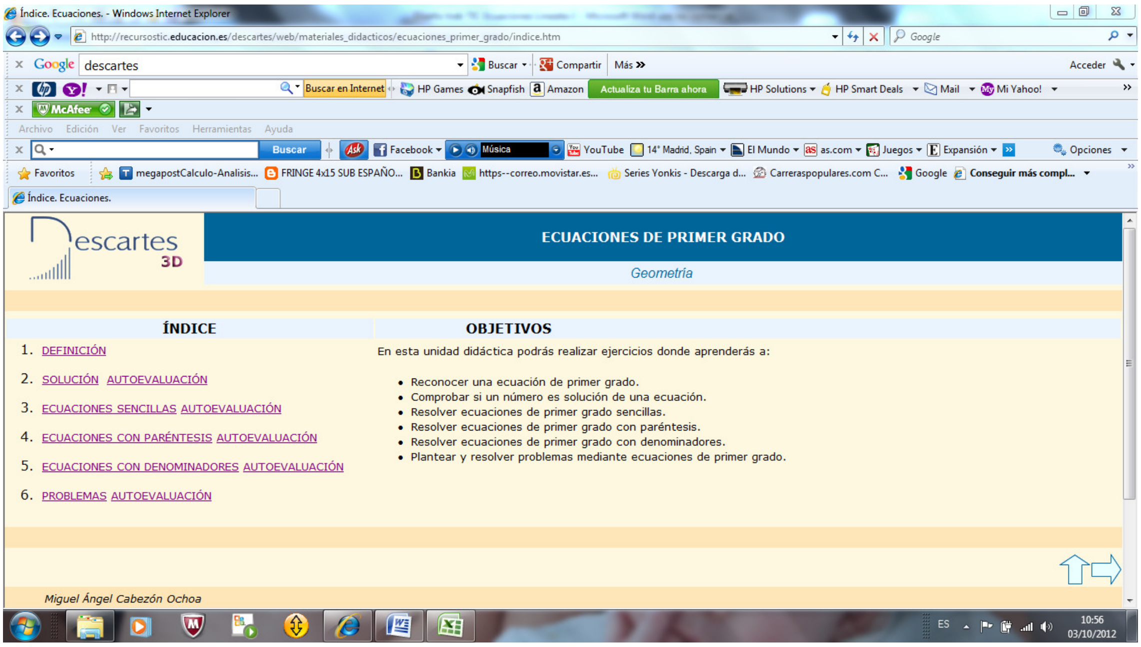
También podemos utilizar el botón representar. A continuación escribimos la función y al pulsar el igual aparece



Universidad Pontificia de Salamanca

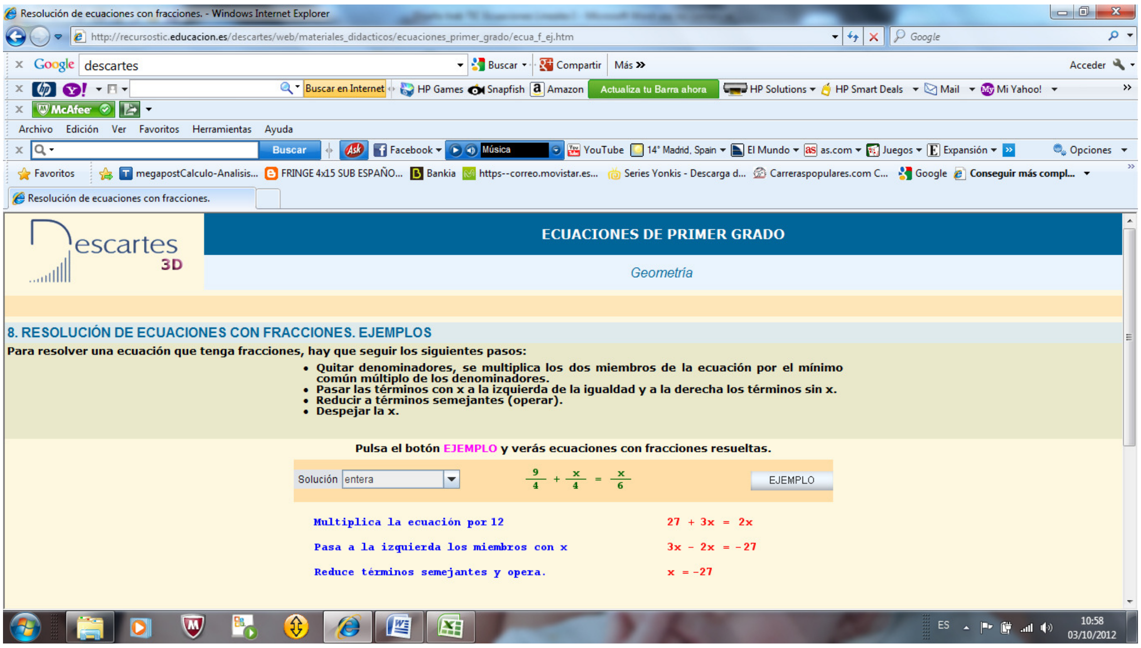
ANEXO2: DESCARTES

Es un recurso gratuito ON-LINE del Ministerio de Educación y Cultura. Si entramos directamente por el link, llegamos a la pantalla.



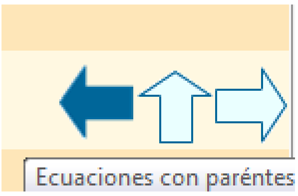
Ejercicios de Ecuaciones

Para llegar a los ejercicios de ecuaciones seleccionamos el tipo de ecuaciones que queremos, p.e. Ecuaciones con Denominadores aparece la siguiente pantalla:

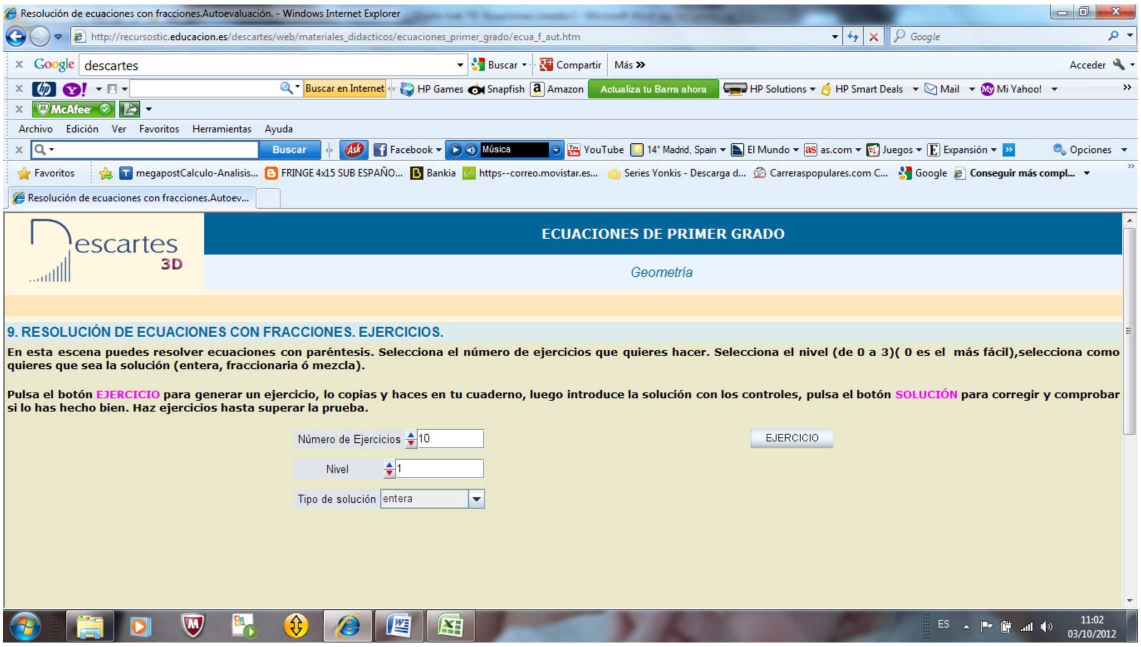


Donde podemos seleccionar el tipo de ejemplo que queremos: con solución entera o fraccionaria (pulsamos en solución y seleccionamos la que queramos). Pulsando ejemplo se nos "genera" uno nuevo. Hacia el final de la página vienen unas flehas.

Universidad Pontificia de Salamanca



Pulsar la de la izquierda es irte a la página anterior, la de la derecha es ir a la página siguiente y la central es ir al índice. Si pulsamos a la siguiente llegamos a la siguiente pantalla.

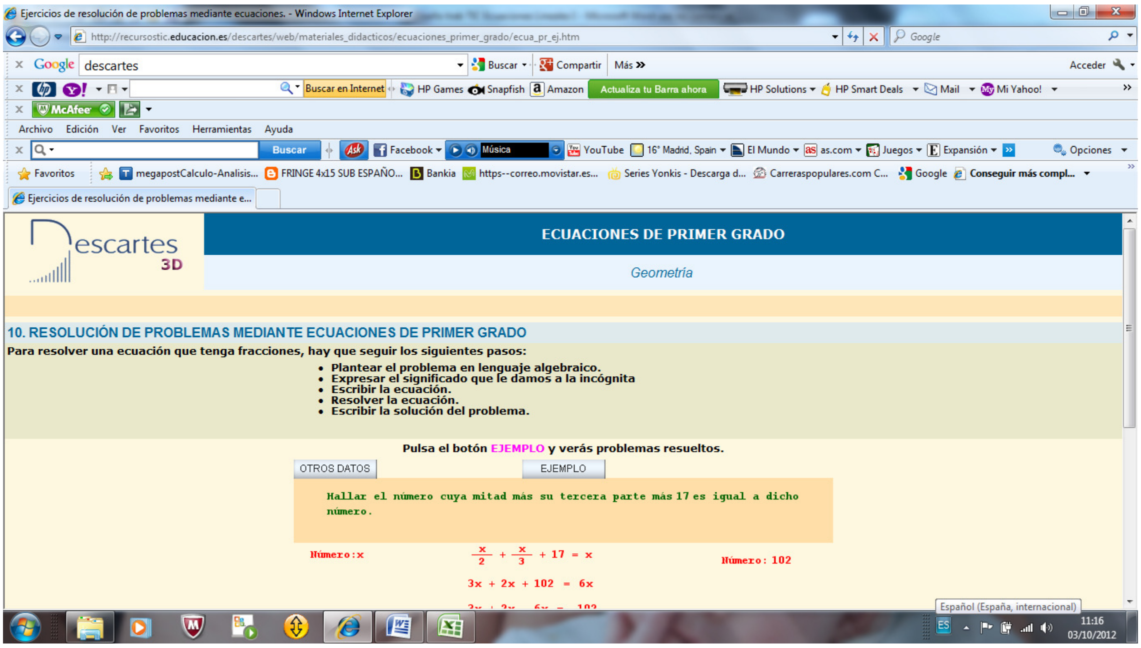


Donde podemos seleccionar el número de ejercicios (hasta 30), el nivel (0, 1 ,2 ,3) y el tipo de solución (entera y fraccionaria) que queremos hacer. Al pulsar ejercicio se nos propone uno que resolvemos y ponemos la solución en la casilla o no. Al pulsar el botón solución aparece resuelta. Al pulsar ejercicio se nos propone otro ejercicio. Incluye un contador para ir contando el número de éxitos y errores.

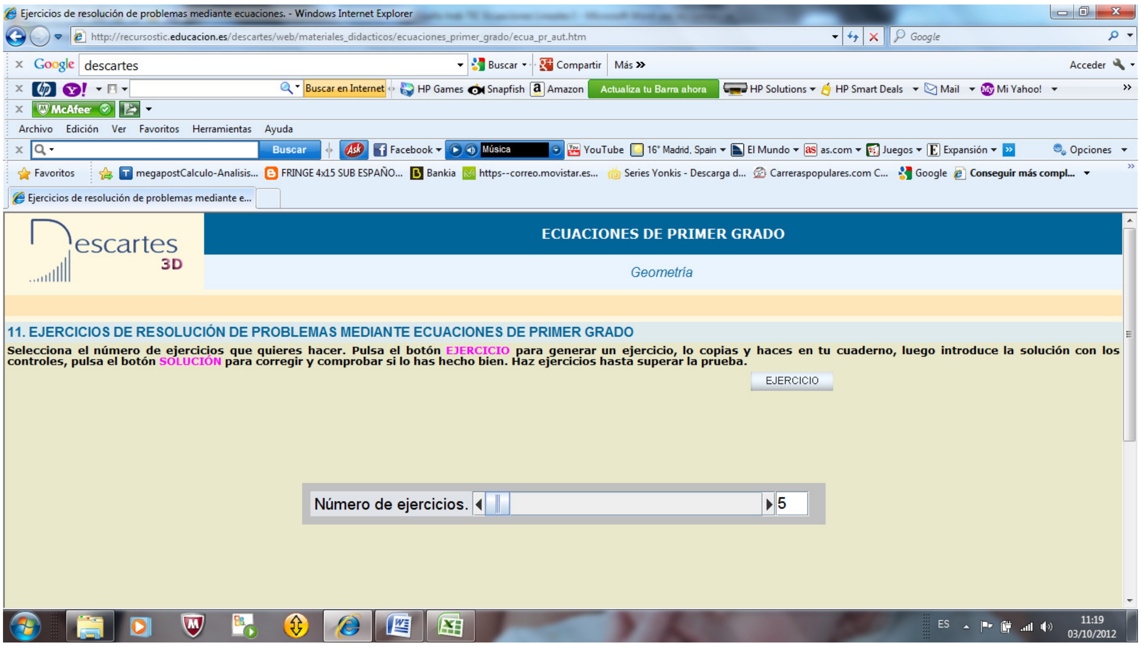
Problemas de ecuaciones

Desde la página del índice seleccionamos PROBLEMAS y llegamos a la siguiente pantalla.

Universidad Pontificia de Salamanca

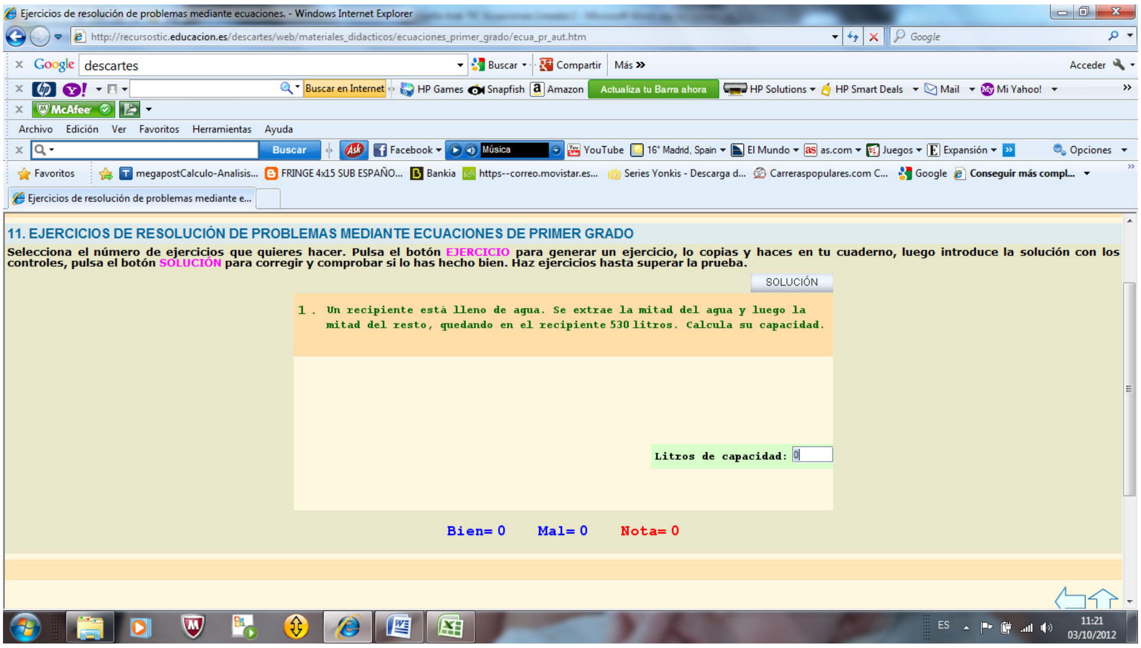


Donde podemos obtener diferentes ejemplos con solo pulsar el botón EJEMPLO, e incluso podemos tener el mismo ejemplo cambiando los datos pulsando al botón OTROS DATOS. Pulsando la flecha de siguiente que está al final de la pantalla en la esquina derecha llegamos



Donde podemos seleccionar hasta 30 problemas. Pulsando al botón EJERCICIO se genera el siguiente ejercicio

Universidad Pontificia de Salamanca



Escribimos el resultado y damos a SOLUCIÓN y aparece la resolución y el contador empieza a contar aciertos y errores. Para generar el siguiente una vez dado al botón SOLUCIÓN este se convierte en botón EJERCICIO que volvemos a pulsar para generar otro.

Lista de problemas que resuelve

1.- El perímetro de un triángulo isósceles mide 75cm. El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

2.-Laura tiene 54 años menos que su padre, y este tiene el triple de los años de su hija. Halla la edad de cada uno.

Universidad Pontificia de Salamanca

3.-Halla la longitud de una pieza de tela sabiendo que, después de haber vendido la mitad, la quinta parte y la decima parte, quedan 64m.

4.-El perímetro de un triángulo isósceles mide 132cm. El lado desigual del triángulo es la quinta parte de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

5.- Halla el número cuya mitad más su tercera parte más 1 es igual a dicho número.

6.-La suma de un número con su tercera y su quinta parte es 92. Calcula dicho número.

7.-Dos depósitos tienen igual capacidad. Están llenos de agua y de uno de ellos se sacan 3900 litros y del otro 7500 litros, quedando en el primero triple cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

8.-Hallar el número cuya mitad más su cuarta parte más 1 es igual a dicho número

9.- Hace 22 años, la edad de un hombre era el doble de la edad de su hija. Sabiendo que el padre tenía 22 años cuando nació su hija, halla las edades de ambos.

10.- El perímetro de un triángulo isósceles mide 165cm. El lado desigual del triángulo es la quinta parte de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo

11.- Dos depósitos tienen igual capacidad. Están llenos de agua y de cada uno de ellos se sacan 1700litros y del otro 10400litros, quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?

12.-Pedro tiene 10 años y su madre 54. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el triple de la edad de su hijo?

13.-Pedro tiene 12 años y su madre 56. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el triple de la edad de su hijo?

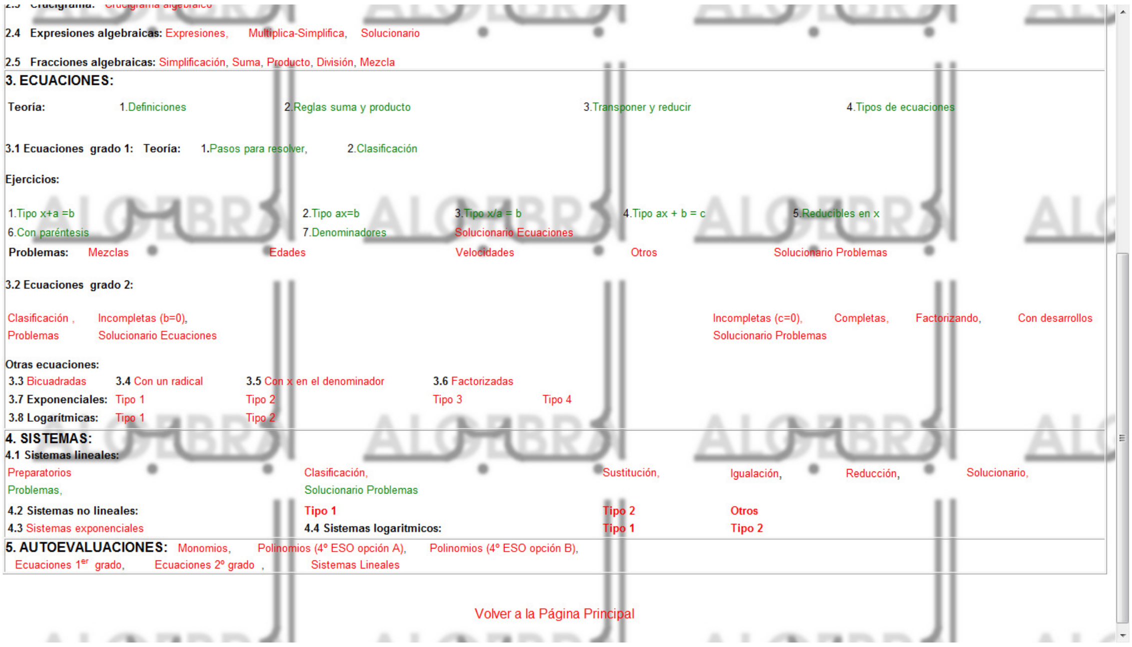
…

23.- Cristina tiene 6975 euros en billetes de 50 euros y de 5 euros. Si el número de billetes de 50 euros es el triple del número de billetes de 5 euros, ¿cuántos billetes tiene de cada clase?

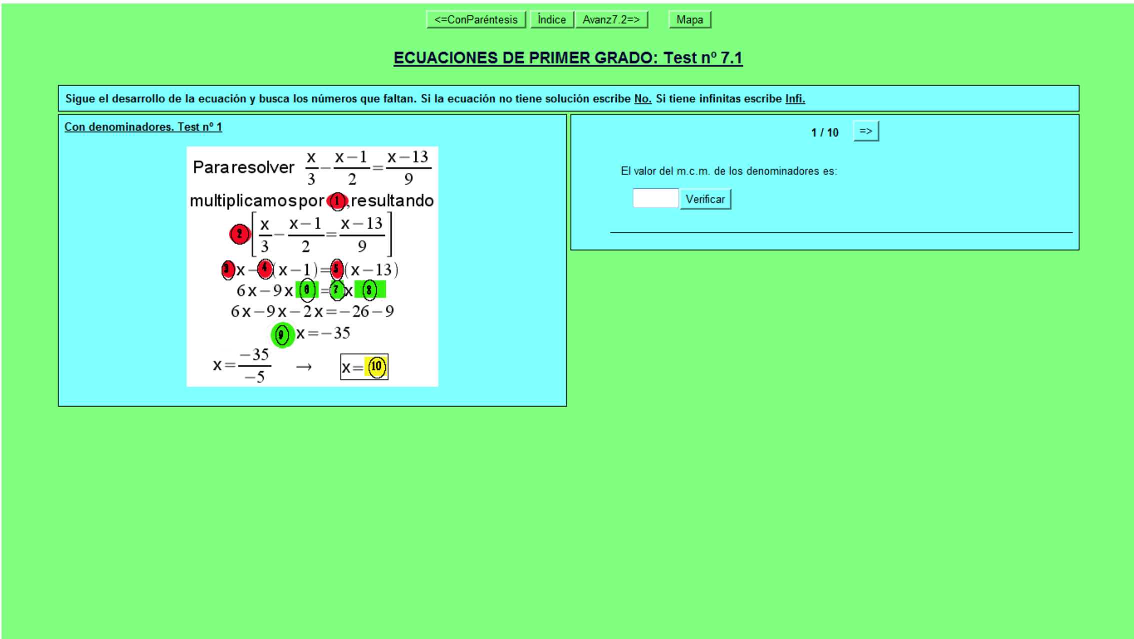
Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO3: CON PAPAS

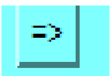
Es un recurso gratuito ON-LINE, para estudiar ecuaciones y resolver ejercicios problemas . A través del link llegamos al índice



Seleccionando p.e. Ecuaciones de grado 1, Ejercicios: 7 con denominadores aparece



Tenemos que ir contestando en la casilla lo que nos van preguntando. Cuando ponemos algo damos al botón de verificar que corrige. Después de corregir pulsamos

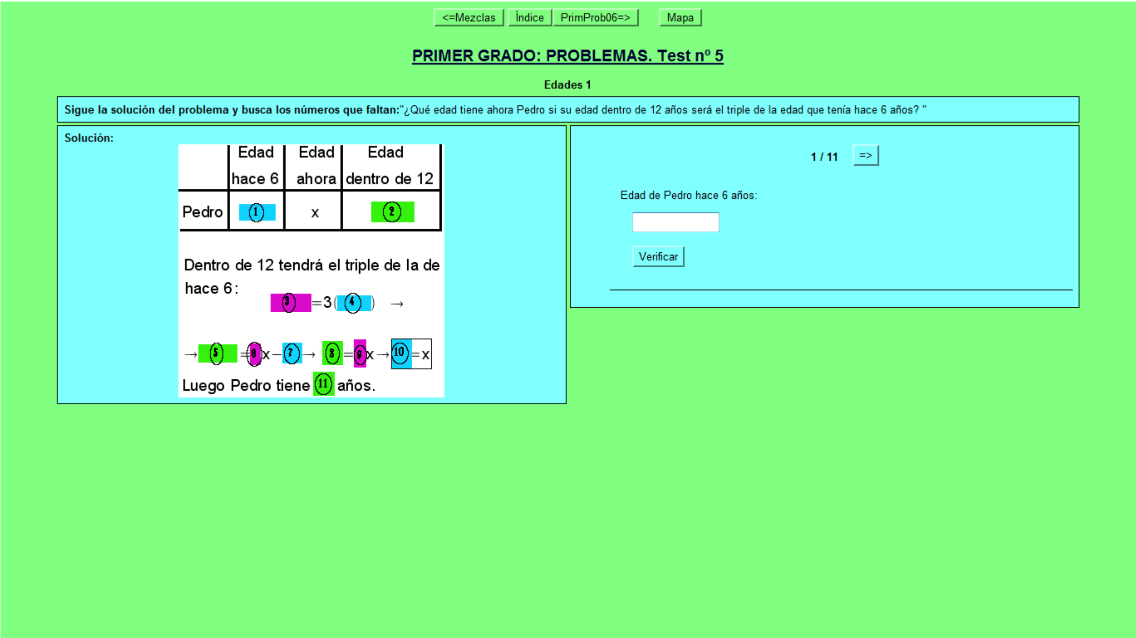


para seguir a la siguiente cuestión.

Problemas

Universidad Pontificia de Salamanca

Seleccionamos en el menú en ecuaciones de grado 1: problemas de edades p.e.



Y vamos contestando a las preguntas, verificando la respuesta. Si no se nos genera la ventanita donde poner la respuesta pulsar el botón verificar y aparecerá. Para pasar al siguiente ejercicio pulsamos el botón arriba de la pantalla que pone PrimProb.

Universidad Pontificia de Salamanca

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES

Contenidos:

1.- Ficha de explicación del material para profesores.

2.- Ficha de videos para la explicación de los métodos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales.

3.- Ficha de prácticas de ejercicios en el aula de informática.

4.- Ficha con videos para la de resolución de problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales.

5.- Ficha de prácticas de problemas en el aula de informática.

6.- ANEXO 1: WIRIS

7.- ANEXO 2: DESCARTES

8.- ANEXO 3: CON PAPAS

Universidad Pontificia de Salamanca

INICIO

Objetivo:

- ✓ Aprender a resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y saber resolver los problemas utilizando las ecuaciones de 2º grado.
- ✓ Utilizar recursos tecnológicos para estudiar, resolver a ejercicios y aprender a resolver problemas.
- ✓ Confiar en las propias capacidades para resolver ejercicios y problemas.

Desarrollo:

El profesor desarrollará la clase utilizando bien estos materiales u otros según crea más convenientes. En las fichas teoricas el profesor puede hacer la explicación y luego poner los viedeos a modo de ejemplo preguntando dudas o repitiendolos las veces que haga falta.

En las sesiones de ordenador se pueden utilizar los materiales descritos en el documento o bien utilizar otros que el profesor crea más adecuados. Si no se pueden hacer ninguna sesión en el aula de informática también se puede utilizar el proyector.

Evaluación: Se informará al alumno que se valorara la actitud ante los materiales que se utilicen. Si esta atento, si se comporta adecuadamente en la sala de ordenadores centrandose en la materia. Incluso se les puede pasar un test o tener que entregar una hoja con ecuaciones resueltas en la sesión de ordenadores.

Universidad Pontificia de Salamanca

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

HOJA DE TRABAJO Nº:……………….. **DIA:……………………………..** **GRUPO:…………………..**

NOMBRE Y APELLIDOS:……………………………………………………………………………………………

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

I. Método de sustitución

Ejemplo1:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{-3x + 2y = 7} \end{cases}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=275VK69OJPY

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/275VK69OJPY?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 2,20’

Ejemplo2:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = -1} \\ \mathbf{-5x + 2y = -3} \end{cases}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=31bsDRLu7tk

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/31bsDRLu7tk?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 4,26’

II. Método de Igualación

Ejemplo:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = -1} \\ \mathbf{-5y + 2y = -3} \end{cases}$$

Universidad Pontificia de Salamanca

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=fzCd19w0XLU
  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/fzCd19w0XLU?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>
- **Duración:** 3,43'

III. Método de reducción:

Ejemplo:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 4} \\ \mathbf{5x - 2y = -9} \end{cases}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=PH3neALwpy4

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/PH3neALwpy4?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 2,14'

IV. Método Gráfico:

Ejemplo:

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} \mathbf{x + y = 1} \\ \mathbf{2x - y = 8} \end{cases}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?list=SPEF127489B7AD151E&v=fJ__PcO46Uw&feature=player_detailpage

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/fJ__PcO46Uw?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 4,36'

V. Sistemas de dos ecuaciones con fracciones:

Ejemplo:

Universidad Pontificia de Salamanca

- **Enunciado:**

$$\begin{cases} \frac{2x-y}{4}+\frac{5y-2}{6}=1 \\ \frac{-2x+3}{10}-\frac{3x-y}{4}=2 \end{cases}$$

- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=WzSsiHksdtE

- **Duración:** 9,13’

Universidad Pontificia de Salamanca

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de sistemas de dos ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material WIRIS

- **Información:** resuelve ecuaciones rápidamente aunque no muestra el procedimiento.
- **Link:** http://herramientas.educa.madrid.org/wiris/
- **Material:** ANEXO 1

Videos

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios que se hagan en estos videos y después corregirlos con ayuda del proyector.

Material interactivo Descartes

- **Información:** claro, completo y sencillo. Autor Miguel Angel Cabezón Ochoa.
- **Link:** http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones/index.htm

  Donde seleccionamos: sistemas de dos ecuaciones lineales.

- **Observación:** Se pueden mandar ejercicios de esta página y luego el profesor los corrige con ayuda del proyector. Hay que descargarse la aplicación de DESCARTES en la página. http://recursostic.educacion.es/descartes/web/
- **Manual:** ANEXO 2

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico, amplio e incluye ejercicios de teoría.
- **Link:** http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm
- **Manual:** ANEXO3

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

Universidad Pontificia de Salamanca

- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos. Las comprobaciones funcionan a veces.
- **Link:** http://conteni2.educarex.es/mats/11812/contenido/

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Instrucciones: En esta ficha ofrecemos videos de resolución de problemas de sistemas de dos ecuaciones lineales del profesor Juan Medina Molina, profesor de la Universidad Politécnica de Cartagena como material de apoyo a la clase.

Problema de anchoas y atún

- **Enunciado:** Tres latas de anchoas y cinco de atún cuestan 6€. Una lata de anchoas y tres de atún cuestan 28€. ¿Cuánto cuesta la lata de anchoas y la lata de atún?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=BeXyLIrIHo0

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/BeXyLIrIHo0?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 4,12’

Problema de coches y ruedas

- **Enunciado:** En un concesionario tenemos entre coches y motos 30 vehículos y 100 ruedas. ¿Cuántos coches y cuántas motos tenemos?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=Aes3Z3msG3I

  <iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/Aes3Z3msG3I?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 3,47’

Problema de cifras

- **Enunciado:** Las decenas de un número son el triple de las unidades. Si intercambiamos las cifras del número éste disminuye en 50 unidades. ¿Cuál es el número?
- **Link:** http://www.youtube.com/watch?feature=player_detailpage&list=SPEF127489B7AD151E&v=NP8LdzeBvn8

Universidad Pontificia de Salamanca

<iframe width="640" height="360" src="http://www.youtube.com/embed/NP8LdzeBvn8?feature=player_detailpage" frameborder="0" allowfullscreen></iframe>

- **Duración:** 7,06’

Universidad Pontificia de Salamanca

PROBLEMAS CON SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS DE FORMA INTERACTIVA

Instrucciones: Esta ficha muestra una serie de materiales para resolver ejercicios de sistemas de dos ecuaciones lineales bien en el aula de informática o con proyector en la clase.

Material interactivo de la Junta de Andalucía CON PAPAS

- **Información:** Es básico, amplio e incluye ejercicios de teoría.
- **Link:** http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/index.htm
- **Manual:** ANEXO3

Material Interactivo de la Junta de Extremadura

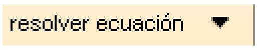
- **Información:** con explicaciones y ejercicios interactivos. Las comprobaciones funcionan a veces.
- **Link:** http://conteni2.educarex.es/mats/11813/contenido/

Material Interactivo Vitutor:

- **Información:**
- **Link:** http://www.vitutor.com/ecuaciones/sistemas/p_e.html

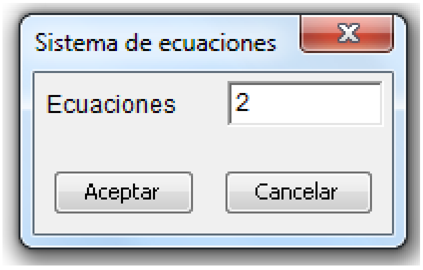
Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO 1: WIRIS

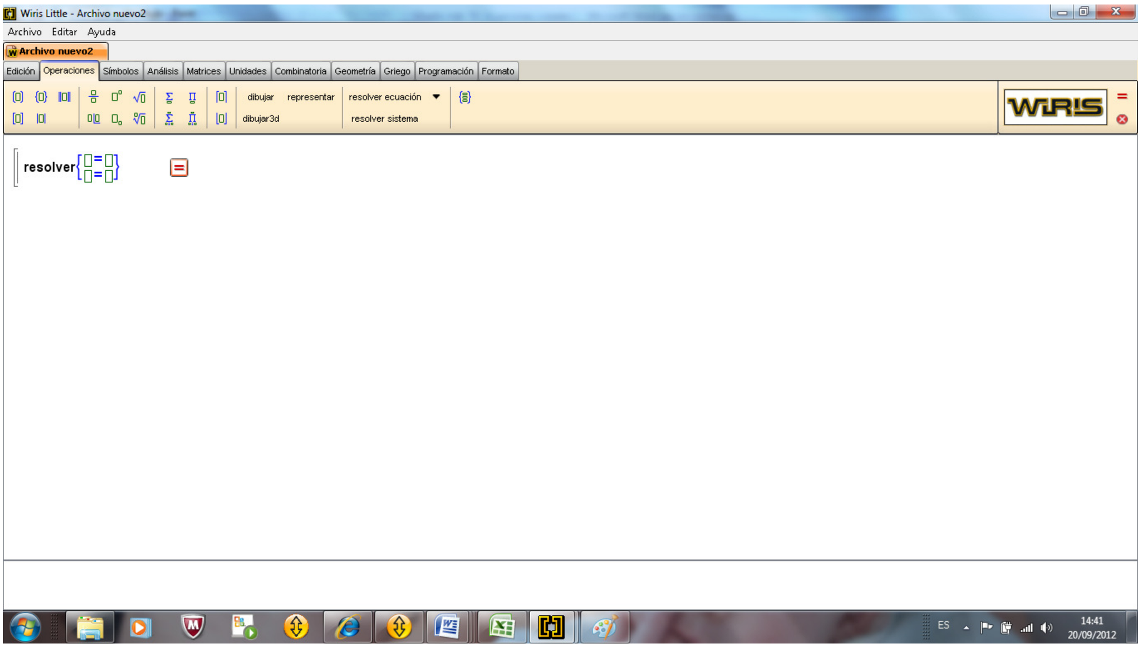
WIRIS: La herramienta principal para resolver ecuaciones es el botón 

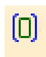
Cuando queremos escribir las ecuaciones lo primero que pulsamos es este botón

Cuando queremos escribir un sistema lo primero que pulsamos es ese botón y a continuación nos sale una ventana preguntando cuántas ecuaciones tiene nuestro sistema



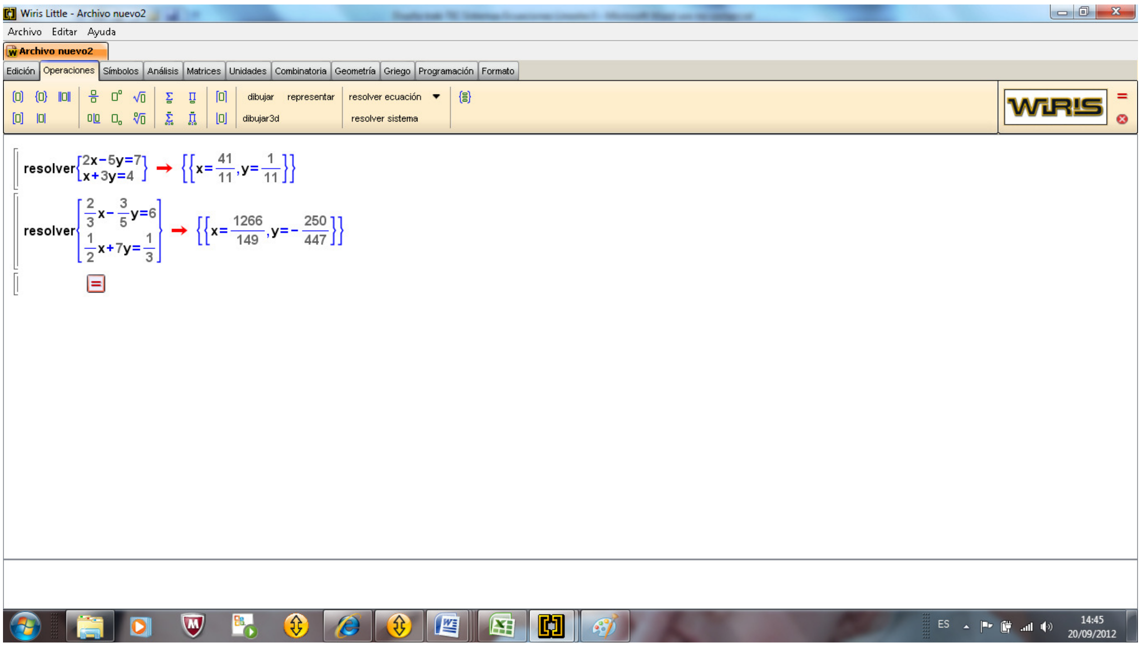
Ponemos el número de ecuaciones y damos a aceptar y nos queda la pantalla de la siguiente forma:

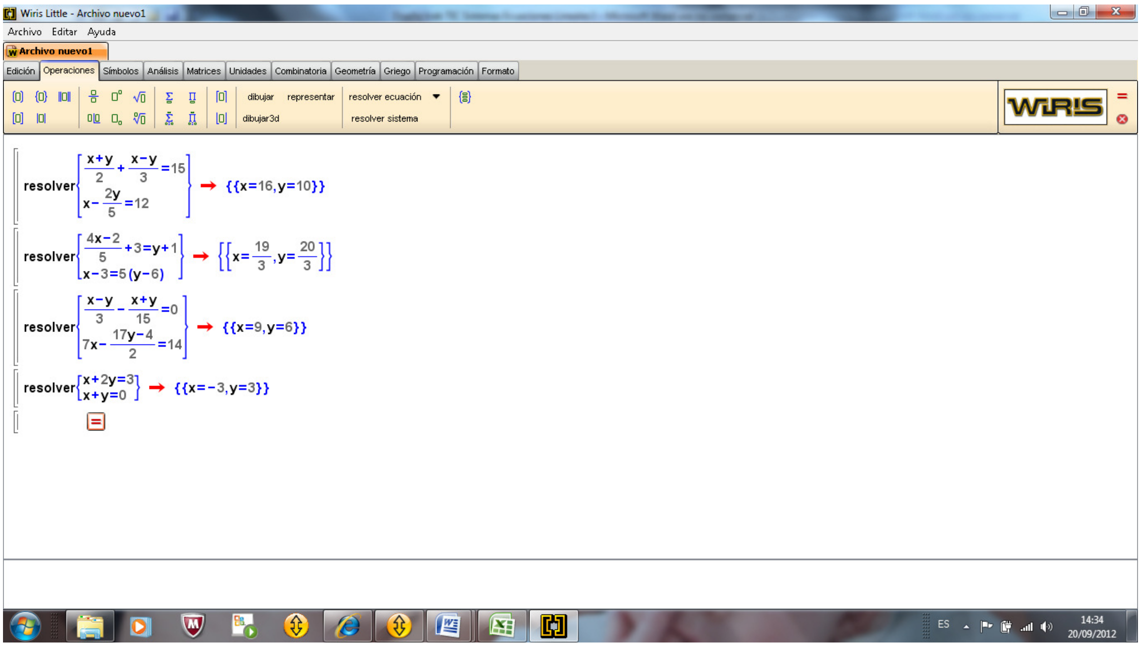


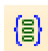
Los botones  nos sirven para escribir fracciones,  potencias,  raices cuadradas,  cualquier tipo de raiz. Además podemos utilizar los botones de  paréntesis,  corchetes, etc. Cuando hayas terminado de escribir la ecuación pulsa el botón.

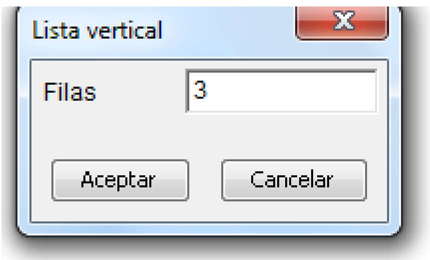
Universidad Pontificia de Salamanca

Y conseguirás el resultado p.e.

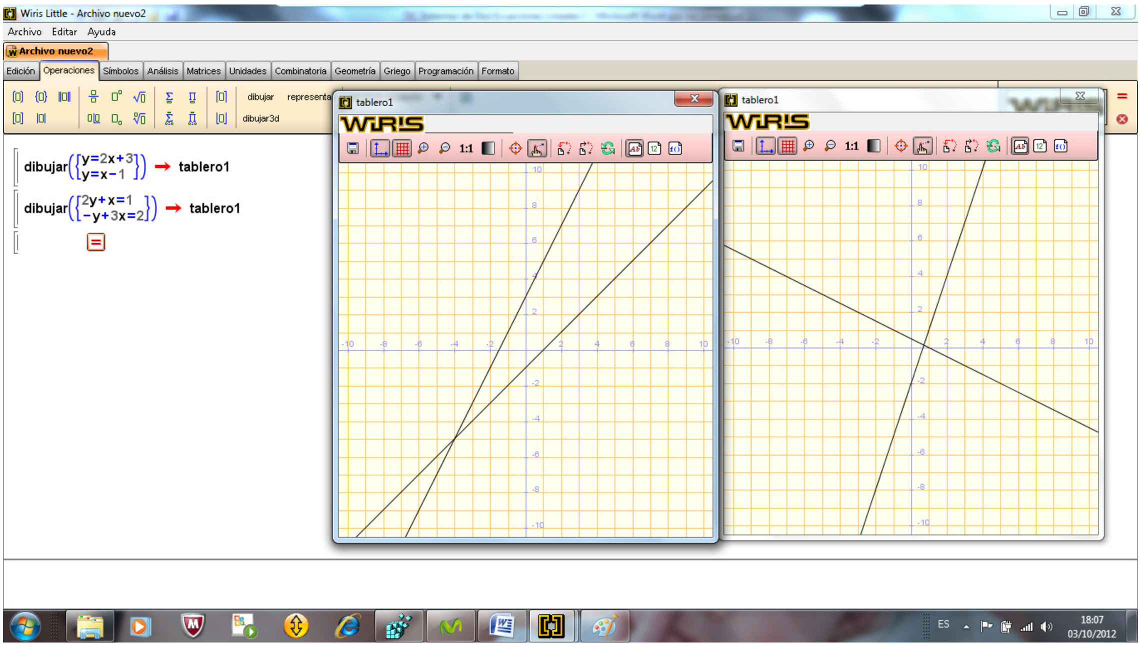




Forma de dibujar un sistema sería pulsar el botón de dibujar, luego pulsa el botón  para que nos pinte varias ecuaciones en el mismo dibujo



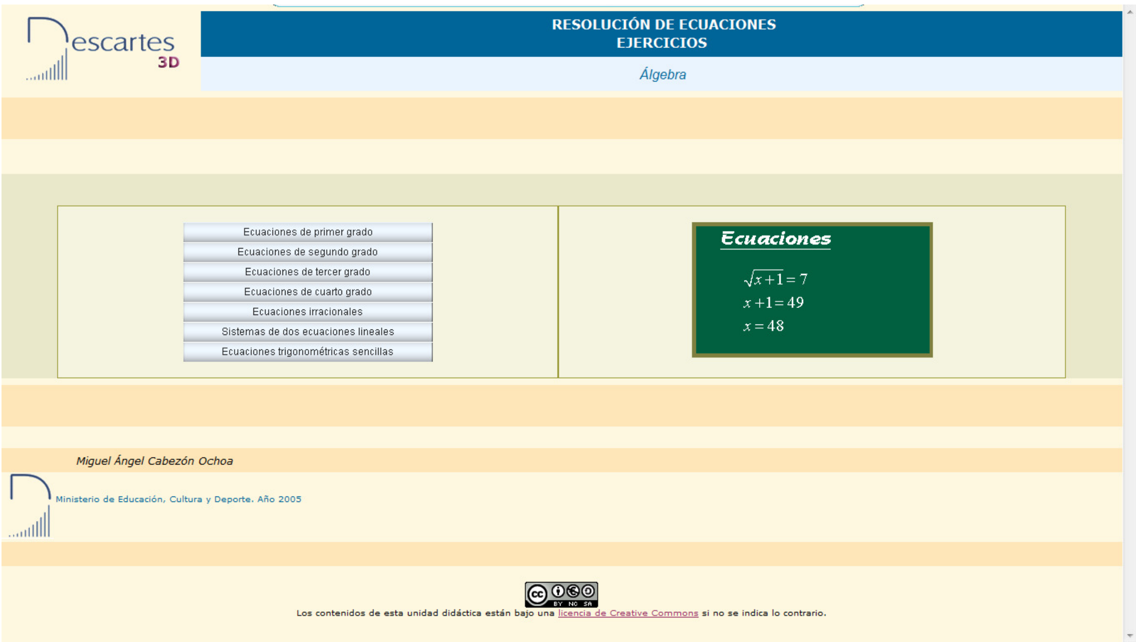
Luego escribimos las ecuaciones y damos al igual y aparece una ventana con el dibujo



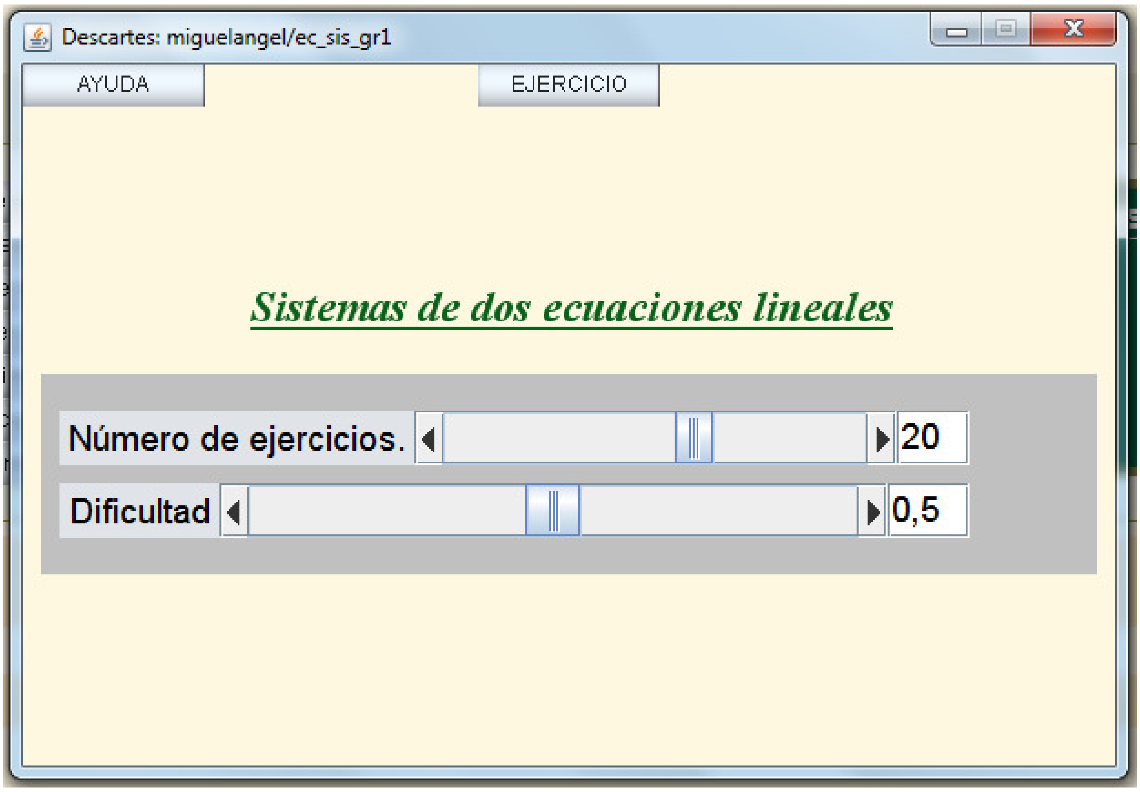
Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO 2: DESCARTES

Es un recurso gratuito ON-LINE del Ministerio de Educación y Cultura. Si entramos directamente por el link, llegamos.

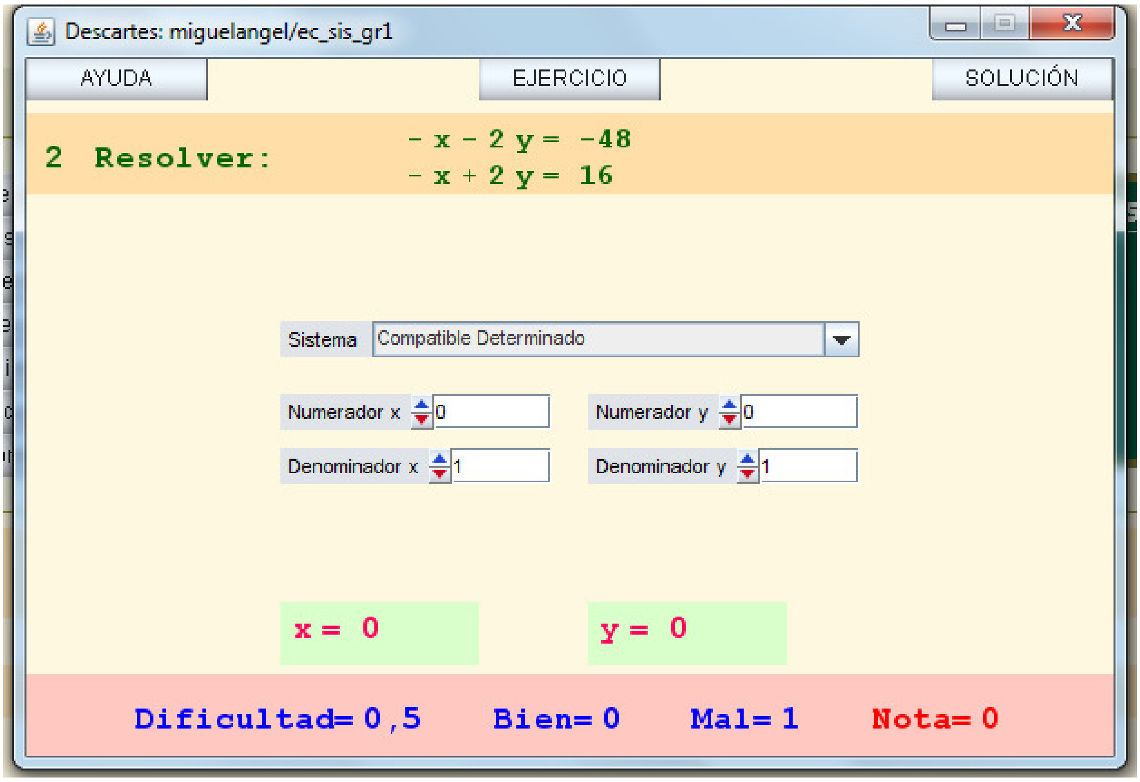


Desde donde podemos seleccionar SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES y llegamos a la pantalla emergente



Universidad Pontificia de Salamanca

Desde donde seleccionamos el número de ejercicios y la dificultad. Pulsamos EJERCICIO y sale la siguiente pantalla

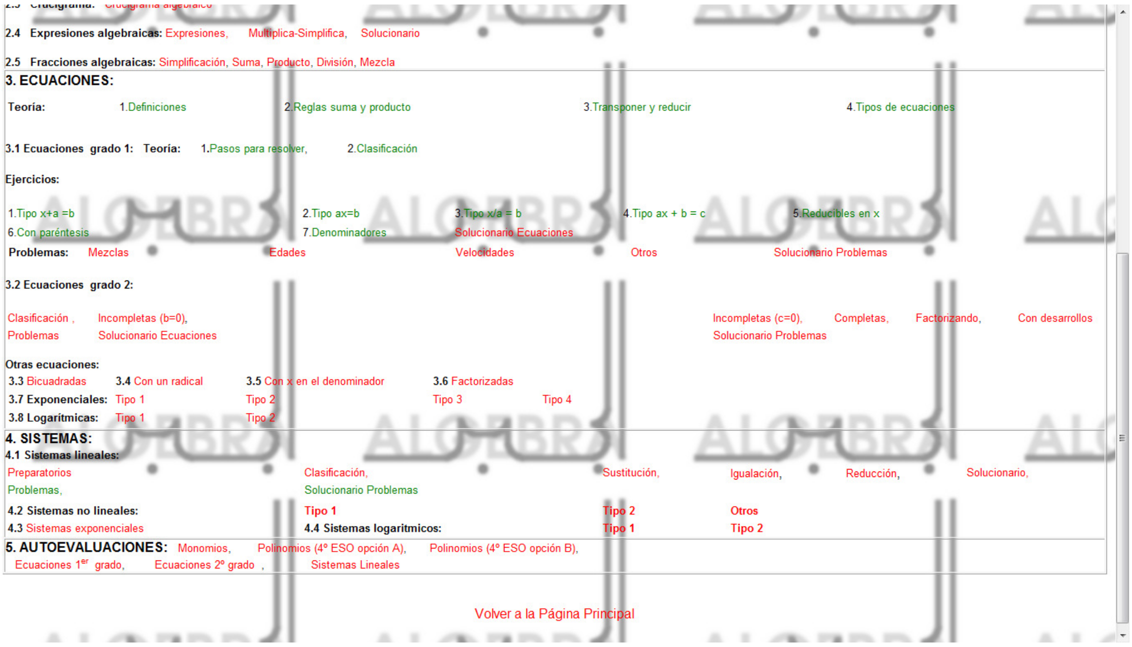


Introduces que tipo de sistema es y cuáles son las soluciones. Pulsando a solución verifica si lo has hecho bien o no. Incluye un contador para ver el número de respuestas correctas y erróneas.

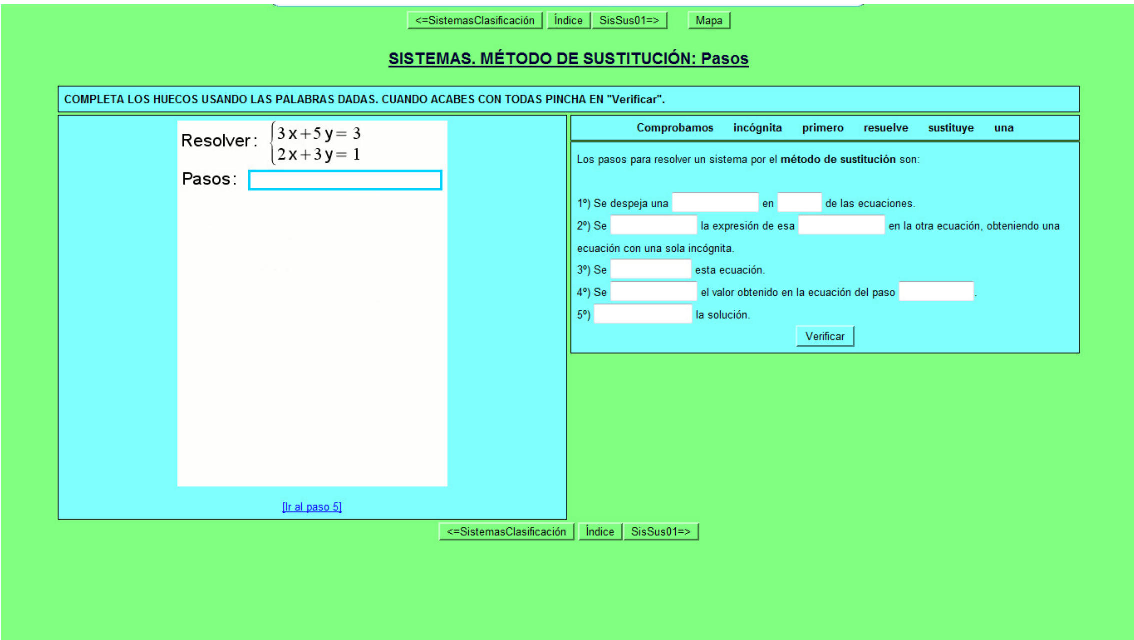
Universidad Pontificia de Salamanca

ANEXO 3: CON PAPAS

Es un recurso gratuito ON-LINE, para estudiar ecuaciones y resolver ejercicios problemas . A través del link llegamos al índice



Seleccionando p.e. Sistemas Sustitución llegamos a la siguiente pantalla

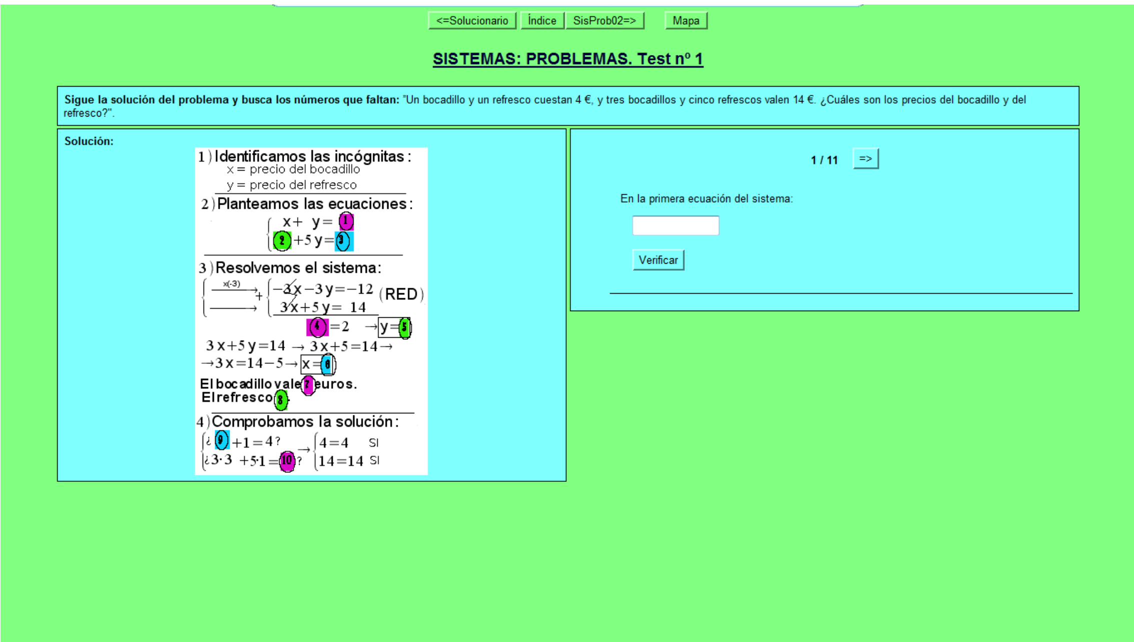


Donde se resuelve un sistema por sustitución. Para volver la índice pulsar el botón y para pasar al siguiente ejercicio pulsar "SisSus ".

Cuando contestamos en los cuadritos de respuesta hay que verificar la solución para comprobar que es la correcta.

Universidad Pontificia de Salamanca

Para resolver problemas seleccionamos desde el índice problemas y llegamos.



Donde vamos completando la resolución del problema.

Universidad Pontificia de Salamanca