CUADERNOS SALMANTINOS DE FILOSOFÍA
Vol. 41, 2014, 195-217, ISSN: 0210-4857

BERKELEY: EL ORIGEN DE LA CRÍTICA A LOS INFINITESIMALES

Alberto Luis López
Doctor en Filosofía
Profesor de Asignatura
Facultad de Estudios Superiores Acatlán
Universidad Nacional Autónoma de México
México D.F. / México
albertograco@yahoo.com.mx

Recibido: 02/05/2014
Revisado: 07/09/2014
Aceptado: 03/10/2014

Resumen: En este artículo hago una nueva lectura de un escrito poco conocido de George Berkeley: *Of Infinites*. Hasta ahora se ha leído de manera parcial, ya sea destacando las aportaciones matemáticas, mientras se resta importancia a la parte filosófica o, lo más habitual, minimizando la parte matemática para resaltar sólo su incipiente inmaterialismo. Ambas lecturas han sido perniciosas para la comprensión cabal del texto, lo que ha traído como consecuencia que se siga minusvalorando su importancia y, por consiguiente, no se le estudie como debiera. Frente a las lecturas tradicionales realizo una que busca destacar, así como explicar, tanto los aspectos filosóficos como los matemáticos, con el fin de mostrar que su riqueza y complejidad le merecen un lugar importante dentro de la obra berkeleyana.

Palabras clave: Berkeley, cálculo, *De Infinitos*, infinitesimal, Leibniz, Locke, tesis semántica

BERKELEY: THE ORIGIN OF CRITICISM OF THE INFINITESIMALS

Abstract: In this paper I propose a new reading of a little known George Berkeley´s work *Of Infinites*. Hitherto, the work has been studied partially, or emphasizing only the mathematical contributions, downplaying the philosophical aspects, or minimizing mathematical issues taking into account only the incipient immaterialism. Both readings have been pernicious for the correct comprehension of the work and that has brought as a result that will follow underestimated its importance, and therefore will not study as should be. Against traditional readings I make one that stand out both philosophical and mathematical aspects, with the purpose to show that richness and complexity of the work deserve that it has an special place within Berkeley´s works.

Keywords: Berkeley, Calculus, infinitesimal, Leibniz, Locke, *Of Infinites*, Semantic theory

1. INTRODUCCIÓN

El 19 de noviembre de 1707 el joven filósofo George Berkeley pronunció una conferencia llamada *Of Infinites* ante la Dublin Philosophical Society, sociedad fundada en 1683 por el irlandés William Molyneux y revivida en 1707 por su hijo Samuel Molyneux. Si bien esta alocución nunca fue publicada se conservó dentro de los llamados 'Molyneux Papers' (conjunto de documentos resguardados en la biblioteca del Trinity College Dublin [TCD] por haber contribuido al avance y conformación de dicha sociedad filosófica). El manuscrito, resguardado en dichos Papers, fue encontrado casi dos siglos después de pronunciada la conferencia por el profesor de filosofía moral Swift Payne Johnston, quien lo publicó en 1901 en el volumen XI de la revista de filosofía, teología y estudios clásicos *Hermathena*, editada de manera ininterrumpida por el TCD desde 1873.

El texto *Of Infinites* o *De Infinitos*, escrito durante el período en que Berkeley escribía sus *Philosophical Commentaries* o *PC* (1707-08), fue redactado en una época en que la idea de infinito era especialmente importante en las propuestas de los pensadores de la temprana modernidad, sobre todo por la gran revolución que se dio en matemáticas a partir de la creación del moderno cálculo en la segunda mitad del siglo XVII.

La redacción de *Of Infinites* no se explica sólo por el interés que el cálculo despertó en la época, más bien fue el resultado de la inclinación que siempre mostró Berkeley por las matemáticas. En este sentido, el escrito de 1707 forma parte de un conjunto de obras que al abordar temas matemáticos bien pueden conformar lo que llamo un *corpus matemático berkeleyano*[1]; pese a la existencia de este *corpus* los textos matemáticos del nacido en Kilkenny han sido, en términos generales, insuficientemente estudiados por los especialistas y en el caso de *De Infinitos* éste lo ha sido menos aún. Tal vez esto se haya debido a que formó parte de los 'Molyneux Papers', con lo cual quedó en el olvido por mucho tiempo, pero es más probable que el principal motivo de su poco estudio se deba a que se le ha considerado un texto menor y de escaso interés. Esto se debe en gran medida a que los pocos que lo han estudiado destacan en él unos aspectos y no otros, ya que por lo general se habla de los aspectos filosóficos, como el inmaterialismo subyacente o la explicación sobre el significado lingüístico, en detrimento de los matemáticos, por considerarlos poco relevantes. La consecuencia de tal parcialidad es que se ha tenido una perspectiva incompleta y sesgada sobre la obra, lo que ha generado muy poco interés hacia ella.

1 Este *corpus* estaría conformado principalmente por los *Philosophical Commentaries*, *Of Infinites*, *Arithmetica absque algebra aut Euclide demonstrata*, *Miscellanea mathematica*, *The Analyst* y *A Defense of Free-Thinking in Mathematics*.

En relación a lo anterior un claro ejemplo de esto se ve con comentaristas de la talla de A. A. Luce o Bertil Belfrage, dos de los principales estudiosos de la filosofía de Berkeley. En cuanto al estudioso de Gloucester, es decir, A. A. Luce, en la introducción que hizo a *De Infinitos* dentro de las obras completas dijo lo siguiente: "Aquí [en *Of Infinites*] no hay un problema matemático abstracto, accidentalmente conectado con los estudios de Berkeley. Toca el corazón de su filosofía, y está necesariamente conectado con el sólido argumento del inmaterialismo que Berkeley, como se sabe, estuvo dando forma en los años de 1707-8"[2]. Por otra parte, en un artículo de 1985 el comentarista sueco Belfrage añadió lo siguiente:

> Hasta ahora no se había observado que este documento pudo haber generado una gran controversia. Para un lector moderno probablemente parezca un discurso puramente académico sobre algunas sutilezas matemáticas, pero cuando lo leemos a la luz de los recientes estudios de David Berman sobre filosofía irlandesa, podemos estar seguros que fue recibido como un escrito extremadamente controvertido, relevante para cuestiones muy lejanas al estrecho campo de las matemáticas[3].

Lo dicho por ambos comentaristas ejemplifica el tipo de lectura sesgada que se ha hecho sobre *De Infinitos*, pues al destacar casi exclusivamente los aspectos filosóficos menoscabando los matemáticos resulta imposible ver la complejidad y riqueza que encierra el texto. Debido a esto, y tomando como punto de partida los comentaristas mencionados, se hará en el presente artículo una lectura distinta, la cual no busca destacar ahora lo olvidado por los filósofos, es decir, los aspectos matemáticos, pues esto poco aportaría a la mejor comprensión del escrito; lo que se pretende aquí es hacer una lectura exegética más completa y menos sesgada, es decir, una que –desde la filosofía– destaque los aspectos filosóficos sin olvidarse de los matemáticos, sobre todo si uno tiene en cuenta que el objetivo último de la alocución no era tanto mostrar el inmaterialismo o las consecuencias de éste, aunque tal cuestión estuviese presente, sino más bien criticar el uso del método infinitesimal en el análisis. Sólo estudiando íntegramente el texto, lo que significa abordar ambos aspectos, se comprenderá cabalmente su contenido y al hacerlo se le concederá un lugar importante en la obra filosófica y matemática berkeleyana (algo que hasta ahora no se ha hecho), porque se dará uno cuenta de que se trata de un antecedente inmediato, o lejano pero directo, de obras consagradas como los *Principles*, *Dialogues*, *The Analyst* o *A Defence of Free-Thinking in Mathematics*.

2 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, 'Editor´s Introduction', p. 233.

Las referencias a las obras de Berkeley se toman de la edición de Luce y Jessop, *The Works of George Berkeley, Bishop of Cloyne,* y se citan en la forma tradicional (autor, obra, volumen y página). BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, pp. 233-234.

3 BELFRAGE, B., *The Clash on semantics in Berkeley´s 'Notebook A'*, p. 118.

1.1. Contexto de los infinitos

Con la finalidad de contextualizar el tema de los *infinitorum* o infinitos conviene mencionar brevemente a algunos de los autores que dieron origen y posteriormente desarrollaron la cuestión, ya que al hacerlo fungieron como influencias, directas o indirectas, en la elaboración del escrito de Berkeley.

Si bien las matemáticas babilónicas y egipcias tuvieron grandes avances en aritmética apenas desarrollaron el álgebra y la geometría, es por eso que para algunos historiadores de la matemática, como Morris Kline o Jean Paul Collette, los orígenes de los 'infinitos' están en la Grecia clásica, destacando especialmente autores como Aristóteles, Eudoxo y Arquímedes. En cuanto al estagirita, su acercamiento al tema del infinito obedeció a su interés por los eleáticos, sobre todo por las paradojas de Zenón[4], pero también a que los matemáticos de su época suponían que las líneas y los planos podían ser divididos *ad infinitum*, de ahí que en el libro III capítulo 4 de la *Física* mencione que la creencia en la realidad del infinito proviene básicamente de cinco razones, destacando entre ellas la quinta, a saber, la referida a la división de las magnitudes[5]. A Eudoxo, matemático y astrónomo de Cnido, se debe el método para hallar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas, llamado 'método de exhaución', el cual "se trata realmente de la primera etapa en la historia del cálculo infinitesimal, aunque no utiliza una teoría de límites explícita"[6]. Por su parte, el matemático de Siracusa es mencionado como antecedente de los infinitesimales por sus obras *Cuadratura de la parábola* y *El método de los teoremas mecánicos*. En la primera de ellas –sostiene Kline– al dar dos métodos para hallar el área de un segmento parabólico terminó sumando una progresión geométrica infinita, mientras que en la segunda obra, contenida en el famoso 'palimpsesto de Arquímedes' (que contiene siete tratados en total), se menciona ya lo que después fue conocido como 'método de indivisibles' y que en el siglo XVII fue llamado con el nombre latino de *infinitesimus*.

Es precisamente en la temprana modernidad cuando el tema de los infinitesimales adquirió gran relevancia, debido principalmente a la creación del cálculo.

4 ARISTÓTELES, *Física*, III y IV.

5 "La creencia en la realidad del infinito proviene principalmente de cinco razones: 1) del tiempo, pues es infinito; 2) de la división de las magnitudes, pues los matemáticos también hacen uso del infinito; 3) si hay una generación y destrucción incesante es sólo porque aquello desde lo cual las cosas llegan a ser es infinito; 4) porque lo finito encuentra siempre su límite en algo, de suerte que si una cosa está siempre necesariamente limitada por otra, entonces no podrá haber límites últimos; 5) pero la razón principal y más poderosa, que hace que la dificultad sea común a todos, es ésta: porque al no encontrar nunca término en nuestro pensamiento se piensa que no sólo el número es infinito, sino también las magnitudes matemáticas y lo que está fuera del cielo". *Ibidem*, III, 4, 203b15-25.

6 KLINE, M., *El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días*, p. 81.

En relación a éste, mencionaré algunas de las principales obras publicadas por sus precursores en el siglo XVII, como la del milanés Bonaventura Cavalieri, alumno de Galileo; este matemático jesuita introdujo en su *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota* (1635) su "teoría de los indivisibles", señalando que la medida de las longitudes, superficies y volúmenes era resultado de la suma de la infinidad de indivisibles, esto es, de infinitesimales. Por su parte el francés Gilles de Roberval inventó un método de integración mediante infinitesimales que quedó plasmado en su *Traité des indivisibles* (1634). Poco tiempo después Pierre de Fermat publicó su *Methodus ad Disquirendam Maximan et Miniman* (1637), donde desarrolló, como su nombre indica, un método para obtener la tangente de una curva que tuvo la forma del cálculo diferencial, aunque supuso -dice Morris- "la difícil teoría de los límites". Por otro lado el inglés John Wallis, quien introdujo en matemática el símbolo de infinito (∞)[7], fue considerado precursor del cálculo infinitesimal gracias a la publicación de su *Arithmetica infinitorum* (1655). Lo mismo se puede decir del clérigo y matemático Isaac Barrow, quien hizo grandes contribuciones al cálculo a partir de su obra *Lectiones Geometricae* (1669).

Fue en este contexto que Newton y Leibniz dieron a conocer sus respectivas aportaciones sobre el tema. Por un lado, el inglés escribió su *De Analysi per Aecuationes numero terminorum infinitas* (manuscrito entregado a su maestro Barrow en 1669 pero publicado en 1711) y su *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* (escrito en 1671 y publicado en 1736), ambos escritos publicados póstumamente. Leibniz, por su parte, redactó tanto el artículo *Nova methodus pro maximis et minimis* (1684) como el breve escrito *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*[8] (1686), expuesto de manera didáctica en el libro de texto *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (1696), escrito por el noble francés marqués de L´Hôpital.

Con lo dicho hasta aquí fácilmente puede verse que a principios del siglo XVIII el uso de los infinitésimos estaba en boga. Seguramente por ello Berkeley,

7 Algunos señalan que Wallis pudo haberse inspirado para este signo en la curva "lemniscata" de Jacob Bernoulli, lo cual es bastante remoto porque éste publicó el trabajo donde la incluía en 1694 y la obra de Wallis es de 1655. Otra explicación, esa sí plausible, es que fue creado a partir de símbolos alquímicos o religiosos.

8 Leibniz refiere en este texto: "Me correspondió a mí, entonces principiante en estos estudios, que desde un único aspecto de una demostración sobre la magnitud de la superficie esférica se me apareciera de repente la gran luz [...] hasta que finalmente encontré el verdadero suplemento del Álgebra para las trascendentes, es decir, mi cálculo de los infinitamente pequeños, o diferencial o sumatorio o de cuadraturas, y si no me engaño es lo que llamo acertadamente *Análisis de los indivisibles y de los infinitos*, que, una vez encontrado, todo lo que antes me causaba admiración en este campo ahora me parece un juego y una broma". LEIBNIZ, G. W., *Análisis infinitesimal*, pp. 26-27.

que desde muy joven estuvo familiarizado con las matemáticas[9], consideró importante redactar un breve manuscrito con algunas consideraciones en torno a la nueva herramienta del cálculo infinitesimal, y aprovechar para leerlo en la sesión que le correspondía de la sociedad filosófica de Dublín.

2. EL ORIGEN DE LA CRÍTICA A LOS INFINITESIMALES[10]

El escrito *Of Infinites* además de breve es muy puntual y claro en sus propósitos, pues no contiene ningún prolegómeno o estudio introductorio del método infinitesimal, sino que evita cualquier preámbulo para dirigirse directamente a su objetivo. Esto se debió probablemente al poco tiempo que el locutor tenía para leer su escrito, o bien a que sabía que el público al que dirigía sus palabras era conocedor del tema que abordaría, y por lo tanto resultaba innecesario introducirlo al mismo. Sea o no por algunos de estos motivos, lo cierto es que ya desde las primeras líneas Berkeley se expresa sobre los "avances prodigiosos" de los

9 Hay que recordar que las primeras obras publicadas por Berkeley fueron sobre matemáticas: *Arithmetica* y *Miscellanea Mathematica*, ambas de 1707, es decir, del mismo año en que fue pronunciado *Of Infinites*. Por otro lado, es interesante saber que George Ashe (1659-1718) fue un importante profesor de matemáticas del Trinity College y después rector del mismo, de 1692 a 1695; esto permite suponer que se interesó en reforzar el área y la enseñanza de las matemáticas en dicha institución, lo que afectó directamente la educación recibida por Berkeley.

10 Probablemente la concepción de Berkeley de los infinitesimales tiene relación con la distinción aristotélica entre *infinito potencial e infinito actual* (*Física*, III). Al establecer que sólo existe el infinito potencial (para Kline "los enteros positivos son potencialmente infinitos porque siempre podemos añadir 1 a cualquier número y obtener otro distinto, pero el conjunto infinito, como tal, no existe. La mayor parte de las magnitudes, incluso, no pueden ser ni siquiera potencialmente infinitas porque si se añadieran de una manera indefinida podrían exceder los límites del universo" [Kline, p. 85]) se pregunta si el infinito es posible en las entidades matemáticas y en las que son inteligibles y no tienen magnitud, a lo que arguye: "Pero lo que aquí estamos examinando son las cosas sensibles y sobre ellas recae nuestro estudio, y lo que nos preguntamos es si hay entre ellas un cuerpo que sea infinito por aumento. Ahora bien considerando el problema según razones generales parece que no lo hay. Porque si la definición de cuerpo es 'lo que está limitado por una superficie', entonces no puede haber un cuerpo infinito, ni inteligible, ni sensible. Tampoco puede haber un número infinito separado [i.e., que sólo puede haber un número numerado], pues un número, o lo que tiene número, es numerable; y si fuese posible numerar lo que es numerable entonces sería posible recorrer el infinito" (*Física*, III, 5 204a35 - 204b9).

Para Aristóteles, por tanto, lo infinito sólo existe potencialmente y no actualmente, pues no existe como elemento constitutivo de las cosas; él mismo precisa que mientras en las magnitudes sólo hay infinito potencial por división, en los números sólo lo hay por adición, por eso no puede haber un número infinito ya que al numerarlo queda *de facto* limitado, lo que implica que sólo podemos conocer una totalidad finita, aunque ésta pueda aumentarse sucesivamente.

matemáticos, y sobre los "admirables" métodos de investigación que desarrollaron, en términos dubitativos, pues muestra una clara incertidumbre cuando menciona que "sin embargo, hay algo en sus principios que ocasiona muchas controversias y disputas, para gran escándalo de la tan celebrada evidencia de la Geometría"[11]. En su opinión, estas disputas se originaron por la introducción y uso de cantidades infinitamente pequeñas, las cuales podrían solucionarse "fácilmente" si uno se atuviera a lo dicho por Locke en el libro segundo de su *Ensayo sobre el entendimiento humano*.

2.1 Locke y la tesis ideísta

El capítulo XVII del segundo libro del *Ensayo* está dedicado al tema de la infinitud. En dicho capítulo el filósofo de Wrington señaló que la mejor manera para hacerse de la idea de infinitud era a través de los números ("pero de todas las ideas es el número el que, como he dicho, nos proporciona la idea más clara y distinta de la infinitud que somos capaces de tener"[12]), ya que tal idea procedía de la contemplación de una cantidad que la mente podía incrementar a voluntad; sin embargo, en el parágrafo séptimo del mismo capítulo (*Ensayo* II, XVII, 7) consideró que se cometía un error cuando una vez formada la idea de infinitud se unía ésta a cualquier cantidad que la mente poseyera, creyendo con ello tener ideas tales como "duración infinita" o "espacio infinito". En ese mismo parágrafo Locke pensó que mientras la idea de infinitud es una idea en crecimiento sin fin, la idea que tiene la mente de cualquier cantidad está en ese momento terminada en esa idea, pues cuando se piensa en una cantidad cualesquiera sólo se tiene, en ese momento, esa cantidad específica y no otra. Lo que esto implicaba es que cuando se unía la idea de infinitud a una cantidad, lo que se estaba haciendo era adaptar una medida fija a una cantidad en constante aumento; como esto resultaba confuso al pensamiento era necesario distinguir entre la infinitud y lo infinito o, en sus propias palabras, entre la idea de "infinitud del espacio" y la idea de "espacio infinito".

En relación con la primera idea, la de infinitud del espacio, ésta podía ser captada porque hacía referencia a "una progresión sin fin que se supone que hace la mente por la repetición de aquellas ideas de espacio que escoge a voluntad"[13], mientras que no era posible que la mente tuviese la idea de espacio infinito porque hacerlo, creía Locke, era "tanto como suponer que la mente ya ha recorrido,

11 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 235.

12 LOCKE, J., *An Essay concerning Human Understanding*, II, XVII, 9, p. 215.

13 *Ibidem*, II, XVII, 7, p. 213.

y que realmente contempla, todas aquellas ideas repetidas de espacio, que una repetición sin fin no podrá nunca ofrecerle totalmente; lo cual contiene en sí una contradicción manifiesta"[14].

En cuanto a Berkeley, hay que recordar que durante sus años de juventud no sólo fue un estudioso de Locke, sino incluso, y por momentos, un ferviente lockeano. Su etapa de gran filiación con el inglés se ve precisamente en esta alocución de 1707, pues fue su admiración y cercanía con él la que lo llevó a compartir, en aquellos años, algunos de sus postulados filosóficos; esto se ve reflejado en su escrito, cuando luego de haber citado un párrafo del *Ensayo* mencione lo siguiente: "Ahora bien, si lo que dice el señor Locke se aplicase *mutatis mutandis* a cantidades infinitamente pequeñas, sin duda nos sacaría de esa oscuridad y confusión que de otra manera entorpecen las grandes mejoras del Análisis Moderno"[15]. La cita muestra que Berkeley se mostraba confiado en que todo aquél que siguiera los argumentos del filósofo de Wrington, esto es, que distinguiera entre infinitud del espacio y espacio infinitamente grande o pequeño, y quien considerase que podía tener una idea de lo primero, pero ninguna de lo último, se evitaría múltiples confusiones, pues "difícilmente irá más allá de sus nociones para hablar de partes infinitamente pequeñas o *partes infinitesimae* de cantidades finitas, y mucho menos de *infinitesimae infinitesimarum* y así sucesivamente"[16].

En gran medida el rechazo que a finales de 1707 hizo Berkeley de la existencia de infinitesimales tiene que ver con la distinción, antes mencionada, entre infinitud e infinito, que se basa enteramente en la llamada tesis ideísta de Locke, la cual -como su nombre indica- tiene su fundamento en su concepción de idea, a la que definió en el *Ensayo* como "todo aquello que la mente percibe en sí misma" o "todo aquello que es el objeto inmediato de percepción, de pensamiento o de entendimiento" (II, VIII, 8). Esta tesis, además de ideísta, era también semántica y epistémica porque refería a que no había palabra o expresión significativa, es decir, que estuviese dotada de sentido, a menos que remitiera a una idea, lo que implicaba que para que hubiese conocimiento toda palabra enunciada tenía

14 *Ibidem*, pp. 213-214. Los demás argumentos de Locke sobre la infinitud están en el *Ensayo,* II, XVII, 7-22, pp. 213-223. Conviene aclarar que Locke no negó la existencia del espacio infinito: "Pero es asunto muy diferente saber si semejante espacio ilimitado, del que la mente tiene idea, existe realmente, porque nuestras ideas no siempre son prueba de la existencia de las cosas; sin embargo, puesto que esta cuestión se atraviesa en nuestro camino, diré que propendemos a pensar que el espacio es, de hecho, en sí mismo ilimitado, suposición a la cual nos conduce naturalmente la idea del espacio o expansión". *Ensayo*, II, XVII, 4, p. 211.

15 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 235.

16 *Idem*.

que generar una idea en la mente[17]. Precisamente la influencia de esta tesis 'semántico-epistémica ideísta', también presente en los *PC*[18], es la que lo llevó a escribir lo siguiente sobre los matemáticos:

> ellos representan en papel infinitesimales de varios órdenes, como si tuviesen en sus mentes ideas que correspondiesen a esas palabras o signos, o como si no incluyese una contradicción que hubiese una línea infinitamente pequeña y aún otra infinitamente menor que esa. A mí me es claro que no debemos usar ningún signo sin una idea que le corresponda y es muy claro que no tenemos ninguna idea de una línea infinitamente pequeña, y no sólo eso sino que es imposible que pueda haber alguna cosa así, pues toda línea, por pequeña que sea, es aún divisible en partes menores que ella misma. Por tanto, no puede haber ninguna cosa tal como una línea *quavis data minor* o infinitamente pequeña[19].

2.2 La crítica a los fundamentos: John Wallis

Además de la tesis ideísta de Locke, Berkeley cuestionó los infinitesimales a partir de la *Arithmetica Infinitorum* de Wallis, donde luego de analizar el resultado de éste sobre la cuadratura de la hipérbola concluyó que un infinitesimal,

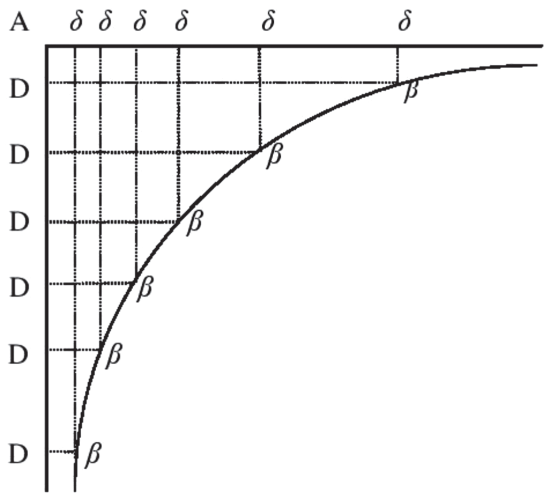
17 Para Berkeley una 'idea' era un ser pasivo que podía ser una imagen formada por la imaginación y la memoria o una sensación captada a través de los sentidos.

18 En *PC* 354-354a Berkeley aún sostenía la tesis semántico-ideísta de Locke: "x Axioma. Ningún razonamiento acerca de cosas de las que no tenemos ninguna idea. Por tanto ningún razonamiento acerca de Infinitesimales". "x ni puede objetarse que razonamos acerca de Números que son sólo palabras y no ideas, pues estos Infinitesimales son palabras, inútiles, si no suponemos que representan Ideas". Meses después, aún en los *PC*, comenzará a abandonar esta tesis en favor de la teoría del lenguaje emotivo, que ya aparece en los *Principios* (Intro. § 20). En un artículo sobre el conflicto semántico en los *PC*, Belfrage desarrolla los posibles motivos que llevaron a Berkeley a abandonar la tesis ideísta de Locke o "Lockean theory of meaning". BELFRAGE, B., *The Clash on semantics in Berkeley´s* '*Notebook A*', pp. 117-126.

19 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 235-236. Para Jesseph la frase "pues toda línea, por pequeña que sea, es aún divisible en partes menores que ella misma" es problemática y plantea la hipótesis de si con ella Berkeley estaba matizando, o aparentemente aceptando, la tesis de la divisibilidad infinita. El comentarista plantea que esas líneas se pudieron deber a que en la sala se encontraba el ya mencionado George Ashe, para entonces obispo de Clogher, que como matemático tenía especial interés en geometría y como miembro de la Dublin Philosophical Society presentó a la sociedad dos artículos sobre geometría dos meses antes de la alocución de Berkeley. Ashe, por cierto, fue quien tiempo después lo ordenó diácono, en febrero de 1709, y lo nombró tutor de su hijo, con quien Berkeley viajó por Europa de 1716 a 1720. El saber que estaba en la sala fue lo que, se arguye como hipótesis, lo motivó a no lanzar abiertamente su crítica a los infinitesimales y a la geometría clásica, y a guardarse para sí su "geometría radical" de los *minima*. Esta hipótesis se apoya en la última sección del *Ensayo sobre la visión*, donde Berkeley expresó su rechazo a hacer pública una concepción de geometría lejos de la opinión común. JESSEPH, D., *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*, p. 165.

incluso de primer grado, era "meramente *nada*". Esta aseveración, según menciona el propio filósofo, se centra en la proposición 95 de la mencionada *Arithmetica* ("Y por lo tanto la curva ββ es hipérbola, cuyo centro A es asintótico a AD, Aδ"[20]), pero en general tiene que ver con las proposiciones 91 a 105, donde Wallis considera las curvas asintóticas y su cuadratura.

Para hacer más claro lo dicho por el inglés conviene retomar un esquema usado por Jesseph, basado en la proposición 95 que habla de una curva ββ asintótica a las líneas AD y Aδ:



Acorde a este esquema, y a lo dicho por el autor de la *Arithmetica* en la proposición 91[21], el área encerrada por la curva y las asíntotas es la suma de las

20 Prop. 95: "Et propterea, ipsa curva ββ est Hyperbola; cujus centrum A, Asymptota AD, Aδ". WALLIS, J., *Arithmetica Infinitorum*, p. 71. Para demostrar esta proposición Wallis remite a la proposición 12, libro 2, de *Las Cónicas* del geómetra griego Apolonio de Pérgamo. *Vid*. *Las Cónicas de Apolonio* en VERA, F. (ed.), *Científicos griegos* (edición en español de Los Elementos de Euclides, Las Cónicas de Apolonio, la Aritmética de Diofanto y la Colección Matemática de Pappus de Alejandría).

21 "La figura plana, que consiste en una serie de líneas rectas de primer orden, es infinita en proporción recíproca, y lo mismo vale para todas las otras series recíprocas. Debido a que el primer término en la serie de líneas de primer orden es 0, el primer término en la serie recíproca será ∞ o infinito (tal como, en la división, si el divisor es 0 el cociente será infinito); y además, la línea recta Aδ y la curva ββ sólo se encontrarán después de una infinita distancia (es decir, nunca). Por la misma razón tampoco la curva ββ encontrará la línea AD (sin embargo continúan acercándose) hasta que la distancia Dβ se desvanezca, lo cual hará infinita a la línea recta AH. Figura plana ex serie rectarum primanis reciproce proportionalium conflanda, est interminabilis. Quod y similiter verum est de om-

líneas, estando cada término de la suma a una distancia recíproca de la ordenada. Wallis representó las series de líneas con el término *a*, en la forma *10a + 11a + 12a + 13a* …, y las llamó series de líneas rectas de primer orden[22]. Una vez establecida la serie concluyó que el área encerrada por la hipérbola era infinita, puesto que estaba representada por una serie de líneas de primer orden. Berkeley rechazó este método por considerar que lo que mostraba era que la parte infinitesimal de una línea era nada o, en su defecto, una línea de longitud cero, pues hablando sobre el propio Wallis señaló que éste:

> hace que el espacio asintótico incluido entre dos asíntotas y la curva de una hipérbola sea, conforme a su estilo, una *series reciproca primanorum*, de tal manera que el primer término de la serie, a saber, la asíntota, surge de la división de 1 entre 0. Puesto que la unidad, esto es, cualquier línea finita dividida entre 0 da la asíntota de una hipérbola, es decir, una línea infinitamente larga, se sigue necesariamente que una línea finita dividida entre una infinita da 0 como cociente, esto es, que la *pars infinitesima* de una línea finita es tan sólo nada, pues por la naturaleza de la división el dividendo dividido entre el cociente da el divisor[23].

Dicho lo anterior, Berkeley concluyó respecto al inglés que "difícilmente se supondrá que un hombre que habla de líneas infinitamente pequeñas quiera decir algo con esto, y si entiende las cantidades finitas reales caerá en dificultades inextricables"[24]. Para los objetivos de *Of Infinites* era importante objetar a Wallis, ya que al ser considerado uno de los practicantes más serios y audaces del método infinitesimal del siglo XVII, cuestionarlo conllevaba implícitamente controvertir al propio método infinitesimal. La controversia que Berkeley sostuvo en su escrito mostró algo realmente importante, a saber, que se había percatado de las inconsistencias en torno al fundamento de los infinitesimales, ya que si las magnitudes infinitas eran introducidas en el análisis surgía el problema de si éstas respondían o no a las leyes ordinarias de la adición, sustracción, multiplicación y división. Por ello criticó que si se asumía que los infinitesimales se ajustaban a las leyes de la aritmética, entonces podría mostrarse que una cantidad infinitesimal era de hecho cero; de ser así, parecería que el propio método del cálculo podría reescribirse

---

nibus seriebus reciprocis. Cum emin primus terminus sit o, primus terminus in serie reciproca erit ∞ vel infinitus: (sicut, in divisione, si divisor sit o, quotiens erit infinitus). Adeoque recta Aδ, et curva ββ, non nisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam) concurrent. Pari rationi neque concurrent (nisi post infinitam distantiam) eadem curva ββ y recta AD (quantumvis utraque continuetur) non prius enim evanescet distantia Dβ quam facta suerit infinita recta Dβ y propterea…". *Ibidem*, p. 70.

22 También hay series de otros órdenes, como las de segundo orden, que serían del tipo: *10a2 + 11a2 + 14a2* …, y que Berkeley igualmente rechazaría al considerarlas "infinitesimae infinitesimarum".

23 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 236.

24 *Idem*.

con ceros en lugar de con infinitesimales, algo evidentemente absurdo. Por otro lado, si el infinitesimal no respondía a las leyes ordinarias de la aritmética entonces cabría preguntarse si verdaderamente se trataba de una cantidad real. Todas estas interrogantes permitían colegir, en opinión del irlandés, que las operaciones del cálculo basadas en la división y adición de magnitudes infinitesimales carecían de fundamentos. Conviene recordar que a partir de su crítica a Wallis, Berkeley mostró con agudeza el problema, irresoluble en su época, de la necesidad de desarrollar una explicación plausible y bien fundamentada de las magnitudes que daban cabida a los infinitesimales.

2.3 La disputa Leibniz-Nieuwentijt

De igual importancia en *Of Infinites* resulta la alusión a la controversia, suscitada a finales del siglo XVII, entre el matemático Bernard Nieuwentijt y Leibniz. La disputa entre ambos[25] se originó cuando el holandés publicó en 1694 sus *Considerationes circa analyses ad quantitates infinite parvas applicatae principia et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*.

En esta obra Nieuwentijt criticó que las magnitudes infinitamente pequeñas, usadas en el cálculo diferencial leibniziano, eran tratadas como cero o nada. Argumentó que si la noción de una magnitud infinitamente pequeña fuese admitida, entonces todas las diferencias de orden superior tendrían que ser consideradas como igual a cero. Nieuwentijt buscó desarrollar una versión del cálculo infinitesimal que contuviera sólo diferenciales de primer orden, y permitiera calcular diferenciales infinitamente pequeños sin que fueran rechazados[26]. Justificó su postura crítica, de que el cálculo trataba infinitesimales de primer orden como cero, sirviéndose de un ejemplo de las *Lectiones Geometricae* de Barrow, donde un infinitesimal era rechazado en el cálculo de una tangente.

25 Las diferencias entre Leibniz (*L*) y Nieuwentijt (*N*) fueron las siguientes: L_1) los infinitesimales son variables, L_2) existen infinitesimales de orden superior, L_3) los productos de los infinitesimales no son ceros absolutos y L_4) los infinitesimales pueden ser rechazados cuando sean infinitamente pequeños en relación con otras cantidades. N_1) los infinitesimales son constantes, N_2) no existen infinitesimales de orden superior, N_3) los productos de los infinitesimales son ceros absolutos y N_4) los infinitesimales de primer orden no pueden ser rechazados. *Vid*. GOLDENBAUM, U., JESSEPH, D. (eds.), *Infinitesimal Differences. Controversies between Leibniz and his Contemporaries*.

26 JESSEPH, D., *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*, p. 169. Jesseph pone como ejemplo de Nieuwentijt el que haya tomado la derivada de la ecuación $y = 2x^2 + 3x$ como $dy/dx = 4x + 2dx + 3$, reteniendo el término 2dx en el lado derecho de la ecuación.

En relación a lo anterior, fue en la sección primera de sus *Considerationes* donde Nieuwentijt señaló sobre Barrow que "el afamado autor explica esta tesis en su razonamiento: Si una cantidad determinada tiene un radio mayor que cualquier otro asignable a cualquier otra cantidad, el último será igual a cero"[27]. El holandés insistió en el principio de que dos cantidades sólo podían ser llamadas iguales si no tenían diferencia alguna, de modo que dos magnitudes que diferían por una cantidad infinitamente pequeña no eran *stricto sensu* iguales. Este principio lo expuso en la sección segunda de su obra: "Declaro que esta proposición es indubitable y contiene en sí misma, con la mayor evidencia, ciertas señales de verdad: *las cantidades sólo son iguales cuando su diferencia es cero o igual a nada*"[28]. Si bien el objetivo de este principio era eliminar la práctica habitual de rechazar cantidades infinitamente pequeñas en el análisis, eso no significa que se opusiera al uso de infinitesimales, más bien pugnaba porque sólo se aceptasen los de primer orden. Al respecto Jesseph señala lo siguiente:

> [Nieuwentijt] parece haber pensado que la divisibilidad infinita de una cantidad legitimaba las magnitudes infinitesimales, pero introdujo un principio, enunciado en su *Analysis infinitorum*, que haría que cualquier supuesto diferencial de orden superior fuera igual a cero: *Cualquier cosa que sea tomada por un número, pero que no pueda ser multiplicado tanto como para ser igual a cualquier cantidad dada, por muy pequeña que sea su magnitud, no es una cantidad, sino que es simplemente nada en cuestiones geométricas*[29].

La idea de Nieuwentijt, por tanto, era que un diferencial de primer orden, tal como dx, podía ser multiplicado infinitamente para que fuera igual a cualquier cantidad dada, pero un diferencial de segundo orden, tal como dx^2, era menor a cualquier cantidad dada, incluso si fuera multiplicado infinitamente, lo que traía como consecuencia que debía considerársele como nada.

La respuesta del nacido en Leipzig no fue del todo convincente, pues pareció confesar que una diferencia infinitesimal era tan diminuta que realmente no era una diferencia como tal, ya que las cantidades que diferían por una cantidad infinitesimal bien podrían ser consideradas iguales. Esta respuesta se dio a través de una carta aparecida en julio de 1695 en la revista científica alemana *Acta Eruditorum* (publicada en Leipzig de 1682 a 1731 y luego hasta 1782 con el nombre de *Nova Acta Eruditorum*), en la que Leibniz arguyó:

27 NIEUWENTIJT, B., *Considerationes circa analyses ad quantitates infinite*, p. 6.

28 *Ibidem*, p. 10.

29 JESSEPH, D., *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*, p. 169.

> Pienso que aquellas cosas son iguales no sólo porque su diferencia sea absolutamente ninguna, sino también porque su diferencia es incomparablemente pequeña, y aunque esta diferencia no necesita ser llamada absolutamente nada, tampoco es una cantidad comparable con aquello cuya diferencia lo es. De la misma manera que si se altera una línea añadiéndole un punto, o una línea a una superficie, la cantidad no aumenta, es lo mismo si añades a una línea otra línea, pero una incomparablemente menor; y no cualquier incremento puede mostrarse en cualquier tipo de construcción[30].

En su alocución de 1707 Berkeley respondió a la controversia de Leibniz[31] con el matemático holandés mediante el siguiente argumento:

> Así mismo el señor Nieuwentijt presenta esto como un axioma evidente de suyo, a saber, que entre dos cantidades iguales no puede haber ninguna diferencia, o, lo que es lo mismo, que su diferencia es igual a nada. Esta verdad, por clara que sea, el señor Leibniz se apega a negarla, aseverando que son iguales no sólo esas cantidades que no tienen diferencia alguna, sino que también lo son aquellas cuya diferencia es incomparablemente pequeña. *Quemadmodum* (dice) *si lineae punctum lineae addas quantitatem non auges.* Pero si las líneas son infinitamente divisibles pregunto, ¿cómo puede haber cosa tal como un punto? O concediendo que haya puntos, ¿cómo puede pensarse que es la misma cosa añadir un punto indivisible que añadir, por ejemplo, la *differentia* de una ordenada, en una parábola, que tan lejos está de ser un punto que ella misma es divisible en un número infinito de cantidades reales, de las que cada una puede subdividirse *in infinitum* y así sucesivamente conforme al señor Leibniz?[32]

Berkeley coligió que la disputa entre ambos matemáticos, generada entre otras cosas por la falta de claridad sobre algunos conceptos fundamentales del

30 La respuesta lleva por título *Responsio ad nonnullas difficultates, a Dn. Bernardo Niewentyt circa methodum differentialem seu infinitesimalem motas*. La cita dice: "Caeterum aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia est incomparabilitir parva; et licet ea Nihil omnino dici non debeat, non tamen est quantitas comparabilis cum ipsis, quorum est differentia. Quemadmodum si lineae punctum alterius lineae addas, vel superficiei lineam, quantitatem non auges. Idem est, si lineam quidem lineae addas, sed incomparabiliter minorem. Nec ulla constructione tale augmentum exhiberi potest". LEIBNIZ, G. W., *Opera omnia*, vol. 3, p. 328.

31 En *De Infinitos* Berkeley no aborda explícitamente las obras leibnicianas *Nova Methodis* o *De Geometria recóndita*, sino que se limita a mencionar la disputa de Leibniz con Nieuwentijt aparecida en el *Acta Eruditorum*. Esto quizá se debió, como mencioné anteriormente, al poco tiempo que tenía para leer su escrito y a que, por lo mismo, no le interesaba emplearlo en explicar aspectos puramente matemáticos, pues quería centrarse en las consecuencias paradójicas que, según él, se desprendían de dichos aspectos. Como el objetivo del presente artículo es analizar la alocución berkeleyana me limitaré a lo que el propio autor señala en ella, posponiendo, para otra ocasión, lo dicho por Leibniz en las dos obras mencionadas.

32 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 237.

cálculo (que llevó a Nieuwentijt a rechazar la existencia de infinitos de órdenes superiores, a dudar de si existía o no diferencia entre un infinitesimal y cero, y a afirmar que entre dos cantidades iguales no podía haber diferencia alguna), no era sino resultado de "aplicar la idea de infinitud a partículas de extensión excesivamente pequeñas, pero reales y aún divisibles"[33].

Esta última cita se relaciona directamente con una anterior sobre los matemáticos, donde el de Kilkenny señaló que era imposible tener idea de una línea infinitamente pequeña porque toda línea, por pequeña que fuese, era aún divisible en partes menores a ella. Ambas citas, sumadas a lo dicho hasta aquí, ponen de manifiesto que para él había otro motivo para rechazar los infinitesimales además de la tesis ideísta de Locke, y que no tenía que ver con una cuestión puramente semántica sino más bien con una metodológica, pues consideraba que cualquier extensión, por excesivamente pequeña que fuese, era finita, lo que implicaba que era susceptible de seguir recibiendo nuevas divisiones. Berkeley aceptaba, junto con muchos matemáticos de la época, la continuidad de las magnitudes geométricas, esto es, la validez del 'axioma de Arquímedes' o 'axioma Eudoxo-Arquímedes', contenido en los *Elementos* de Euclides libro V def. IV[34], que sostiene que cualquier magnitud, por pequeña que sea, alcanzará cualquier otra magnitud, por grande que sea, si aquélla se multiplica un número finito de veces para lograr tal fin. Esto presupone que ambas magnitudes son finitas y que la división de cualquier magnitud, un número indefinidamente grande de veces, de ser eso factible, sólo podrá generar otra magnitud menor pero todavía divisible[35]. Berkeley, por tanto, aceptaba la divisibilidad de magnitudes finitas mas no la divisibilidad de infinitas, pues entre otras cosas era imposible tener idea de ellas.

De las citas mencionadas también se desprende que a partir de la continuidad, expresada en el mencionado axioma de Arquímedes, el joven filósofo rechazó, por cuestiones más bien lógicas, que una magnitud dividida infinitamente pudiese generar magnitudes infinitamente pequeñas, ya que si una magnitud podía ser divisible *ad infinitum* entonces no era posible hablar de cantidades infinitamente pequeñas (lo que aplicaría también a las infinitamente grandes), pues éstas siempre seguirían siendo divisibles.

33 *Idem*. *Vid*. VERMEULEN, B., "Berkeley and Nieuwentijt on infinitesimals". *Berkeley Newsletter*, no. 8, 1985.

34 Este axioma dice lo siguiente: "Las magnitudes tienen razón [proporción] entre sí cuando cada una puede ser multiplicada en aras de superar a la otra". Se cree que Eudoxo escribió los libros V y XII de los *Elementos*, por eso también se habla de axioma Eudoxo-Arquímedes.

35 ROBLES, J. A., *Los escritos matemáticos de George Berkeley*, pp. 51, 52 (notas 2 y 8).

En aras de fortalecer y reafirmar su postura crítica respecto a lo que consideraba falta de rigor en la fundamentación del nuevo método infinitesimal, Berkeley censuró el poco interés de Leibniz por esclarecer sus propios postulados. Para ello se refirió a la ya mencionada carta del *Acta Eruditorum*, en donde el alemán respondió a Nieuwentijt por los reproches de éste respecto a la fundamentación de su método en términos de *nimia scrupulositate arti inveniendi obex ponatur*, esto es, que "escrúpulos nimios no entorpezcan el arte de inventar"[36]. La respuesta de Leibniz indignó a Berkeley al grado de ironizar sobre la misma, al decir que: "como si un hombre pudiese ser demasiado escrupuloso en matemáticas o como si los principios de la geometría no debiesen ser tan indiscutibles como las consecuencias que se extraen de ellos"[37]. En relación a esto, y a modo de explicación, José Antonio Robles menciona que la matemática de esta época, siglos XVII y XVIII, vivía tal proceso de crecimiento y maduración que:

> los matemáticos más destacados -entre ellos cito a Newton, los Bernoulli, Huygens, el mismo Leibniz, etc.- no tenían demasiado tiempo para sentarse a pensar y escribir acerca de los fundamentos de su ciencia. Los matemáticos de segundo y tercer niveles mucho hicieron para confundir a sus contemporáneos acerca de tales fundamentos[38].

Esta falta de claridad es la que propició que Berkeley criticase a muchos matemáticos de su época, entre ellos a Leibniz[39], por considerar, por ejemplo, que una línea cualquiera realmente contenía un número infinito de partes, esto

36 La cita es parte de la respuesta a Nieuwentijt: "Ego quidem fateor magni me eorum diligentiam facere, qui accurate omnia ad prima principia usque demonstrare contendunt, & in talibus quoque studium non rarò posuisse; non tamen suadere, ut nimiâ scrupulositate arti inveniendi obex ponatur, aut tali prœtextu optime inventa rejiciamus, nosque ipsos eorum fructu privemus, quod & olim Patri Gottignies, & discipulis ejus circa Algebrae principia scrupulosis inculcavi". LEIBNIZ, G. W., *Opera omnia*, vol. 3, p. 328.

37 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 237.

38 ROBLES, J. A., *Estudios berkeleyanos*, p. 28.

39 El extracto siguiente de la carta de Leibniz a Pierre Varignon, del 20 de junio de 1702, sirve como ejemplo de lo que Berkeley criticó de algunos filósofos y matemáticos, al considerar que adoptaban una actitud falaz al asumir irreflexiva y acríticamente que los signos matemáticos realmente describían y reflejaban el mundo físico o natural. En la carta Leibniz señala lo siguiente respecto a los infinitesimales: "Entre nous je crois que Mons. de Fontenelle, qui a l'esprit galant et beau, en a voulu railler, lorsqu'il a dit qu'il vouloit faire des elemens metaphysiques de nostre calcul. Pour dire le vray, je ne suis pas trop persuadé moy même, qu'il faut considerer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses ideales ou comme des fictions bien fondées. Je croy qu'il n'y a point de creature au dessous de la quelle il n'y ait une infinité de creatures, cependant je ne crois point qu'il y en ait, ny même qu'il y en puisse avoir d'infiniment petites et c'est ce que je crois pouvoir demonstrer". LEIBNIZ, G. W., *Mathematische Schriften*, vol. 4, p. 110. Además, remito a GONZÁLEZ GILMAS, O., "El cálculo infinitesimal leibniciano: una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro".

es, porque no distinguían entre el signo universal utilizado para sus formulaciones, como era una línea cualquiera, y las propiedades del objeto concreto, la línea trazada, al que aplicaban la demostración. En gran medida esto es lo que lo llevó a establecer en los *PC* su *minimum sensibile*, esto es, lo mínimamente sensible que no contenía parte distinguible alguna, y que por ser el límite perceptual no había nada más allá de él[40].

2.4 Las críticas a Cheyne y Raphson

La misma falta de claridad que Berkeley criticó de Leibniz fue lo que lo llevó a rechazar lo dicho por el escocés George Cheyne, quien en el capítulo cuarto, § 6, de sus *Philosophical Principies of Natural Religion* (1705), abogó por la necesidad de las cantidades infinitamente pequeñas:

> Toda la geometría abstracta depende de la posibilidad de cantidades infinitamente grandes y pequeñas, y las verdades descubiertas por métodos que dependen de estas suposiciones se confirman por otros métodos que tienen otros fundamentos; y éstos están muy bien respaldados como para permitir cualquier vacilación en quienes están completamente familiarizados con esta ciencia. Los ejemplos son innecesarios, pues cualquiera que entiende estas cosas no necesita que se lo repitan[41].

Para Berkeley, contrario al físico escocés, suponer estas cantidades era totalmente innecesario porque no aportaban nada a los avances del análisis moderno, de ahí que para replicar a Cheyne dijera que "el señor Leibniz reconoce que su *Calculus differentialis* podría demostrarse por *reductione ad absurdum* a la manera de los antiguos y Sir Isaac Newton, en un último tratado, nos informa que su método de fluxiones puede obtenerse *a priori* sin suponer cantidades infinitamente pequeñas"[42]. La afirmación sobre Leibniz se basa en la mencionada carta del *Acta Eruditorum*, donde el alemán afirmó que su método podía ser demostrado por un procedimiento arquimedeano:

> Sostengo con Euclides, *Elementos* V, def. 5, que esas cantidades homogéneas son comparables a aquéllas que no pueden estar hechas para superar la una a la otra por multiplicación finita. Y las cosas que no difieren de tales cantidades comparables las tomo como iguales, algo que asume incluso Arquímedes y todos después de él; y esto es lo que se dice ser una diferencia menor que cualquier diferencia dada. En un

40 BERKELEY, G., *Philosophical Commentaries*, I, 439 y 464, entre otros, pp. 54 y 57-58 respectivamente.

41 CHEYNE, G. *Philosophical Principles of Natural Religion*, pp. 10-11.

42 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 237.

> procedimiento arquimedeano el asunto podría confirmarse por reducción al absurdo, pero debido a que el método directo es más fácil de comprender y más útil para descubrir nuevos resultados, es suficiente si éste es, de una vez y por todas, reducido al método indirecto, y después aplicado, en lo que cantidades incomparablemente pequeñas son rechazadas. Este procedimiento es sólido y conlleva su propia demostración acorde al lema comunicado por mí en febrero de 1689[43].

Por otro lado, cuando Berkeley habla del "último tratado" de Newton estaba pensando, según afirma Jesseph[44], en la Introducción al *Cuadratura de las Curvas*, dentro del *Tractatus de Quadratura Curvarum* publicada en 1704 como apéndice a la traducción latina de su *Optics*, donde el inglés señala que:

> En cantidades finitas formular un cálculo, y de este modo investigar la proporción entre la primera y la última de las nacientes o evanescentes cantidades finitas, es acorde a la geometría de los Antiguos; yo estaba queriendo mostrar que en el método de fluxiones no hay necesidad de introducir figuras infinitamente pequeñas en Geometría[45].

El último argumento contra los infinitos tiene que ver con las implicaciones teológicas derivadas de su uso[46]. Para Berkeley un caso especialmente alarmante fue el del inglés Joseph Raphson, matemático influido por los neoplatónicos Ralph Cudworth y Henry More, y por el método de fluxiones de Newton. La única referencia a Raphson se da a través de una cita, obtenida del capítulo tercero de

43 "Scilicet eas tantum homogeneas quantitates comparabilis esse, cum Euclide Lib. 5 defin. 5 censeo, quarum una numero, sed finito, multiplicata, alteram superare potest. Et quae tali quantitate non differunt, aequalia esse statuto, quod etiam *Archimedes* sumsit, aliique post ipsum omnes. Et hoc ipsum est, quod dicitur dierentiam esse data quavis minorem. Et *Archimedeo* quidem processu res semper deductione ad absurdum confirmari potest. Quoniam tanem methodus directa brevior est ad intelligendum, & utilior ad inveniendum, sufficit cognita semel reducendi via postea methodum adhiberi, in qua incomparabiliter minora negliguntur, quae sane & ipsa secum fert demonstrationem suam secundum lemmata a me Febr. 1689 communicata". LEIBNIZ, G. W., *Opera omnia*, p. 328. El lema al que se refiere Leibniz puede ser su escrito "Tentamen de motuum coeslestium causis", presentado en el *Acta Eruditorum* de febrero de 1689. DE LA FOND, S., *Elementos de Física teórica y experimental*, vol. 5, p. 341.

44 JESSEPH, D., *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*, p. 172.

45 NEWTON, I., *Two Treatises of the Quadrature of Curves and Analysis by Equations of and infinite Number of Terms*, p. 4.

46 En la parte final del escrito hay una referencia a la obra anónima del siglo XII *Liber viginti quattuor philosophorum*, cuando se señala que algunos autores modernos "no tienen escrúpulos para hablar de una esfera de radio infinito" (*Of Infinites*, IV, p. 238). La cita remite a la conocida definición, la segunda del libro, sobre que "Dios es la esfera infinita cuyo centro se halla en todas partes y la circunferencia en ninguna". El que Berkeley haya aludido a esta definición pudo deberse a la clara influencia que ejercía, y seguía ejerciendo en filósofos como Nicolás de Cusa y en pensadores contemporáneos suyos. *Vid*. HUDRY, F. (trad.), *Livre des vingt-quatre philosophes*.

su apéndice *De Spatio Reali seu Ente Infinito* (1702)[47], en donde habla de "una partícula infinitamente pequeña como si fuese *quasi extensa*"[48]. A partir de esta frase Berkeley señaló, a modo de crítica, que no comprendía qué quería decir el matemático al hablar de *pars continui quasi extensa*.

Hay que señalar que si bien en *Of Infinites* apenas hay indicios del caso Raphson, tan sólo una breve referencia, el verdadero motivo por el que se le menciona es porque en dicho apéndice el inglés cayó en el exceso de deificar el espacio al dotarle de trece atributos asignados tradicionalmente a Dios[49], tales como "indivisible", "acto puro", "infinito", "incorpóreo", "inmutable", "eterno", "omniabarcante y omnipenetrante", "la entidad más simple", "lo más perfecto en su clase", etc[50]. Raphson, como antes el neoplatónico More, consideró el espacio como una perfección y debido a su infinitud como una perfección divina, lo que lo llevó a considerar la extensión de Dios como espiritual e infinita[51] y, por lo tanto, a asumir que la deidad era infinitamente extensa.

Lo anterior, esto es, hacer a Dios extenso, traía consigo múltiples consecuencias, una de ellas era que, de ser extenso, se le podría someter a dimensiones, figuras, e incluso a partes, que al poder ser medidas geométricamente harían de él algo divisible; otro problema igualmente grave era que al hacerlo extensamente infinito fácilmente se podría caer en el panteísmo, pues Dios formaría parte, es decir, conformaría, prácticamente cualquier extensión existente. Ambas consecuencias, junto con muchas otras que podrían colegirse, le parecían a Berkeley peligrosas además de deleznables y dañinas, y no sólo para la religión sino también para el conocimiento mismo; justamente para rechazar este tipo de posturas es que redactó, tres años después de pronunciada su conferencia, su famoso *Tratado sobre los principios del conocimiento humano* (1710), obra con la que pretendió combatir los fundamentos del escepticismo, el ateísmo y la irreligión, que entre otras cosas se servían de argumentos como los de Raphson.

47 El *De Spatio Reali* fue el segundo apéndice que Raphson añadió a su obra *Analisis aequationem Universalis seu ad aequationes Algebraicas Resolvendas Methodus Generalis et Expedita, Ex Nova Infinitarum Serierum Methodo, Deducta ac Demonstrata* (1697). El primer apéndice, publicado junto con el *Analisis*, se intituló *Infinito Infinitarum Serierum*.

48 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 238.

49 Esta referencia está en la carta de Berkeley a Johnson del 24 de marzo de 1730. HIGHT, M. A., *The Correspondence of George Berkeley*, p. 318.

50 KOYRÉ, A., *From the Closed World to the Infinite Universe*, p. 190 ss.

51 BENÍTEZ, L., ROBLES, J. A., *El espacio y el infinito en la modernidad*, pp. 143-149. Hay que recordar el debate entre Henry More y Descartes sobre la inmensidad de Dios: si Dios era infinito, ¿podía tener infinitud espacial? De tenerla entonces Dios sería extenso. Para More Dios era extenso pero no material (esto ha sido llamado 'plenismo' y es, por ejemplo, la postura de Leibniz), mientras que para Descartes Dios no era extenso (esta postura ha sido llamada 'vacuismo').

En relación a esto último es interesante citar las últimas líneas con las que termina la alocución, pues resultan muy esclarecedoras para comprender mejor el motivo central de su crítica a los infinitesimales. Así, el escrito pronunciado el 19 de noviembre de 1707 concluyó con las siguientes palabras: "cesarían todas las disputas acerca de los infinitos, y ya no confundiría a los matemáticos la consideración de las cantidades infinitamente pequeñas, si tan sólo unieran la metafísica a su matemática"[52].

3. CONCLUSIONES

Pese a que Berkeley pronunció su conferencia con veintidós años, para entonces su pensamiento filosófico estaba bastante definido. Por eso algunos de los argumentos esgrimidos en *Of Infinites* sirvieron de antesala a su obra publicada, tanto a los *Principles* como sobre todo a *The Analyst*, donde ya vincula coherentemente la crítica a los infinitesimales con su inmaterialismo, mostrando de paso con ello su concepción instrumentalista de la ciencia[53].

En esta alocución destaca la tesis ideísta de Locke (abandonada al poco tiempo por sus limitaciones pero recuperada para *The Analyst*), usada para rechazar la existencia de partes infinitamente pequeñas. Sirviéndose de ella el irlandés criticó la práctica de algunos matemáticos de pasar del espacio infinitamente divisible (subjetivo) al espacio infinitamente dividido (objetivo), esto es, de pasar indiscriminadamente de lo matemático al mundo físico. En otras palabras, el joven filósofo asumió una postura crítica porque ya tenía claro su rechazo a la práctica de que mediante demostraciones simbólico-matemáticas, como las que llevaban a la divisibilidad infinita de magnitudes, se coligiera una infinidad empírica de mundos contenidos en las partículas de dichas magnitudes sensibles. Este salto cualitativo que hacían algunos pensadores modernos, y que tanto censuró Berkeley, se ejemplifica en los casos de Galileo[54],

52 BERKELEY, G., *Of Infinites*, IV, p. 238.

53 *Vid*. HIGHT, M. A., "Berkeley's Metaphysical Instrumentalism", pp. 15-29.

54 En su *Discorsi e Dimonstrazioni Matematiche intorno a due nove Scienze* (1638) Galileo, a través del personaje Salviati, señaló: "Ci sono veramente coteste, e dell'altre: ma ricordiamoci che siamo tra gl'infiniti e gl'indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la lor grandezza, e questi per la lor piccolezza. Con tutto ciò veggiamo che l'umano discorso non vuol rimanersi dall'aggirarsegli attorno [...] Avrò qualche mio pensiero particolare, replicando prima quel che poco fa dissi, cioè che l'infinito è per sé solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile". GALILEI, G., *Le opere di Galileo Galilei*, vol. VIII, pp. 73 y 76-77 respectivamente.

Arnauld y Nicole[55] y el propio Leibniz, quienes creyeron plenamente en la divisibilidad infinita pese a aceptar, y excusarse por ello, que no la comprendían cabalmente debido -aludían- a los límites del entendimiento humano[56]. Tales comportamientos fueron, en parte, los que propiciaron el rechazo al método infinitesimal, y no sólo por la confusión manifiesta de tales pensadores sino, sobre todo, por las consecuencias epistémicas que se desprendían de ello[57]. En este sentido el rechazo a los infinitesimales se dio "no simplemente porque no podamos verlos, sino porque no podemos imaginarlos. La misma descripción de una magnitud infinitamente pequeña contiene una contradicción, y no hay más razón para construir una teoría de los infinitesimales que para desarrollar una geometría de cuadrados redondos"[58]. A lo que esta cita apunta es a que parte del rechazo a la formulación leibniziana del cálculo, y a las cantidades infinitamente pequeñas, se debe a que para Berkeley ésta abandonó el criterio de rigor matemático, esto es, la exigencia de que los principios de la demostración deben ser claros e indubitables, mientras que las cantidades infinitamente pequeñas hacían que los objetos de la investigación matemática no fueran claramente concebibles.

Berkeley, por tanto, se sirvió de esta alocución para censurar que muchos matemáticos de la época estaban más ansiosos por aplicar los nuevos métodos que por clarificar los fundamentos de éstos; pese a ello, es importante aclarar que más que rechazar *per se* los resultados del método infinitesimal lo que el filósofo pretendía, algo que volvió a señalar en *The Analyst*, era que dicho método se reformulara o, mejor aún, que se encontrara uno nuevo, con el que pudieran evitarse los muchos problemas y confusiones que aquél traía consigo.

55 En su *Lógica* (1662) Arnauld y Nicole arguyeron, al hablar de la divisibilidad infinita, que "Toutes ces choses sont inconcevables; & neanmoins il faut necessairement qu' elles soient, puisque l`on démontre la divisibilité de la matiere à l´infini, & que la Geometrie nous en fournit des preuves aussi claires que d'aucune des verités qu´elle nous découvre". ARNAULD, A. NICOLE, P., *La logique ou l´art de penser*, p. 297.

56 Recomiendo leer las citas, que ilustran esta cuestión, de J. Keill (su propuesta descriptivista), de Galileo y de Henry Power. *Vid*. BENÍTEZ, L., ROBLES J. A., *op. cit*., pp. 40-47.

57 Esta postura, que transitaba de lo matemático a lo físico sin delimitar cada uno de los campos, seguramente se apoyó en los descubrimientos microscópicos del siglo XVII, entre los que destacan el caso de Hooke y Leeuwenhoek, pues para muchos representaron el apoyo empírico al argumento matemático de la divisibilidad al infinito. Es probable que otra influencia fuera la de Malebranche, quien a través de su teoría de la preexistencia, más conocida como teoría de las "muñecas rusas" (*emboîtement*), influyó fuertemente en Leibniz. MALEBRANCHE, N. *Recherche de la Verité*, I, VI (vol. 1) y *Entretiens sur la métaphysique et sur la religion*, 229 JS 175-176 (vol. XII).

58 JESSEPH, D. *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*, p. 165-166.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARISTÓTELES, *Física*. México: UNAM (edición bilingüe, Bibliotheca scriptorvm graecorvm et romanorvm mexicana), 2001.

ARNAULD, A., NICOLE, P., *La logique ou l´art de penser*. Paris: J. Vrin, 1993.

BELFRAGE, B., "The Clash on semantics in Berkeley´s Notebook A". *Hermathena* vol. 139, 1985, pp. 177-126.

BENÍTEZ, L., ROBLES, J., *El espacio y el infinito en la modernidad*. México: Publicaciones Cruz O, 2000.

BERKELEY, G., *The Works of George Berkeley, Bishop of Cloyne*. A. A. Luce, T. E. Jessop (eds.), London: Nelson & Sons Ltd., 9 vols., 1948-1957.

BROOK, R., *Berkeley´s Philosophy of Science*. The Hague: Martinus Nijhoff, 1973.

COLLETTE, J. P., *Historia de las matemáticas*. México: Siglo XXI, 2 vols., 1986.

CHEYNE, G., *Philosophical Principles of Natural Religion*. London: G. Strahan, 1705.

DE LA FOND, S., *Elementos de Física teórica y experimental*. Madrid: Imprenta Real, 7 vols., 1789.

GALILEI, G., *Le opere di Galileo Galilei*. Firenze: Edizione Nazionale, 20 vols., 1890-1909.

GOLDENBAUM, U., JESSEPH, D. (eds.), *Infinitesimal Differences. Controversies between Leibniz and his Contemporaries*. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.

GONZÁLEZ GILMAS, O., "El cálculo infinitesimal leibniciano: una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Ishiguro". *Signos Filosóficos*, vol. VI, no. 11, 2004, pp. 97-120.

HIGHT, M. A. (ed.), *The Correspondence of George Berkeley*. New York: Cambridge University Press, 2013.

______. "Berkeley's Metaphysical Instrumentalism". En: PARIGI, S. (Ed.), *George Berkeley. Religion and Sciencie in the Age of Enlightenment*. Dordrecht: Springer, 2011, pp. 15-29.

HUDRY, F. (trad.), *Livre des vingt-quatre philosophes*. Paris: J. Vrin, 2009.

JESSEPH, D., *Berkeley´s Philosophy of Mathematics*. Chicago: The University of Chicago Press, 1993.

KLINE, M., *El pensamiento matemático desde la antigüedad a nuestros días*. 2ª ed. Madrid: Alianza, 1999.

KOYRÉ, A., *From the Closed World to the Infinite Universe*. Baltimore: The John Hopkins Press, 1957.

LEIBNIZ, G. W., *Análisis infinitesimal*. Madrid: Tecnos, 1987.

______. *Mathematische Schriften*. C. I. Gerhardt (ed.), Hildesheim: Georg Olms, 7 vols., 1962.

______. *Opera omnia*, Louis Dutens (ed.), Geneva: Fratres des Tournes, 6 vols., 1768.

LOCKE, J., *An Essay concerning Human Understanding.* Oxford: Oxford University Press, 1979.

MALEBRANCHE, N., *Oeuvres Complètes*. A. Robinet (ed.), Paris: J. Vrin, 20 vols., 1958-78.

NEWTON, I., *Two Treatises of the Quadrature of Curves and Analysis by Equations of and infinite Number of Terms*. London: James Bettenham, 1745.

NIEUWENTIJT, B., *Considerationes circa analyses ad quantitates infinite parvas applicatae principia et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*. Amsterdam: Wolters, 1694.

______. *Analysys infinitorum, seu curvlineorum propietates ex polygonorum datura deductae*. Amsterdam: Wolters, 1695.

______. *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia; et responsio ad virum noblissimum G. G. Leibnitium*. Amsterdam: Wolters, 1696.

PAPPAS, G., "Science and Metaphysics in Berkeley". *International Studies in the Philosophy of Science*, vol. 2, no.1, 1987, pp. 105-114.

PETERSCHMITT, L., "Berkeley et les hypothèses mathématiques". *Archives internationales d´histoire des sciences*, vol. 53, no. 150-151, 2003, pp. 184-197.

ROBLES, J. A., *Estudios berkeleyanos*. México: IIF´s-UNAM, 1990.

______. *Las ideas matemáticas de George Berkeley*. México: IIF´s-UNAM, 1993.

______. *Los escritos matemáticos de George Berkeley y la polémica sobre El analista*. México: IIF´s-UNAM, 2006.

VERA, F. (ed.), *Científicos griegos*. Madrid: Aguilar, 1970.

VERMEULEN, B. "Berkeley and Nieuwentijt on infinitesimals". *Berkeley Newsletter*, no. 8, 1985, pp. 1-7.

WALKER, E., *A Study of the Traité des Indivisibles of Gilles Persone de Roberval*. New York: Teachers College, Columbia University, 1932.

WALLIS, J., *Arithmetica Infinitorum*. Oxford: Tho. Robinson, 1656.

______. *Opera Mathematica*, Oxford: E. Theatro Sheldoniano, 3 vols., 1693-1699.

WISDOM, J. O., "Berkeley's Criticism of the Infinitesimal". *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 4, no. 13, 1953, pp. 22-25.