

KEPLER Y GALILEO: LA CIENCIA MODERNA

El teólogo luterano Andreas Osiander (1498-1552) fue el editor del libro de Nicolás Copérnico (1473-1543) *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, publicado muy pocas semanas antes de la muerte de su autor. Añadió una carta-prólogo sin firma que pasó como obra del propio Copérnico. Decía así:

«Puesto que se ha extendido el ruido sobre la novedad de las hipótesis de esta obra que pone a la Tierra como móvil y, por el contrario, al Sol como inmóvil en el centro del universo, no dudo que ciertos sabios se hayan indignado mucho y piensen que no deben trastornarse las disciplinas liberales, bien establecidas desde hace largo tiempo. Sin embargo, si quisieran observar las cosas de cerca, encontrarían que el autor de esta obra nada ha hecho que merezca reprobación. Efectivamente, lo propio de un astrónomo es recoger, mediante una observación diligente y hábil, la historia de los movimientos celestes. Lugo, buscar las causas o bien, puesto que de ningún modo puede asignar las verdaderas, imaginar o inventar hipótesis con ayuda de las que tales movimientos (tanto del porvenir como del pasado) puedan ser calculados conforme a los principios de la geometría. Ahora bien, esas dos tareas las ha cumplido el autor de manera excelente. En efecto, no es necesario que esas hipótesis sean verdaderas ni incluso verosímiles; basta con una sola cosa, que ofrezcan cálculos conformes a la observación...»¹

La vida de Johannes Kepler (1571-1630) va a ser, si así puede decirse, un enorme esfuerzo por probar que esas palabras no eran verdad, que no podían ser verdad si se quería dejar paso al nacimiento de la ciencia moderna. Kepler fue un estudiante de teología que se interesó por la astronomía. En 1594 no logró ser nombrado en la escuela protestante de teología de Graz, quizá por sus ideas copernicanas, consiguiendo, con todo, que le nombraran matemático de la ciudad. Por un edicto contra los protestantes, tuvo que abandonar Graz en 1600, refugiándose en Praga, donde todavía conoció y colaboró con el gran astrónomo Tycho Brahe (1546-1601). A su muerte, es nombrado astrónomo imperial, y puede disponer de las numerosísimas observaciones de su antecesor.

En su primera obra astronómica, *Mysterium cosmographicum*², pu-

1 El texto latino y la traducción francesa del libro primero se encuentra en Copernic, *Des révolutions des orbes célestes*, introducción, traducción y notas de Alexander Koyré (Paris 1970); las páginas de Osiander, «Ad lectorem de hypothesisibus huius operis», en pp. 27-31.

2 'Prodromus dissertationum cosmographicarum mysterium cosmographicum', en Kepler, *Gesammelte Werke*, edición de W. Von Dyck, M. Caspar y F. Hammer (Munich 1937 y siguientes), volumen I.

blicada en 1596, afirma Kepler la gran superioridad de Copérnico sobre Ptolomeo, no tanto porque su sistema economizara algunas órbitas, sino porque explicaba aparentes 'irregularidades' del movimiento de los planetas, haciéndolo, para colmo, con la intervención de un factor único: el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. No estamos ante hipótesis, sino ante realidades; el estudio puramente calculatorio de los fenómenos celestes no basta, es necesario pasar al estudio de la realidad:

«Ahora bien, para pasar de la astronomía a la física o cosmografía, las hipótesis de Copérnico no solamente no pecan contra la naturaleza de las cosas, sino que concuerdan con ella. La naturaleza ama la simplicidad y la unidad. Jamás existe en ella algo ocioso o superfluo; frecuentemente, una sola causa produce varios efectos. Ahora bien, con las hipótesis tradicionales no se termina de inventar órbitas. En Copérnico, al contrario, un gran número de movimientos se deducen de un muy pequeño número de órbitas (...). De esta manera, Copérnico ha liberado la naturaleza, no solamente del amasijo penoso e inútil de tantas órbitas inmensas, sino que nos ha abierto un tesoro todavía no agotado de consideraciones verdaderamente divinas concernientes al orden maravilloso del mundo»³.

El primer esfuerzo de Kepler será el de buscar un orden deductible «a priori» de la estructura del universo. Comenzará buscando —vanamente— una relación geométrica en la que las 'esferas' que contienen a las órbitas de los planetas se inscriban y circunscriban en los cinco sólidos regulares. De fuera a dentro sería así: esfera de Saturno, cubo, esfera de Júpiter, tetraedo, esfera de Marte, dodecaedro, esfera de la Tierra, icosaedro, esfera de Venus, octaedro, esfera de Mercurio, y, en el centro, inmóvil, el Sol. ¿Cuál es el interés de Kepler en estas suposiciones que nunca abandonó a lo largo de su vida? Buscar leyes que configuren la estructura del cosmos y que expliquen su estabilidad.

Pero, hay más, el movimiento de los planetas debe de estar producido por 'fuerzas motrices' —fuerzas que son 'animales' y no 'materiales', en lo que se muestra de acuerdo con sus contemporáneos—, fuerzas o virtudes que han de tener al Sol por origen. Como Kepler demuestra, por él pasan las órbitas de todos los planetas: «Lo mismo que la fuente de la luz se encuentra en el Sol y que es en ese lugar, es decir, en el centro del mundo, donde se encuentra el origen de las órbitas, de igual manera, del Sol proviene la vida, el movimiento y el alma del mundo»⁴.

Ese esfuerzo motriz debe de atenuarse como lo hace la luz; ahora bien, ésta disminuye en su intensidad inversamente al cuadrado de la distancia al foco. Kepler piensa que la atenuación de la virtud motriz, que no se hace más que por el plano de la órbita y no por todo el espacio, debe de ser inversamente proporcional a su distancia al Sol. Deduce Kepler, cometiendo dos errores que se compensan entre sí, que las velocidades de los planetas son inversamente proporcionales a su distancia al centro, al Sol. Dos cosas quedan establecidas, por tanto, que el Sol está rigurosamente en el centro de las órbitas y que en él es donde se

³ Kepler, *Gesammelte Werke*, I, 18.

⁴ Kepler, *Gesammelte Werke*, I, 70.

deben buscar las causas físicas del movimiento, por lo que ya no estaremos ante puntos matemáticos sin existencia real.

En su nueva obra —donde los problemas astronómicos son tratados varias veces: a la manera ptolemaica, a la de Copérnico, a la de Brahe y a la suya—, publicada en 1609, *Astronomia nova*⁵, afirma que debe de romperse el principio, hasta ahora intangible —el segundo principio intangible es la uniformidad del movimiento—, de que las órbitas sean necesariamente circulares, o compuestas, al menos, de movimientos circulares, epiciclos, etc. Tras romper este principio milenar, la primera idea que le vino a la cabeza —según él mismo nos cuenta— fue considerar órbitas exactamente circulares pero con un movimiento no uniforme de los planetas. Pero, si la causa de esos movimientos está en el Sol, que ocupa el centro de las órbitas, las dificultades de esta hipótesis eran insuperables. La Tierra pasa así a ser un planeta más:

«Si la Tierra se mueve (alrededor del Sol), está demostrado que la ley de su velocidad y de su tardanza depende de su grado de aproximación al Sol y de su lejanía respecto a él. Ahora bien, este fenómeno se observa igualmente para los demás planetas: son acelerados o frenados conforme a su mayor o menor proximidad respecto al Sol. La demostración es puramente geométrica. De esta demostración ciertísima, perfectamente cierta, se concluye, por una suposición física, que la fuente de los movimientos de los cinco planetas se encuentra en el Sol. Por consiguiente, es muy probable que la fuente de los movimientos de la Tierra se encuentre igualmente allí donde se encuentra la fuente del movimiento de los otros cinco planetas, es decir, igualmente en el Sol. Por ello, es muy probable que la Tierra se mueva igualmente, puesto que existe una causa probable de su movimiento. Por otra parte, que el Sol está inmóvil en su lugar, en el centro del mundo, dejando de lado cualquier otra causa, es muy verosímil por el hecho de que la fuente de los movimientos, al menos de los cinco planetas, se encuentra en él»⁶.

A partir de este instante, el espacio ha de considerarse como homogéneo. No podrá hablarse ya más de 'lugares naturales' a la manera aristotélica; todos los lugares son igualmente naturales. Si pasa algo en el centro del mundo, no es porque sea el centro, sino porque en él está el Sol, fuente de las fuerzas motrices. Tampoco podremos hablar ya más de 'movimientos naturales' ni de 'movimientos violentos'. El arriba y el abajo han desaparecido como explicaciones del movimiento de los cuerpos ligeros y de los pesados: los cuerpos van a comenzar todos a ser pesados. La pesantez no será ya más una cualidad de los cuerpos pesados, sino una tracción, una acción «ab extra»:

«La verdadera teoría de la gravedad se apoya sobre los axiomas siguientes: Toda substancia corporal, en tanto que corporal, es capaz de permanecer en reposo en todo lugar en el que sea colocada sola, fuera del orbe de la virtud de algún cuerpo emparentado. La gravedad es una afección corporal mutua entre dos cuerpos emparentados (tendiendo) hacia la unión (lo que en este orden de cosas es también la facultad magnética), de tal manera que es más

⁵ *Astronomia nova seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellæ Martis. Ex observationibus G. V. Tychoonis Brahe*, en Kepler, *Gesammelte Werke*, volumen III.

⁶ Kepler, *Gesammelte Werke*, III, 23.

bien la Tierra quien atrae a la piedra que la piedra quien tiende hacia ella. Los graves (incluso si colocamos a la Tierra en el centro del mundo) no tienden al centro del mundo en tanto que centro del mundo, sino hacia el centro del cuerpo redondo emparentado, es decir, la Tierra»⁷.

Se sabía desde siempre que, de hecho, la trayectoria de los planetas no era circular, aunque se postulara así, pero, fue Kepler el primero que se esforzó, desde el tiempo de los primitivos griegos, en tomar en serio esa circularidad, unida a la no uniformidad de la velocidad de giro de planeta por la órbita, como acabamos de decir. Pero, en su estudio de Marte, el fracaso de esta hipótesis fue total. Más, algo nuevo aparece en estos estudios keplerianos (y perdónesenos que empleemos ahora un lenguaje no kepleriano), a los planetas se les presenta como si tuvieran una ligazón, un radio-vector, que lo mueve alrededor del Sol entrando la distancia planeta-Sol en los cálculos mismos. Distintas velocidades de los planetas, que dependen de diversas distancias al centro de las respectivas órbitas, dan radio-vectores que barren superficies distintas. Dichas superficies, que no son nociones primeras dadas por la intuición —las nociones primeras son la distancia y la virtud motriz—, sin embargo, serán iguales, si consideramos tiempos iguales.

Del estudio detallado de las observaciones de Marte, llegó Kepler a la conclusión de que en ningún caso el planeta puede describir un círculo perfecto, pero de que sí debía tratarse de alguna figura ovoide inscrita en él. Entre los infinitos ovoides posibles, comienza Kepler probando aquél en que se da una oscilación del planeta desde el círculo perfecto siguiendo la ley del seno. Pero, una vez más, esta hipótesis lleva al fracaso. Cierto es que por poco, ¡pero no da cuenta de las observaciones! Aunque la diferencia era mínima, la teoría no resultaba adecuada. Así, tras sucesivos tanteos, llega —en 1605— a la consideración de que la órbita es una elipse, en uno de cuyos focos está el Sol.

La tarea no ha sido fácil, ni mucho menos. Para establecer esta ley, Kepler, que no dispone aún de la herramienta precisa para estos cálculos, el cálculo infinitesimal, ha debido ligar mediante operaciones matemáticas sumamente árduas, basadas en su conocimiento exhaustivo de las figuras cónicas, la ley de las áreas con la ley dinámica de las distancias y el juego propio de las elipses. Piénsese al planeta, en un punto y dejemos que transcurra un instante, el planeta ocupará un segundo punto. ¿Cuál ha sido la trayectoria seguida por el planeta? Todo sería sencillo si ésta fuera circular y el movimiento en ella uniforme. Pero, no es así. Si el segundo punto no está a igual distancia que el primero del Sol, como no lo está, la velocidad ha variado al pasar de un punto a otro. Sabemos sólo que esa velocidad es inversamente proporcional a la distancia al centro de la órbita y que el área barrida al pasar de unos puntos a otros es idéntica si consideramos tiempos iguales. Contando todo lo que venimos diciendo hay que, paso a paso, calcular la órbita, tomando variaciones suficientemente pequeñas para que las distancias al centro puedan considerarse aproximadamente iguales, pero, salto a salto, hay que completar toda la órbita. El objetivo, para colmo,

⁷ Kepler, *Gesammelte Werke*, III, 25.

es hacer cuadrar estos nuestros cálculos con las observaciones previas. ¿Cómo resolver el rompecabezas? Kepler lo hizo decidiéndose por la elipse de pequeña excentricidad y en uno de cuyos focos está el Sol.

A partir de esa elección, todo queda iluminado. En una elipse, dos puntos próximos están a distinta distancia del foco, por lo que la velocidad del planeta en cada uno de ellos es distinta. En la elipse se cumple todo lo convenido como hipótesis y, además, coinciden exactamente las observaciones. ¡Todo está aclarado! Mas, ¿por qué van los planetas por órbitas que son, precisamente, elípticas? Habrá de venir Newton con sus 'campos de fuerzas' y la ley de atracción universal para dar la primera respuesta a esta pregunta.

Para Kepler, hay algo que se nos escapa todavía de la estructura del universo por no haber tenido en cuenta un elemento fundamental, el tiempo. Las relaciones geométricas no pueden explicarlo todo. Son necesarias consideraciones de armonía, puesto que Dios, como lo presintieron en la antigüedad los pitagóricos —nos dice Kepler en su libro *Harmonice mundi*⁸ —publicado en 1619—, es geómetra, pero también y quizá más aún, Dios es músico. Cada uno de los planetas emite un tono musical fundamental que, en su girar en torno al Sol, produce sus armónicos, con lo que cada planeta emite toda una frase musical, produciendo en su conjunto una armonía polifónica y contrapuntística. La base de esta 'acústica celeste' no son las distancias, como supusieron los pitagóricos, sino las velocidades angulares; la velocidad angular media produce el tono fundamental y, sobre ella, vienen las variaciones. ¡Ya hemos encontrado, según Kepler, el secreto del orden cósmico!

Nadie siguió a Kepler en sus teorías: ni en su física celeste, ni en sus leyes, ni en su armonía celestial. Galileo y Descartes lo olvidaron casi por completo. Gassendi es de los pocos que le citan. Hay que esperar hasta Newton y su generación para que sea tomado en serio.

Tras este breve repaso de la doctrina de Kepler, son varias las consideraciones a hacer. En primer lugar, su enorme interés en que la hipótesis copernicana sea verdad. La causa de este interés está en que no puede hacerse ya la separación entre el mundo de los puros cálculos y el mundo de las realidades físicas. Los movimientos de los astros y de los objetos todos del mundo no han de mirarse en su pureza ingravida, sino que van a ser actuados por 'virtudes o fuerzas' que les arrastrarán en su movimiento. De pronto, los cuerpos que se mueven aparecen como graves. Es importante recordar que en 1600 un inglés, William Gilbert (1540-1603), habría publicado un libro sensacional, *De Magnete*, en el que estudia el fenómeno magnético. En el sistema solar debe de pasar algo similar, debe de escaparse del Sol algún efluvio que, mediante la atracción, mueva a los planetas. La astronomía y la física unen sus caminos: lo que sea la una lo será la otra.

Como hemos visto, además, la física aristotélica de los lugares naturales y de los movimientos naturales y violentos ha comenzado a crujir, preludio de su derrumbe definitivo. Pero, se plantea entonces un gravísimo problema, ¿cómo es posible que una piedra caiga sobre la

⁸ 'Harmonice mundi', en Kepler, *Gesammelte Werke*, VI.

Tierra en línea recta, si la dejamos caer sin ningún impulso previo, cuando la Tierra, incluso en el brevísimo tiempo de esa caída, se ha movido algo, por poco que sea? Parece que la trayectoria de caída de las piedras debería de ser curvilínea y, sin embargo, todo el mundo sabe que las piedras caen bien rectas. Si la Tierra gira, en torno al Sol y a su propio eje, ¿cómo es que no vemos a las nubes precipitarse alocadamente en sentido contrario? El germen o, mejor, la necesidad, del principio de inercia está en las consideraciones keplerianas. Va a ser necesario partir de otro modelo distinto al aristotélico-ptolemaico, en el que lo 'natural', es decir, lo que no necesita ninguna explicación previa sino que son como axiomas de los que se parte para explicar todo el resto, no ha de ser ya el caminar mediante movimientos naturales hacia los lugares naturales de las cosas, o el perpetuo moverse en órbitas circulares con movimiento uniforme, todo ello en un espacio decididamente no homogéneo, podríamos decir que con puntos singulares. Ahora el espacio se hace tan terso y frío que ya nada distingue puntos o partes dentro de él; ahora será el movimiento rectilíneo y uniforme el que sea primario, y nadie se extrañará —será la simple evidencia— de ver a los objetos en su majestuoso ir por siempre hacia lo desconocido; ahora lo quieto permanecerá quieto por siempre, y lo moviente, en las condiciones anteriores, seguirá así por siempre, mientras no venga otro objeto a estropear esa imperturbabilidad. ¡Todo esto está en el empeño de Kepler en que Copérnico tenía razón, pero razón real y no simple razón de calculista!

Kepler y Galileo Galilei (1564-1642) son contemporáneos rigurosos y, sin embargo, qué diferencia entre ambos, la que puede haber entre las brumas del norte y la diáfana claridad del mediodía. Primero en Pisa, en donde es nombrado lector de matemáticas en 1589, luego en Padua, desde 1592, y después ya siempre en Florencia —de fijo a partir de 1610—, desarrolló Galileo una enorme labor como ingeniero y como físico, divirtiéndose, cómo no, con las matemáticas.

En 1597 dió a luz sus lecciones sobre astronomía, *Trattato sulla ovvero Cosmografica*⁹, en las que todavía se muestra estrictamente ptolemaico, sin que obste para que el 4 de agosto de ese mismo año escriba una carta a Kepler —para agradecerle el envío de su *Mysterium cosmographicum*— en donde se muestra copernicano. Galileo escribe, dice, sin haber leído más que el prólogo, pero ha sido bastante para poder afirmar que son compañeros en la búsqueda de la verdad. Se congratula de los bellísimos argumentos con los que defiende esa verdad; continuará leyendo el libro,

«Lo haré tanto más voluntariamente cuanto hace ya muchos años que también yo soy de las ideas de Copérnico; y desde este punto de vista han sido descubiertas por mí las causas de muchos fenómenos naturales, sin duda inexplicables en la hipótesis común. He recogido ya muchos razoramientos que lo prueban y refutaciones de los argumentos contrarios a tales tesis, aunque, hasta ahora, no he osado darlo a luz, asustado de la suerte del mismo Copérnico, nuestro maestro, quien, aunque ante algunos ha adquirido fama inmortal, todavía, ante otros, que son infinitos (tal es el número de los ignorantes), es

9 En la edición nacional de las obras de Galileo, *Le opere*, Vol. II.

motivo de risa y chacota. Tendría el coraje de manifestar mis reflexiones si hubiera muchos como tú; pero, no estando así las cosas, deberé retrasar ese trabajo»¹⁰.

Desde 1605 se interesa mucho Galileo por el estudio de una nueva estrella, pero será en julio de 1609 cuando construya un catalejo —aparato que había visto en una barraca de feria, procedente de Holanda— que él mismo perfecciona y dispone especialmente para poder mirar al cielo. El 7 de enero de 1610 descubre tres nuevas estrellas, según cree el comienzo, pero enseguida se da cuenta de que son tres satélites del planeta Júpiter. El 14 de enero descubre un cuarto satélite del mismo planeta. El 30 de enero tiene listo para la imprenta un libro, *Sidereus Nuncius*¹¹, en el que describe los cielos que se contemplan con su catalejo. Es importante, sobre todo, el descubrimiento de satélites de un planeta, que a su vez gira en torno a lo que esté en el centro del sistema solar. ¡No todo, pues, da vueltas alrededor del centro del mundo, aunque éste sea la Tierra! Es un momento de gran esplendor para Galileo. Traba amistad entonces con el cardenal florentino Maffeo Barberini, luego papa; visita Roma, en donde es recibido con grandes honores por los sabios jesuitas del Colerio Romano; es hecho miembro de la Academia dei Lincei.

Un dominico, Niccolò Lorini, predica el 2 de noviembre de 1612, en San Marcos de Florencia, contra la tesis del movimiento de la Tierra. No menciona siquiera a Copérnico pues desconoce su nombre. Por ahora la cosa no pasa de ahí. Mas Galileo aprovecha la ocasión para escribir una carta —una carta abierta, que diríamos hoy— a un benedictino amigo suyo, Benedetto Castelli¹². Discute en ella el argumento de algunos que, basándose en Josué 10, 12-15, oponen la Escritura a las conclusiones de la ciencia. Para él, la Escritura no puede «mentir o errar, sino ser sus decretos de una absoluta e inviolable verdad», pero sí pueden errar sus intérpretes o expositores cuando se encierran en el puro significado de sus palabras, con lo que se llega no sólo a contradicciones sino también a herejías y blasfemias como que Dios tiene manos o pies, lo que es prueba de que en muchos lugares debe exponerse la Escritura diversamente de lo que el aparente significado de sus palabras parece decir. Además, tanto la Escritura como la naturaleza proceden de un mismo Dios; si se tiene en cuenta, para la Escritura, el argumento anterior y que la naturaleza es inexorable, inmutable y nada cuidadosa de que sus razones y modos de operar se adecúen a la capacidad de los hombres, parece claro que «los efectos naturales que la sensata experiencia pone ante los ojos o las demostraciones necesarias concluyen» no pueden ser puestos en duda apoyándose en la Escritura. Oficio de los expositores será encontrar el verdadero sentido de la Escritura, concordante con aquellas conclusiones naturales que, por su sentido manifiesto o por las demostraciones necesarias, deban ser tenidas por ciertas y seguras:

10 Galileo, *Opere*, X, 67.

11 En Galileo, *Opere*, III.

12 En Galileo, *Opere*, V, 281-88.

«Yo creería que la autoridad de las Sagradas letras ha tenido solamente el objeto de persuadir a los hombres de aquellos artículos o proposiciones que, siendo necesarios para la salvación y superando todo discurso humano, no pudieran hacerse creíbles por otra ciencia o por otro medio, si no es por boca del mismo Espíritu Santo. Pero que el mismo Dios que nos ha dotado de sentidos, de discurso y de inteligencia haya querido, posponiendo el uso de éstos, darnos con otro medio las noticias que por ellos podríamos conseguir, no pienso que sea necesario creerlo; máxime en esas ciencias de las que sólo una mínima parte, y en conclusiones divididas, se lee en la Escritura»¹³.

¡Sólo faltaba esto, que Galileo se metiera también a dar lecciones sobre teologías! Lorini denuncia la carta al Santo Oficio porque en ella «a juicio de todos estos nuestros Padres de este religiosísimo convento de S. Marcos, se encuentran muchas proposiciones que son a la vez sospechosas y temerarias». Galileo, intrépido en su cruzada, como gran pedagogo de la «nueva ciencia», insiste con más cartas copernicanas¹⁴. El Santo Oficio se pone en movimiento, y estudia, entre otras cosas, un libro publicado por Galileo a principios de 1613¹⁵, del cual se desprende que ya no puede defenderse la diferencia aristotélica entre un mundo sublunar —el de las cosas pesadas, gordas e imperfectas— y un mundo supralunar —el de lo ligero, de lo puro y de lo perfecto—. En 1616 se condenan estas dos proposiciones: que el Sol está en el centro del mundo y no tiene ningún movimiento local, y que la Tierra no es el centro del mundo y no está inmóvil, sino que se mueve toda ella, incluso con movimiento diurno. Tal doctrina iba contra la ciencia establecida. Galileo contó con la benevolencia de los jesuitas, partidarios de las teorías de Tycho Brahe —todos los planetas giran en torno al Sol, mas el conjunto entero, a su vez, gira en torno a la Tierra quieta en el centro—, y gracias sobre todo al cardenal jesuita Roberto Bellarmino las cosas no fueron a más para él y no se vio implicado en la condena, excepto que quedó amonestado en particular a que nunca más defendiera la perniciosa teoría copernicana.

Tras la condena del copernicanismo Galileo no ha perdido nada de su esplendor científico ni de su fama. Continúa sus investigaciones y, en 1623, cree llegado un momento muy favorable para él con la elección del cardenal Barberini como papa, con el nombre de Urbano VIII. Aprovecha la ocasión para trabajar en un gran libro en el que expondrá por completo sus opiniones sobre la filosofía natural. En 1630, su amigo Castelli le escribe desde Roma diciéndole que el papa, hablando con unos alemanes, ha dicho respecto a la condena de 1616: «No fue nunca nuestra intención; y si hubiera dependido de nos, no se hubiera hecho aquél decreto». Galileo va a Roma y obtiene la aprobación de su obra, tras la imposición de algunos cambios que acepta sin rechistar. Por fin, en febrero de 1632 sale a la luz su *Dialogo dei Massimi Sistemi*¹⁶, en el

13 Galileo, *Opere*, V, 284.

14 Cartas a Piero Dini, en Galileo, *Opere*, V, 291-95 y 297-305; carta a Cristina de Lorena, gran duquesa de Toscana, en *Opere*, V, 309-48.

15 'Istoria e dimostrazioni intorno alle macchie solari e loro accidenti', en Galileo, *Opere*, V.

16 En Galileo, *Opere*, VII. Existe traducción castellana de José Manuel Revuelta (Buenos Aires 1975-77).

que tres amigos —uno galileano, otro aristotélico y el tercero un joven diletante que siempre termina por dejarse convencer de las razones del primero— discuten de lo divino y lo humano, llevados por ese afán de Galileo de extender por todos los medios y a todos los vientos, fuera del círculo de los especialistas, la *nueva ciencia* y de mostrar que ésta supera en más de mil codos a la ciencia antigua.

Muerto Bellarmino, son los jesuitas quienes se muestran muy disgustados con la publicación del nuevo libro de Galileo. Se le abre proceso en el Santo Oficio. El propio Urbano VIII manda que Galileo se presente sin excusa para responder de las acusaciones de las que es objeto, aunque para ello deba ser encarcelado y atado con cadenas. En enero de 1633, visto que no hay más remedio —no cuenta ya con el apoyo del nuevo gran duque de Toscana y está su caso enmarcado en una delicada situación política entre Florencia y Roma—, parte para la urbe, donde comienza un desagradabilísimo proceso para el hombre enfermo que era entonces Galileo. El 22 de junio es dada sentencia en la que se le condena por el delito de haber sostenido opiniones contrarias a la condena de 1616 en su nuevo libro¹⁷. Así dice uno de los párrafos de la condena:

«Confesaste igualmente que la escritura de dicho libro en bastantes lugares está hecha de tal manera que el lector podría formarse concepto de que los argumentos sostenidos por la parte falsa fueron pronunciados de tal guisa que fueran, por su eficacia, más bien potentes a refrenar que fáciles a ser invalidados; escudándote de haber incurrido en error ajeno, como dijiste, a tu intención, por haber escrito en forma de diálogo y por la natural complacencia que cada uno tiene de sus propias sutilezas y de mostrarse más sutil que el común de los hombres en encontrar, incluso para las proposiciones falsas, ingeniosos y aparentes discursos de probabilidad».

Galileo fue condenado a cárcel formal y como penitencia se le impuso que, durante tres años, dijera una vez a la semana los siete salmos penitenciales. Además, leyó y firmó una abjuración de sus errores: «con corazón y fe no fingida, abjuro, maldigo y detesto los susodichos errores y herejías, y en general todo error, herejía y secta contraria a la Santa Iglesia».

En su nueva vida se dedica otra vez al estudio y comienza a trabajar en una buena obra, aunque, la vista le va cada vez peor. En 1638 se publica en Leiden, para evitarse problemas, sus *Dialoghi delle Nuove Scienze*.

En 1623 había publicado Galileo un libro polémico, muy violento, contra el jesuita Orazio Grassi, *Il Saggiatore*. En él atacaba duramente la opinión del jesuita, para quien es siempre necesario apoyar las propias opiniones científicas en las espaldas de algún autor célebre. Léase lo que opina Galileo al respecto:

17 Todos los documentos que se conservan sobre el proceso pueden leerse en Galileo, *Opere*, XIX, 272-421; mas, quien quiera leer el original latino de la condena y la abjuración de Galileo deberá acudir a J. M. Gómez-Heras, *Temas dogmáticos del Concilio Vaticano I* (Vitoria 1971), pp. 770-76.

«como si nuestra mente, cuando no se casa con el discurso de otro, debiera permanecer en todo estéril e infecunda. Acaso estima que la filosofía sea un libro y una fantasía del hombre, como la *Iliada* o el *Orlando furioso*, libros en los que lo menos importante es saber si lo escrito en ellos es verdadero. ¡Señor Sarsi, la cosa no es así! La filosofía está escrita en este grandísimo libro que continuamente está abierto ante los ojos (digo el universo), pero no puede entenderse si no se aprende primero para entender la lengua y conocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en lengua matemática y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las que es imposible entender una palabra; sin ellos es agitarse en vano por un oscuro laberinto. Mas, incluso concediendo como punto de partida, lo que parece hacer Sarsi, que nuestro intelecto deba hacerse esclavo del intelecto de otro hombre (dejo de lado que actuando ellos de esta manera, a modo de copiadore, alabarán en sí mismos lo que criticaban en el señor Mario), y que en la contemplación del movimiento celeste deba adherirse a alguno, no veo por qué razón escoge él a Ticonio, anteponiéndolo a Ptolomeo y a Nicolás Copérnico, cuyo sistema del mundo entero tenemos construido y llevado a su fin con sumo artificio, lo que no veo haya hecho Ticonio»¹⁸.

Por otro lado, siempre que uno se imagina una materia o substancia corpórea, debe ésta ser pensada con una cierta figura, con una cierta relación de grande o pequeño en comparación con otras cosas, en este o en el otro lugar y tiempo, moviéndose o quieta, tocando a otros cuerpos o no, de cuyas condiciones no puede ser separada. En cambio, que el color sea éste o el otro, que sea amarga o dulce, sonora o muda, de grato o de ingrato olor, sabor, color, tiene solamente incidencia en el cuerpo sensitivo del sujeto. De aquí que, en los cuerpos externos, no se necesite más que grandeza, figura, multitud y movimiento tardo o veloz, mientras que olores, sabores y sonidos son meros nombres¹⁹. Hay, pues, que distinguir entre cualidades primarias y cualidades secundarias; solamente las primeras tienen interés para la construcción de la nueva ciencia. Queda sentado así, en Galileo, algo muy semejante a lo que, por ese mismo tiempo, comienza Descartes a pensar como la «res extensa», base de toda la mecánica. Es en ella en donde se da la medición y en donde es factible la matematización, la madre de la ciencia nueva.

El interés mayor para nosotros ahora en Galileo va a ser la enunciación de la ley de caída de los cuerpos. Convergen en ella varias líneas de investigación de nuestro científico, además de su potente reflexión intelectual, como vamos a ver.

Hagamos experimentos —evidentes para cualquiera que esté metido en estos campos, sin siquiera necesidad de tener que realizarlos— con un barreño que llenaremos de diversos líquidos y en el que dejaremos caer bolitas de diferentes materiales. Las bolitas más pesadas caerán más deprisa que las ligeras o que floten. Comencemos con un líquido muy denso. Tiramos las bolitas. Solamente alguna, excepcionalmente densa en la materia que la compone, descenderá en aquél líquido, aunque muy despacio, las demás flotarán. Cambiemos nuestro líquido por otro menos denso: las bolitas comenzarán a descender, las más densas lo

18 En Galileo, *Opere*, VI, 232-33.

19 Cf. digresión sobre lo caliente, en Galileo, *Opere*, VI, 347-52.

harán decididamente, las menos densas despacio, algunas quedarán flotando. Pongamos un líquido todavía menos denso. Las bolitas construidas de materiales más densos descenderán velozmente, casi a la misma velocidad, otras lo harán más despacio y únicamente alguna flotará todavía; si es agua, por ejemplo, la madera seguirá flotando. Si el líquido es aún menos denso, aire, todas irán apreciablemente a la misma velocidad, excepto alguna, construída de plumas. Sigamos nuestro experimento con aire cada vez más enrarecido, las velocidades de caída se igualarán más y más. ¿Qué podemos deducir de nuestro experimento? Que en el vacío todos los cuerpos caen a la misma velocidad, sin importarnos para nada su densidad. El que en nuestros experimentos caigan unas bolas más rápidas que otras se debe exclusivamente a una diferencia relativa de las densidades y al empuje hacia arriba —descubierto por Arquímedes— del líquido, pero el «efecto de caída» es en todas similar ²⁰.

En un segundo momento vayamos a los planos inclinados y a los péndulos ²¹. Recurriremos a ellos porque hemos sido capaces —con Galileo— de ver una relación entre la caída libre y la caída por un plano inclinado y, a su vez, hemos podido resolver el problema de los planos inclinados recurriendo a los péndulos. En el plano inclinado el efecto de caída está en relación con el de caída libre como la altura de nuestro plano lo está a la longitud del plano inclinado; será menor, por tanto, cuanto menor sea la inclinación del plano y será nulo cuando la inclinación del plano sea nula. De aquí que podamos observar con toda la pausa que necesitemos —basta hacer planos inclinados con una inclinación pequeña— lo que en caída libre nos ciega por su rapidez. Simplemente tendremos que hacer planos, y bolas que caigan por ellos, suficientemente pulidos y con los artilugios convenientes para que el rozamiento no cuente apreciablemente.

Tiremos nuestra bola plano abajo variando la inclinación de éste. Cuando la inclinación del plano sea grande, la bola correrá mucho, aumentando su celeridad a ojos vista; cuando disminuyamos aquella inclinación, la bola irá más despacio y aumentará su velocidad muy poco a poco, hasta el punto que si la inclinación es nula, es decir, es un plano horizontal, si empujáramos la bola no habrá causa alguna de aumento de velocidad, por pequeña que pudiera ser: la bola proseguirá indefinidamente por el plano con la velocidad inicial que le habíamos imprido, o quedará quieta si no la habíamos empujado.

Tiremos nuestra bola plano arriba, a la vez que vamos variando su inclinación. Si ésta es grande, la bola subirá poco, justo hasta donde la tendencia intrínseca que tiene de ir hacia abajo, gane al impulso que nosotros le hemos dado hacia arriba. Si la inclinación del plano es menor, la bola rodará más, disminuyendo su velocidad hasta pararse, ya que la tendencia que le haría ir hacia abajo es menor. Si la inclinación es muy pequeña, la bola rodará mucho, la velocidad que le

²⁰ Véase su *Discorso intorno alle cose che stanno in sul'acque o che in quella si muovono* (1612), en Galileo, *Opere*, IV, 63-140; léase la página del *Dialoghi*, en *Opere*, VIII, 116-17.

²¹ Cf. *Le Meccaniche*, anterior a 1599; en Galileo, *Opere*, II, 155-90.

dimos al comienzo irá disminuyendo muy poco a poco. Si no hay inclinación alguna, es decir, si el plano es horizontal, no hay tendencia contraria a la que nosotros le demos a la bola, por lo que seguirá por siempre marchando por ese plano horizontal tal como nosotros la dejamos.

El principio de inercia ha quedado así mostrado: todo cuerpo si está en reposo, en reposo permanece, si se mueve rectilíneamente con movimiento uniforme, permanecerá en ese movimiento rectilíneo y uniforme hasta que algún impulso le saque de su reposo o de su movimiento. El pasmo del mismo Galileo fue tan grande que tuvo que poner cortapisas a sus enunciados —a lo que le llevó sin duda la consideración de estos experimentos intelectuales con planos inclinados que la habían puesto en la pista— al decir que, en realidad, los planos horizontales a los que nos hemos referido no son tales sino círculos máximos de nuestra Tierra —que es quien atrae a las bolas— cuyo diámetro es tan grande que nos parecen líneas horizontales rectas. Solamente el filósofo Descartes se atrevió a enunciar en toda su generalidad el principio de inercia, cuando imagina en su *Mundo o Tratado de la luz* —inacabado, precisamente, por efecto de la condena de Galileo en 1633— un mundo al que hemos de dar las leyes que nos parezcan convenientes para deducir luego todas las consecuencias implicadas... de las que saldrá nuestro mundo real. Estas leyes primeras y fundadas son la ley de inercia y el principio de que todo se hace por choque, en el que la cantidad de movimiento permanece idéntica antes y después del choque ²².

Tenemos ya elementos suficientes para enfrentarnos con la búsqueda de la ley de caída de los cuerpos ²³, e incluso, como el pasar, nos han salido ya cosas sabrosas.

Para Aristóteles ²⁴, móviles de pesos diferentes se mueven con velocidades de caída diferentes, pues ésta es proporcional al peso; también, en medios distintos, los móviles se mueven con velocidades inversamente proporcionales a la densidad de esos medios, es decir, en el vacío la velocidad sería instantánea —lo que nos indica que el vacío no podría existir porque por él los cuerpos deberían ir a velocidades infinitas—. Sin embargo, siguiendo a Galileo, hemos visto que nada de eso ocurre en la caída dentro de líquidos. Veamos la primera afirmación aristotélica. Supóngase un cuerpo que pesa 10 y otro que pesa 1. El primero caerá diez veces más rápido que el segundo. Esa opinión es falsa, la experiencia nos dice que raro es ver que se saquen siquiera un palmo, por alto que caigan. Pero, juntemos aquellos dos cuerpos con una cuerda. El de 10 acelerará al de 1, y el de 1 retrasará al de 10, por lo que la velocidad de caída del conjunto estará entre las dos anteriores. Sin embargo, al ser ahora un cuerpo que pesa 11, su caída debería ser más rápida que la de 10. Estamos ante una contradicción que invalida la opinión de Aristóteles, pues no se sostiene en pie. En conclusión,

²² Cf. Descartes, *Oeuvres*, edición Adam-Tannery, XI, 31-47.

²³ Léase las jornadas primera y tercera de los *Dialoghi delle Nuove Scienze*, en Galileo, *Opere*, VIII, 105-38 y 190-267; existe traducción castellana de Javier Sádaba (Madrid 1976).

²⁴ *Física*, IV, 8, 215 a 25.

«Se puede probar, sin otras experiencias, con ayuda de una demostración breve y concluyente, que un móvil más pasado no se mueve más rápidamente que uno menos pesado, con la condición de que su materia sea idéntica y que sean parecidos a aquellos de los que habla Aristóteles»²⁵.

Observemos la piedra que cae desde el reposo. ¿Con qué ley cae? Tras largos esfuerzos cree Galileo haber llegado a ella; esta convicción está apoyada «sobre la correspondencia y el acuerdo riguroso que parecen existir entre las propiedades que hemos sucesivamente demostrado y los *resultados* de la experiencia»²⁶. Se ha dejado conducir en este estudio por la observación de la regla de la naturaleza, quien en todas sus operaciones actúa con los medios más ordinarios, simples y fáciles. ¿Por qué no suponer que esa caída se hace aumentando su velocidad de manera que esas adiciones de velocidad se hagan según la más sencilla de todas las propiedades posibles? El más simple de los crecimientos es aquél que se repite siempre de manera idéntica. Pero, hay aquí una grave elección. Vamos a considerar sucesivas adiciones de la velocidad a partir de cero, pues partimos del reposo, considerando —lo que hizo Galileo al comienzo y parecía lo más evidente— que esos incrementos de la velocidad se hacen en función del espacio que lleve recorrido el cuerpo que cae²⁷. Mas esa hipótesis conducía a cosas insostenibles. Por fin, Galileo entró en la consideración de que ese aumento de la velocidad depende del tiempo que haya transcurrido desde el instante en que la piedra inicia su caída. Podremos considerar así que, en un intervalo de tiempo que dividimos en partes iguales, en cada una de esas partes la velocidad se incrementa en una misma cantidad:

«No nos separaremos, por tanto, de la recta razón, si admitimos que la intensificación de la velocidad es proporcional a la extensión del tiempo; de esta manera, la definición del movimiento que vamos a tratar puede formularse como sigue: digo que un movimiento es igual o uniformemente acelerado cuando, partiendo del reposo, recibe en tiempos iguales momentos iguales de velocidad»²⁸.

Restan dificultades, sin embargo. Si un cuerpo parte del reposo, conforme tomemos en consideración instantes más cercanos al momento de la partida nos encontraremos con velocidades tan pequeñas que la piedra tardaría todo un día en recorrer un sólo palmo, lo que es contrario a nuestra experiencia sensible. Aquí Galileo, que se ha puesto la objeción en boca del aristotélico Salviati, se adentra en las dificultades de la definición de la aceleración como crecimiento de la velocidad: la velocidad es cero en el instante inicial de la caída, pero no así su crecimiento instantáneo, que es una cantidad constante. Hagamos una

25 Galileo, *Opere*, VIII, 107.

26 Galileo, *Opere*, VIII, 197. La palabra resultados —subrayada por mí— es clave en la consideración del método galileano. Será muy interesante leer W. L. Wisan, «Galileo's Scientific Method: a Reexamination», en R. E. Butts y J. C. Pitt (eds.), *New Perspectives on Galileo* (Dordrecht 1978), pp. 1-57.

27 Cf. carta a Paolo Sarpi de 1604, en Galileo, *Opere*, X, 115, también VIII, 203; léase A. Koyré, *Études galiléennes* (Paris 1966), 86-107 y 136-58.

28 Galileo, *Opere*, VIII, 189.

experiencia —tan evidente que tampoco es necesario realizar—, tomemos la percusión de un cuerpo que cae sobre una materia blanda. Cuando aumentamos su distancia de caída aumenta la huella. Si la dejamos caer desde distancias muy pequeñas la huella es muy pequeña o prácticamente desaparece, lo que prueba que la velocidad de caída entonces es casi nula.

«Pero, incluso sin constreñirnos a esta experiencia (la cual es, sin duda, totalmente concluyente), no me parece difícil establecer el mismo hecho por el sólo razonamiento. Tomemos una piedra y mantengámosla en el aire en reposo; quitando su soporte y quedando liberada, como es más pesada que el aire, cae hacia abajo, primero lentamente, luego acelerándose continuamente. Ahora bien, dado que la velocidad puede aumentar y disminuir hasta el infinito, ¿qué razón me hará creer que este móvil, que ha partido de una infinita lentitud (como lo es el reposo), adquirirá inmediatamente diez grados de velocidad mejor que cuatro, y cuatro mejor que dos, o uno o medio, o incluso una centésima de grado, y así sucesivamente para los más pequeños grados? Escúcheme bien. No creo que usted rechace el concederme que una piedra que cae desde el estado de reposo adquiera sus grados de velocidad en el orden en el cual esos mismos grados disminuirían y perderían si una fuerza motriz la recondujera hasta la misma altura; y aunque lo rehuse, no veo cómo la piedra, cuya velocidad disminuye y se consume en su totalidad en el curso de la ascensión, podría alcanzar el estado de reposo sin antes haber pasado por todos los grados sucesivos de lentitud»²⁹.

Es lo mismo dejar caer un cuerpo desde el reposo que hacerle ascender con un impulso idéntico que el que tenía en el instante de llegar al suelo, subirá ahora lo mismo que en el primer caso bajó.

¿Qué hemos descubierto? Lo que hoy esquemáticamente decimos así: $dv = a dt$, por donde $v = at$, pero, como sabemos que, para el espacio, $de = v dt$, podemos poner $de = at dt$, de ahí sabemos que $e = \frac{1}{2} at^2$. Así de sencillo. Mas Galileo desconocía el concepto de aceleración —¡lo estaba construyendo!— y el cálculo infinitesimal le costaba no menos esfuerzo que a Kepler —fueron Newton y Leibniz quienes nos lo inventaron—. Mas, a su manera, Galileo sabía todo lo que hay que saber de la ley de caída de los cuerpos.

En la jornada cuarta y última de sus *Dialoghi*³⁰ nos calcula Galileo las más extrañas trayectorias de los proyectiles a partir de este teorema: «un proyectil arrastrado por un movimiento compuesto de un movimiento uniforme horizontal y de un movimiento naturalmente acelerado hacia abajo, describe en el curso de su desplazamiento una trayectoria semi-parabólica». Nos adentramos ahora en los «resultados» de la experiencia.

Terminaré con algunas consideraciones en torno a lo que nos ha surgido con Kepler y con Galileo: la ciencia moderna. En primer lugar, el concepto de ley de la naturaleza que habremos de manejar en lo sucesivo tiene uno de sus más expresivos 'paradigmas' en la ley de las elipses. Antes se enunciaba una ley astronómica de principios intrín-

29 Galileo, *Opere*, VIII, 200.

30 Cf. Galileo, *Opere*, VIII, 268-313.

secamente sencillos: movimiento circular y uniforme. Era luego cuando debíamos correr tras las observaciones de la experiencia con toda clase de epiciclos y otras chanfainas sin terminar nunca de dar cuenta de aquellas observaciones, llegándose a reconstruir órbitas que sólo de manera vaga respondían a los pilares de sencillez de los que se había partido, y todo el mundo era consciente de esta 'falta de honestidad'. A partir de Kepler, la dificultad está intrínsecamente en la ley misma. En la aparente sencillez legal de la elipse hay problemas teóricos para los que se necesitaba la matemática más avanzada del momento. Las palabras con que se enuncia la ley son sencillas, pero 'elipse' encierra enormes dificultades, al menos por comparación a 'circulo y uniformidad'. Lo dicho es perfectamente unitario y cierto, ninguna duda cabe, pero luego la dificultad está en poner en práctica —práctica matemática— lo dicho. Antes, la sencilla ley se abría a mil y mil complicaciones. Ahora, en las entrañas mismas de la ley está la complicación, que sin ninguna dificultad se abre luego en clara y sencilla correlación con las observaciones experimentales.

Kepler, por otro lado, no era ningún experimentador. Hemos visto que él sabía de Marte lo que había tomado de las observaciones de Tycho Brahe. Lo que buscó fue la ordenación de todos los datos que poseía dentro de una teoría que diera cuenta de sus datos y de todos los datos futuros. Lo hacía con finura bastante —y con la certeza suficiente de llegar a buen término— para no quedarse tranquilo con aproximaciones, por convincentes que fueran para otros. Quería él la exactitud, que la teoría coincidiera con la experiencia, si se puede decir así. Buscó infatigablemente la teoría que respondiera a lo que buscaba. No hubiera podido llegar a resultados sin una pasión verdadera por la exactitud de su trabajo y sin disponer de unos conocimientos exhaustivos de lo que las matemáticas de entonces podían enseñarle. Tenía ante sus ojos un rompecabezas y sólo disponía para resolverlo de la capacidad ordenadora que le ofrecían sus conocimientos matemáticos.

Fijémosnos ahora en Galileo y en sus leyes, la de caída de los cuerpos y la de inercia. ¿Son fruto de un método experimental? Hay grandes discusiones sobre este punto y la respuesta, en todo caso, debería ser suficientemente larga —lo que no ocurre aquí— para ser válida. Sin embargo, tal como hemos visto las cosas, habría que responder que no. Nos encontramos, de nuevo, ante un esquema teórico que da como resultado la coincidencia con los datos tomados en la observación experimental. Pero, el esquema es lo suficientemente teórico para que digamos, con Galileo, que las piedras han de caer por alguna ley de enunciación sencillísima. Se hubiera podido optar por que las piedras cayeran por alguna rocambolesca ley, ¿nos hubieran hecho caso en este caso? ¿Se da razón de todo cuando se afirma que Galileo *descubrió* la ley de caída de los cuerpos? ¿Qué relación hay, pues, entre nuestra teoría y lo que las cosas son? ³¹.

31 «¿Qué es el Hombre para que pueda comprender el Mundo? ¿Y qué es el Mundo para que el Hombre pueda comprenderlo», tal como, aplicando al mundo lo que originalmente había sido dicho para el número, se pregunta Stephen Toulmin en *La comprensión humana*, vol. I, *El uso colectivo y la evolución de los conceptos* (Madrid 1977) p. 28.

A la vez, hay que afirmar con fuerza que la preparación físico-matemática y, al menos en el caso de Galileo, el tiempo gastado en observaciones y en la imaginación de hipótesis y de experimentos, es la condición «sine qua non» para que nuestros héroes puedan enunciar las leyes que dan origen a la ciencia física moderna. No eran unos primezcos en sus campos respectivos, conocían a la perfección todo lo que se había dicho en su día sobre los temas que trataban. Pero, con todo, lo que ellos dedujeron difícilmente puede decirse que lo sacaran, sin más, de la observación experimental.

¿Qué pensar, pues, del «hypotheses non fingo» que en 1713 diera Newton? Que es mentira. Que Kepler, Galileo y el mismo Newton imaginaron, fingieron, construyeron y buscaron tantas 'hipótesis' como pudieron. En el caso de Newton para sus 'hipótesis' reservó la palabra 'ciencia' y a las 'hipótesis' de sus enemigos cartesianos —y de Leibniz— las llamó 'hipótesis'. Sin embargo, ¿qué duda cabe?, Newton fue un gran experimentador: experimentaba para hacer hipótesis y hacía hipótesis para experimentar.

ALFONSO PEREZ DE LABORDA